1.2 Math: Gruppentheorie

Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ aus einer Menge G
Def.

und einer Verknüpfung $*$ die die folgenden Axiome erfüllt

- assoziativ: $\forall a, b \in G$ gilt
  $$(a*b)*c = a*(b*c)$$
- $\exists$ neutrales Element $e \in G$ mit $a*e = e*a = a$ $\forall a \in G$
- zu jedem $a \in G$ existiert ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

für Abelsche Gruppe gilt zusätzlich

$\forall a, b \in G$ gilt $a*b = b*a$ (Kommutativ)

Bsp. - Menge der ganzen Zahlen mit Addition ist abelsche Gruppe

- Menge der ganzen Zahlen mit Multiplikation ist keine Gruppe
- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ sind Gruppen
- Rotationen in 3d ~~ist~~ sind Gruppe $SO(3)$

Untergruppe

Ist $H \subset G$ und $(H, *)$ eine Gruppe (wie auch $(G, *)$), so nennt man $(H, *)$ eine Untergruppe von $(G, *)$

Physikalische Anwendungen

- Kristallographie (Einordng. d. Kristallstruktur in 230 mgl. Raumgruppen)
- Molekülphysik (Molekülsymmetrien, Vibrationsmoden)
- Bifurkationstheorie (nichtlin. Physik)
  Musterbildung
- Transformationen formen oft Gruppen
  (GT, LT)