

Blatt 8

Aufgabe 1: Advektionsgleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale Advektionsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0.\end{aligned}\tag{1}$$

mit der Geschwindigkeit $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Die analytische Lösung ist $u(x, t) = u_0(x - ct)$. Lösen Sie Gl. (1) für $c = 0.5$ auf dem Intervall $x \in [0, 10]$

a) mit dem „Upwind“-Verfahren und periodischen Randbedingungen. Die Anfangsbedingung ist

$$u(x, 0) = u_0 = \exp(-(x - 5)^2).$$

Führen Sie die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch.

b) mit dem Verfahren von Lax und periodischen Randbedingungen. Die Anfangsbedingung ist

$$u_0 = \exp(-10(x - 2)^2).$$

Führen Sie die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch.

c) mit dem Lax-Wendroff Verfahren und periodischen Randbedingungen. Die Anfangsbedingung ist

$$u_0 = \exp(-10(x - 2)^2).$$

Führen Sie die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch.