

# **Zweidimensionale Turbulenz im Instantonformalismus**

**Die Dynamik der inversen Kaskade**

Als Diplomarbeit vorgelegt von  
**KAJ KOLJA KLEINEBERG**

16. Mai 2012

Westfälische Wilhelms-Universität Münster





# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen der Hydrodynamik</b>	<b>3</b>
2.1 Navier-Stokes Gleichungen . . . . .	3
2.1.1 Grundgleichungen Newton'scher Fluide . . . . .	3
2.1.2 Zwei Beispiele für Randbedingungen . . . . .	4
2.1.3 Ähnlichkeitsprinzip und Reynolds-Zahl . . . . .	4
2.1.4 Poisson-Gleichung für den Druck . . . . .	5
2.1.5 Nichtlinearität und Nichtlokalität der Navier-Stokes Gleichungen .	5
2.2 Wirbeltransportgleichung . . . . .	5
2.2.1 Wirbelstärke und Wirbeltransportgleichung . . . . .	5
2.2.2 Wirbelstreckungsterm . . . . .	6
2.2.3 Biot-Savart Gesetz . . . . .	6
2.2.4 Zweidimensionaler Sonderfall . . . . .	7
2.3 Punktwirbel . . . . .	7
2.3.1 Punktwirbelansatz . . . . .	7
2.3.2 Spezialfall zweier Punktwirbel . . . . .	8
2.4 Lagrange'sche Beschreibung . . . . .	9
2.4.1 Mitbewegter Beobachter . . . . .	9
2.4.2 Lagrange'sche Geschwindigkeit und Wirbelstärke . . . . .	10
2.5 Statistische Hydrodynamik . . . . .	11
2.5.1 Determinismus und Chaos . . . . .	11
2.5.2 Ensemble und Zeitmittel: Ergodenhypothese . . . . .	11
2.6 Charakteristische Skalen turbulenter Strömungen . . . . .	11
2.6.1 Die Richardson Kaskade . . . . .	11
2.6.2 Lokale Energiedissipationsrate . . . . .	12
2.6.3 Geschwindigkeitsautokorrelation . . . . .	12
2.6.4 Integrale Länge . . . . .	13
2.6.5 Kolmogorov'sche Skalen . . . . .	13
2.6.6 Taylor Skala . . . . .	13
2.7 Energiespektrum . . . . .	14
2.7.1 Kinetische Energie . . . . .	14
2.7.2 Spektrale Energiedichte . . . . .	14
2.7.3 Inertialbereich . . . . .	15
2.7.4 K-41 Theorie . . . . .	15

2.7.5	Inverse Kaskade zweidimensionaler Turbulenz . . . . .	16
2.8	Stochastische Beschreibung . . . . .	17
2.8.1	Markov Eigenschaft . . . . .	17
2.8.2	Fokker-Planck Gleichung . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Martin-Siggia-Rose Formalismus</b>	<b>19</b>
3.1	Einführung . . . . .	19
3.1.1	Stochastisches System . . . . .	19
3.1.2	Charakteristische Funktion . . . . .	22
3.2	Instantonapproximation und Instantongleichungen . . . . .	25
3.2.1	Sattelpunktapproximation . . . . .	25
3.2.2	Variation nach dem Wirbelfeld . . . . .	26
3.2.3	Variation nach dem Hilfsfeld . . . . .	29
3.2.4	Instantongleichungen in einem mitbewegten Bezugssystem . . . . .	30
3.3	Zusammenfassung . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Punktwirbellösung der Instantongleichungen</b>	<b>33</b>
4.1	Instantongleichungen als Punktwirbelsystem . . . . .	33
4.2	Punktwirbelansatz für das Hilfsfeld . . . . .	34
4.3	Das Wirbelfeld im Lagrange'schen Bezugssystem . . . . .	35
4.4	Zwei Punktwirbel . . . . .	36
4.4.1	Wirbel gleicher Zirkulation . . . . .	38
4.4.2	Wirbel entgegengesetzter Zirkulation . . . . .	39
4.5	Zusammenfassung . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Modellierung durch elliptische Wirbel</b>	<b>43</b>
5.1	Modell elliptischer Wirbel . . . . .	43
5.1.1	Wirkung und Ansatz im Fourieraum . . . . .	44
5.2	Annahmen und Approximationen . . . . .	45
5.3	Berechnung der Evolutionsgleichungen elliptischer Wirbel . . . . .	45
5.3.1	Bewegungsgleichungen für das Wirbelfeld . . . . .	45
5.3.2	Bewegungsgleichungen für das Hilfsfeld . . . . .	48
5.4	Ableitung der Gleichungen aus einem Variationsverfahren . . . . .	50
5.4.1	Die Wirkung elliptischer Wirbel . . . . .	50
5.4.2	Gleichungen für das Wirbelfeld aus den Euler-Lagrange Gleichungen	52
5.4.3	Gleichungen für das Hilfsfeld aus den Euler-Lagrange Gleichungen	56
5.5	Zusammenfassung und Interpretation der Gleichungen . . . . .	60
5.6	Näherung für Advektion und Deformation . . . . .	62
5.7	Iteratives Verfahren zur numerischen Lösung . . . . .	63
5.8	Phänomenologie des Modells . . . . .	66
5.9	Explizite Berechnung für zwei Wirbel . . . . .	67
5.9.1	Anfangsbedingungen . . . . .	67
5.9.2	Explizite Iterationsschritte . . . . .	67

5.9.3	Parameter . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Statistik im Instantonformalismus</b>	<b>77</b>
6.1	Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit für elliptische Wirbel . . . . .	77
6.1.1	Verbindung von Statistik und Dynamik . . . . .	77
6.1.2	Übergangswahrscheinlichkeit . . . . .	78
6.2	Zusammenfassung . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Rotor Approximation</b>	<b>85</b>
7.1	Idee . . . . .	85
7.2	Rotor Approximation elliptischer Wirbel . . . . .	85
7.3	Evaluation des Modells . . . . .	87
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>93</b>
A.1	Pfadintegrale . . . . .	93
A.1.1	Die Idee . . . . .	93
A.1.2	Mathematische Formulierung . . . . .	94
A.1.3	Pfadintegraldarstellung am Beispiel des freien Skalarfeldes . . . . .	96
A.2	Funktionalableitung . . . . .	97
A.3	Instantongleichungen in einem mitbewegten Bezugssystem . . . . .	97
A.4	Euler-Lagrange Gleichungen . . . . .	99
A.4.1	Eine Funktion und eine Variable . . . . .	99
A.4.2	Mehrere Funktionen und mehrere Variablen . . . . .	100
A.5	Wirkung und Instantongleichungen im Fourierraum . . . . .	101
A.6	Berechnung der Deformation . . . . .	102
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>107</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>113</b>



# 1 Einleitung

Obwohl die Grundgleichungen der Hydrodynamik bereits seit dem 18ten Jahrhundert bekannt sind, ist eine zufriedenstellende theoretische Beschreibung turbulenter Strömungen bis heute nicht gelungen. Zwar haben sich die Möglichkeiten für numerische Simulationen erheblich verbessert, was signifikant zum Verständnis von Turbulenz beigetragen hat, jedoch mangelt es an Kenntnis der fundamentalen Dynamik. Ziel dieser Arbeit ist es, aus einem modernen Zugang zur Thematik ab-inito ein dynamisches Modell aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik abzuleiten, welches den spannenden Prozess der inversen Kaskade zweidimensionaler Turbulenz widerspiegelt.

Turbulente Phänomene lassen sich im Alltag regelmäßig beobachten. Sie treten immer dann auf, wenn Fluide, also Gase oder Flüssigkeiten, aufeinander treffen oder mit relativ großer Geschwindigkeit um feste Gegenstände strömen. Ein sehr bekanntes Beispiel ist der Rauch einer Zigarette, der sich mit der ihn umgebenden Luft vermischt. Dabei bilden sich komplexe Strukturen, die wiederum ähnliche, kleinere Substrukturen enthalten. Dies wird als Skaleninvarianz bezeichnet und ist Ausdruck der Selbstähnlichkeit turbulenter Strömungen. Wenn man einen Teil des Zigarettenrauchs ausschneidet und vergrößert, lassen sich die dann auftretenden Strukturen nicht von den ursprünglichen unterscheiden. Weitere Beispiele für das Auftreten von Turbulenz in unserer alltäglichen Wahrnehmung sind Kerzenflammen, die scheinbar chaotische Bewegungen und Zuckungen durchführen, oder turbulente Strömungen in der Erdatmosphäre, die zu teilweise skurrilen Wolkenformationen führen. Auch außerhalb der Erde spielt Turbulenz eine entscheidende Rolle, z.B. bei der Bildung von Galaxien oder auf der Oberfläche des Jupiters.

Das Spektrum der technischen Anwendungen und Problemstellungen, bei denen turbulente Strömungen eine essenzielle Rolle spielen, umfasst jegliche Mischungsvorgänge, z.B. bei Verbrennungsmotoren sowie Bewegungen von Autos, Flugzeugen oder Schiffen. Das Auftreten turbulenter Strömungen von Luft oder Wasser um die Konturen der Fahrzeuge führt vor allem bei höheren Geschwindigkeiten zu erheblichen Strömungswiderständen. Turbulente Strömungen treten an Windkraftwerken und Schornsteinen auf, die von Winden umströmt werden und können im schlimmsten Fall zum Einsturz führen. So werden z.B. Gruppen von Kühltürmen im Windkanal simuliert, bevor sie gebaut werden, um zu starke Strömungen zu vermeiden. Charakteristisch für turbulente Strömungen ist eine Verstärkung des Transports von Impuls und Wärme sowie eine Erhöhung der Durchmischung.

Diese Arbeit widmet sich hauptsächlich zweidimensionaler Turbulenz. Diese tritt in der Natur jedoch nur näherungsweise auf, z.B. in Schichten der Erdatmosphäre mit verhältnismäßig geringer Dicke, die sich nicht mit den benachbarten Schichten vermischen. Obwohl sich nur die Dimensionalität des Raumes unterscheidet, ist die Phänomenologie



**Abbildung 1.1:** Wirbelschleppen eines Flugzeuges auf einem Foto der Nasa. Quelle: <http://lisar.larc.nasa.gov/UTILS/info.cgi?id=EL-1996-00130>

zweidimensionaler Turbulenz deutlich von der dreidimensionalen verschieden. Im zweidimensionalen Fall kommt es zur sogenannten inversen Kaskade, was bedeutet, dass sich viele kleine Wirbelstrukturen mit gleichen Zirkulationen zu größeren Strukturen gruppieren. Diesen Prozess kann man sich so vorstellen, als würde man vom Boden aus eine Vielzahl kleiner Tornados beobachten, von denen sich einige im und andere gegen den Uhrzeigersinn drehen. Im Laufe der Zeit werden nun die Tornados mit gleichem Drehsinn dazu neigen, sich zu größeren Tornados zu vereinigen, die sich dann in entsprechender Richtung drehen. Dabei sei die Höhe der Tornados irrelevant und soll für die Dynamik keine Rolle spielen.

Die theoretische Beschreibung von Fluiden geschieht über die Navier-Stokes Gleichungen, die für den Druck und die drei Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes insgesamt vier nichtlokale, nichtlineare Differentialgleichungen enthalten und somit ein geschlossenes Gleichungssystem darstellen. Bereits Bussinesq und Reynolds stellten fest, dass eine deterministische Lösung dieser Gleichungen unter Berücksichtigung aller im Fluid enthaltenen Teilchen aufgrund der extrem hohen Anzahl von Freiheitsgraden unmöglich und auch nicht notwendig ist. Vielmehr ist man an statistischen Größen interessiert, wie z.B. dem mittleren Geschwindigkeitsfeld. Basierend auf der Beobachtung der Skaleninvarianz voll entwickelter Turbulenz entwickelte A. N. Kolmogorov 1941 eine phänomenologische Theorie (K-41), die die wesentlichen Aspekte turbulenter Strömungen bereits sehr gut beschreibt (siehe z.B. [1]). Vergleichbare phänomenologische Modelle spielen immer noch eine wichtige Rolle, z.B. bei Large-Eddy Simulationen, bei denen numerisch Wirbel auf großen Skalen simuliert werden und der Energietransport zu kleineren Skalen durch geeignete Modelle, z.B. eine effektive Wirbelviskosität, approximiert wird.

## 2 Grundlagen der Hydrodynamik

In diesem Kapitel werden einige Grundlagen zweidimensionaler und dreidimensionaler Turbulenz erklärt und wichtige Gleichungen erläutert. Für eine weiterführende Diskussion siehe z.B. [2] und [3]. Einen guten Überblick über die Entwicklungen bei der Beschreibung zweidimensionaler Turbulenz ist in einem Übersichtsartikel von Boffetta und Eckel [4] oder Tabeling [5] zu finden. Für eine detaillierte Einführung in das Gebiet der Turbulenz empfehle ich dem Leser das Buch *Turbulent Flows* von S.B. Pope [6] und *Non-equilibrium Statistical Mechanics and Turbulence* von J. Cardy, G. Falkovich und K. Gawedzki [7].

### 2.1 Navier-Stokes Gleichungen

#### 2.1.1 Grundgleichungen Newton'scher Fluide

Die Navier-Stokes Gleichungen folgen aus den Newton'schen Axiomen mit der Impulsdichte  $\varrho(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und einer Kontinuitätsgleichung für die Dichte  $\varrho(\mathbf{x}, t)$ . Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  beschreibt die Geschwindigkeit der Strömung zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$ . Für die homogene Dichte  $\varrho(\mathbf{x}, t) = \varrho$  gilt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Gleichung (2.1) beschreibt die Divergenz- bzw. Quellfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes. Für inkompressive newtonsche Fluide gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

Dabei ist  $p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t)/\varrho$  der auf die Dichte normalisierte Druck und  $\nu = \eta/\varrho$  die kinematische Viskosität. Die kinematische Viskosität ist der Quotient aus der dynamischen Viskosität  $\eta$  und der homogenen Dichte  $\varrho$ .  $\mathbf{f}$  ist die Summe aller externen Kräfte dividiert durch die Dichte.

Gleichungen (2.1) und (2.2) ergeben insgesamt vier partielle, nichtlineare, nichtlokale, gekoppelte Differentialgleichungen und liefern bei vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) &= 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\delta V} &= \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)|_{\delta V} \end{aligned} \quad (2.3)$$

eine vollständige Beschreibung der zugrundeliegenden Strömung. Mathematisch ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Navier-Stokes Gleichungen für den allgemeinen Fall noch nicht bewiesen. Direkte numerische Simulationen zeigen jedoch eine sehr gute Übereinstimmung mit Experimenten, sodass angenommen werden kann, dass die Navier-Stokes Gleichung eine geeignete Beschreibung turbulenter Fluide liefert.

Sowohl der Begriff Navier-Stokes Gleichung als auch Navier-Stokes Gleichungen wird häufig verwendet. Der Plural deutet auf die Einschließung der Inkompressibilitätsbedingung hin. Wir verwenden beide Ausdrücke äquivalent.

