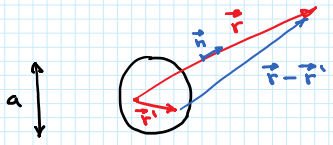
T 3.5 Strahlungsfeld einer räumlich ausgedehnten Quelle



$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Fernfeld $r \gg a, r'$

- $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}-\vec{r}')^2} = \sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + \vec{r}'^2}$

$$= r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{\vec{r}'^2}{r^2}}$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} r\left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right) \qquad (*)$$

$$\approx r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r} = r - \vec{n}\cdot\vec{r}' \qquad \text{mit } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

- $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \overset{\text{Taylor}}{\approx} \frac{1}{r}\,\frac{1}{1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}}$

$$\overset{\text{Taylor}}{\approx} \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2}\right) \approx \frac{1}{r} \qquad (**)$$

$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$

Damit

$$\vec{A}(\vec{r},t) \overset{(*)}{\underset{(**)}{\approx}} \frac{\mu}{4\pi r}\int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}\right) d^3r'$$

Def: $\dot{\vec{q}}_t\left(t - \frac{r}{c}, \vec{n}\right)$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi r}\,\dot{\vec{q}}_t\left(t - \frac{r}{c}, \vec{n}\right) \sim \frac{1}{r}$$

$\dot{\vec{q}}_{ret}$

vgl. Hertzscher Dipol T 3.4.
$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi r}\,\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$
Quelle punktförmig

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{c}\vec{n}\times\dot{\vec{A}} - \frac{1}{r}\vec{n}\times\vec{A} + (\vec{\nabla}\vec{n})\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\times\vec{A}$$

$1/r$ $\quad$ $1/r^2$ $\quad$ $1/r$ $\quad$ $1/r^2$

niedrigste Ordnung: $1/r$

Fernfeld $\vec{\nabla} \longrightarrow -\frac{\vec{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi r c}\,\ddot{\vec{q}}_{ret}\times\vec{n}$$

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{n}$$

in Analogie zum Hertzschen Dipol (*)

$$\vec{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{\mu_0}{c}\,\frac{\left(\ddot{\vec{q}}_t\times\vec{n}\right)^2}{r^2}\,\vec{n}$$

3.6. Multipolentwicklung des Fernfeldes

haben bisher: - Hertzscher Dipol (Nahzone, Intermediäre Zone, Fernzone)

- beliebige lokalisierte Ladungs-/Stromverteilung

→ Beziehg. abhängig von

$$\dot{\vec{q}}\left(t-\frac{r}{c},\vec{n}\right) = \int d^3r' \; \vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}\right) \qquad (*)$$

nun: dazugehörige Multipolentwicklung

Voraussetzung $\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c} \ll \tau$ charakteristische Zeit f. Stromdichte (1/Frequenz)

$\vec{j}(t) \sim e^{-i\omega t}$ $\quad \vec{j}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}\right) \sim e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)} e^{-i\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}}$

Entwicklung f. $\omega\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c} \ll 1$

$\frac{\omega a}{c} \ll 1$

$\frac{\omega a}{c} \sim \frac{a}{\tau c} \sim \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \tau \gg \frac{a}{c}$ $\qquad \lambda \gg a$

Laufzeit in der Quelle

Entw. von (*) nach $\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}$

$$\dot{\vec{q}} = \int \vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{c}\right) d^3r' \overset{\text{Taylor}}{\approx} \underbrace{\int \vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{r}{c}\right) d^3r'}_{\text{Änderung des elektr. Dipolmoments } \dot{\vec{p}}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \left(\frac{\vec{r}'\cdot\vec{n}}{c}\right) \vec{j}\left(\vec{r}', t-\frac{r}{c}\right) d^3r'}_{O\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \qquad (**)$$

$$\int (\vec{n}\cdot\vec{r}')\,\vec{j}\; d^3r = \frac{1}{2}\int \left[(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{j} - (\vec{n}\cdot\vec{j})\vec{r}'\right] d^3r' + \frac{1}{2}\int \left[(\vec{n}\cdot\vec{r}')\vec{j} + (\vec{n}\cdot\vec{j})\vec{r}'\right] d^3r'$$

"Addieren einer Null"

$$\overset{\text{Grassmann}}{=} -\vec{n}\times\underbrace{\frac{1}{2}\int (\vec{r}'\times\vec{j})\, d^3r'}_{\vec{m}\text{ magnet. Dipolmoment}} + \vec{n}\cdot\underbrace{\int \left[\vec{r}'\vec{j} + \vec{j}\vec{r}'\right] d^3r'}_{\frac{1}{3}\dot{\vec{Q}}}$$

Änderung des elektr. Quadrupolmoments

damit wird (**)

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{p}} - \frac{1}{c}\vec{n}\times\dot{\vec{m}} + \frac{1}{6c}\vec{n}\cdot\ddot{\vec{Q}} + O\left(\frac{a^2}{\lambda^2}\right)$$

in (*) [Kap. 3.5]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c}\left(\ddot{\vec{q}}\times\vec{n}\right)$$

$$\rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\ddot{\vec{p}}\times\vec{n} + \frac{1}{c}\underbrace{\left(\ddot{\vec{m}}\times\vec{n}\right)}_{\perp\vec{n}}\times\vec{n} + \frac{1}{6c}\left(\vec{n}\cdot\dddot{\vec{Q}}\right)\times\vec{n} + O\left(\frac{a^2}{\lambda^2}\right)\right] \qquad (***)$$

elektr. Dipol $\quad$ magn. Dipol $\quad$ elektr. Quadrupol

$$\vec{E} = c\vec{B}\times\vec{n}$$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[(\ddot{\vec{p}}\times\vec{n})\times\vec{n} - \underbrace{\frac{1}{c}\ddot{\vec{m}}\times\vec{n} + \frac{1}{6c}\left(\vec{n}\cdot\dddot{\tilde{\underline{D}}}\times\vec{n}\right)\times\vec{n}}_{O\left(\frac{a}{\lambda^2}\right)} + O\left(\frac{a^2}{\lambda^2}\right)\right]$$

$O\left(\frac{a}{\lambda}\right)$

- Vgl. mit Phy. 2 (T 8.6 und Tg.4)

– $\vec{p} = \int \varrho\,\vec{r}'\,d^3r'$ elektr. Dipolmoment

$\dot{\vec{p}} = \int \dot{\varrho}\,\vec{r}'\,d^3r' \overset{\text{Kontinuitäts-gleichg.}}{=} -\int(\vec{\nabla}_{r'}\cdot\vec{j})\,\vec{r}'\,d^3r'$

$\overset{\text{P.I.}}{=} \int \vec{j}\cdot\underbrace{(\vec{\nabla}_{r'}\vec{r}')}_{=1}\,d^3r' + \text{Oberflächenterme}$ $\to 0$ da endliche Stromverteilg.

$\dot{\vec{p}} = \int \vec{j}\,d^3r'$ wie oben eingeführt

– $\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}\,d^3r'$ magn. Dipolmoment (selbe Form wie Tg.4. Phy2)

– elektr. Quadrupolmoment (Phy2, T 8.6)
(hier Indexschreibweise)

$$D_{ik} = \int \varrho\,[3r_i'r_k' - \delta_{ik}(r')^2]\,d^3r'$$

$$D_{ik} = \tilde{D}_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}(\mathrm{Sp}\,\tilde{D}_{ik}) \quad \text{mit } \tilde{D}_{ik} = 3\int \varrho\,r_i'r_k'\,d^3r'$$

D, $\tilde{D}$ alternative Definitionsweisen: $\tilde{\underline{D}}$ hat Spur $\neq 0$ (i.A.)
$\underline{D}$ hat Spur $= 0$

$\dot{\tilde{D}}_{ik} = 3\int \dot{\varrho}\,r_i'r_k'\,d^3r' \overset{\text{Kont.gl.}}{=} -\int\underbrace{\left(\sum_l \frac{\partial}{\partial r_l'}j_l\right)}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}} r_i'r_k'\,d^3r'$

$\overset{\text{P.I.}}{=} 3\int \sum_l j_l\frac{\partial}{\partial r_l'}(r_i'r_k')\,d^3r' + \text{Oberflächenterm}$ $\to 0$ da $\vec{j}=0$ für $r\to\infty$

Damit $\left(\frac{\partial}{\partial r_i'}r_i' = \delta_{li}\right)$

$$\dot{\tilde{D}}_{ik} = 3\int [j_ir_k' + j_kr_i']\,d^3r'$$

d.h. $\dot{\tilde{\underline{D}}} = 3\int [\vec{j}\vec{r}' + \vec{r}'\vec{j}]\,d^3r'$ wie oben eingeführt

$$\dot{\underline{D}} = \dot{\tilde{\underline{D}}} + \frac{1}{3}\underline{I}(\mathrm{Sp}\,\dot{\tilde{\underline{D}}})$$

Einfluss auf Felder?

