

Blatt 4

Aufgabe 1: Pohlsches Rad

Betrachtet wird die Bewegungsgleichung für das angetriebene, gedämpfte, nichtlineare Drehpendel

$$J \ddot{\varphi} + K \dot{\varphi} + D \varphi - N \sin(\varphi) = \hat{F} \sin(\omega t),$$

wobei φ die Auslenkung des Rades beschreibt. J ist Trägheitsmoment, D ist die Direktionskonstante der Spiralfeder, K ist die Dämpfungskonstante, \hat{F} und $\omega/2\pi$ stehen für die Amplitude und die Frequenz der Anregung. Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit dem klassischen RK4 Verfahren für

- a) $\omega = 2.5$ (Periode 1); b) $\omega = 2.32$ (Periode 2);
- c) $\omega = 2.3$ (Periode 4); d) $\omega = 2.25$ (Chaos);

Stellen Sie eine Return-Map für jeden der Fälle a)–d) auf, indem Sie Maxima $\varphi_{max}(n)$ (oder Minima) der Schwingung bestimmen und $\varphi_{max}(n+1)$ gegen $\varphi_{max}(n)$ auftragen.

Parameter:

$$\frac{K}{J} = 0.799, \quad \frac{D}{J} = 9.44, \quad \frac{N}{J} = 14.68, \quad \frac{\hat{F}}{J} = 2.1.$$

Aufgabe 2: Lorenz–System

Betrachten Sie das Lorenz-System von drei gekoppelten, nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= r x - y - x z, \\ \dot{z} &= x y - b z.\end{aligned}$$

$\sigma > 0$ ist die Prandtl Zahl, $b > 0$ ist ein Maß für die Zellengeometrie und $r > 0$ ist die sog. relative Rayleighzahl, die als Kontrollparameter verwendet wird. Lösen Sie das Lorenz-System mit dem klassischen RK4 Verfahren für

- a) $r = 0.5$, b) $r = 3$, c) $r = 16$, d) $r = 25$.

Stellen Sie eine Lorenz-Map für den Fall d) auf, indem Sie Maxima $z_{max}(n)$ der Funktion $z(t)$ bestimmen und $z_{max}(n+1)$ gegen $z_{max}(n)$ auftragen.

Parameter: $\sigma = 10$, $b = 8/3$.