### 2.1.2 Zwei Beispiele für Randbedingungen

Wir betrachten im Folgenden ein Fluid in einem Würfel der Kantenlänge  $L$ . Es ist intuitiv, die Wände des Würfels für das Fluid undurchdringlich zu gestalten, d.h. wir erlauben keinen Fluss durch die Oberfläche, was zur Bedingung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\delta V} = 0 \quad (2.4)$$

führt. Diese Bedingung reicht jedoch noch nicht, um die Randbedingungen eindeutig festzulegen, da  $\mathbf{u}$  am Rand frei in der Ebene parallel zur Gefäßwand gewählt werden kann. Daher fordert man

$$\mathbf{n} \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\delta V} = 0. \quad (2.5)$$

Gleichung (2.4) und (2.5) definieren dann die *no-slip Randbedingungen*.

In numerischen Simulationen ist es oft vorteilhaft, *periodische Randbedingungen* zu wählen. Man fordert:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \sum_i k_i \mathbf{e}_i L, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.6)$$

mit  $k_i \in \mathbb{Z}$  und  $i = 1, 2, 3$  für einen dreidimensionalen Raum.  $\mathbf{e}_i$  bezeichnet den  $i$ -ten Einheitsvektor. Das physikalische System wiederholt sich dann unendlich oft.

### 2.1.3 Ähnlichkeitsprinzip und Reynolds-Zahl

Wir definieren die Reynolds-Zahl (Reynolds, 1883)

$$R_e = \frac{UL}{\nu} \quad (2.7)$$

und reskalieren die Größen aus Gleichung (2.2) gemäß

$$\mathbf{u} \rightarrow \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t \rightarrow \frac{t}{T}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad p \rightarrow p \frac{L}{U^2}, \quad \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} \frac{T}{U^2} \quad \text{und} \quad U \rightarrow \frac{L}{T}, \quad (2.8)$$

wobei  $L, T$  und  $U = L/T$  charakteristische Längen-, Zeit- und Geschwindigkeitsskalen der zugrundeliegenden Strömung sind. Dann nimmt Gleichung (2.2) die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

an. Durch die in Gleichung (2.8) durchgeführte Reskalierung enthält die Gleichung nur noch einen äußeren Parameter, nämlich die dimensionslose Reynolds-Zahl. Das bedeutet, dass Fluide mit gleicher Reynolds-Zahl sich gleich verhalten, was es ermöglicht, Experimente in kleinem Maßstab durchzuführen, um das Verhalten von großen Strukturen (z.B. Kühltürme im Wind) vorhersagen zu können. Dies wird als *Ähnlichkeitsprinzip* bezeichnet.

### 2.1.4 Poisson-Gleichung für den Druck

Der Druck aus Gleichung (2.9) kann für inkompressible Fluide aus der Inkompressibilitätsbedingung (2.1) sowie den Randbedingungen bestimmt werden. Es gilt

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\sum_{ij} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}. \quad (2.10)$$

Diese Gleichung kann durch eine geeignete Green'sche Funktion gelöst werden und bestimmt den Druck bis auf eine Konstante. Für ein unendlich ausgedehntes, dreidimensionales System ergibt sich dann

$$p(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{ij} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_j} \frac{\partial u_j(\mathbf{x}', t)}{\partial x'_i}. \quad (2.11)$$

Für eine Herleitung und weitere Diskussion sei auf [2] verwiesen.

### 2.1.5 Nichtlinearität und Nichtlokalität der Navier-Stokes Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen (2.2) sind nichtlineare, nichtlokale, partielle Differentialgleichungen. Die Nichtlinearität der Gleichungen ist auf den Advektionsterm  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  zurückzuführen. Die Nichtlokalität ist über den Druckterm gegeben, der die Poisson-Gleichung erfüllt. Wie man an Gleichung (2.11) sieht, hängt die Lösung dieser Gleichung von dem Geschwindigkeitsfeld an jedem Ort  $\mathbf{x}'$  des Systems ab, in diesem Fall der  $\mathbb{R}^3$ . Die nichtlokale Kopplung über den Druck führt dazu, dass im Geschwindigkeitsfeld keine lokalisierten Strukturen lange bestehen können. Die im Folgenden eingeführte Wirbelstärke stellt daher häufig eine geeigneteren Beschreibung des Strömungsgeschehens dar.

## 2.2 Wirbeltransportgleichung

### 2.2.1 Wirbelstärke und Wirbeltransportgleichung

Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (2.1) bildet die Wirbeltransportgleichung eine zu den Navier-Stokes Gleichungen äquivalente Beschreibung des Strömungsgeschehens. Wir definieren die Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

als Rotation des Geschwindigkeitsfeldes. Man erhält die Wirbeltransportgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F} \quad (2.13)$$

durch Anwenden der Rotation auf die Navier-Stokes-Gleichung. Dabei ist  $\mathbf{F}$  die Rotation der treibenden Kraft  $\mathbf{f}$  aus Gleichung (2.2). Die Wirbeltransportgleichung ist ebenfalls nichtlinear und nichtlokal. Häufig eignet sich die Wirbelstärke besser zur Beschreibung turbulenter Strömungen, da aufgrund des Druckes das Geschwindigkeitsfeld nie stark räumlich lokalisiert ist. Die Wirbelstärke hingegen tendiert dazu, in drei Dimensionen lange, dünne Wirbelfilamente zu bilden. In zwei Dimensionen hingegen bilden sich ovale Strukturen. Somit gibt die Wirbelstärke häufig mehr Aufschluss über das physikalische System als das Geschwindigkeitsfeld. Der Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsfeld und der Wirbelstärke wird im Folgenden erläutert.

### 2.2.2 Wirbelstreckungsterm

Den Term  $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}$  auf der rechten Seite von Gleichung (2.13) bezeichnet man als Wirbelstreckungsterm. Er verschwindet in zwei Dimensionen identisch, was daran liegt, dass die Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega}$  in  $e_z$  Richtung zeigt (siehe Gleichung (2.17)) und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  nur von  $x$  und  $y$  abhängt. Dann gilt

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(x, y, t) = 0. \quad (2.14)$$

In drei Dimensionen führt der Wirbelstreckungsterm zu einer Verstärkung der Wirbelstärke und begünstigt daher die Bildung von langen Wirbelfilamenten.

### 2.2.3 Biot-Savart Gesetz

Für inkompressible Fluide kann das Geschwindigkeitsfeld über die Wirbelstärke mithilfe des Biot-Savart Gesetzes ausgedrückt werden. Dies ist analog zur Elektrodynamik aufgrund der Quellfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes möglich. Man erhält

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 x' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.15)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}$  abhängig von der Dimension des Systems. Man erhält für zwei oder drei Dimensionen

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} & \text{für 2-D} \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} & \text{für 3-D} \end{cases}. \quad (2.16)$$

Über das Biot-Savart Gesetz wird das Geschwindigkeitsfeld am Ort  $\mathbf{x}$  über die Wirbelstärke an jedem Ort  $\mathbf{x}'$  im System bestimmt, sodass die Nichtlokalität der Navier-Stokes Gleichung erhalten bleibt. Die Nichtlinearität bleibt durch den Term  $\mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}$  sowie den Wirbelstreckungsterm (in drei Dimensionen) ebenfalls erhalten.

## 2.2.4 Zweidimensionaler Sonderfall

Turbulente Strömungen können als zweidimensional betrachtet werden, wenn eine der räumlichen Dimensionen starken Einschränkungen unterliegt. Dies ist häufig in geophysikalischen Anwendungen der Fall und kann im Labor reproduziert werden. Siehe [8] und [9] für eine weiterführende Diskussion.

Wir haben bereits erwähnt, dass der Wirbelstreckungsterm in zwei Dimensionen verschwindet. Außerdem zeigt  $\omega$  in  $e_z$  Richtung, wie man an

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x u_y(x, y, t) - \partial_y u_x(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

sieht. Da also  $\omega = \omega e_z$  gilt, können wir Gleichung (2.13) als

$$\dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t) = F \quad (2.18)$$

schreiben. Dabei behandeln wir die Wirbelstärke  $\omega = \partial_x u_y(x, y, t) - \partial_y u_x(x, y, t)$  als eine skalare Größe.

## 2.3 PunktWirbel

### 2.3.1 PunktWirbelansatz

Für ideale zweidimensionale Strömungen führt der Ansatz

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.19)$$

dazu, dass die Wirbeltransportgleichung (2.18) in  $N$  gekoppelte, herkömmliche Differentialgleichungen überführt wird. Die Nichtlokalität wird dadurch auf die Betrachtung von  $N$  Punkten im Raum reduziert. Ausgehend von der Euler Gleichung

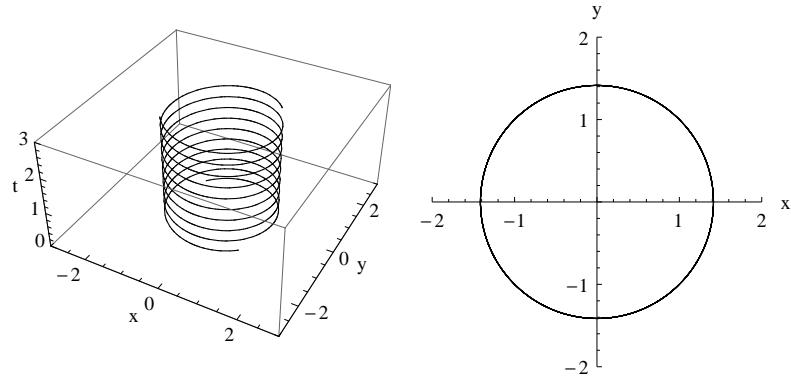
$$\dot{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (2.20)$$

folgt durch Einsetzen von (2.19) direkt, dass  $\mathbf{x}_i(t)$  durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  am Ort  $\mathbf{x}_i(t)$  zur Zeit  $t$  gemäß

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \neq i} \Gamma_j \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))}{2\pi |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)|^2} \quad (2.21)$$

advekiert wird. Durch die Superposition von Deltadistributionen zerfällt das Integral im Biot-Savart Gesetz (2.15) in die Summe

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)|^2} \quad (2.22)$$



**Abbildung 2.1:** Lösung zweier PunktWirbel gleicher Zirkulationen in 3-D und 2-D Phasenportrait

über alle  $N$  PunktWirbel. Der  $i = j$  Term beschreibt die Wechselwirkung eines PunktWirbels mit sich selber und muss in der Advektionsgleichung vernachlässigt werden, da das Geschwindigkeitsfeld sonst divergiert. Dieses Problem tritt bei endlich ausgedehnten Wirbeln nicht auf.

### 2.3.2 Spezialfall zweier PunktWirbel

Der Fall zweier PunktWirbel ist besonders einfach und wird hier ausführlich diskutiert, da ein Teil dieser Arbeit einer Erweiterung dieses Systems gewidmet ist. Aus (2.21) und (2.22) folgt für zwei PunktWirbel

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \Gamma_2 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)}{2\pi|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)|^2}, \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \Gamma_1 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)}{2\pi|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)|^2}.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist für  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$  eine Drehung der Wirbel um ihren gemeinsamen Mittelpunkt mit konstantem Abstand  $d = |\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)|$ . Mit

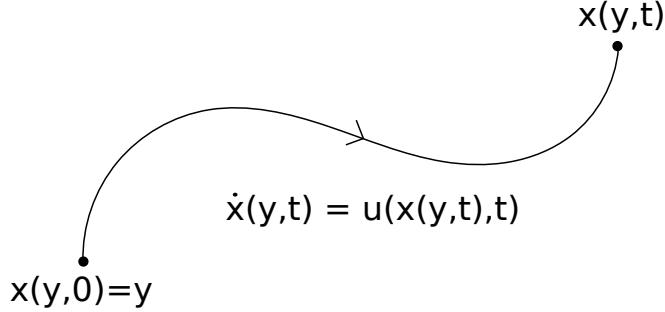
$$\vartheta = \frac{\Gamma}{\pi d^2} \quad (2.24)$$

und der  $\text{SO}(2)$  Drehmatrix

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

können wir die Lösung mit  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  und  $\mathbf{R} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  ( $\mathbf{R}$  beschreibt den Schwerpunkt der Wirbel und bleibt in diesem Fall konstant) als Rotation gemäß

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = U(\vartheta t)\mathbf{r}(0) \quad (2.26)$$



**Abbildung 2.2:** Veranschaulichung des Lagrange'schen Bezugssystems

schreiben. Die Trajektorie dieser Lösung ist in Abbildung (2.1) dargestellt.

Für gegensätzliche Wirbelstärken  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  beschreiben die PunktWirbel eine Translationsbewegung senkrecht zu ihrem Verbindungsvektor  $\mathbf{r}$ . Dieser bleibt konstant, was insbesondere auch für den Betrag  $d$  des Abstandes gilt. Wir erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{2\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}, \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = -\mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{2\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} = \dot{\mathbf{x}}_1(t), \quad (2.28)$$

die für die Advektion beider Punkte identisch sind. Daraus folgt sofort, dass der Abstand  $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  erhalten bleibt, d.h.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{d} = 0.$$

Wir erhalten die Lösungen der Bewegungsgleichungen als

$$\mathbf{x}_1(t) = t\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2} + \mathbf{x}_1(0), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = t\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2} + \mathbf{x}_2(0). \quad (2.30)$$

Dies entspricht einer gleichförmigen Bewegung auf einer Achse rechtwinklig zu der Verbindung der Startpunkte  $\mathbf{x}_1^0$  und  $\mathbf{x}_2^0$ .

## 2.4 Lagrange'sche Beschreibung

### 2.4.1 Mitbewegter Beobachter

Bisher haben wir die Strömung aus einem festen Koordinatensystem betrachtet, sodass das gesamte Fluid am Beobachter vorbei fließt. Dies bezeichnet man als *Euler'sche Beschreibung*. Im Gegensatz dazu folgt man bei der *Lagrange'schen Beschreibung* einem Teilchen

auf seinem Weg durch die Strömung (siehe Abb. 2.2). Das Lagrange'sche Bezugssystem wurde u.A. von Richardson, Taylor und Kraichnan genutzt und bietet Vorteile z.B. bei der Beschreibung von Durchmischungsprozessen, bei der Dynamik passiver Teilchen oder bei der expliziten Bestimmung von Trajektorien einzelner Teilchen.

Wir bezeichnen die Ortskoordinate des Teilchens mit  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ , wobei  $\mathbf{y}$  die Position des Teilchens zur Zeit  $t = 0$  beschreibt und somit ein Label dafür ist, welchem Teilchen aus dem Fluid der Beobachter folgt. Man erhält für die Advektion und Anfangsbedingung der Lagrange'schen Trajektorie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{X}(\mathbf{y}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t) \\ \mathbf{X}(\mathbf{y}, 0) &= \mathbf{y}.\end{aligned}\tag{2.31}$$

Die obere Gleichung beschreibt die Advektion des Teilchens durch das Geschwindigkeitsfeld am Ort  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$  zur Zeit  $t$ . Die untere Gleichung beinhaltet die Anfangsbedingung für die Trajektorie  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$ .

#### 2.4.2 Lagrange'sche Geschwindigkeit und Wirbelstärke

Zur analogen Formulierung der Grundgleichungen im Lagrange'schen Bezugssystem definiert man die Lagrange'sche Geschwindigkeit

$$\mathbf{U}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t)\tag{2.32}$$

und die Lagrange'sche Wirbelstärke

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t), t).\tag{2.33}$$

Man erhält zusammen mit Gleichung (2.31) die Wirbeltransportgleichung im Lagrange'schen Bezugssystem

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}, t) \cdot [\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)} + \nu [\Delta \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)}\tag{2.34}$$

wobei  $\mathbf{X}(\mathbf{y}, t)$  gemäß

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{y}, t)\tag{2.35}$$

advektiert wird. Aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung hat die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{y}', t)\tag{2.36}$$

die Jacobideterminante 1, was dazu führt, dass das Biot-Savart Gesetz im Lagrange'schen Bezugssystem als

$$\mathbf{U}(\mathbf{y}, t) = \int d^n y' \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{y}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{X}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{X}(\mathbf{y}', t))\tag{2.37}$$

geschrieben werden kann. Für eine weitere Diskussion verweise ich auf [2].