$\vec{B} \sim \ddot{\vec{q}}_{rel}\times\vec{n}$

enthält Term $\sim (\vec{n}\cdot\dddot{\tilde{\underline{D}}})\times\vec{n} = (\vec{n}\cdot\ddot{\underline{D}})\times\vec{n} + \underbrace{(\vec{n}\cdot\underline{I})\times\vec{n}}_{=0}(\mathrm{Sp}\,\ddot{\tilde{\underline{D}}})$

enthält Term $\sim (\vec{n}\cdot\dddot{\underline{D}})\times\vec{n} = (\vec{n}\cdot\dddot{\underline{D}})\times\vec{n} + \underbrace{(\vec{n}\cdot\underline{I})\times\vec{n}}_{\vec{n}\times\vec{n}=0}\,(\mathrm{Sp}\,\ddot{\underline{D}})$

$= (\vec{n}\cdot\dddot{\underline{D}})\times\vec{n}$

Konsequenzen von (***)

- gleichförmig gegeneinander bewegte Ladungen emittieren keine Strahlung $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0\right)$
- beim Stoss identischer Teilchen entsteht keine elektrische Dipolstrahlung (*) → Strahlung ist $O\left(\frac{a}{\lambda}\right)$

(*) $\vec{p}^{*}$ ← SP system $= \int \varrho\vec{r}^{*}\,d\vec{r}^{*} = q\vec{r}_1^{*} + q\vec{r}_2$

$\vec{r}_2^{*} = -\vec{r}_1^{*}$ (Masse gleich)

im SP system $\ddot{\vec{p}}^{*} = \vec{0}$

→ im Laborsyst. $\ddot{\vec{p}} = \vec{0}$

Größenordnungsbetrachtung -

Felder d. elektr. Quadrupols u. magn. Dipols sind um $\frac{a}{\lambda}$ kleiner als die des elektr. Dipols

→ Energieabstrahlung el. Quadrup. / magn. Dipol ist um $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ kleiner als die des elektr. Dipols

Atom $a \approx 10^{-3} - 10^{-10}$ m

Licht $\lambda \approx 0.5\cdot 10^{-6}$ m

→ $\frac{a}{\lambda} \approx 10^{-2} - 10^{-3}$ $\qquad \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \approx 10^{-4} - 10^{-6}$

wenn elektr. Dipolmom. = 0 → verbotener Übergang (keine Dipolstrahlung)

→ Lebensdauer um 10^5 länger

3.7. Strahlungsbremsung - (Landau 2, §75)

ein geladenes Teilchen, Position $\vec{a}(t)$

$\vec{v} = \dot{\vec{a}}$ $\qquad a = v\tau$ $\qquad \tau$ typ. Zeit

$\frac{v}{c} \ll 1$ nicht relativistisch

Grundgrößen

$$\varrho = q\,\delta(\vec{r} - \vec{a}(t))$$
$$\vec{j} = \vec{v}q\,\delta(\vec{r} - \vec{a}(t))$$

$$\vec{p} = \int \varrho\vec{r}'\,d^3r' = q\vec{a}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}'\times\vec{j}\,d^3r' = \frac{1}{2}q\,\vec{a}\times\vec{v}$$

$$\dddot{\underline{D}} = 3\int(\vec{r}'\vec{j} + \vec{j}\vec{r}')\,d^3r' = 3q(\vec{a}\vec{v} + \vec{v}\vec{a})$$

Größenordnungen in $\frac{\dot{q}}{q}$ (Kap 3.6)

$O(|\vec{p}|) \sim qa$ $\qquad O\left(\frac{|\dot{\vec{m}}|}{c}\right) \sim \frac{qav}{c}$

$$O\left(\frac{\ddot{\vec{p}}_z}{c}\right) \sim \frac{qa v}{c}$$

$$\frac{O\left(\frac{\dot{\vec{m}}\vec{v}}{c}\right)}{O(\dot{\vec{p}}_1)} \sim \frac{v}{c} << 1$$

$$\frac{O\left(\frac{\ddot{\vec{p}}_1}{c}\right)}{O(\dot{\vec{p}}_1)} \sim \frac{v}{c} << 1$$

