Übungsblatt 3: (16 P.) **Abgabe: 18.05.15 bzw. 19.05.15**

Aufgabe 1: Wirkungsintegral

Betrachten Sie ein Elektron der Masse m, das sich unter dem Einfluss eines konstanten elektrischen Feldes E aus der Position $z(t=0)=Z$ bis auf $z(t=T)=-Z$ (im 1D Raum) bewegt. Nehmen Sie an, dass

$$z(\alpha,\gamma,t) = Z - \alpha\left(\frac{t}{T}\right)^{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad T = \sqrt{\frac{4Zm}{eE}} \quad \text{ist,}$$

gilt ($\gamma > 0$), und bestimmen Sie α und γ. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) [**1 P.**] Bestimmen Sie $\alpha = \alpha_0$, das mit den angegebenen Randbedingungen verträglich ist.

b) [**1 P.**] Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(z,\dot{z})$.

Hinweis: Die potentielle Energie eines Elektrons im elektrischen Feld ergibt sich zu: $U(z) = eE(z-Z)$, wobei e die Ladung des Elektrons ist.

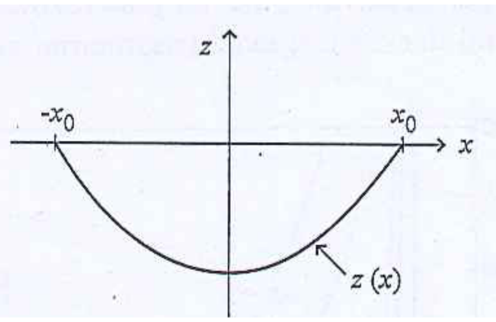
c) [**1 P.**] Bestimmen Sie für das angegebene $z(\alpha_0,\gamma,t)$ das Wirkungsintegral

$$S(\gamma) = \int_0^T L(z(\alpha_0,\gamma,t),\dot{z}(\alpha_0,\gamma,t))dt.$$

d) [**1 P.**] Bestimmen Sie $\gamma=\gamma_0$, für das $S(\gamma)$ extremal wird.

e) [**1 P.**] Überprüfen Sie (der Vollständigkeit halber), dass $z(\alpha_0,\gamma,t)$ nur für $\gamma=\gamma_0$ die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt.

Aufgabe 2: Hängendes Seil



Betrachten Sie ein Seil der Länge l_0 mit Längenmassendichte (d.h Masse pro Länge) ρ_0, das unter Einfluss der Gravitation zwischen zwei Aufhängepunkten hängt.

a) [**1 P.**] Begründen Sie, warum seine Länge durch

$$l \equiv \int_0^{x_0} f(z,z')dx = 2\int_0^{x_0}\sqrt{1+(z'(x))^2}dx$$

gegeben ist.

b) [**1 P.**] Begründen Sie, warum seine potentielle Energie durch

$$E \equiv \int_0^{x_0} h(z,z')dx = 2g\rho_0\int_0^{x_0}\sqrt{1+(z'(x))^2}z(x)dx$$

gegeben ist.

c) [**2 P.**] Das ruhig hängende Seil minimiert seine potentielle Energie unter der Nebenbedingungen $l=l_0$, indem es die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial z'} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)$$

löst (mit einem Lagrange-Multiplikator λ, der aus der Nebenbedingung $l=l_0$ resultiert). Zeigen Sie, dass daraus die Differentialgleichung

$$1 + z'^2 - \left(z - \frac{\lambda}{g\rho_0}\right)z'' = 0$$

folgt.

d) [1 P.] Zeigen Sie, dass die in c) angegebene Differentialgleichung durch

$$z(x) = \frac{\lambda}{g\rho_0} + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

für jedes a erfüllt wird.

Aufgabe 3: Zyklische Koordinaten

Der Massenpunkt bewegt sich under dem Einfluss des Feldes $U(x, y, z)$, wobei x, y, und z die kartesischen Koordinaten des Massenpunktes sind. Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, und bestimmen Sie die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für die folgenden Koordinatensysteme und Felder U. Bestimen Sie jeweils die entsprechenden zyklischen Koordinaten.

a) [2 P.] Zylinderkoordinaten r, φ, z: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$

$$U = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

b) [2 P.] Kugelkoordinaten r, φ, θ: $x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$

$$U = \frac{x^2 + y^2}{z^2}.$$

c) [2 P.] Parabelkoordinaten u, v, φ: $x = \sqrt{uv}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{uv}\sin\varphi, \quad z = (u - v)/2.$

$$U = x^2 + y^2 + 2z^2$$