Übungsblatt 6: (15 P.) **Abgabe: 29.06.15 bzw. 30.06.15**

Vorbetrachtung: Studieren Sie in **Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik, Springer** die Kapitel zur Poisson-Klammer (Kap. 2.4.2-2.4.5) und zur Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung (Kap. 3.1-3.5.2).

Aufgabe 1: Poisson-Klammer

Es seien

$$f(q_i, p_i, t), \qquad g(q_i, p_i, t), \qquad \text{und} \quad h(q_i, p_i, t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

beliebige Funktionen der Koordinaten q_i und der Impulse p_i sowie der Zeit. Zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten:

a) [1 P.]

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h$$

b) [1 P.]

$$\{f, g_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

c) [1 P.]

$$\{f, p_k\} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$$

Aufgabe 2: Kanonische Transformationen

a) [2 P.] Untersuchen Sie, ob die folgende Transformation $(x, y, p_x, p_y) \to (X, Y, P_x, P_y)$ kanonisch ist:

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y}{m\omega}\sin\lambda, \qquad y = Y\cos\lambda + \frac{P_x}{m\omega}\sin\lambda$$

,

$$p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x \cos\lambda, \qquad p_y = -m\omega X \sin\lambda + P_y \cos\lambda.$$

. **Hinweis:** Zwei mögliche Verfahren werden in **Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik, Springer, kap. 2.5.5.** diskutiert.

b) [1 P.] Geben Sie die Hamilton-Funktion

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

in den neuen Variablen (X, Y, P_x, P_y) an.

c) [2 P.] Benutzen Sie die erhaltene Hamilton-Funktion um die Bewegungsgleichungen für $x(t)$, $y(t)$ für den Fall $Y = 0$, $P_y = 0$ zu bestimmen.

Aufgabe 3: Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung für die Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential U auf, wobei

a) [2 P.]

$$U(x) = -F \cdot x \quad (F = konst.),$$
$$x(t = 0) = 0, \qquad \dot{x}(t = 0) = v,$$

b) [2 P.]

$$U(x) = \frac{mx^2}{2},$$
$$x(t=0) = 0, \qquad \dot{x}(t=0) = v,$$

c) [3 P.]

$$U(x,y) = \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2},$$
$$x(t=0) = 0, \qquad \dot{x}(t=0) = v, \quad y(t=0) = 0, \qquad \dot{y}(t=0) = v.$$

Lösen Sie das Bewegungsproblem mit den Anfangsbedingungen, die jeweils unter dem Potential gegeben sind. Betrachten Sie eine eindimensionale Bewegung in a) und b) und eine zweidimensionale Bewegung in c).

Hinweis: Nehmen Sie das Beispiel in **Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik, Springer, S. 198-200** als Muster.