Strahlung nichtrelativ. Teilchen ist näherungsweise elektr. Dipolstrahlung

- Leistung Hertzscher Dipol

$$N = \frac{\mu_0}{6\pi c}\ddot{\vec{p}}^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{\vec{v}}^2 = \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} > 0 \qquad (*)$$

Beschleunigung → Abstrahlung → Abbremsung

$$\Delta W_{em} = \int N\,dt = -\Delta W_{mech} = -\int \vec{F}_s \cdot \vec{v}\,dt$$

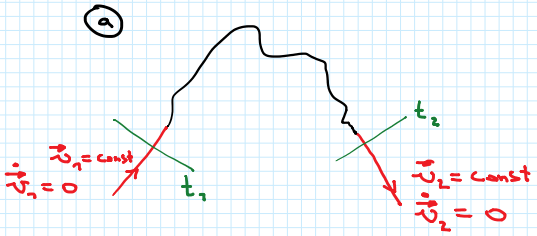
(*): $N = \alpha \dot{\vec{v}}^2$ ← alle Vorfaktoren

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}^2\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \frac{d\dot{\vec{v}}}{dt}\,dt \overset{P.I.}{=} -\int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\,dt + \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Delta W_{em} = \alpha\, \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\Big|_{t_1}^{t_2} - \alpha \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_s \cdot \vec{v}\,dt = -\Delta W_{mech}$$

- Spezifizieren der Geometrie

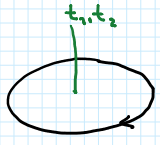
ⓐ



$$\rightarrow \dot{\vec{v}}(t_1) = \dot{\vec{v}}(t_2) = 0$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_s \cdot \vec{v}\,dt = \alpha \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\,dt \qquad (**)$$

ⓑ periodische Bahn



$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$
$\dot{\vec{v}}_1 = \dot{\vec{v}}_2$

→ kein Beitrag von Randtermen
→ (**) gilt

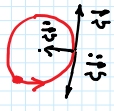
→ Vermutung $\boxed{\vec{F}_s = \alpha \dot{\vec{v}}}$

■1

$\vec{x} = \vec{a}_0 \cos \omega t$
$\vec{v} = -\omega \vec{a}_0 \sin \omega t$
$\dot{\vec{v}} = -\omega^2 \vec{x}_0 \sin \omega t \qquad \vec{v}_0 = -\omega \vec{a}_0$

$\vec{v}(t)$
Kraft wirkt gegen $\vec{v}(t)$

■2



$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ (vgl. Phy 1)
$\ddot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \dot{\vec{v}}$

Stabilität von Kreisbahnen?

(Widerspruch zwischen "Teilchenatommodell" und Elektrodynamik

■3 Freies Teilchen

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_s = \alpha \dddot{\vec{r}}$
$m\dot{\vec{v}} = \alpha \ddot{\vec{v}}$

$\dot{\vec{v}} = 0$
$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{\frac{m}{\alpha}t}$ → Selbstbeschleunigung

phys. sinnlos

W! zu Vernachläß. des Randterms der part. Integration

3.8. Wellenleiter und Hohlraumresonatoren

[cf. Kap. 34 Exp. Teils]

3.8.1. Einleitg. -

Ausbreitung e/m Wellen in Gebieten mit metallischen Randflächen (ideale Leite)

- e/m Felder verschwinden im Leite
- Oberflächenladungen und -ströme können existieren

RB für Felder (Phy 2)

$\vec{n} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ $\quad$ NormalKomp.

$\vec{n} \times \vec{E} = 0$ $\quad \vec{n} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ $\quad$ TangentialKomp.

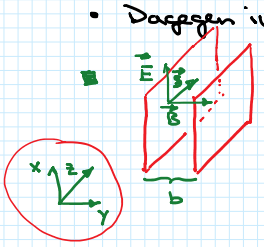
↳ $\vec{n} \parallel \vec{E}$ $\quad$ $\vec{E}$ - feld normal gerichtet

$\vec{n} \perp \vec{B}$ $\quad$ $\vec{B}$ - feld tangential ~

- Nichtideale Leite
  - Felder können eindringen, werden gedämpft
  - Eindringtiefe $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_L \omega \tilde{\sigma}}}$ $\quad \tilde{\sigma}$ Leitfähigkeit, μ_L .. μ im Leite