## 2.5 Statistische Hydrodynamik

### 2.5.1 Determinismus und Chaos

Aufgrund der extrem hohen Anzahl an Freiheitsgraden und der stark nichtlinearen, nicht-lokalen Kopplung in der Navier-Stokes Gleichung (2.2) ist das Strömungsfeld sehr sensibel gegenüber Störungen bzw. verschiedenen Anfangs- und Randbedingungen, die in Experimenten nie exakt reproduziert werden können. Ähnlich wie bei chaotischen Systemen mit wenig Freiheitsgraden haben solche Störungen einen signifikanten Einfluss auf die Evolution des Systems. Im Gegensatz zu mikroskopischen Eigenschaften turbulenter Strömungen gibt es jedoch statistische Größen, die gegenüber solcher Störungen unempfindlich sind. Dies führte zur *statistischen Hydrodynamik*, die maßgeblich von A. N. Kolmogorov geprägt wurde.

### 2.5.2 Ensemble und Zeitmittel: Ergodenhypothese

Als Ensemblemittel bezeichnet man die Mittelung über alle möglichen Realisierungen des entsprechenden Feldes bei festen Randbedingungen. Dabei unterscheiden sich die Realisierungen durch verschiedene Anfangsbedingungen, die einer vorgegebenen Statistik unterliegen. Die Evolution einer speziellen Realisierung wird durch die Navier-Stokes Gleichungen beschrieben.

In Experimenten oder numerischen Simulationen ist es jedoch unmöglich das gesamte Ensemble bzw. jede mögliche Realisierung zu beobachten. Daher ersetzt man das Ensemblemittel mit dem Zeitmittel

$$\langle u(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t + t') dt'. \quad (2.38)$$

Die Annahme, dass das zeitliche Mittel gleich dem Ensemblemittel sei, bezeichnet man als *Ergodenhypothese*. Dabei muss man die Konvergenz von (2.38) und Stationarität<sup>1</sup> der Strömung voraussetzen.

## 2.6 Charakteristische Skalen turbulenter Strömungen

### 2.6.1 Die Richardson Kaskade

L. F. Richardson entwickelte 1922 das Kaskadenmodell dreidimensionaler Turbulenz, welchem die Vorstellung zugrunde liegt, dass die Phänomenologie der Turbulenz aus einer Vielzahl ineinander greifender Wirbel verschiedener Skalen entsteht. Werden z.B. Wirbel auf einer großen Skala  $L$  angeregt, so werden diese in drei Dimensionen aufgrund des Wirbelstreckungstermes instabil und übertragen beim Zerfall ihre Energie auf viele kleinskaligere Wirbel. Dieser Prozess tritt sukzessive auf, bis die Skala der entstandenen

<sup>1</sup>Stationarität bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(\mathbf{u}, \mathbf{x})$  nicht von der Zeit abhängt. Ist dies nur näherungsweise gegeben, kann man trotzdem über ein endliches Zeitintervall mitteln.

Wirbel so klein ist, dass die viskose Dissipation dominiert und letztendlich die in den Wirbeln enthaltene Energie in Wärme umsetzt.

### 2.6.2 Lokale Energiedissipationsrate

Man kann aus der Navier-Stokes Gleichung die Bilanzgleichung

$$\partial_t e_{\text{kin}}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{J}^e(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t) \quad (2.39)$$

für die kinetische Energiedichte  $e_{\text{kin}}$  herleiten. Dabei ist

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \left[ \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2}{2} + p(\mathbf{x}, t) \right] - \nu \nabla \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2}{2} - \nu \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

der Fluss der kinetischen Energie und

$$q(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon(\mathbf{x}, t)$$

die Summe aller Quellen und Senken. Die *lokale Energiedissipationsrate*  $\varepsilon$  spielt eine wichtige Rolle in der Theorie vollentwickelter Turbulenz und hängt mit dem Geschwindigkeitsfeld über

$$\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.40)$$

zusammen. Für eine Herleitung und weitere Diskussion sei auf [2] verwiesen.

### 2.6.3 Geschwindigkeitsautokorrelation

Man definiert die Geschwindigkeitsautokorrelation gemäß

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle . \quad (2.41)$$

Für den isotropen<sup>2</sup>, stationären Fall hängt  $R_{ij}$  nicht von  $\mathbf{x}$  und  $t$  ab und kann als

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = A(r) \delta_{ij} + B(r) \frac{r_i r_k}{r^2} \quad (2.42)$$

geschrieben werden<sup>3</sup>. Des weiteren kann man die transversale Autokorrelation  $R_{tt}$  und die longitudinale Autokorrelation  $R_{ll}$  über

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{tt}(\mathbf{r}) \delta_{ij} + [R_{ll}(\mathbf{r}) - R_{tt}(\mathbf{r})] \frac{r_i r_j}{r^2} \quad (2.43)$$

definieren.

---

<sup>2</sup>Isotropie bedeutet hier Translationsinvarianz. Das heißt, kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet und die Autokorrelation hängt nur vom Inkrement  $\mathbf{r}$  ab.

<sup>3</sup>siehe *isotrope Tensorfelder* z.B. im Anhang von [2].

## 2.6.4 Integrale Länge

Die integrale Länge ist die maximale Länge, auf der noch Korrelationen zu beobachten sind. Im Fall der Energiekaskade ist die integrale Länge die Skala, auf der die Turbulenz angeregt wird. Durch den Prozess der Kaskade werden die Wirbel dann sukzessive zu kleineren Skalen transportiert, bis sie aufgrund von dissipativen Effekten zerfallen. Man kann die integrale Länge durch die Geschwindigkeitsautokorrelation ausdrücken. Man unterscheidet zwischen der transversalen Länge

$$L_t = \int_0^\infty R_{tt}(\mathbf{r}) dr \quad (2.44)$$

und der longitudinalen Länge

$$L_l = \int_0^\infty R_{ll}(\mathbf{r}) dr \quad (2.45)$$

wobei  $R_{tt}$  und  $R_{ll}$  aus Gleichung (2.43) zu entnehmen sind.

## 2.6.5 Kolmogorov'sche Skalen

Laut der K-41 Theorie, die später noch genauer erklärt wird, wird die turbulente Kaskade nur durch die kinematische Viskosität  $\nu$  und die Energiedissipationsrate  $\langle \varepsilon \rangle$  charakterisiert und man kann aus einer Dimensionsanalyse die Kolmogorov'sche Dissipationslänge

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4} \quad (2.46)$$

bestimmen. Sie bestimmt eine untere Skalengrenze für die turbulente Kaskade. Analog definiert man die Kolmogorov'sche Zeitskala

$$\tau_\eta = \sqrt{\frac{\nu}{\langle \varepsilon \rangle}} \quad (2.47)$$

und Geschwindigkeit

$$u_\eta = (\nu \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}. \quad (2.48)$$

Berechnet man die Reynolds-Zahl aus diesen Größen so erhält man

$$R_\eta = \frac{\nu u_\eta}{\eta} = 1. \quad (2.49)$$

Das bedeutet, dass die Kolmogorov'schen Skalen zu einer laminaren Strömung gehören.

## 2.6.6 Taylor Skala

Der Einfluss von dissipativen Effekten wird bereits bei Skalen bemerkbar, die größer als die Kolmogorov'sche Dissipationslänge sind. Daher hat G.I. Taylor 1935 die Taylor-Mikroskala gemäß

$$\lambda^2 = \frac{2u_{rms}^2}{\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_2} u_1 \right)^2 \right\rangle} \quad (2.50)$$

definiert. Man kann eine longitudinale Taylor-Länge (siehe [6])

$$\lambda_l^2 = \frac{2u_{\text{rms}}^2}{\left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u_1 \right)^2 \right\rangle} \quad (2.51)$$

definieren. Außerdem definiert man die Taylor-Reynoldszahl

$$R_\lambda = \frac{u_{\text{rms}} \lambda}{\nu}, \quad (2.52)$$

die im Gegensatz zu der Reynoldszahl nicht von der integralen Länge  $L$  abhängt, was den Vorteil hat, dass man turbulente Strömungen mit verschiedenen makroskopischen Längen  $L$  vergleichen kann, wenn sie die selbe Taylor-Reynoldszahl besitzen (siehe ebenfalls [6]).

## 2.7 Energiespektrum

### 2.7.1 Kinetische Energie

Aus der Navier-Stokes Gleichung für die  $i$ -te Komponente der Geschwindigkeit kann durch Multiplikation mit  $u_i$  eine Gleichung für die zeitliche Veränderung der mittleren kinetischen Energie  $\mathcal{E}$  der Form

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}, t) \rangle = \nu \langle u_i(\mathbf{x}, t) \Delta u_i(\mathbf{x}, t) \rangle + \langle u_i(\mathbf{x}, t) f_i(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (2.53)$$

abgeleitet werden. Anhand der rechten Seite dieser Gleichung wird deutlich, dass kinetische Energie dem System durch äußere Kräfte hinzugefügt werden kann sowie durch viskose Effekte abgeführt wird. Ohne Viskosität und äußere Kräfte ist die kinetische Energie  $\mathcal{E}$  eine Erhaltungsgröße.

### 2.7.2 Spektrale Energiedichte

Wir definieren die Fouriertransformierte des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.54)$$

und erhalten mit der Fourierdarstellung der Deltafunktion

$$\langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j(\mathbf{k}', t) \rangle = \langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j(-\mathbf{k}, t) \rangle \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (2.55)$$

Aus der Fourierdarstellung der Kármán-Howarth-Gleichung (siehe [2])

$$\frac{\partial}{\partial t} C_{ij}(\mathbf{k}, t) + 2i \sum_l k_l C_{li,j}(\mathbf{k}, t) = -2\nu k^2 C_{ij}(\mathbf{k}, t) + Q_{ij}(\mathbf{k}, t) \quad (2.56)$$

folgt dann für isotrope Tensorfelder

$$C_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{4\pi k^2} \left[ \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] E(k, t). \quad (2.57)$$

Damit folgt die spektrale Energiedichte<sup>4</sup>

$$E(k, t) = 4\pi \sum_l C_{ll}(\mathbf{k}, t) \quad (2.58)$$

und wir erhalten mit  $T(k, t) = 2ik \sum_l \frac{k_i}{k} C_{il,i}(\mathbf{k}, t)$  die Bilanzgleichung

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2 \right] E(k, t) + T(k, t) = Q(k, t). \quad (2.59)$$

Da das Integral  $\int_0^\infty dk T(k, t)$  verschwindet, sieht man, dass die Änderung der gesamten kinetischen Energie lediglich durch viskose Effekte zustande kommt. Insbesondere bedeutet das, dass der Energietransfer zwischen verschiedenen Skalen *reibungsfrei* ist, d.h. die gesamte kinetische Energie bleibt bei dem Prozess erhalten.

### 2.7.3 Inertialbereich

Betrachtet man die von Gleichung (2.59) beschriebene Evolution von  $E(k, t)$  und beschränkt den Quellterm  $Q(k, t)$  auf große räumliche Skalen (d.h. kleine  $k$ -Werte), so wird das Energiespektrum  $E(k, t)$  anfangs auf den Skalenbereich von  $Q$  beschränkt bleiben. Im Laufe der Zeit wird durch den Prozess der Kaskade Energie zu kleineren Skalen (größere  $k$ ) transportiert, bis sich schließlich ein stationärer Zustand einstellt, in dem  $E(k)$  nicht mehr von der Zeit abhängt. Es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der auf großen Skalen zugefügter Energie und auf kleinen Skalen durch Dissipation abgeführten Energie ein. Den Bereich, in dem die spektrale Energiedichte dem Potenzgesetz

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (2.60)$$

folgt, nennt man *Inertialbereich*. Er wird durch die integrale Länge  $L$  nach oben und durch den über die Taylorskala  $\lambda$  beschriebenen *Dissipationsbereich* nach unten begrenzt.

### 2.7.4 K-41 Theorie

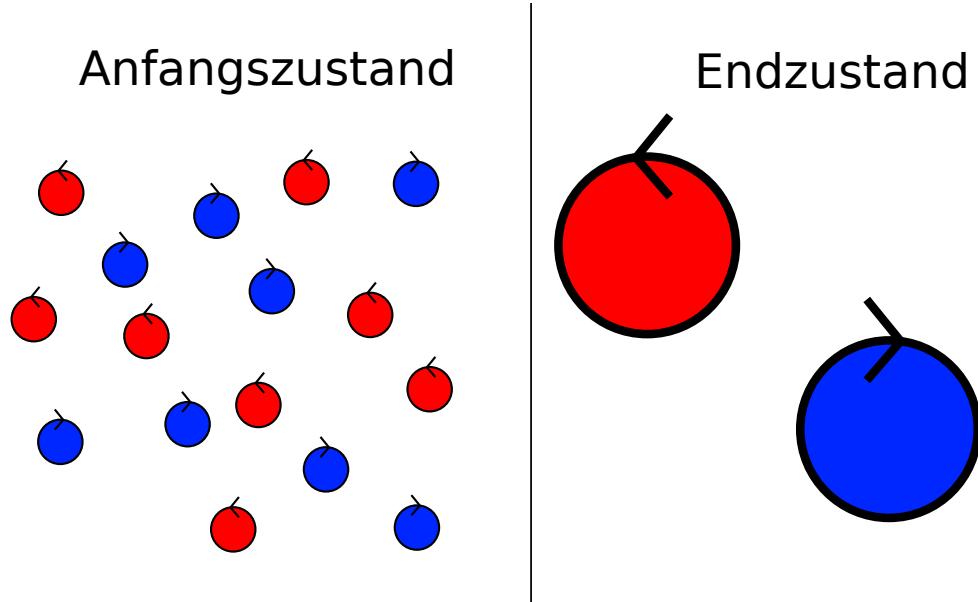
A. N. Kolmogorov entwickelte 1941 die sehr einflussreiche K-41 Theorie<sup>5</sup>. Für seine Theorie zur Beschreibung homogener, isotroper Turbulenz legte er folgende Annahmen zugrunde:

1. *Hypothese der lokal isotropen Turbulenz*: Für hinreichend große Reynolds-Zahlen ist jede turbulente Strömung statistisch homogen und isotrop. In diesem Skalenbereich wird Energie zu kleineren Skalen transportiert und das Strömungsgeschehen wird lediglich durch die kinematische Viskosität  $\nu$  und die mittlere Energiedissipationsrate  $\langle \varepsilon \rangle$  beschrieben. Dies wird als *erste Ähnlichkeitshypothese* bezeichnet.

---

<sup>4</sup>  $\int_0^\infty dk E(k, t) = \mathcal{E}(t)$

<sup>5</sup> 1962 erweiterte Kolmogorov diese Theorie zur K-62 Theorie. Siehe [1].



