E 3.4.2. Erzeugende Funktion

(nach T. Kuhn Skript)

VL

Behauptung: Eine Phasenraumtransformation ist kanonisch, falls gilt:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt}$$

mit einer beliebigen Funktion $F_1 = F_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$ (Typ F_1)

Beweis in zwei Schritten: wir zeigen

(i) F_1 definiert eindeutig die Transformation und $\tilde{H}$

(ii) die Transformation ist kanonisch

zu (i): einerseits gilt:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right)$$

andererseits gilt:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Vergleich liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} && (1) \\ \tilde{p}_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} && (2) \\ \tilde{H} &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} && (3) \end{aligned}}$$

V2

aus (1): $p_i = p_i\left(q_k, \tilde{q}_k, t\right)$, auflösen ergibt: $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i\left(q_k, p_k, t\right)$

aus (2): $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i\left(q_k, \tilde{q}_k, t\right) = \tilde{p}_i\left(q_k, \tilde{q}_k\left(q_j, p_j, t\right), t\right)$ & $q_i = q_i(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t)$

aus (3): $\tilde{H} = H\left(q_i\left(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t\right), p_i\left(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t\right), t\right) + \frac{\partial}{\partial t} F_1\left(q_i\left(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t\right), \tilde{q}_k, t\right)$

$\Rightarrow$ Transformation und $\tilde{H}$ sind eindeutig bestimmt

zu (ii): Beweis mit Hamiltonschem Prinzip:

für die Wirkung $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt \quad$ gilt

$\delta S = 0 \qquad$ mit $\qquad \delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0$

für transformierte Variablen gilt:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} \right) dt + F_1\left(q_i\left(t_2\right), \tilde{q}_i\left(t_2\right), t_2\right) - F_1\left(q_i\left(t_1\right), \tilde{q}_i\left(t_1\right), t_1\right)$$

Bei der Variation gilt $\delta q_i\left(t_1\right) = \delta q_i\left(t_2\right) = 0$, aber im allgemeinen

$$\delta \tilde{q}_i\Big|_{t_1,t_2} = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \underbrace{\cancel{\delta q_j}}_{=0} + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \delta p_j \right)\Bigg|_{t_1,t_2} = \sum_j \left(\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \delta p_j \right)\Bigg|_{t_1,t_2} \neq 0$$

und damit

$$\delta F_1\Big|_{t_1}^{t_2} = \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_j} \underbrace{\cancel{\delta q_j}}_{=0} - \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_j} \delta \tilde{q}_j \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \sum_j \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_j} \delta \tilde{q}_j \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

die Variation der Wirkung lautet dann:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\tilde{p}_i\, \delta \dot{\tilde{q}}_i + \dot{\tilde{q}}_i\, \delta \tilde{p}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \delta \tilde{p}_i \right) dt + \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \delta \tilde{q}_i \right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}$$

mit $\tilde{p}_i\, \delta \dot{\tilde{q}}_i = \frac{d}{dt}\left(\tilde{p}_i\, \delta \tilde{q}_i\right) - \dot{\tilde{p}}_i\, \delta \tilde{q}_i$ folgt:

$$\delta S = \sum_i \left(\tilde{p}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[-\left(\dot{\tilde{p}}_i + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \right) \delta \tilde{q}_i + \left(\dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \right) \delta \tilde{p}_i \right] dt$$

die Variation muss für beliebige $\delta \tilde{q}_i$, $\delta \tilde{p}_i$ verschwinden; daraus folgt:

$$\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \quad , \quad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} \quad , \quad \dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}$$

$\Rightarrow$ es gelten in den transformierten Koordinaten die Hamiltonschen Gleichungen, damit ist die Transformation kanonisch

$\rightarrow$ jede beliebige erzeugende Funktion $F_1 = F_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$ definiert eine kanonische Transformation

VL

alternative Formen der erzeugenden Funktionen ergeben sich durch Legendre-Transformationen:

(*) $$F_2(q_i, \tilde{p}_i, t) = F_1 - \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}\tilde{q}_i = F_1 + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i$$ Typ F2

$$F_3(p_i, \tilde{q}_i, t) = F_1 - \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i = F_1 - \sum_i p_i q_i$$

$$F_4(p_i, \tilde{p}_i, t) = F_1 - \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i}\tilde{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i \right) = F_1 + \sum_i (\tilde{p}_i \tilde{q}_i - p_i q_i)$$

die Transformationsformeln ergeben sich aus (s.o.)

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right)$$

z.B.:

$\frac{d}{dt}(*)$: $$\frac{dF_2}{dt} = \frac{dF_1}{dt} + \sum_i \left(\tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i \right)$$

$$= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right)$$

andererseits

$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \dot{\tilde{p}}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

und daraus:

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \quad \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \quad , \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

analog für die anderen beiden Formen F_3 und F_4

Beispiele: ↓ 11.6.

a) $$F_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = -\sum_i q_i \tilde{q}_i$$

(1) $$\Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = -\tilde{q}_i$$ (2): $$\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} = q_i$$

$\Longrightarrow$ Vertauschung Ort u. Impuls