- Ausbreitg. e/m Wellen im Vakuum (in alle Richtungen unbegrenzt)
  - ebene Wellen sind transverse Wellen
  - $\vec{E}, \vec{B}$ $\perp$ auf der Ausbreitungsrichtung $\vec{s}$

- Dagegen im Wellenleite (begrenztes Gebiet)



- 2 parallele Platten
- $\vec{s}$ hier $\parallel \vec{e}_z$, jedoch kann $\vec{s}$ auch anders gerichtet sein → viele Reflexionen

  - TEM ... Transverse elektromagnetische Wellen ($E_z = B_z = 0$)

  - TE Welle ... Transverse elektrische Welle
    $\vec{E}$ hat keine Komponente $\parallel \vec{e}_z$ (parallel zum Wellenleite) ($E_z = 0$)

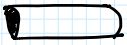
  - TM Welle ... Transvere magn. Welle ($B_z = 0$)

3.8.2. Maxwell Gl. im Hohl- / Wellenleiten

- Hohlzylinder, hohles Rechtecksprofil sind Hohlleite

- Hohlzylinder, hohles Rechteckprofil sind Hohlleiter

- abgeschlossene Hohlleiter sind Hohlraumresonatoren



- Annahme ideal leitender Randflächen, im Inneren Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$)
- Annahme harmonische Zeitabhängigkeit der Felder

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$
$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

damit $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

→ Maxwellgl. im Inneren des Wellenleiters

(I) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ $\quad (\rho = 0)$

(II) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

(III) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$

(IV) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\omega\mu\epsilon \vec{E}$ $\quad (\vec{j} = 0)$

damit ist die Wellengl.

$$\boxed{\begin{aligned} (\Delta + \omega^2 \mu\epsilon)\, \vec{E} &= 0 \\ (\Delta + \omega^2 \mu\epsilon)\, \vec{B} &= 0 \end{aligned}} \qquad (*)$$

- Separation transversaler und longitudinaler Komponenten

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(x,y)\, e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

(freie Welle in z-Richtg., da keine Ränder in z)

$$= \vec{E}_t + \vec{E}_z$$

mit $\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{E}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(x,y)\, e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$
$$= \vec{B}_t + \vec{B}_z \qquad \vec{B}_t = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

- Einsetzen in Wellengleichg. (*)
(hier f. $\vec{E}$, $\vec{B}$ ist analog)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \epsilon\mu \right) \vec{E} = 0$$

Δ_t transversaler Laplaceoperator $\quad \Delta_t = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\left[\Delta_t + (\omega^2 \epsilon\mu - \kappa^2) \right] \vec{E} = 0$$

- Transv. u. longitudinale Anteile in MW Gl.

(III) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(**)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t\right)_z = \vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t\right) = i\omega B_z$$

$$\vec{\nabla}_t = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2. Rechng. MW(III) $\times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↗ in der Form (**)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}_t E_z - \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial z} = i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t$$

Ähnlich für andere MW Gl.

$\Longrightarrow$ Insgesamt MW Gl

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad \Rightarrow \quad i\kappa \vec{E}_t + i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z \qquad (1)$$

$$\vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t\right) = i\omega B_z \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i\omega\mu\varepsilon \vec{E} \Rightarrow \quad i\kappa \vec{B}_t - i\omega\mu\varepsilon \vec{e}_z \times \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t B_z \qquad (3)$$

$$\vec{e}_z \cdot \left(\vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t\right) = -i\omega\mu\varepsilon E_z \qquad (4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = -i\kappa E_z \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = -i\kappa B_z \qquad (6)$$

(*)

d.h. die transversalen Komponenten werden durch die longitudinalen ~ bestimmt (siehe T. 3.8.3. T. 3.8.4.)

↗ E_z, B_z

T 3.8.3. Berechnung der TEM Welle

Ausgangspunkt (*) (1)–(6) MW Gl. in transv. / longit. Komponenten

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_z = \vec{E}(x,y)\, e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_z = \vec{B}(x,y)\, e^{\pm i\kappa z - i\omega t}$$

für harmonische Zeitabhängigkeit gilt 2d Wellengleichung in der Form

$$\left[\Delta_t + (\omega^2\mu\varepsilon - \kappa^2)\right] \vec{E}(x,y) = 0 \qquad (**)$$

für harmonische Zeitabhängigkeit gilt 2d Wellengleichung in der Form

$$\left[\Delta_t + (\omega^2\mu\varepsilon - \kappa^2)\right]\vec{E}(x,y) = 0 \qquad (**)$$
$$\left[\quad\sim\quad\right]\vec{B}(x,y) = 0 \qquad \text{Helmholtzgl.}$$

