4.4.3. Zusätzliche Betrachtungen zum relativistischen Stoss

[Vgl. auch Landau II. § 13]

- Erhaltung von Energie und Impuls (in belieb. System)

Vor Stoss   nach Stoss

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu \qquad (*)$$

$$\text{mit } p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad (\text{Kap. 3.3})$$

- Ableitung einiger Invarianzbeziehungen

$$(*) \rightarrow \quad p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu$$

| quadrieren i.e. Skalarprod. mit sich selbst

$$(p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu)(p_{1\mu} + p_{2\mu} - p'_{1\mu}) = p_2'^\mu p'_{2\mu}$$

da $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ ergibt sich

$$c^2 m_1^2 + \cancel{c^2 m_2^2} + \underline{p_1^\mu p_{2\mu}} - p_1^\mu p'_{1\mu} + \underline{p_2^\mu p_{1\mu}} - p_2^\mu p'_{1\mu}$$
$$- p_1'^\mu p_{1\mu} - \underline{p_1'^\mu p_{2\mu}} + c^2 m_1^2 = \cancel{c^2 m_2^2}$$

da $p_a^\mu p_{b\mu} = p_b^\mu p_{a\mu}$

$$\rightarrow \quad c^2 m_1^2 + p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{1\mu} - p_2^\mu p'_{1\mu} = 0 \qquad (**)$$

Analog $(*)$ $\quad p_1^\mu + p_2^\mu - p_2'^\mu = p_1'^\mu \qquad$ | quadrieren

gibt $\quad c^2 m_2^2 + p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{2\mu} - p_2^\mu p'_{2\mu} \qquad (***)$

- Betrachtung im Laborsystem
  (Teilchen 2 ruht vor Stoss)

→ $\vec{p}_2 = 0 \qquad E_2 = m_2 c^2$

→ Skalarprodukte in (**) sind

$$p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 m_2$$
$$p_2^\mu p'_{1\mu} = m_2 E'_1$$
$$p_1^\mu p'_{1\mu} = E_1 E'_1 / c^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1$$
$$= \frac{E_1 E'_1}{c^2} - |\vec{p}_1||\vec{p}'_1| \cos\psi$$

→ ψ wie zuvor, Streuwinkel des einfallenden Teilchens 1

- in (**)

$$\cos\psi = \frac{\frac{E_1 E'_1}{c^2} - c^2 m_1^2 - E_1 m_2 + m_2 E'_1}{|\vec{p}_1|\,|\vec{p}'_1|}$$

$$\cos\psi = \frac{E'_1(E_1 + m_2 c^2) - E_1 m_2 c^2 - c^4 m_1^2}{c^2 |\vec{p}_1||\vec{p}'_1|} \qquad (4)$$

- ähnlich aus (***)

$$\cos\xi = \frac{(E_1 + m_2 c^2)(E'_2 - m_2 c^2)}{c^2 |\vec{p}_1||\vec{p}'_2|} \qquad (5)$$

- (4) & (5) geben Zusammenhang der 2 Streuwinkel im Laborsystem mit Energieänderungen

→ Umkehrung (mit $|\vec{p}_1| = \sqrt{\frac{E_1^2}{c^2} - m_1^2 c^4}$ und $|\vec{p}'_2| = \sqrt{\frac{E_2'^2}{c^2} - m_2^2 c^4}$ in (5), & quadr.

$$E'_2 = m_2 c^2 \, \frac{(E_1 + m_2 c^2)^2 + (E_1^2 - m_1^2 c^4)\cos^2\xi}{(E_1 + m_2 c^2)^2 - (E_1^2 - m_1^2 c^4)\cos^2\xi} \qquad (6)$$

analog aus (4), Gl. für E'_1

- Spezialfall, masseloses einfallendes Teilchen (Photon)

$$m_1 = 0 \;\longrightarrow\; |\vec{p}_1| = \frac{E_1}{c}$$

$$|\vec{p}_1{}'| = \frac{E_1'}{c}$$

dann findet man aus (4)

$$\boxed{E_1' = \frac{m_2 c^2}{1 - \cos\psi + \frac{m_2 c^2}{E_1}}} \qquad (7)$$

- zurück zum allg. Fall, nun im Schwerpunktsystem mit "*"

  - $\vec{p}_1^{\,*} = -\vec{p}_2^{\,*} \equiv \vec{p}^{\,*}$
  - Impulse werden durch Stoß nur gedreht, ihre Beträge bleiben gleich
    $|\vec{p}_1^{\,*}| = |\vec{p}_1^{\,\prime *}| \quad |\vec{p}_2^{\,*}| = |\vec{p}_2^{\,\prime *}|$ $\rightarrow E_1^* = E_1'^*$, $E_2^* = E_2'^*$

    wie in klass. Fall
  - ϑ Streuwinkel im SP System (kennt man ϑ ist System vollständig bestimmt)

- nun: Energien $E_1'^*$, $E_2'^*$ als Fkt von ϑ

wie? Lorenztransf. zwi. Σ und Σ^*?

$\rightarrow$ mgl. aber kompliziert

Nutze Invarianz der Skalarprodukte $a^\mu b_\mu$!

