

**Blatt 9**

**Aufgabe 1: Eindimensionale Wellengleichung für eine schwingende Saite**

Lösen Sie eine eindimensionale Wellengleichung:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{auf } x \in [0, L], \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

für  $c = 1$  mit Hilfe der expliziten Methode mit

$$u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0,$$

und

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(n\pi x/L), \quad \text{and } u_t(x, 0) = g(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 6.$$

Space interval	L=1
Space discretization step	$\Delta x = 0.01$
Time discretization step	$\Delta t = 0.0025$
Amount of time steps	T = 2000

**Aufgabe 2: Sine-Gordon-Gleichung**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die sine-Gordon-Gleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \tag{2}$$

auf  $x \in [-L, L]$  mit

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \tag{3}$$

und

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm L} = 0.$$

Space interval	L=20
Space discretization step	$\Delta x = 0.1$
Time discretization step	$\Delta t = 0.05$
Amount of time steps	T = 1800
Velocity of the kink	c = 0.2

Lösen Sie Gl. (2) numerisch mit Hilfe der expliziten Methode.

a) Kink-Soliton

$$f(x) = 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right),$$

$$g(x) = -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right).$$

b) Antikink-Soliton

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \arctan \left( \exp \left( -\frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right), \\ g(x) &= -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{x}{\sqrt{1-c^2}} \right). \end{aligned}$$

c) Kink-Kink-Kollision

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \arctan \left( \exp \left( \frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right) + 4 \arctan \left( \exp \left( \frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right), \\ g(x) &= -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) + 2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right), \end{aligned}$$

d) Kink-Antikink-Kollision

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \arctan \left( \exp \left( \frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right) + 4 \arctan \left( \exp \left( -\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) \right), \\ g(x) &= -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right) - 2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}} \right). \end{aligned}$$

e) Breather

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ g(x) &= 4 \sqrt{1-c^2} \operatorname{sech} \left( x \sqrt{1-c^2} \right). \end{aligned}$$

### Aufgabe 3: Korteweg-de Vries Gleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die KdV-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (4)$$

auf  $x \in [-L, L]$  mit

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2(x),$$

und

$$u(-L, t) = u(L, t).$$

Lösen Sie die Gl. (4) mit

Space interval	$L = 22$
Space discretization step	$\Delta x = 0.11$
Time discretization step	$\Delta t = 0.0005$
Amount of time steps	$T = 10$