$$\Delta_t = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

TEM Welle

$E_z = 0$, $B_z = 0$

- Elektr. Feld $\vec{E} = \vec{E}_t \equiv \vec{E}_{TEM}$

  mit (*) (2) u. (5)

  $$\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_{TEM} = 0 \qquad (***)$$
  $$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_{TEM} = 0 \qquad (4)$$

  mit (Grassm.) $\vec{\nabla}_t \times (\vec{\nabla}_t \times \vec{a}) = \vec{\nabla}_t (\vec{\nabla}_t \cdot \vec{a}) - \Delta_t \vec{a}$ erhält man

  $$\Delta_t \vec{E}_{TEM} = 0 \qquad \leftarrow \vec{\nabla}_t \times (***) \text{ , Vertauschung von (4)}$$

  Vergleich mit (**) ergibt $\kappa^2 = \mu\varepsilon\omega^2$

  bzw. $\kappa = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\omega = \frac{\omega}{c}$

  d.h. übliche Dispersionsrelation [$\omega(\kappa)$ oder $\kappa(\omega)$] planarer ebener e/m Wellen

- Magn. Feld , mit (*) (3)

  $$\vec{B}_{TEM} = \frac{\omega}{\kappa}\mu\varepsilon\,\vec{e}_z \times \vec{E}_{TEM}$$

  d.h. $\vec{B}_{TEM} \perp \vec{E}_{TEM}$

- RB in x,y Richtg durch idealen Leiter bestimmt

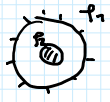
  (d.h. Lsg. von $\Delta_t \vec{E} = 0$ in verschiedenen Geometrien → E-Statik, Phy2)

  - Randflächen sind Äquipotentialflächen
  - Hohlzylinder : elektr. Feld verschwindet im Inneren (siehe Phy2)

    TEM Wellen können sich nicht ausbreiten

  - es geht aber in nicht zusammenhängenden Topologien

    ■ Koaxialkabel oder Doppelleitung



3.8.4 Berechnung der TM und TE Wellen

MW Gl. (*) (2), (3), (6)

(A) TM Wellen

$B_z = 0$ $\qquad E_z \neq 0$

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) = 0 \qquad (2')$$

$$\vec{B}_t = \frac{\omega}{\kappa}\mu\varepsilon\,\vec{e}_z \times \vec{E}_t \qquad (3')$$

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t) = 0 \qquad (2')$$

$$\vec{B}_t = \frac{\omega}{\kappa} \mu\varepsilon \, \vec{e}_z \times \vec{E}_t \qquad (3')$$

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t = 0 \qquad (6')$$

- Umschreiben $\vec{B}$ in $\vec{H}$ in (3') gibt

$$\vec{H}_t = \frac{\omega\varepsilon}{\kappa} \vec{e}_z \times \vec{E}_t = \frac{1}{Z} \vec{e}_z \times \vec{E}_t$$

$$Z = \frac{\kappa}{\omega\varepsilon} \quad \text{"Wellenwiderstand"}$$

- Zusammenhang zw. transv. und longitud. Komponenten aus Gl. (*) (1)

$$i\kappa \vec{E}_t + i\omega \vec{e}_z \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t \Psi \quad \text{mit} \quad \Psi = E_z$$

mit (3)', Grassmann 3d.

$$i\kappa \vec{E}_t - i\frac{\omega^2}{\kappa} \mu\varepsilon \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t \Psi \qquad | \cdot i\kappa$$

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{E}_t = 0)$$

$$-\kappa^2 \vec{E}_t + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E}_t = i\kappa \vec{\nabla}_t \Psi$$

$$\underbrace{(\omega^2 \mu\varepsilon - \kappa^2)}_{\gamma^2} \vec{E}_t = i\kappa \vec{\nabla}_t \Psi$$

$$\rightarrow \quad \vec{E}_t = \frac{i\kappa}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t \Psi$$

Einsetzen in (*) (5)

$$\boxed{(\Delta_t + \gamma^2) \Psi = 0}$$

Wieder (räuml. Anteil) 2dim Wellengl. $\hat{=}$ Helmholtzgl. für Ψ

Randbedingungen: an Leiteroberfläche $E_z = \Psi = 0$

$\rightarrow$ $\gamma^2 \hat{=}$ Eigenwerte d. 2d Laplaceoperators in bestimmten Geometrien $\hat{=}$ Problem d. schwingenden Membran mit festgehaltenen Rändern

