## Aufgabe 1: Korteweg-de-Vries-Gleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die eindimensionale Korteweg-de-Vries-Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6\,u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{1}$$

mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens auf dem Grundgebiet $x \in [-\pi,\, \pi]$ mit 256 Gitterpunkten. Benutzen Sie das "Integrating Factor" -Verfahren zusammen mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung für die Zeitintegration. Die Anfangsbedingung ist

$$u(x,0) = \frac{c_1^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{c_1\,(x+2)}{2}\right) + \frac{c_2^2}{2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{c_2\,(x+1)}{2}\right)$$

mit $c_1 = 5$ und $c_2 = 4$.

## Aufgabe 2: Advektionsgleichung in 2D

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine zweidimensionale Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + c_x\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + c_y\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} = 0,$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y)$$

mit der Geschwindigkeit $c_x > 0$, $c_y > 0$, $x \times y \in [0,\, 2\pi] \times [0,\, 2\pi]$ und periodischen Randbedingungen.
Die analytische Lösung ist $u(x,y,t) = u_0(x - c_x t, y - c_y t)$.
Die Anfangsfunktion $u_0(x,y)$ ist gegeben durch

$$u_0(x) = \exp\left(-2\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\pi\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2\right).$$

Für die Zeitintegration benutzen Sie ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung.

Zur Erstellung der nötigen Arrays bietet sich die funktion `meshgrid` an, die aus zwei eindimensionalen Arrays zwei zweidimensionale Arrays erstellt, die den eindimensionalen Arrays fortgesetzt in die zweite Dimension entsprechen:

```
kx, ky = np.meshgrid(np.fft.fftfreq(Nx,Lx/(Nx*2.0*np.pi)),
                                 np.fft.fftfreq(Ny,Ly/(Ny*2.0*np.pi)))
```