**Abbildung 2.3:** Die Bildung von Wirbelclustern gleicher Zirkulationen in der inversen Kaskade.

2. zweite Ähnlichkeitshypothese: Im Intertialbereich ( $L \ll l \ll \eta$ ) spielt die kinematische Viskosität  $\nu$  keine Rolle. Die Statistik turbulenter Strömungen hängt dann nur von  $\langle \varepsilon \rangle$  ab und hat daher universellen Charakter.

Aus diesen Annahmen folgt per Dimensionsanalyse mit

$$[E] = [L]^3[T]^{-2}, \quad [k] = [L]^{-1} \quad \text{und} \quad [\varepsilon] = [L]^2[T]^{-3}$$

für die spektrale Energiedichte

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.61)$$

Die Kolmogrovsche Theorie isotroper, homogener Turbulenz ist ein rein phänomenologisches Modell und wurde bisher nicht erfolgreich aus den Navier-Stokes Gleichungen hergeleitet.

### 2.7.5 Inverse Kaskade zweidimensionaler Turbulenz

Die *inverse Kaskade* ist ein Phänomen zweidimensionaler Turbulenz und wurde von Kraichnan 1967 in einem sehr einflussreichen Artikel beschrieben [10]. Regt man kleinskalige Wirbel im zweidimensionalen Strömungsfeld an, so bilden diese im Laufe der Zeit großskalige Wirbelstrukturen aus. Deren Größe wird durch die Randbedingungen des Systems begrenzt. Der Prozess der inversen Kaskade ist in Abbildung 2.3 dargestellt, wobei die roten Punkte für Wirbel positiver Zirkulation stehen während blaue Punkte negative

Zirkulationen bedeuten. Der rote Fleck auf dem Jupiter stellt ein prominentes Beispiel dar, das auf die inverse Kaskade zurückzuführen ist. Eine sehr gute und ausführliche Einführung in die jüngsten Fortschritte bei der Beschreibung zweidimensionaler Turbulenz ist in einem 2008 erschienenen Artikel von M. Eckert [11] zu finden. Für die Wirbelstärkenstatistik der inversen Kaskade verweise ich den Leser auf einen Artikel von R. Friedrich, M. Vosskuhle, O. Kamps und M. Wilczek [12].

2006 beobachteten Chen et al. [13], dass die Elongation und Verdünnung ovaler Wirbelstrukturen eine wichtige Rolle bei der Bildung einer inversen Kaskade spielt. Bereits 1996 bemerkten Nielsen et al. [14] das Verschmelzen von Wirbeln in zweidimensionalen Strömungen aus direkten numerischen Simulationen. Wir werden im Laufe dieser Arbeit im Detail auf beide Mechanismen eingehen.

## 2.8 Stochastische Beschreibung

### 2.8.1 Markov Eigenschaft

Friedrich und Peinke [15] konnten 1997 zeigen, dass die statistischen Eigenschaften der turbulenten Kaskade durch einen Markov Prozess beschrieben werden können. Markov Prozesse sind stochastische Prozesse, die durch die Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(\mathbf{x}_n, t_n; \dots; \mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0)$$

beschrieben werden. Die Verbundwahrscheinlichkeit ist über die Beziehung

$$p(\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{x}_i, t_i) = \frac{p(\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1}; \mathbf{x}_i, t_i)}{p(\mathbf{x}_i, t_i)} \quad (2.62)$$

mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten verknüpft. Die Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1}; \mathbf{x}_i, t_i)$$

ergibt sich demnach aus dem Produkt der Wahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x}_i, t_i)$  und der bedingten Wahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{x}_i, t_i)$ , die aussagt, wie wahrscheinlich der Zustand  $\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1}$  ist, wenn der  $\mathbf{x}_i, t_i$  bereits eingetreten ist.

$$p(\mathbf{x}_n, t_n; \dots; \mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = p(\mathbf{x}_n, t_n | \mathbf{x}_{n-1}, t_{n-1}) \cdots p(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_0, t_0) p(\mathbf{x}_0, t_0) \quad (2.63)$$

Dabei hängt für Markov Prozesse die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(\mathbf{x}_i, t_i | \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}; \dots; \mathbf{x}_0, t_0) = p(\mathbf{x}_i, t_i | \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}) \quad (2.64)$$

nur von dem letzten Zeitschritt  $\mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}$  ab. Dies bezeichnet man als *Markov Eigenschaft* oder *Markov Bedingung*. Aus (2.63) folgt, dass für Markov Prozesse die  $N$ -Punkt Wahrscheinlichkeitsdichte nur von den Übergangswahrscheinlichkeiten  $p(\mathbf{x}_i, t_i | \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1})$  und der Anfangswahrscheinlichkeit  $p(\mathbf{x}_0, t_0)$  abhängt. In physikalischen Systemen ist die Markov Eigenschaft nur für Zeitskalen größer als  $T_{ME}$  erfüllt, wobei  $T_{ME}$  als Markov-Einstein

Zeitskala bezeichnet wird. Der Grund dafür ist, dass auf kleinen Zeitskalen das Rauschen korreliert ist, was der Markov Bedingung widerspricht.

Die *Chapman-Kolmogorov Gleichung* folgt aus Gleichung (2.62) und (2.63). Sie lautet

$$p(\mathbf{x}_j, t_j | \mathbf{x}_i, t_i) = \int d\mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_j, t_j | \mathbf{x}_k, t_k) p(\mathbf{x}_k, t_k | \mathbf{x}_i, t_i) \quad (2.65)$$

für Zeiten  $t_i < t_k < t_j$ . Die Chapman-Kolmogorov Gleichung ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Markov Eigenschaft eines stochastischen Prozesses. Für die meisten Anwendungen ist es jedoch ausreichend, die Chapman-Kolmogorov Gleichung zu überprüfen um davon ausgehen zu können, dass ein Markov Prozess zugrunde liegt<sup>6</sup>.

### 2.8.2 Fokker-Planck Gleichung

Die auch als Kolmogorov Gleichung bekannte Fokker-Planck Gleichung beschreibt die Evolution der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') \quad (2.66)$$

über den Driftvektor  $\mathbf{D}^{(1)}$  und die Diffusionsmatrix  $D^{(2)}$ . Der Driftvektor ergibt sich aus dem Grenzwert der ersten Momente gemäß

$$\begin{aligned} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle X_i(t + \tau) - x_i \rangle \Big|_{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}', t + \tau | \mathbf{x}, t) (x'_i - x_i). \end{aligned} \quad (2.67a)$$

Die Diffusionsmatrix folgt aus dem zweiten Momenten und hat die Form

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle X_i(t + \tau) - x_i \rangle \langle X_j(t + \tau) - x_j \rangle \Big|_{\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int d\mathbf{x}' p(\mathbf{x}', t + \tau | \mathbf{x}, t) (x'_i - x_i)(x'_j - x_j). \end{aligned} \quad (2.67b)$$

Für eine weitere Diskussion verweise ich auf [16].

---

<sup>6</sup>Lévy gelang es, ein Beispiel zu konstruieren, das die Chapman-Kolmogorov Gleichung erfüllt aber kein Markov Prozess ist.

# 3 Martin-Siggia-Rose Formalismus

Ziel dieses Kapitels ist es, eine ausführliche Einführung in den Martin-Siggia-Rose Formalismus und die Instantonapproximation zu geben. Dabei werden die meisten Schritte explizit erklärt. Im Gegensatz zu dem Kapitel über die Grundlagen der Hydrodynamik, die in unzähligen Lehrbüchern und Arbeiten ausführlich erklärt sind, z.B. [2], [17] oder [18], soll der Leser hier auf weiterführende Arbeiten zum Thema Instantongleichungen vorbereitet werden.

## 3.1 Einführung

Der Formalismus wurde 1973 von P. C. Martin, E. Siggia und H. Rose (siehe [19]) entwickelt und beschreibt die statistischen Eigenschaften eines Systems über eine Pfadintegraldarstellung<sup>1</sup> der Verteilungsfunktion. Das auftretende Pfadintegral wird über eine *stationary phase approximation* genähert, was bedeutet, dass die im Exponent des Integranden auftretende Wirkung maximiert wird und der Wert des Pfadintegrals näherungsweise durch  $e^{iS_{\text{extr}}}$  gegeben ist. Diese Näherung bezeichnet man in Analogie zur Quantenfeldtheorie als *Instantonapproximation*. Im Folgenden werden der Martin-Siggia-Rose (kurz MSR) Formalismus und die Instantonnäherung ausgehend von einer diskreten, stochastischen Differentialgleichung im Detail erklärt.

2011 gelang es Falkovich et al. [20] aus dem Instantonformalismus die Flügel der PDF<sup>2</sup> der Wirbelstärke für die direkte Kaskade herzuleiten.

### 3.1.1 Stochastisches System

#### Markov Prozess

Wir beginnen mit einer stochastischen, diskreten Differentialgleichung der Form

$$\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i)\tau + g(\mathbf{q}_i, \tau)\boldsymbol{\eta}_i \quad (3.1)$$

mit den Zufallskräften  $\boldsymbol{\eta}_i$ , die auf das System wirken und die Markov Eigenschaft erfüllen sollen.  $g$  ist eine Matrix die von  $\mathbf{q}_i$  und dem Zeitinkrement  $\tau$  abhängt.

---

<sup>1</sup>Pfadintegrale wurden 1948 von R. Feynman entwickelt und basieren auf einer Idee von P. A. M. Dirac (1933). Im Anhang A.1 wird der Formalismus am Beispiel der Quantenelektrodynamik kurz erläutert.

<sup>2</sup>PDF steht für *probability density function*.

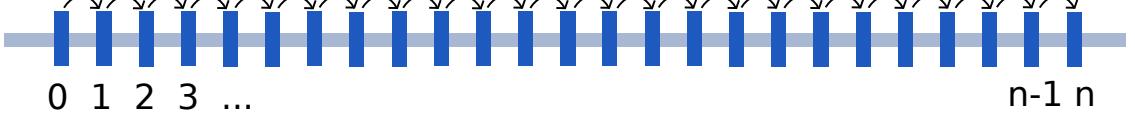


Abbildung 3.1: Hintereinanderausführung mehrerer Übergänge von  $i = 0$  bis  $i = n$ .

### Übergangswahrscheinlichkeit

Wir wollen die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $\tilde{p}$  ausdrücken, die angibt, wie wahrscheinlich der Übergang von  $\mathbf{q}_i, t_i$  nach  $\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1}$  ist. Wir definieren

$$\tilde{p}(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{q}_i, t_i) = \delta[\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i)\tau - g(\mathbf{q}_i, \tau)\boldsymbol{\eta}_i], \quad (3.2)$$

sodass die Übergangswahrscheinlichkeit genau dann 1 ist, wenn Gleichung (3.1) erfüllt ist, und sonst gleich 0 ist.

Wir benutzen die Fourierdarstellung der Deltafunktion

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^m \hat{\mathbf{x}}}{(2\pi)^m} e^{i\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{x}}}$$

und setzen diese in die Gleichung für die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte (3.2) ein. Die Zahl  $m$  bezeichnet hier die Dimension des Vektors  $\mathbf{q}_i$ . Wir erhalten eine Integraldarstellung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\tilde{p}(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{q}_i, t_i) = \int \frac{d^m \hat{\mathbf{q}}_i}{(2\pi)^m} e^{i\hat{\mathbf{q}}_i \cdot [\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i)\tau - g(\mathbf{q}_i, \tau)\boldsymbol{\eta}_i]}. \quad (3.3)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $\tilde{f}$  für mehrere Transitionen ergibt sich durch Multiplikation der einzelnen Übergangswahrscheinlichkeitsdichten. Für einen Pfad wie in Abbildung 3.1 von  $i = 0$  bis  $i = N$  dargestellt ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte als Produkt gemäß

$$\tilde{f}(n, n-1, \dots, 0) = \prod_{i=0}^{n-1} \tilde{p}_i(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{q}_i, t_i). \quad (3.4)$$

Einsetzen von  $\tilde{p}(\mathbf{q}_{i+1}, t_{i+1} | \mathbf{q}_i, t_i)$  liefert

$$\tilde{f}(n, n-1, \dots, 0) = \left[ \int \prod_{i=0}^{n-1} \frac{d^m \hat{\mathbf{q}}_i}{(2\pi)^m} \right] e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i \cdot [\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i)\tau]} e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \boldsymbol{\eta}_i}. \quad (3.5)$$

Wir betrachten nun die gemittelte Übergangswahrscheinlichkeitsdichte. Dafür müssen wir über die Exponentialfunktion mit der stochastischen Kraft  $\boldsymbol{\eta}_i$  mitteln, was zu

$$e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \boldsymbol{\eta}_i} \rightarrow \left\langle e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \boldsymbol{\eta}_i} \right\rangle \quad (3.6)$$

führt. Mithilfe dieser Mittelung können wir die grobkörnige Übergangswahrscheinlichkeitsdichte

$$f(n, n-1, \dots, 0) = \int \prod_{i=0}^{n-1} \frac{d^m \hat{\mathbf{q}}_i}{(2\pi)^m} e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i \cdot [\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i)\tau]} \left\langle e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{\mathbf{q}}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \boldsymbol{\eta}_i} \right\rangle \quad (3.7)$$

einführen. Um die statistischen Eigenschaften zu erhalten, muss die Mittelung in Gleichung (3.6) über die gesamte Exponentialfunktion durchgeführt werden.

## Diffusionsmatrix

Im vorherigen Kapitel haben wir die Diffusionsmatrix  $D^{(2)}$  eingeführt (siehe Gleichung (2.67b)). Im Folgenden wollen wir einen Zusammenhang zwischen Diffusionsmatrix und treibender Kraft herstellen. Die genaue Form der Matrix ist hier nicht wichtig, da wir ins Kontinuum übergehen werden und dann die zur Diffusionsmatrix korrespondierende Korrelationsfunktion vorgeben. Dieses Verfahren ist vergleichbar mit dem Vorgehen bei der Pfadintegraldarstellung des freien Skalarfeldes in der Quantenfeldtheorie, welches zum Propagator des freien Skalarfeldes führt. Dies wird im Anhang (siehe A.1.3) kurz erläutert.

Um die Mittelung der treibenden Kraft zu beschreiben, definieren wir eine Größe  $W$ , die den Einfluss der Mittelung im Exponenten gemäß der Gleichung

$$\left\langle e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{q}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \eta_i} \right\rangle \equiv e^{-W[\alpha_1 \dots \alpha_N]} \quad (3.8)$$

darstellt. Diese Gleichung können wir nach  $W$  auflösen und erhalten

$$W[\alpha_1 \dots \alpha_n] = -\ln \left\langle e^{i \sum_i \alpha_i \eta_i} \right\rangle .$$

Für den Diffusionsprozess hat  $W$  die Form

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_i C_{ij} \alpha_j . \quad (3.9)$$

Dabei ist  $C$  diagonal mit  $C_{ij} = \delta_{ij} Q \tau$  und der Vektor  $\alpha$  ergibt sich aus  $\hat{\mathbf{q}}_i$  und der Matrix  $g$  über  $\alpha_i = g(\mathbf{q}_i, \tau) \hat{\mathbf{q}}_i$ . Wir setzen diese Beziehungen in Gleichung (3.9) ein und erhalten

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q \tau \delta_{ij} (g(\mathbf{q}_i, \tau) \hat{\mathbf{q}}_i) (g(\mathbf{q}_j, \tau) \hat{\mathbf{q}}_j) = \sum_i Q \tau \hat{\mathbf{q}}_i g^\dagger(\mathbf{q}_i, \tau) g(\mathbf{q}_i, \tau) \hat{\mathbf{q}}_i . \quad (3.10)$$

Dabei wurde benutzt, dass mit der Adjungierten  $g^\dagger$  von  $g$  das hier auftretende Skalarprodukt die Gleichung

$$\langle g \hat{\mathbf{q}} | g \hat{\mathbf{q}} \rangle = \left\langle \hat{\mathbf{q}} \left| g^\dagger g \right| \hat{\mathbf{q}} \right\rangle$$

erfüllt. Hier wurde die in der Quantenmechanik übliche Notation verwendet, da die Beziehung den meisten Lesern aus diesem Kontext bekannt sein sollte.