Zusammenfassg.:

$$E_z = \Psi \qquad \vec{E}_t = \frac{i\kappa}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t \Psi$$

$$H_z = 0 \qquad \vec{H}_t = \frac{\omega\varepsilon}{\kappa} \vec{e}_z \times \vec{E}_t$$

$$(\Delta_t + \gamma^2)\Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \Psi|_{\text{Rand}} = 0$$

gibt $\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$ für bekanntes Ψ

Löse Helmh. gl. wie in T. 1

(B) Anwendung auf TE Wellen (ähnl. Rechng.)

Zusammenfassg.

$$H_z = \Psi \qquad \vec{H}_t = \frac{i\kappa}{\gamma^2} \vec{\nabla}_t \Psi$$

$$E_z = 0 \qquad \vec{E}_t = -\frac{\omega\mu}{\kappa} \vec{e}_z \times \vec{H}_t$$

$$(\Delta_t + \gamma^2)\Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}\Big|_{\text{Rand}} = 0$$

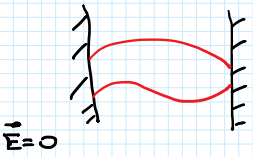
Normalenabl.

$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$$

Schlussfolgerung: TE u. TM Wellen können sich (auch in einfach zusammenhängenden Topologien) ausbreiten. Sie müssen aber der Wellengl. und den RB genügen

- Eigenwertberechnung der Wellengl. $(\Delta_t + \gamma^2)\Psi = 0$
  - Welle $\hat{=}$ oszillierende Lsg.
    $\rightarrow \gamma^2 \geq 0$ (sonst Dämpfung)
  - Eigenwerte γ_λ (definieren die Eigenmoden) abhängig von Geometrie
    $(\gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \kappa^2)$
    $\rightarrow \kappa_\lambda^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \gamma_\lambda^2$ wobei γ_λ den numerischen Eigenwerten aus der Helmh. Gl. entsprechen (diskretes Spektrum)

Illustration



Felder müssen auf dem Rand Knoten haben
$\rightarrow$ diskrete Eigenwerte

rechteckiger Querschnitt

Phy 3, Kap T.1 $\rightarrow \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \gamma_{mn}^2$

mit $m,n = 0,1,2,3,\ldots$ (nicht $m=n=0$)

- Es gibt Grenzfrequenz bei der κ^2 negativ wird
  $\kappa_\lambda = 0 \Rightarrow \omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$\kappa_\lambda = \sqrt{\varepsilon\mu}\left(\omega^2 - \omega_\lambda^2\right)^{1/2} \quad (*)$$

nur für $\omega > \omega_\lambda$ Wellenausbreitung (sonst gedämpft)

Praxis: Aus den diskreten Eigenfrequenzen ω_λ soll möglichst nur eine realisierbar sein, d.h. man muss die Dimension des Leiters an die zu leitende Wellenlänge anpassen.

- Ausbreitungsgeschwindigkeiten
  - Phasengeschwindigkeit

$$v_p = \frac{\omega}{\kappa_\lambda} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2}} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$$

Bei der Grenzfrequenz $\omega = \omega_\lambda$ geht $v_p \rightarrow \infty$, danach ist v_p imaginär, d.h. Wellen können sich nicht mehr ausbreiten

  - Gruppengeschwindigkeit (Signalausbreitungsgeschw.)

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\kappa}$$

allg. für beliebige Dispersionsrelationen

hier $k_x = \sqrt{\varepsilon_r \mu}\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}$ (*)

$$\rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_x^2}{\varepsilon_r \mu} + \omega_\lambda^2}$$

$$\frac{d\omega}{dk_x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_x^2}{\varepsilon_r \mu} + \omega_\lambda^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2k_x}{\varepsilon_r \mu}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_\lambda^2}}{\omega} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_\lambda}{\omega}\right)^2} \leq c$$

Bem: - $v_p \cdot v_{gr} = c^2$

- für $\omega \to \omega_\lambda \Rightarrow v_{gr} \to 0$ "slow light"

- TE, TM Wellen können als ebene Wellen dargestellt werden

  $\rightarrow \hat{=}$ Überlagerung 2er ebener Wellen die an den leitenden Wänden reflektiert werden