

Blatt 12**Aufgabe 1: Korteweg-de Vries Gleichung**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die KdV-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (1)$$

auf $x \in [-L, L]$ mit

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2(x),$$

und

$$u(-L, t) = u(L, t).$$

a) Untersuchen Sie die Gleichung

$$u_t = -u_{xxx}.$$

Die hier benutzte Diskretisierung ergibt ($u_i^j := u(x_i, t_j)$)

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \left(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j \right).$$

Führen Sie für diesen Algorithmus die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch. Zeigen Sie, dass die folgende Stabilitätsbedingung gilt:

$$\Delta t \leq \frac{1}{m} \Delta x^3, \quad m = \max |\sin(2k \Delta x) - 2 \sin(k, \Delta x)| \approx 2.6.$$

b) Lösen Sie nun die Gl. (1) mit

Space interval	$L = 22$
Space discretization step	$\Delta x = 0.11$
Time discretization step	$\Delta t = 0.0005$
Amount of time steps	$T = 10$