Übungen zu Theoretische Ergänzungen zur Physik II, SoSe 2015

Prof. Dr. U. Thiele

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/menu/studium/aktuelles-semester/physik-ii-ss-2015.html

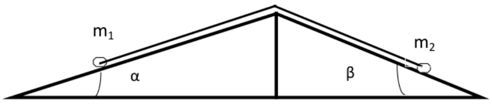
---

Übungsblatt 2: (15 P.) **Abgabe: 04.05.15 bzw. 05.05.15**

Aufgabe 1: Zwangsbedingungen und Lagrangian

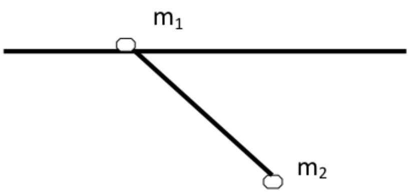
Benutzen Sie die Lagrange-Funktionen, die Sie in der Aufgabe 2 vom Übungsblatt 1 für folgende Systeme erhalten haben, um die entsprechenden Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu bestimmen (im 3-D Raum).

a) [2 P.]



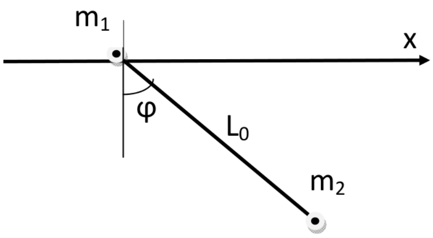
Zwei Massepunkte m_1 und m_2 an den Enden einer Schnur, die reibungsfrei auf zwei schiefen Schienen gleiten können.

b) [1 P.]



Eine Hantel (Länge L) aus zwei Massepunkten m_1 und m_2, von denen m_1 reibungsfrei auf einer Schiene gleitet.
Hinweis: Wenden Sie eine Taylor-Entwicklung um $L^{-1} = 0$ (d.h. $L \to \infty$) auf die kinetische und die potentielle Energie an, um die Bewegungsgleichungen zur führenden Ordnung in L^{-1} zu erhalten.

Aufgabe 2: Gleitende Hantel



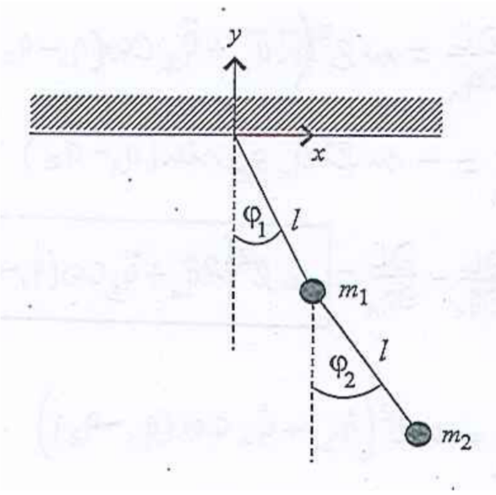
Betrachten Sie die Hantel (in der Skizze), die sich in der Zeichenebene bewegt. Die Hantel besteht aus zwei Massepunkten m_1 und m_2, von denen m_1 reibungsfrei auf einer Schiene gleitet. Stellen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten x (die Position des oberen Massenpunktes) und φ (siehe Skizze) auf. Bestimmen und lösen Sie die entsprechenden Lagrange'schen Bewegungsgleichungen.

a) [2 P.] Zeigen Sie, dass (bei kleinen Auslenkungswinkeln) das Pendel harmonische Schwingungen in der Zeichenebene ausführen kann, die aber an die Translation in x-Richtung gekoppelt sind. Bestimmen Sie die beiden auftretenden Bewegungsmoden.
Hinweis: Betrachten Sie dass $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ bei kleinen Auslenkungswinkeln.

b) [2 P.] Zeigen Sie, dass x zyklische Variable ist. Wie lautet der zugehörige Impuls? Zeigen Sie, dass er konstant ist, und dass sich daher der Schwerpunkt des Pendels mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt.

c) [2 P.] Welche Bewegung ergibt sich in a) für $m_1 \to \infty$?

Aufgabe 3: Ebenes Doppelpendel



a) **[2 P.]** Stellen Sie für das abgebildete Doppelpendel mit $m_1 = m_2 = m$ die Lagrange-Funktion in Abhängigkeit der Koordinaten $q_1 = \varphi_1$, $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1$, $q_2 = \varphi_2$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2$ auf. Das Pendel bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft.

b) **[2 P.]** Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und zeigen Sie, dass diese im Fall kleiner Auslenkungen ($\varphi \ll 1$) die Form

$$2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + 2\frac{q}{l}q_1 = 0$$

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + \frac{q}{l}q_2 = 0$$

annehmen.

c) **[2 P.]** Lösen Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen mit Hilfe des Ansatzes $q_j = A_j e^{i\omega t} \quad (j = 1, 2)$. Berechnen Sie die Schwingungsfrequenzen ω der beiden resultierenden Normalschwingungen.