Blatt 1

Aufgabe 1: Stabilität des expliziten Euler-Verfahrens

Betrachten Sie nun das nichlineare Anfangswertproblem

$$\frac{d\,x}{d\,t} = t - x^2, \qquad x(0) = x_0\,. \tag{1}$$

Lösen Sie die Gleichung (1) mit Hilfe vom expliziten Euler-Verfahren im Intervall $t \in [0,\, T]$ mit der Schrittweite h.
a) $T = 9$, $h = 0.05$, $x_0 = \{-0.7,\, 0.0,\, 1.0,\, 3.0\}$;

b) $T = 900$, $h = 0.05$, $x_0 = 0$;

c) $T = 900$, $h = 0.025$, $x_0 = 0$;

Interpretieren Sie das Ergebniss.

Aufgabe 2: Das Heun-Verfahren

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, \\ \dot{y} &= -\omega^2\, x\,, \qquad x(0) = 0\,, \quad y(0) = v_0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

auf dem Intervall $t \in [0,\, T]$.

a) Das erste Integrall der Bewegung für Gl. (2) ist gegeben durch

$$I_1 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\,.$$

Zeichnen Sie die Phasenraumtrajektorien für verschiedene Werte von I_1 sowie das Vektorfeld.

Betrachten Sie nun den Fall $\omega = 1$, $v_0 = 1$ und berechnen Sie im Intervall $t \in [0,\, 20\pi]$ die Nährungslösungen

a) nach der Methode von Euler mit $h = \{0.05,\, 0.025,\, 0.001\}$;

b) nach der Methode von Heun mit $h = 0.05$.

Interpretieren Sie die Ergebnisse.