Jetzt können wir durch Vergleichen von Gleichung (3.9) und (3.10) die Diffusionsmatrix  $D^{(2)}$  als

$$D^{(2)}(\mathbf{q}) = g^\dagger(\mathbf{q}) Q g(\mathbf{q}) \quad (3.11)$$

schreiben, sodass mit (3.8) die Beziehung

$$\left\langle e^{-i \sum_{i=0}^{n-1} \hat{q}_i g(\mathbf{q}_i, \tau) \eta_i} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i D^{(2)} \hat{\mathbf{q}}_i} \quad (3.12)$$

folgt. Damit können wir die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $\mathcal{P}$  analog zu Gleichung (3.7) als

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}_n \dots \mathbf{q}_0) = \int \Pi_{i=0}^{n-1} \frac{d^m \hat{\mathbf{q}}_i}{(2\pi)^m} e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \left[ \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\tau} - \mathbf{D}^1 \right]} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i D^{(2)} \hat{\mathbf{q}}_i} P(\mathbf{q}_0) \quad (3.13)$$

schreiben. Dabei ist  $P(\mathbf{q}_0)$  die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System anfangs im Zustand  $\mathbf{q}_0$  befindet.

### 3.1.2 Charakteristische Funktion

Wir haben in vorherigen Abschnitt die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte  $\mathcal{P}(\mathbf{q}_n \dots \mathbf{q}_0)$  für den Übergang von  $\mathbf{q}_0$  nach  $\mathbf{q}_1$  und so weiter bis  $\mathbf{q}_n$  eingeführt. In Analogie zur Zustandssumme der statistischen Physik<sup>3</sup> integrieren wir über alle möglichen Ketten von  $\mathbf{q}_0 \dots \mathbf{q}_n$ . Wir erhalten die charakteristische Funktion

$$\mathcal{Z}(\boldsymbol{\eta}_n, \dots, \boldsymbol{\eta}_0) = \int d^m q_n \dots d^m q_0 e^{i \sum_i \boldsymbol{\eta}_i \cdot \mathbf{q}_i} \mathcal{P}(\mathbf{q}_n \dots \mathbf{q}_0). \quad (3.14)$$

Mit Gleichung (3.13) lautet die charakteristische Funktion konkret

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\boldsymbol{\eta}_n, \dots, \boldsymbol{\eta}_0) &= \int d^m q_n \dots d^m q_0 \int \Pi_{i=0}^{n-1} \frac{d^m \hat{\mathbf{q}}_i}{(2\pi)^m} e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \left[ \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\tau} - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}_i) \right]} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i D^{(2)}(\mathbf{q}_i) \hat{\mathbf{q}}_i} e^{i \sum_i \boldsymbol{\eta}_i \cdot \mathbf{q}_i} P(\mathbf{q}_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wir führen die Wirkung

$$S \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \left[ \frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\tau} - \mathbf{D}^1 \right] + \frac{i}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \tau \hat{\mathbf{q}}_i D^{(2)} \hat{\mathbf{q}}_i \quad (3.16)$$

ein. Das Einfügen eines Quellterms der Form  $e^{i \sum_i \hat{\boldsymbol{\eta}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i}$  führt zur verallgemeinerten charakteristischen Funktion

$$\mathcal{Z}\{\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}\} = \int D\mathbf{q} D\hat{\mathbf{q}} e^{iS + i \sum_i [\boldsymbol{\eta}_i \cdot \mathbf{q}_i + \hat{\boldsymbol{\eta}}_i \cdot \hat{\mathbf{q}}_i]}, \quad (3.17)$$

aus dem durch Variation nach den Quelltermen die Momente und Responsefunktionen erzeugt werden können, wie im Folgenden in Abschnitt 3.1.2 gezeigt wird. Wir definieren die Abkürzungen

$$D\mathbf{q} \equiv \Pi_{i=0}^n \frac{d\mathbf{q}_i}{\sqrt{2\pi}^m} \quad \text{und} \quad D\hat{\mathbf{q}} \equiv \Pi_{i=0}^{n-1} \frac{d\hat{\mathbf{q}}_i}{\sqrt{2\pi}^m}, \quad (3.18)$$

die im kontinuierlichen Grenzfall in Pfadintegrale übergehen. Die charakteristische Funktion hängt dann von den Funktionen  $\mathbf{q}(t)$  und  $\hat{\mathbf{q}}(t)$  ab und wird daher auch als charakteristisches Funktional bezeichnet.

---

<sup>3</sup>für eine ausführliche Einführung siehe Nolting, Statistische Physik, [21]

### Kontinuierlicher Grenzfall

Bisher haben wir ein diskretes System betrachtet. Um die Strömung von Fluiden zu behandeln, müssen wir im Folgenden zu einem kontinuierlichen System übergehen, indem wir das Zeitinkrement  $\tau$  gegen 0 und  $n$  gegen unendlich gehen lassen. Dann gehen die Summen in der Wirkung aus Gleichung (3.16) über in Integrale über  $t$  und der Term  $(\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i)/\tau$  über in die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{q}$ . Man erhält die Wirkung<sup>4</sup>

$$S = \int dt \hat{\mathbf{q}}(t)[\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}(t))] + \frac{i}{2} \int dt \hat{\mathbf{q}}(t) D^{(2)} \hat{\mathbf{q}}(t) \quad (3.19)$$

für die kontinuierlichen Variablen  $\mathbf{q}(t)$  und  $\hat{\mathbf{q}}(t)$ .

### Einführung von Feldvariablen

Bisher sind wir von der Beschreibung einer Variablen  $\mathbf{q}(t)$  ausgegangen, die kontinuierlich zeitabhängig ist. Um Fluide beschreiben zu können, müssen wir die Feldvariablen  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  einführen und die Wirkung entsprechend anpassen. In Analogie zu (3.19) definieren wir die Wirkung

$$S = \int dt d^m x \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{D}^1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))] + \frac{i}{2} \int dt d^m x d^m x' \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t). \quad (3.20)$$

Dabei wird zusätzlich zur vorherigen Beschreibung über die Feldvariablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  integriert.  $Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  stellt eine Verallgemeinerung der Matrix  $D^{(2)}$  dar und spielt die Rolle einer Korrelation. Die charakteristische Funktion aus Gleichung (3.17) kann im kontinuierlichen Fall als Pfadintegral (siehe A.1) geschrieben werden und hängt jetzt von den Feldern  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  ab. Man erhält das charakteristische Funktional

$$\mathcal{Z}(\{\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}\}) = \int \mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \int \mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) e^{iS + i \int dt \int d^m x [\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]}. \quad (3.21)$$

Dabei sind  $\mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und  $\mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  als

$$\mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_i^n \frac{d\mathbf{u}_i}{\sqrt{2\pi}^m} \quad (3.22)$$

definiert. In der Gleichung für das charakteristische Funktional (3.21) gehen auch die Quellterme  $\boldsymbol{\eta}_i$  und  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$  in Felder  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, t)$  über. Im folgenden Teil werden wir sehen, wie durch Variation nach den Quellfeldern  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, t)$  die Momente  $\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') \rangle$  des Feldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und die Responsefunktionen  $\langle u_i(\mathbf{x}, t) \hat{u}_j(\mathbf{x}', t') \rangle$  berechnet werden können.

---

<sup>4</sup>Für eine nicht zeitlich deltaförmige Korrelation  $C(t - t')$  kann man die Wirkung

$$S_C = \int dt \hat{\mathbf{q}}(t) \cdot [\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{D}^1(\mathbf{q}(t))] + \frac{i}{2} \int dt \int dt' \hat{\mathbf{q}}(t) g^\dagger(\mathbf{q}(t)) C(t - t') g(\mathbf{q}(t')) \hat{\mathbf{q}}(t')$$

schreiben. Da wir uns jedoch auf Markov-Prozesse beschränken, gehen wir hier von einer zeitlich deltakorrierten Größe aus.

### Momente und Responsefunktionen

Durch Bildung der Funktionalableitung (siehe A.2) kann aus dem charakteristischen Funktional eine Gleichung für die Momente abgeleitet werden. Als Momente  $N$ -ter Ordnung von  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet man die Mittelwerte

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') u_k(\mathbf{x}'', t'') \dots \rangle \quad (3.23)$$

mit  $N$ -fachem Auftreten einer Komponente des Feldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  innerhalb der Klammer. Die Mittelwerte

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) \hat{u}_j(\mathbf{x}', t') \rangle \quad (3.24)$$

bezeichnet man als Responsefunktionen.

Die Momente werden durch Mittelung aus dem charakteristischen Funktional gemäß

$$\begin{aligned} & \langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) u_k(\mathbf{x}_3, t_3) \dots \rangle \\ &= \int \mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) u_k(\mathbf{x}_3, t_3) \dots e^{iS + \int dt d^m x [\eta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \hat{\eta}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]} \end{aligned} \quad (3.25)$$

bestimmt. Diese Mittelwerte lassen sich als Funktionalableitung nach den Quellfeldern  $\eta(\mathbf{x}, t)$  bzw.  $\hat{\eta}(\mathbf{x}, t)$  darstellen. Dies kann man am Beispiel für das zweite Moment als

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') \rangle = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta_i(\mathbf{x}, t)} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \hat{\eta}_j(\mathbf{x}', t')} \mathcal{Z}(\boldsymbol{\eta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \quad (3.26)$$

schreiben. Explizites Bilden der Funktionalableitung ergibt dann auf der rechten Seite von Gleichung (3.26)

$$\int \mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) e^{iS + \int dt \int d^m x [\eta(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \hat{\eta}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)]}. \quad (3.27)$$

Die Funktionalableitung angewandt auf die Exponentialfunktion reproduziert die Exponentialfunktion mit entsprechendem Faktor. Vergleicht man diese Gleichung mit Gleichung (3.25), so wird deutlich, dass die Variation das zweite Moment liefert.

Wenn man z.B. an der Berechnung der zweiten Momente interessiert ist, kann man  $\eta(\mathbf{x}, t)$  umschreiben. Wir schreiben das charakteristische Funktional als

$$\mathcal{Z}[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2] = \left\langle e^{i\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_1) \cdot \boldsymbol{\alpha}_1} e^{i\mathbf{u}(\mathbf{x}_2, t_2) \cdot \boldsymbol{\alpha}_2} \right\rangle, \quad (3.28)$$

wobei die Klammer  $\langle \dots \rangle$  eine Mittelung gemäß

$$\langle \dots \rangle = \int \mathcal{D}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathcal{D}\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \dots e^{iS} \quad (3.29)$$

mit dem Gewicht  $e^{iS}$  beschreibt. Wählen wir

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\alpha}_i \delta(t - t_i) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (3.30)$$

so erhalten wir aus Gleichung (3.21) sofort (3.28). Das zweite Moment von  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  erhält man dann durch Bilden der partiellen Ableitung nach  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus dem charakteristischen Funktional  $\mathcal{Z}$  gemäß

$$\langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha_{1,i}} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha_{2,j}} \mathcal{Z} [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2; \mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2]. \quad (3.31)$$

### Wirkung für die Wirbeltransportgleichung

Wir haben bisher eine Pfadintegraldarstellung des charakteristischen Funktionals eines beliebigen Feldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  hergeleitet. Im Folgenden wenden wir diese Technik auf das Problem der zweidimensionalen Turbulenz an, indem wir die Wirbeltransportgleichung (siehe Gleichung (2.18) und Kapitel 2.2.4) in die Wirkung einsetzen, sodass der deterministische Teil von Gleichung (3.1) durch die Wirbeltransportgleichung ersetzt wird. Wir definieren die Martin-Siggia-Rose Wirkung

$$S_{\text{MRS}} = \int d^2x dt \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) [\dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t)] + \frac{i}{2} \int d^2x d^2x' dt \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \quad (3.32)$$

für das Wirbelfeld zweidimensionaler Turbulenz. In den eckigen Klammern steht die Wirbeltransportgleichung ohne treibende Kraft und wird mit dem Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  multipliziert. Der letzte Teil beinhaltet die Korrelationsfunktion, die an das rein imaginäre Hilfsfeld gekoppelt ist. Der Term hat die Form einer Faltung und verbindet daher das Hilfsfeld und die Korrelation an allen beliebigen Orten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$ . Die Korrelationsfunktion  $Q(\mathbf{x})$  soll nicht explizit von der Zeit abhängen. Das bedeutet, dass die treibende Kraft deltakorreliert in der Zeit ist, da sonst  $\hat{\omega}(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t')$  zusätzlich über  $t'$  integriert werden müsste.

## 3.2 Instantonapproximation und Instantongleichungen

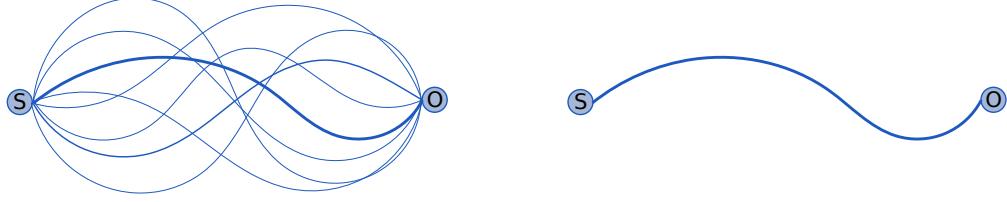
### 3.2.1 Sattelpunktapproximation

Die Pfadintegraldarstellung des charakteristischen Funktionals kann nicht in Analogie zu der Quantenelektrodynamik (QED) störungstheoretisch gelöst werden, da in der Wirkung (3.32) kein kleiner Parameter auftritt, nach dem eine Entwicklung durchgeführt werden kann. In der QED kann die Wirkung nach der elektromagnetischen Kopplung  $\lambda$  entwickelt werden, die im Vergleich zu der Kopplung der starken Wechselwirkung um den Faktor  $1/137$  kleiner ist<sup>5</sup>.

Zur Lösung kann eine Sattelpunktapproximation<sup>6</sup> verwendet werden. Im Gegensatz zu einem störungstheoretischen Ansatz wird hierbei im Pfadintegral nur der Weg mit

<sup>5</sup>Dies entspricht der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten (siehe [22]).

<sup>6</sup>Diese Näherung wird in der Feldtheorie oft als *stationary phase approximation* bezeichnet.



(a) Schematische Darstellung des charakteristischen Funktionalen. Die Dicke der Linien symbolisiert die Größe der Übergangsamplitude.  
 (b) In der Instantonnäherung wird nur der Weg mit maximaler Übergangsamplitude berücksichtigt.

