Blatt 2

Aufgabe 1: Das Heun-Verfahren

Betrachten Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\,, \\ \dot{y} &= -\omega^2\, x\,, \qquad x(0)=0\,, \quad y(0)=v_0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

auf dem Intervall $t \in [0,\, T]$.

a) Das erste Integrall der Bewegung für Gl. (1) ist gegeben durch

$$I_1 = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\,.$$

Zeichnen Sie die Phasenraumtrajektorien für verschiedene Werte von I_1 sowie das Vektorfeld.

Betrachten Sie nun den Fall $\omega = 1$, $v_0 = 1$ und berechnen Sie im Intervall $t \in [0,\, 20\pi]$ die Nährungslösungen

a) nach der Methode von Euler mit der Schrittweite $h = 0.05$;

b) nach der Methode von Heun mit $h = 0.05$.

Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 2: Wettbewerbsmodell

Betrachten Sie ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(b - x - cy), \\ \dot{y} &= dy(e - y - fx), \end{aligned} \tag{2}$$

das die Konkurenz von zwei Populationen $x(t)$ und $y(t)$ um die gleiche beschränkte Ressource beschreibt.

Lösen Sie das Gleichungssystem (2) mit Hilfe von dem vier-stufigen Runge-Kutta Verfahren. Interpretieren Sie das Ergebniss.

Konstanten: $a = 0.004$, $b = 50$, $c = 0.75$, $d = 0.001$, $e = 100$, $f = 3$.