Blatt 10

Aufgabe 1: Sine-Gordon-Gleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die sine-Gordon-Gleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,, \tag{1}$$

auf $x \in [-L,\, L]$ mit

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x)\,, \tag{2}$$

und

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pm\, L} = 0\,.$$

`Space interval`	L=20
`Space discretization step`	$\triangle x = 0.1$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.05$
`Amount of time steps`	$T = 1800$
`Velocity of the kink`	$c = 0.2$

Lösen Sie Gl. (1) numerisch mit Hilfe der expliziten Methode.

a) Kink-Soliton

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,\arctan\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right), \\ g(x) &= -2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right). \end{aligned}$$

b) Antikink-Soliton

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\arctan\left(\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right), \\ g(x) &= -2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right). \end{aligned}$$

c) Kink-Kink-Kollision

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,\arctan\left(\exp\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right) + 4\,\arctan\left(\exp\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right), \\ g(x) &= -2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right) + 2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right), \end{aligned}$$

d) Kink-Antikink-Kollision

$$\begin{aligned} f(x) &= 4\,\arctan\left(\exp\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right) + 4\,\arctan\left(\exp\left(-\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right), \\ g(x) &= -2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right) - 2\,\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right). \end{aligned}$$

e) Breather

$$\begin{aligned} f(x) &= 0\,, \\ g(x) &= 4\,\sqrt{1-c^2}\,\operatorname{sech}\left(x\,\sqrt{1-c^2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Korteweg-de Vries Gleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die KdV-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\,, \tag{3}$$

auf $x \in [-L,\, L]$ mit

$$u(x,0) = -6\,\operatorname{sech}^2(x)\,,$$

und

$$u(-L,\, t) = u(L,\, t)\,.$$

a) Untersuchen Sie die Gleichung

$$u_t = -u_{xxx}\,.$$

Die hier benutzte Diskretisierung ergibt ($u_i^j := u(x_i,\, t_j)$)

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} - \frac{\triangle t}{\triangle x^3}\left(u_{i+2}^j - 2\,u_{i+1}^j + 2\,u_{i-1}^j - u_{i-2}^j\right).$$

Führen Sie für diesen Algorithmus die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch. Zeigen Sie, dass die folgende Stabilitätsbedingung gilt:

$$\triangle t \leq \frac{1}{m}\,\triangle x^3\,, \qquad m = \max\left|\sin(2\,k\,\triangle x) - 2\,\sin(k,\,\triangle x)\right| \approx 2.6\,.$$

b) Lösen Sie nun die Gl. (3) mit

`Space interval`	$L = 22$
`Space discretization step`	$\triangle x = 0.11$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.0005$
`Amount of time steps`	$T = 10$