**Abbildung 3.2:** Illustration zur Instantonapproximation.

der größten Übergangsamplitude berücksichtigt. Diese Approximation beinhaltet daher Beiträge aus beliebigen Ordnungen der Störungstheorie. Sie beruht auf einer Maximierung der Wirkung, sodass das charakteristische Funktional

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\hat{\omega} e^{iS}$$

durch das Maximum der Wirkung  $S_{\text{extr}}$  gemäß

$$\mathcal{Z} \approx e^{iS_{\text{extr}}} \quad (3.33)$$

genähert wird. Um das Extremum der Wirkung zu berechnen, müssen die Variationen nach den Feldern  $\omega$  und  $\hat{\omega}$  verschwinden. Dies führt zu den Instantongleichungen, die man durch die Funktionalableitungen

$$\frac{\delta S}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} = 0 \quad (3.34a)$$

und

$$\frac{\delta S}{\delta \hat{\omega}(\mathbf{x}, t)} = 0 \quad (3.34b)$$

erhält. Die Variation nach  $\hat{\omega}$  führt zu einer partiellen Differentialgleichung für die Evolution der wahrscheinlichsten Konfiguration des Wirbelfeldes  $\omega$ . Wird nach  $\omega$  variiert, so erhält man ebenfalls eine partielle Differentialgleichung, die die Evolution des Hilfsfeldes  $\hat{\omega}$  beschreibt. Wir werden sehen, dass diese Gleichungen gekoppelt sind und Anfangsbedingungen zu verschiedenen Zeiten genügen. Im Folgenden werden wir die Variation nach dem Wirbel- und Hilfsfeld durchführen und die Instantongleichungen explizit angeben.

### 3.2.2 Variation nach dem Wirbelfeld

Im Folgenden führen wir die Variation nach  $\omega(\mathbf{x}, t)$  explizit termweise durch. Die auftretenden Funktionalableitungen werden mit vielen Zwischenschritten angegeben, sodass kein besonderes Vorwissen in diesem Gebiet notwendig ist.

### Variation des Korrelationsterms

Um die Variation des Korrelationsterms

$$S_c = \int d^2x d^2x' dt \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \quad (3.35)$$

nach  $\omega(\mathbf{x}, t)$  durchzuführen, müssen wir zuerst die Integrationsvariablen umbenennen, sodass die im Argument von  $\omega$  auftretenden Größen nicht den Integrationsvariablen entsprechen. Wir ersetzen  $d^2x$  mit  $d^2x'$  und  $d^2x'$  mit  $d^2x''$  und erhalten

$$\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' d^2x'' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}'', t') Q(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \hat{\omega}(\mathbf{x}'', t') = 0 \quad (3.36)$$

für  $\delta/\delta\omega(\mathbf{x}, t) S_c$ , da  $S_c$  nicht von  $\omega(\mathbf{x}, t)$  abhängt.

### Variation des $\dot{\omega}$ Terms

Der von der Zeitableitung des Wirbelfeldes abhängende Term in der Wirkung

$$S_t = \int d^2x dt \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) \dot{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (3.37)$$

wird nach  $\omega(\mathbf{x}, t)$  variiert. Dabei werden ebenfalls die Integrationsvariablen umbenannt. Die Variation führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_t}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \dot{\omega}(\mathbf{x}', t') = -\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' dt' \dot{\hat{\omega}}(\mathbf{x}', t') \omega(\mathbf{x}', t') \\ &= - \int d^2x' dt' \dot{\hat{\omega}}(\mathbf{x}', t') \underbrace{\frac{\delta \omega(\mathbf{x}', t')}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)}}_{=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta(t-t')} = -\dot{\hat{\omega}}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei wurde partiell integriert und angenommen, dass die Felder im Unendlichen verschwinden.

### Variation der Nichtlinearität

Beim Variieren des Terms

$$S_n = \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t') \quad (3.39)$$

mit der Nichtlinearität  $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t)$  muss die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$  von  $\omega$  über das Biot-Savart Gesetz (2.15) berücksichtigt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_n}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t') \\ &= \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') \cdot \left( \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \nabla \omega(\mathbf{x}', t') \right) + \frac{\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}', t')}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t') \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Der erste Teil kann analog zu  $S_t$  durch partielle Integration gelöst werden. Mit der Inkompressibilitätsbedingung  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  erhält man

$$\begin{aligned} & \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') \cdot \left( \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \nabla \omega(\mathbf{x}', t') \right) \\ &= - \int d^2x' dt' \nabla \cdot [\hat{\omega}(\mathbf{x}', t') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t')] \frac{\delta \omega(\mathbf{x}', t')}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} = -\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Für die  $\omega$  Abhängigkeit von  $\mathbf{u}$  müssen wir

$$\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') = \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \int d^2x'' \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{2\pi|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^2} \omega(\mathbf{x}'', t') \quad (3.42)$$

berechnen. Ausführen der Variation ergibt

$$\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t') = -\delta(t - t') \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}, \quad (3.43)$$

was wir in Gleichung (3.40) einsetzen. Die Deltafunktion  $\delta(t - t')$  hebt die Zeitintegration auf und wir erhalten

$$\frac{\delta S_n}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} = -\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) - \int d^2x' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \omega(\mathbf{x}', t) \quad (3.44)$$

für die Variation des nichtlinearen Terms der Wirkung.

### Variation des Viskositätsterms

Die Variation des Viskositätsterms

$$S_v = \int d^2x dt \nu \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) \Delta \omega(\mathbf{x}, t) \quad (3.45)$$

kann durch zweifache partielle Integration gelöst werden. Man erhält

$$\frac{\delta S_v}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} = \nu \Delta \hat{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (3.46)$$

### Evolutionsgleichung für das Hilfsfeld

Aus der Variation der Wirkung  $S$  nach dem Wirbelfeld  $\omega(\mathbf{x}, t)$  erhalten wir die Evolutionsgleichung für das Hilfsfeld  $\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)$ . Dafür muss

$$\frac{\delta S}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} = \frac{\delta S_c}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta S_t}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta S_n}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} + \frac{\delta S_v}{\delta \omega(\mathbf{x}, t)} \quad (3.47)$$

verschwinden, sodass die Wirkung extremal wird. Mit den Gleichungen (3.36), (3.38), (3.44) und (3.46) folgt dann die Evolutionsgleichung

$$\dot{\hat{\omega}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) = - \int d^2x' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{2\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t) \quad (3.48)$$

für die wahrscheinlichste Konfiguration des Hilfsfeldes. Man sieht, dass der Viskositäts-term  $\nu\Delta\hat{\omega}$  ein anderes Vorzeichen als in der Wirbeltransportgleichung (2.13) hat. Dies deutet darauf hin, dass das Feld  $\hat{\omega}$  rückwärts in der Zeit gelöst werden muss, was wir später noch genauer sehen werden. Der letzte Term hat wegen  $\hat{\omega}\nabla\omega$  Ähnlichkeiten mit dem Wirbelstreckungsterm dreidimensionaler Turbulenz und koppelt hier die Gleichung des Hilfsfeldes an das Wirbelfeld. Dies geschieht außerdem über die Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  von dem Wirbelfeld auf der linken Seite der Gleichung.

### 3.2.3 Variation nach dem Hilfsfeld

Um die Evolutionsgleichung für das Wirbelfeld zu erhalten, muss die Wirkung  $S$  nach dem Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  variiert werden. Aufgrund der Form der Wirkung ist dies wesentlich einfacher. Wir unterscheiden zwischen zwei Termen, dem Korrelationsterm  $\hat{\omega}Q\hat{\omega}$  (zweiter Term) und dem Rest (erster Term).

#### Variation des ersten Terms

Der erste Term hängt linear von  $\hat{\omega}$  ab, sodass man

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_1}{\delta\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\delta}{\delta\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t') [\dot{\omega}(\mathbf{x}', t') + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\omega(\mathbf{x}, t) - \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t)] \\ &= \dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\omega(\mathbf{x}, t) - \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (3.49)$$

erhält. Dies entspricht der Wirbeltransportgleichung ohne treibende Kraft. Das liegt an der linearen Multiplikation mit dem Hilfsfeld  $\hat{\omega}$ , was durch die Funktionalableitung wieder verschwindet und dabei das Integral aufhebt.

#### Variation des Korrelationsterms

Der Korrelationsterm ist quadratisch in  $\hat{\omega}$ . Man kann die Variation analog zur Produktregel herkömmlicher Ableitungen berechnen. Durch Umbenennen der Integrationsvariablen erhält man mit  $Q(\mathbf{x}) = Q(-\mathbf{x})$  identische Summanden, die dann zusammengefasst werden können. Man erhält

$$\frac{\delta}{\delta\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)} \int d^2x' d^2x'' dt' \hat{\omega}(\mathbf{x}'', t') Q(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) = 2 \int d^2x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t). \quad (3.50)$$

#### Evolutionsgleichung für das Wirbelfeld

Fasst man die Gleichungen (3.49) und (3.50) zusammen, so erhält man für  $\delta S/\delta\hat{\omega} = 0$  die Evolutionsgleichung

$$\dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\omega(\mathbf{x}, t) - \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t) = -i \int d^2x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \quad (3.51)$$

für das Wirbelfeld. Auf der linken Seite steht die Wirbeltransportgleichung (siehe Gleichung (2.13)) und auf der rechten Seite an Stelle der treibenden Kraft ein Term, der von der

Korrelation  $Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  abhängt. Da das Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  rein imaginär ist, ergibt sich auf der rechten Seite der Gleichung eine reelle Größe, sodass das Wirbelfeld stets reell bleibt.

### 3.2.4 Instantongleichungen in einem mitbewegten Bezugssystem

Im Folgenden sollen die Instantongleichungen für Wirbelstärkeninkremente kurz vorgestellt werden. Dies ist für die weiteren Kapitel nicht relevant, soll aber der Vollständigkeit halber an dieser Stelle zusammengefasst werden. Für die dazugehörigen Rechnungen verweise ich auf den Anhang (A.3).

Wir definieren die Inkremente der Wirbelstärke

$$\tilde{\Omega}_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \omega(\mathbf{x}, t) \quad (3.52)$$

und gehen in ein mitbewegtes Bezugssystem über, in dem der Beobachter sich im Koordinatenursprung befindet. Dann ist

$$\Omega(\mathbf{r}, t) = \tilde{\Omega}_0(\mathbf{r}, t) = \omega(\mathbf{r}, t) - \omega(0, t) \quad (3.53)$$

und wir erhalten die Instantongleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_r \Omega(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) - i \int d^2 r' C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t) \\ \dot{\hat{\Omega}}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) - \nu \Delta \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \int d^2 r' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t) \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{2\pi|\mathbf{r}|^2} \right\} \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Dabei ist

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \int d^2 r' \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}'}{2\pi|\mathbf{r}'|^2} \right\} \Omega(\mathbf{r}', t)$$

und

$$\Delta_r \Omega(\mathbf{r}, t) = \Delta_r \Omega(\mathbf{r}, t) - \lim_{r \rightarrow 0} [\Delta_r \Omega(\mathbf{r}, t)].$$

## 3.3 Zusammenfassung

Wir haben bisher die Instantongleichungen zweidimensionaler Turbulenz hergeleitet. Diese ergeben sich aus dem Extremum der Martin-Siggia-Rose Wirkung (siehe Gleichung (3.32)), welches wir durch Funktionalableitungen nach den Feldern  $\omega(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)$  erhalten haben. Zusätzlich zu den bisher betrachteten Termen muss noch die Variation der Quellterme berücksichtigt werden. Da wir an den Momenten der Wirbelstärke interessiert sind, können wir  $\hat{\eta} = 0$  setzen und erhalten nur einen zusätzlichen Term  $\eta$  in der Instantongleichung für das Hilfsfeld. Dann ergeben sich die Instantongleichungen zweidimensionaler Turbulenz als

$$\dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t) = -i \int d^2 x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \quad (3.55a)$$

für das Wirbelfeld und

$$\dot{\hat{\omega}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) = - \int d^2 x' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t) + \eta \quad (3.55b)$$

für das Hilfsfeld. Zusammen mit dem Biot-Savart Gesetz (siehe Gleichung (2.15)) erhalten wir ein geschlossenes Gleichungssystem für die Evolution der wahrscheinlichsten Feldkonfiguration von  $\omega(\mathbf{x}, t)$  und  $\hat{\omega}(\mathbf{x}, t)$ . Diese Gleichungen sind über den Korrelationsterm in der Gleichung für die Wirbelstärke und durch das Geschwindigkeitsfeld sowie den Term auf der rechten Seite der Gleichung für das Hilfsfeld aneinander gekoppelt. Setzt man für  $\eta$  eine Superposition von Deltafunktionen (siehe (3.30))

$$\eta = \delta(t) \sum_i \alpha_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

ein, so wird durch diesen Term die Anfangsbedingung für das Hilfsfeld zur Zeit  $t = 0$  als  $\sum_i \alpha_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  festgelegt. Dann muss das Hilfsfeld rückwärts in der Zeit von  $t = 0$  bis zu  $t = t^* < 0$  gelöst werden. Das Wirbelfeld genügt beliebigen Anfangsbedingungen zur Zeit  $t^*$ .

In der Instantonnäherung bekommt auch das Hilfsfeld eine eigene Dynamik. Das liegt daran, dass das charakteristische Funktional, in dem das Hilfsfeld über ein Pfadintegral ausintegriert wird, mit dem Extremum der Wirkung genähert wird. Die Evolution des Hilfsfeldes und des Wirbelfeldes gemäß der Instantongleichungen stellt sicher, dass man sich stets auf dem Pfad befindet, der die maximale Übergangsamplitude hat (siehe Abbildung 3.2(b)).



## 4 PunktWirbellösung der Instantongleichungen

In Kapitel 2.3 haben wir das Konzept von Punktwirbeln als Konzept deltaförmiger Wirbel ausführlich diskutiert. Die Betrachtung einer endlicher Anzahl von Punkten reduziert die Integro-Differentialgleichung auf ein System von  $N$  herkömmlichen Differentialgleichungen. Im Folgenden wollen wir dieses Konzept benutzen, um die Instantongleichungen ohne Viskosität für deltaförmige Anfangsbedingungen zu lösen. Dafür werden wir eine Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  herleiten, die von der Vergangenheit des Systems abhängt. Wir werden Lösungen für zwei Punktewirbel in der Nähe der herkömmlichen Lösung zweier Punktewirbel suchen.

### 4.1 Instantongleichungen als Punktwirbelsystem

Im vorherigen Kapitel haben wir die Instantongleichungen aus der Martin-Siggia-Rose Wirkung hergeleitet. Sie lauten

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \omega + \nu \Delta \omega - i \int d^2 x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \\ \dot{\hat{\omega}} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\omega} - \nu \Delta \hat{\omega} - \underbrace{\int d^2 x' \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}', t)}_{=I^*} + \eta.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Für die Betrachtung von Punktewirbeln muss die Viskosität verschwinden. Gleicher gilt für den Term  $I^*$ , der Ähnlichkeiten mit dem Wirbelstreckungsterm dreidimensionaler Turbulenz hat. In diesem Kapitel betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \omega - i \int d^2 x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t) \\ \dot{\hat{\omega}} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\omega} + \eta\end{aligned}\quad (4.2)$$

anstelle der gesamten Instantongleichungen. An dieser Stelle kann das Vernachlässigen von  $I^*$  nicht begründet werden<sup>1</sup>.

Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass das Hilfsfeld zur Zeit der Beobachtung deltaförmige Anfangsbedingungen erfüllen muss. Diese Anfangsbedingung ist unabhängig vom Punktewirbelansatz und wird auch in späteren Kapiteln verwendet. Dies deutet

---

<sup>1</sup>Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass bei der Evolution elliptischer Wirbel  $I^*$  in erster Ordnung vernachlässigt werden kann.

darauf hin, dass ein PunktWirbelansatz sinnvoll ist und dass allgemeinere Lösungen in der Nachbarschaft von PunktWirbellösungen zu suchen sind<sup>2</sup>.

## 4.2 PunktWirbelansatz für das Hilfsfeld

Für den Grenzfall verschwindender Viskosität und unter Vernachlässigung von  $I^*$  erhalten wir die Gleichungen

$$\dot{\hat{\omega}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \hat{\omega} = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i) \alpha_i \delta(t) \quad (4.3a)$$

und

$$\dot{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = -i \int d^2x' Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}', t). \quad (4.3b)$$

Motiviert durch die Anfangsbedingung auf der rechte Seite von Gleichung (4.3a) machen wir für das Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  den PunktWirbelansatz

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, t) = -i \sum_i \hat{\Gamma}_i(t) \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i). \quad (4.4)$$

Einsetzen des Ansatzes (4.4) in Gleichung (4.3a) ergibt die Advektion der PunktWirbel im Hilfsfeld

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i(t) = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_i, t) \quad (4.5a)$$

und die Änderung der entsprechenden Zirkulation

$$-i\dot{\hat{\Gamma}}_i(t) = \alpha_i \delta(t). \quad (4.5b)$$

Die erste Gleichung besagt, dass die PunktWirbel durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  advektiert werden. Für PunktWirbel wird das Integral im Biot-Savart Gesetz auf eine Summe reduziert (siehe Gleichung (2.22)). Die zweite Gleichung besagt, dass  $\hat{\Gamma}_i$  einen Sprung bei  $t = 0$  hat. Da wir aus dem vorherigen Kapitel wissen, dass das Hilfsfeld rückwärts in der Zeit gelöst werden muss, erhalten wir

$$-i\hat{\Gamma}(t) = \alpha_i \Theta(-t). \quad (4.6)$$

Das heißt, die Zirkulation  $\hat{\Gamma}_i$  ist für  $t < 0$  konstant und sonst 0.

Mit der Evolutionsgleichung des Wirbelfeldes (4.3b) erhalten wir die extreme Wirkung

$$S_e = \frac{i}{2} \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_j \int_{t^*}^0 dt Q(\hat{\mathbf{r}}_{ij}(t)) \quad (4.7)$$

in Abhängigkeit des Abstandes  $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = \hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j$  über dem gesamten Zeitintervall  $(t^*, 0)$ . Für das Wirbelfeld  $\omega$  ergibt sich durch Einsetzen von (4.4) in (4.3b) die Gleichung

$$\dot{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) = \sum_i \hat{\Gamma}_i(t) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)). \quad (4.8)$$

---

<sup>2</sup>In Kapitel 5 erweitern wir den Ansatz zu elliptischen Wirbeln. Für die explizite Lösung beginnen wir mit einem PunktWirbelsystem und entwickeln ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der Evolution elliptischer Wirbel.

### 4.3 Das Wirbelfeld im Lagrange'schen Bezugssystem

Im Folgenden werden wir die Gleichung für die Wirbelstärke im Lagrange'schen Bezugssystem betrachten und eine Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  angeben, die von der gesamten Geschichte des Systems abhängt.

Wir haben bereits in Kapitel 2.4 die Grundlagen des Lagrange'schen Bezugssystems eingeführt. Das Wirbelfeld  $\omega$  schreiben wir als  $\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t))$ , wobei  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, 0) = \mathbf{y}$  gilt. Der Vektor  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$  wird durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  advektiert und beschreibt eine Trajektorie, die durch  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$  gegeben ist. Die Zeitableitung der Wirbelstärke

$$\frac{d}{dt}\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) + \frac{\partial\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)}{\partial t} \quad (4.9)$$

setzt sich dann aus der expliziten Zeitabhängigkeit und der Zeitabhängigkeit der Lagrange'schen Trajektorie zusammen. Diese Gleichung kann nach der expliziten Zeitableitung des Wirbelfeldes  $\partial_t\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$  umgestellt werden. Mit (4.8) erhält man dann eine Gleichung für die Änderung  $d/dt$  der Wirbelstärke. Diese lautet

$$\frac{d}{dt}\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \sum_i \hat{\Gamma}_i Q(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_i(t)), \quad (4.10)$$

wobei wegen  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$  die Advektionsterme sich gegenseitig aufheben. Integration über  $t$  liefert die Lösung

$$\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \sum_i \hat{\Gamma}_i \int_0^t dt' Q(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t') - \mathbf{x}_i(t')) + \omega_0 \quad (4.11)$$

für das Wirbelfeld entlang der Lagrange'schen Trajektorie  $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ . Über das Biot-Savart Gesetz kann daraus das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \int d^2x' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}')}{2\pi|\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}'|^2} \omega(\mathbf{x}', t) \quad (4.12)$$

bestimmt werden. Benutzt man, dass die Jakobideterminante  $|\frac{d\mathbf{y}'}{d\mathbf{x}'}|$  aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  gleich 1 ist (siehe Kapitel 2.4), so kann die Integration über  $x'$  durch eine Integration über  $y'$  ersetzt werden und man erhält

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \int d^2y' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(y', t))}{2\pi|\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(y', t)|^2} \omega(\mathbf{x}(y', t), t). \quad (4.13)$$

Jetzt können wir  $\omega(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$  aus Gleichung (4.11) einsetzen und erhalten das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \sum_i \hat{\Gamma}_i \int d^2y' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(y', t))}{2\pi|\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(y', t)|^2} \int_0^t dt' Q(\mathbf{x}(y', t') - \mathbf{x}_i(t')) + \mathbf{u}_0, \quad (4.14)$$

das von der Evolution des Systems im gesamten Zeitintervall  $(0, t)$  abhängt.

## 4.4 Zwei Punktwirbel

Zur Untersuchung der Abweichung des hier betrachteten Systems  $\mathbf{s}_i$  von der herkömmlichen Lösung für zwei Punktwirbel  $\mathbf{x}_i$  soll für eine kleine Störung eine Relation der Form  $\mathbf{s}_i(t) = (I^{(2)} + S(t))\mathbf{x}_i(t)$  abgeleitet werden, wobei  $I^{(2)}$  die zweidimensionale Einheitsmatrix und  $S(t)$  eine  $2 \times 2$  Matrix ist.

Wir gehen von dem in Gleichung (4.14) gegebenen Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t) = \sum_i \hat{\Gamma}_i \int d^2 y' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{y}', t))}{2\pi |\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{y}', t)|^2} \int_0^t dt' Q(\mathbf{x}(\mathbf{y}', t') - \mathbf{x}_i(t')) + \mathbf{u}^0 \quad (4.15)$$

aus. An dieser Stelle betrachten wir das Zeitintervall von 0 bis  $t$  anstatt von  $t^* < 0$  bis 0. Aufgrund der periodischen Bewegung des Hilfsfeldes (herkömmliches System zweier Punktwirbel) ist es in diesem Spezialfall nicht notwendig, einen Endzeitpunkt festzulegen, sodass  $t$  beliebig lange laufen kann. Durch die im Folgenden vorgenommene Approximationen ist eine Betrachtung jedoch nur in einem endlichen Zeitrahmen sinnvoll.

Für die Korrelation  $Q(\mathbf{x})$  wählen wir eine Deltafunktion

$$Q(\mathbf{x}) = 2\pi q \delta(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

wobei  $q \ll 1$  (wir wählen die Zirkulationen  $|\Gamma_i| = 1$  und  $|\hat{\Gamma}_i| = 1$ ) ein kleiner Parameter ist, sodass der Korrelationsteil als kleine Störung betrachtet werden kann. Die Wahl von  $Q$  ist dadurch motiviert, dass sich bei zweidimensionaler Turbulenz die Phänomenologie der inversen Kaskade auf Skalen abspielt, die größer sind als die Skalen der Anregung. Dies kann am Einfachsten durch eine deltaförmige Korrelation erreicht werden<sup>3</sup>.

Sei  $\mathbf{x}_i$  die bekannte Lösung für zwei Punktwirbel. Wir betrachten eine Abweichung von dieser Lösung, indem wir das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  zerlegen in

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}' \quad (4.17a)$$

sodass  $\mathbf{x}_i$  durch

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_i(t)) \quad (4.17b)$$

advektiert wird und  $\mathbf{s}_i$  durch das gesamte Geschwindigkeitsfeld

$$\dot{\mathbf{s}}_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{s}_i(t), t) = \mathbf{u}^0(\mathbf{s}_i(t)) + \mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t), t) \quad (4.17c)$$

advektiert wird. Dabei ist

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}_i(t)) = \sum_{j \neq i} \Gamma_j \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t))}{2\pi |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)|^2} \quad (4.18)$$

---

<sup>3</sup>Wir werden in einem späteren Kapitel eine Korrelation mit endlicher Breite und elliptische Wirbel betrachten.

das Geschwindigkeitsfeld der herkömmlichen Lösung eines Systems mit zwei Punktwirbeln. Die Lösung für  $\mathbf{x}_i$  ist dann bekannt (siehe Kapitel 2.3). Mit der Korrektur

$$\mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t), t) = q \sum_{j \neq i} \hat{\Gamma}_j \int_0^t dt' \int d^2 y' \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{x}(y', t))}{2\pi |\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{x}(y', t)|^2} \delta(\mathbf{x}(y', t') - \mathbf{s}_j(t')) \quad (4.19)$$

zum gesamten Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  erhält man

$$\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + \int_0^t dt' \mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t'), t'), \quad (4.20)$$

wobei  $\mathbf{x}_i$  die herkömmliche Punktwirbellösung beschreibt und  $\mathbf{s}_i$  die Lösung des durch Gleichung (4.15) beschriebenen Systems ist.

Für kleine Zeiten  $t \approx 0$  können wir

$$\mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t), t) = \hat{\Gamma}_j \int_0^t dt' \int d^2 y' \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{x}(y', t))}{2\pi |\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{x}(y', t)|^2} \delta(\mathbf{x}(y', t') - \mathbf{s}_j(t')) \quad (4.21)$$

durch

$$\mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t), t) \approx \hat{\Gamma}_j \int_0^t dt' \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{s}_j(t'))}{2\pi |\mathbf{s}_i(t) - \mathbf{s}_j(t')|^2} \quad (4.22)$$

approximieren, indem wir im Integranden  $\mathbf{x}(y', t)$  durch  $\mathbf{x}(y', t')$  ersetzen. Wegen  $q \ll 1$  kann der  $\mathbf{u}'$  Teil störungstheoretisch betrachtet werden. Das heißt, dass die Integration über die Abweichung des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}'$  näherungsweise über die bekannte Trajektorie  $\mathbf{x}_i$  anstelle von  $\mathbf{s}_i$  durchgeführt werden kann. Man erhält

$$\mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t), t) \approx \hat{\Gamma}_j \int_0^t dt' \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t'))}{2\pi |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t')|^2} \approx \hat{\Gamma}_j \int_0^t dt' \mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_j(t') - \mathbf{x}_i(t'))}{2\pi |\mathbf{x}_j(t') - \mathbf{x}_i(t')|^2}, \quad (4.23)$$

wobei wir  $\mathbf{x}_j(t) \approx \mathbf{x}_j(t')$  genähert haben. Man erhält

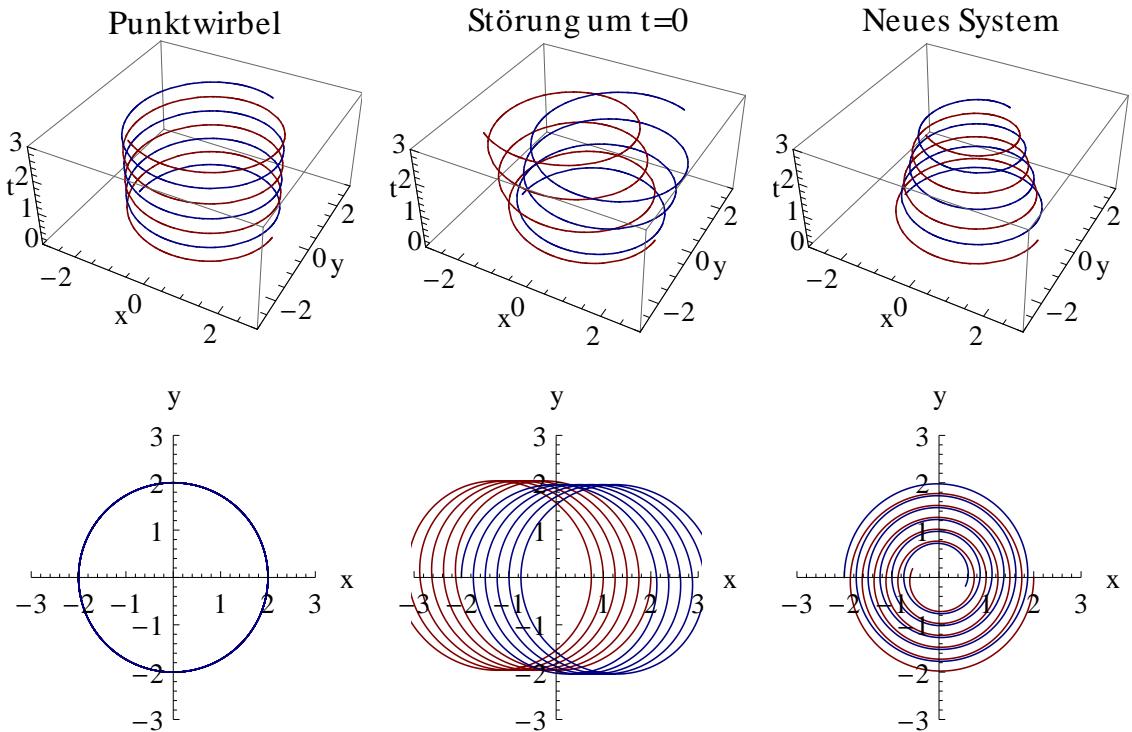
$$\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) + \int_0^t dt' \mathbf{u}'(\mathbf{s}_i(t'), t') \approx \mathbf{x}_i(t) + \int_0^t dt' \mathbf{u}'(\mathbf{x}_i(t'), t'). \quad (4.24)$$

Wir führen  $\chi_i = \mathbf{s}_i - \mathbf{x}_i$  als Abweichung des Systems von der herkömmlichen Punktwirbellösung ein. Die Evolution von  $\chi$  ist dann durch  $\dot{\chi}_i(t) \approx \mathbf{u}'(\mathbf{x}_i(t), t)$  gegeben. Wir erhalten für  $\chi_1$  und  $\chi_2$  die Gleichungen

$$\dot{\chi}_1(t) \approx q \hat{\Gamma}_2 \int_0^t dt' \underbrace{\mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_1(t') - \mathbf{x}_2(t'))}{2\pi |\mathbf{x}_1(t') - \mathbf{x}_2(t')|^2}}_{= \dot{\mathbf{x}}_1(t') \Gamma_2^{-1}} = q \frac{\hat{\Gamma}_2}{\Gamma_2} [\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_1(0)] \quad (4.25a)$$

und

$$\dot{\chi}_2(t) \approx q \hat{\Gamma}_1 \int_0^t dt' \underbrace{\mathbf{e}_z \times \frac{(\mathbf{x}_2(t') - \mathbf{x}_1(t'))}{2\pi |\mathbf{x}_2(t') - \mathbf{x}_1(t')|^2}}_{= \dot{\mathbf{x}}_2(t') \Gamma_1^{-1}} = q \frac{\hat{\Gamma}_1}{\Gamma_1} [\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(0)]. \quad (4.25b)$$



