Blatt 8

Aufgabe 1: Nichtviskose Burgersgleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale nichtviskose Burgersgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Lösen Sie Gl. (1) mit Hilfe der Methode der Charakteristiken;

b) Lösen Sie Gl. (1) numerisch mit Hilfe des Upwind- oder Lax-Wendroff-Verfahrens.

`Space interval`	L=10
`Initial condition`	$u_0(x) = \exp(-(x-3)^2)$
`Space discretization step`	$\triangle x = 0.05$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.05$
`Amount of time steps`	$T = 36$

Betrachten Sie nun das Riemann Problem, d.h. die Gl. (1) mit der folgenden Anfangs-Diskontinuität bei $x = L/2$:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < L/2\,, \\ u_r, & x \geq L/2\,. \end{cases}$$

c) Lösen Sie das Riemann-Problem numerisch mit Hilfe des Upwind- oder Lax-Wendroff-Verfahrens für $u_l = 0.8$, $u_r = 0.2$.

d) Lösen Sie das Riemann-Problem numerisch mit Hilfe des Upwind- oder Lax-Wendroff Verfahrens für $u_l = 0.2$, $u_r = 0.8$.

Aufgabe 2: Eindimensionale Wellengleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale Wellengleichung:

$$u_{tt} = 4\,u_{xx} \quad \text{auf} \quad x \in [0,\, L]\,, \qquad t \in [0, T] \tag{2}$$

mit

$$u(0,\, t) = 0 \qquad u(L,\, t) = 0\,,$$

und

$$u(x,0) = f(x) = \sin(\pi x)\,, \quad \text{and} \quad u_t(x,0) = g(x) = 0\,.$$

a) Lösen Sie Gl. (2) numerisch mit Hilfe der expliziten Methode. Führen Sie erst die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch.

`Space interval`	L=10
`Space discretization step`	$\triangle x = 0.1$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.05$
`Amount of time steps`	$T = 20$

b) Lösen Sie nun Gl. (2) mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x) = 0 \quad \text{and} \quad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\, x_1], \\ g_0, & x \in [x_1,\, x_2], \\ 0, & x \in [x_2,\, L]\,. \end{cases}$$

`Initial velocity`	g_0=0.5
`Initial space intervals`	$x_1 = L/4,\ x_2 = 3L/4$
`Space interval`	L=10
`Space discretization step`	$\triangle x = 0.1$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.05$
`Amount of time steps`	$T = 400$