- Gl. (**) in SP system

$$c^2 m_1^2 + p_1^{*\mu} p_{2\mu}^{*} - p_1^{*\mu} p_{1\mu}'^{*} - p_2^{*\mu} p_{1\mu}'^{*} = 0 \qquad (8)$$

mit

$$p_1^{*\mu} p_{1\mu}'^{*} = \frac{1}{c^2} E_1^* E_1'^* - \vec{p}_1^{\,*} \cdot \vec{p}_1^{\,\prime *}$$

$$= \frac{E_1^* E_1'^*}{c^2} - |\vec{p}_1^{\,*}||\vec{p}_1^{\,\prime *}| \cos\vartheta$$

$$= m_1^2 c^2 + |\vec{p}_1^{\,*}|^2 (1 - \cos\vartheta) \qquad (9)$$

- die anderen beiden Produkte in (8), wie zuvor im Laborsyst., d.h. Gl.

$$\underline{p_1^{*\mu} p_{2\mu}^{*}} = p_1^{\mu} p_{2\mu} = \underline{E_1 m_2} = \underbrace{E_1^* E_2^* - \vec{p}_1^{\,*} \cdot \vec{p}_2^{\,*}} \qquad (10)$$

$$\underline{p_2^{*\mu} p_{1\mu}^{\prime *}} = p_2^{\mu} p_{1\mu}^{\prime} = \underline{E_1^{\prime} m_2} = E_1^{\prime *} E_2^{*} - \vec{p}_1^{\,\prime *} \cdot \vec{p}_2^{\,*} \qquad (11)$$

— in (8)

$$\cancel{c^2 m_1^2} + E_1 m_2 - \cancel{c^2 m_1^2} - |\vec{p}_1^{\,*}|^2 (1 - \cos 2\vartheta) - E_1^{\prime} m_2 = 0$$

$$E_1^{\prime} - E_1 = \frac{|\vec{p}_1^{\,*}|^2}{m_2} (1 - \cos 2\vartheta) \qquad (12)$$

- aus (10)

$$\sqrt{m_1^2 c^4 + (\vec{p}_1^{\,*})^2 c^2} \sqrt{m_2^2 c^4 + (\vec{p}_2^{\,*})^2 c^2} = E_1 m_2 + \vec{p}_1^{\,*} \cdot \vec{p}_2^{\,*}$$

mit $\vec{p}_2^{\,*} = -\vec{p}_1^{\,*}$

$$\sqrt{(m_1^2 c^4 + (\vec{p}_1^{\,*})^2 c^2)(m_2^2 c^4 + (\vec{p}_1^{\,*})^2 c^2)} = E_1 m_2 + (\vec{p}_1^{\,*})^2$$

gibt für $|\vec{p}_1^{\,*}|$

$$(\vec{p}_1^{\,*})^2 = \frac{m_2^2 (E_1^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 E_1} \qquad (13)$$

[check ?]

- (13) in (12) gibt

$$E_1^{\prime} = E_1 - \frac{m_2 (E_1^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 E_1} (1 - \cos 2\vartheta) \qquad (14)$$

- mit Energieerhaltung $E_1 + m_2 c^2 = E_1^{\prime} + E_2^{\prime}$ wird (14) zu

$$E_2^{\prime} = m_2 c^2 + \underbrace{\frac{m_2 (E_1^2 - m_1^2 c^4)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2 m_2 E_1} (1 - \cos 2\vartheta)}_{\Delta E_2} \qquad (15)$$

ΔE_2: Energie die von Teilch 1 auf Teilchen 2 übertragen wird

ΔE_2 maximal für $\vartheta = \pi \Rightarrow \cos\vartheta = -1$

$$E'_{2max} - m_2c^2 = E_1 - E'_{1min} = \frac{2m_2(E_1^2 - m_1^2c^4)}{m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2m_2E_1}$$

$$\frac{\text{minimale kin. Energie von Teilch 1 nach Stoss}}{\text{kin. Energie von Teilch 1 vor Stoss}} =$$

$$= \frac{E'_{1min} - m_1c^2}{E_1 - m_1c^2} = \frac{(m_1 - m_2)^2c^2}{m_1^2c^2 + m_2^2c^2 + 2m_2E_1} \qquad (16)$$

- für $v \ll c$, d.h. $E \approx mc^2 + \frac{m}{2}v^2$

  wird (16)

$$\frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

[für große E_1 geht Verhältn. gegen Null]

und $E'_{1min} \to \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}c^2$ (check mit (16)

- Es sei $m_2 \gg m_1$, d.h. Masse bewegtes Teilchen (T_1) klein im Vergleich zu der des ruhenden (T_2)
  - in klass. Mechanik kann dann T_1 nur geringen Teil seiner Energie an T_2 geben (vgl. TE 4.4.)
  - gilt $\underset{(14)}{}$ nicht im relativistischen Fall

    Gl. (16) zeigt, dass für $E_1 \gtrsim m_2c^2$

    kann $\frac{E_1 - E'_{1min}}{E_1} = O(1)$ sein

$$(14) \to E'_{1min} = E_1\left(1 - \frac{\overbrace{\frac{E_1}{m_2c^2} - \frac{m_1}{m_2}\frac{m_1c^2}{E_1}}^{\text{klein}}}{\underbrace{1 + \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}_{\text{klein}} + 2\frac{E_1}{m_2c^2}}\right) \to E'_{1min} \ll E_1$$

if $E_1/m_2c^2 \to O(1)$