**Abbildung 4.1:** Links: PunktWirbellösung zu  $\mathbf{u}_0$ , mitte: Lösung für kleine Zeiten  $t \approx 0$ , rechts: mitrotierte Störung

#### 4.4.1 Wirbel gleicher Zirkulation

Im Folgenden betrachten wir Wirbel gleicher Wirbelstärken  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Außerdem soll  $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$  gelten, sodass  $q = q \frac{\hat{\Gamma}_1}{\Gamma_1} = q \frac{\hat{\Gamma}_2}{\Gamma_2}$  reskaliert werden kann. Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_i(t) &= \mathbf{x}_i(t) + \boldsymbol{\chi}_i(t), \\ \mathbf{x}_i(t) &= U(\vartheta t) \mathbf{x}_i(0), \\ \dot{\boldsymbol{\chi}}_i(t) &= q [\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da wir die Evolution von  $\mathbf{x}_i(t)$  kennen, können wir die letzte Gleichung als

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i(t) = q [U(\vartheta t) - \mathcal{I}] \mathbf{x}_i(0) \quad (4.27)$$

schreiben. Dabei ist  $\mathcal{I}$  die zweidimensionale Einheitsmatrix und  $U(\vartheta t)$  die  $SO(2)$  Drehmatrix

$$U(\vartheta t) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta t & \sin \vartheta t \\ -\sin \vartheta t & \cos \vartheta t \end{pmatrix}$$

sowie  $\vartheta$  die Rotationsfrequenz der PunktWirbel gemäß

$$\vartheta = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2}.$$

Um Gleichung (4.27) explizit zu berechnen, definieren wir die Matrix

$$U_\chi(\vartheta t) = \int_0^t U(\vartheta t') dt' - t\mathcal{I} = \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \sin \vartheta t - t\vartheta & 1 - \cos \vartheta t \\ \cos \vartheta t - 1 & \sin \vartheta t - t\vartheta \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Dann können wir mit Gleichung (4.26) und der Anfangsbedingung  $\boldsymbol{\chi}_i(0) = 0$  die Abweichung als

$$\boldsymbol{\chi}_i(t) = qU_\chi(t)\boldsymbol{x}_i(0) \quad (4.29)$$

schreiben. Mit  $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\chi}$  erhalten wir

$$\boldsymbol{s}_i(t) = [U(\vartheta t) + qU_\chi(t)]\boldsymbol{x}_i(0). \quad (4.30)$$

Die Lösung ist in Abbildung 4.1 in der Mitte dargestellt. Die PunktWirbel führen eine Rotation analog zum bekannten Problem aus, jedoch wird diese von einer Translation überlagert, die zu einer Annäherung der PunktWirbel entlang der VerbindungsLinie ihrer Startpunkte führt. Die Lösung ist nur für kleine Zeiten  $t \approx 0$  gültig, die Darstellung in der oben genannten Abbildung extrapoliert diese Lösung auch für größere Zeiten, was dazu führt, dass die PunktWirbel sich aneinander vorbei bewegen.

Man kann die Lösung für größere Zeiten verbessern, wenn man die Abweichung  $\boldsymbol{\chi}(t)$  mitrotiert. Das bedeutet, man wiederholt die oben erklärten Näherungen für jeden Zeitpunkt  $t_l$  in der Umgebung um  $\boldsymbol{x}_i(t_l)$  und erhält jeweils eine Lösung, die in einer kleinen Umgebung  $(t - t_l) \approx 0$  gültig ist. Die Kombination aller solcher Lösungen kann durch den Übergang

$$\boldsymbol{\chi}_i(t) \rightarrow U(\vartheta t)\boldsymbol{\chi}_i(t) \quad (4.31)$$

dargestellt werden. Die Gültigkeit dieser Lösungen ist dadurch beschränkt, dass wir den zusätzlichen Term  $\boldsymbol{u}'$  als Störung betrachtet haben und somit nur in der Nachbarschaft der herkömmlichen PunktWirbellösungen  $\boldsymbol{x}_i$  gültige Lösungen erhalten. Die Lösungen bei mitrotiertem  $\boldsymbol{\chi}_i(t)$  lauten<sup>4</sup>

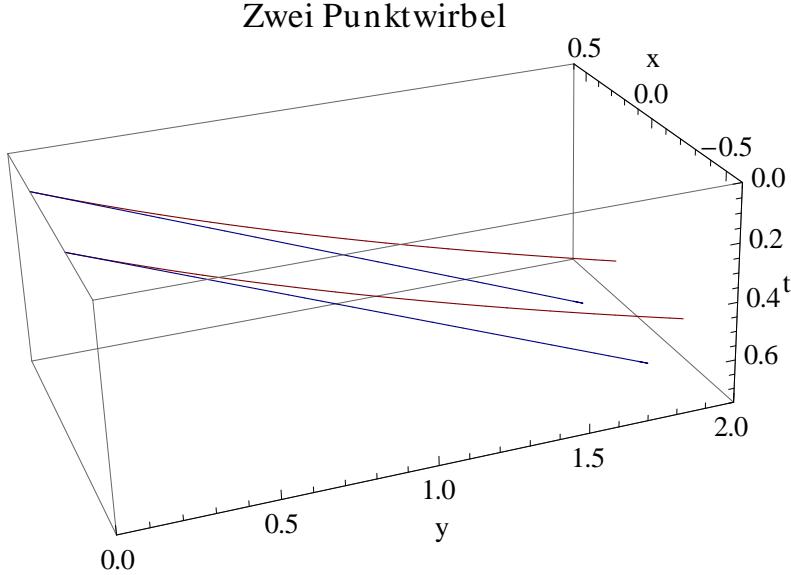
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_i(t) &= qU(\vartheta t)U_\chi(t)\boldsymbol{x}_i(0) \\ \boldsymbol{s}_i(t) &= (\mathcal{I} + qU_\chi(t))U(\vartheta t)\boldsymbol{x}_i(0) = (\mathcal{I} + qU_\chi(t))\boldsymbol{x}_i(t). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die Trajektorien dieser Lösungen sind in der rechten Spalte von Abbildung 4.1 dargestellt. Die PunktWirbel nähern sich einander auf spiralförmigen Bahnen an. Es sei angemerkt, dass diese Lösungen nur in der Nähe der herkömmlichen PunktWirbellösung (Abb. 4.1, links) gelten. Die Verschmelzung von Wirbeln in zweidimensionalen Strömungen wurde von Nielsen et al. in [14] beobachtet und ist konsistent mit den Ergebnissen aus dem folgenden Kapitel über elliptische Wirbel.

#### 4.4.2 Wirbel entgegengesetzter Zirkulation

Wir wollen den Fall entgegengesetzter Zirkulationen  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  betrachten. Die Zirkulationen der PunktWirbel im Hilfsfeld seien auch entgegengesetzt mit  $\hat{\Gamma}_1 = -\hat{\Gamma}_2$ . Es gilt nach

<sup>4</sup>Man kann schnell nachrechnen, dass der Kommutator  $[U(\vartheta t), U_\chi(t)]$  verschwindet. Dann gilt  $(U(\vartheta t) + qU(\vartheta t)U_\chi(t))\boldsymbol{x}_i(0) = (\mathcal{I} + qU_\chi(t))\boldsymbol{x}_i(t)$  mit  $\boldsymbol{x}_i(t) = U(\vartheta t)\boldsymbol{x}_i(0)$ .



**Abbildung 4.2:** Zwei PunktWirbel entgegengesetzter Zirkulationen. Blau: herkömmliche Lösung, rot: Lösung aus Gleichung (4.36). Die Lösung ist im Vergleich zur herkömmlichen Lösung beschleunigt.

Reskalierung von  $q$

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_1(t) &= q [\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_1(0)] \\ \dot{\chi}_2(t) &= q [\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_2(0)].\end{aligned}\tag{4.33}$$

Aus Kapitel 2.3 sind die Lösungen für  $\mathbf{x}_i(t)$  bekannt und lauten

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= t \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2} + \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(t) &= t \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2} + \mathbf{x}_2(0)\end{aligned}\tag{4.34}$$

mit  $\mathbf{d} = \mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_2(0)$ . Setzt man die Gleichungen für  $\mathbf{x}_i$  in Gleichung (4.33) ein, so erhält man

$$\chi_i(t) = q \int_0^t dt' t' \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2} = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2}.\tag{4.35}$$

Jetzt können wir  $\mathbf{s}_i(t)$  als Summe von  $\mathbf{x}_i(t)$  und  $\chi_i(t)$  gemäß

$$\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{x}_i(0) + \left( t + \frac{q}{2} t^2 \right) \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}}{2\pi d^2}\tag{4.36}$$

schreiben. Der zusätzliche Term  $q/2 t^2$  führt zu einer Beschleunigung der Bewegung der PunktWirbel, lässt den Abstand  $\mathbf{d}$  aber konstant, wie man an den Trajektorien in Abbildung 4.2 sehen kann.

## 4.5 Zusammenfassung

Wir haben ausgehend von einem Punktwirbelansatz für das Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  aus den Instantongleichungen im Lagrange'schen Bezugssystem eine Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$  abgeleitet. Dabei hängt die Geschwindigkeit am Punkt  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  von dem Zustand des Systems im gesamten Zeitintervall  $(0, t)$  ab. Wir haben durch einen störungstheoretischen Ansatz die Konsequenzen dieses Geschwindigkeitsfeldes für ein System von zwei Punktwirbeln betrachtet. Für entgegengesetzte Zirkulationen  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  ergibt sich eine Beschleunigung der Bewegung, während der Abstand der Punktwirbel konstant bleibt. Im Falle gleicher Zirkulationen  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  nähern die Punktwirbel sich einander an, was zu neuen Skalenbereichen führt. Die Tendenz von Wirbeln gleicher Zirkulation sich anzunähern ist konsistent mit der Vorstellung der inversen Kaskade als ein Prozess, der aus vielen kleinskaligen Wirbeln gleicher Zirkulation Cluster bildet, die sich wie großskalige Wirbel verhalten. Wir werden im Laufe dieser Arbeit jedoch noch weitere wichtige Faktoren für die Clusterbildung thematisieren und ein konkretes dynamisches Modell vorstellen, das diese Phänomenologie erklärt.



# 5 Modellierung durch elliptische Wirbel

Der Instantonformalismus verknüpft statistische Eigenschaften mit einem dynamischen System, das die Evolution der wahrscheinlichsten Feldkonfiguration beschreibt. Dies wollen wir benutzen, um die Dynamik zu extrahieren, die zur Bildung einer inversen Kaskade führt. Aus Experimenten und direkten numerischen Simulationen (DNS) ist bekannt, dass bei der inversen Kaskade Wirbelstrukturen in eine Richtung elongiert und in eine Richtung kontrahiert werden (siehe [13]). Das einfachste Modell, das diese Phänomenologie enthält, besteht aus elliptischen Wirbelstrukturen, deren Haupt- und Nebenachsen elongiert bzw. kontrahiert werden können. Wir machen einen Ansatz elliptischer Wirbel und elliptischer Strukturen im Hilfsfeld und berechnen die Evolutionsgleichungen der wahrscheinlichsten Feldkonfiguration. Das Fernfeld elliptischer Wirbel kann durch zwei Punktwirbel gleicher Zirkulation approximiert werden, die in einem bestimmten Abstand auf der Hauptachse der Ellipse lokalisiert sind. Dies ist vorteilhaft, um ein System von vielen Wirbeln zu untersuchen. Es zeigt sich, dass ein solches System große Cluster von Wirbelpaaren gleicher Zirkulation bildet (siehe [23]).

## 5.1 Modell elliptischer Wirbel

Die Beschreibung elliptischer Wirbel wurde bereits 1984 von Melander [24] vorgenommen. In einem 2006 veröffentlichten Paper beobachteten Chen et al. [13], dass die elliptische Elongation von Wirbeln maßgeblich zur Bildung einer inversen Kaskade beiträgt. Dies verdeutlicht, dass ein elliptisches Wirbelmodell zur Beschreibung dieser Dynamik geeignet ist, da durch Elongation der Hauptachsen und Kontraktion der Nebenachsen die Wirbelstrukturen die Möglichkeit haben, lange und dünne Strukturen zu bilden (*vortex thinning*).

Um elliptische Wirbel zu modellieren, machen wir im Ortsraum für das Wirbelfeld und das rein imaginäre Hilfsfeld den Ansatz<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{x}, t) &= \sum_i \Gamma_i \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i(t))C_i^{-1}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i(t))}}{\sqrt{\det(C_i)}} \\ \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) &= i \sum_i \hat{\Gamma}_i \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_i(t))\hat{C}_i^{-1}(t)(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}_i(t))}}{\sqrt{\det(\hat{C}_i)}}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

---

<sup>1</sup>Wir schreiben hier die inverse Matrix  $C^{-1}$ , damit im  $k$ -Raum die Matrix  $C$  steht. Siehe Gleichung (5.5).

Dabei sind  $C_i$  und  $\hat{C}_i$  symmetrische<sup>2</sup>  $2 \times 2$  Matrizen,  $\mathbf{x}_i(t)$  und  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  beschreiben die Mittelpunkte der entsprechenden Ellipsen und  $\Gamma_i$  die Zirkulation des  $i$ -ten Wirbels sowie  $\hat{\Gamma}_i$  die Stärke der  $i$ -ten elliptischen Struktur im Hilfsfeld.

Wir haben bereits in vorherigen Kapiteln gesehen, dass  $\omega$  und  $\hat{\omega}$  Anfangsbedingungen zu verschiedenen Zeiten erfüllen müssen. Das Hilfsfeld ist zur Zeit  $t = 0$  deltaförmig und das Wirbelfeld wird zur Zeit  $t^* < 0$  vorgegeben. Das Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  muss dann rückwärts in der Zeit gelöst werden. Die Anfangsbedingungen lauten

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \sum_i \alpha_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (5.2)$$

$$\omega(\mathbf{x}, t^*) = \omega_0(\mathbf{x}). \quad (5.3)$$

### 5.1.1 Wirkung und Ansatz im Fourieraum

Aus der Martin-Siggia-Rose Wirkung wollen wir die Evolutionsgleichungen für die wahrscheinlichste Feldkonfiguration bestimmen. Durch den Ansatz elliptischer Wirbel reduziert sich das Problem auf die Betrachtung der Evolution von  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{x}_i$ ,  $C_i$  sowie  $\hat{\Gamma}_i$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_i$  und  $\hat{C}_i$ . Dazu benutzen wir die Darstellung im  $k$ -Raum. Man kann die Martin-Siggia-Rose Wirkung im Fourieraum als

$$S = \int d^2k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) \left[ \dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) + \nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) \right] + \frac{i}{2} \int d^2k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \quad (5.4)$$

schreiben. Dabei ist  $\mathbf{u}(\mathbf{k}) = i \frac{e_z \times \mathbf{k}}{4\pi^2 k^2}$  die Fouriertransformierte des Geschwindigkeitsfeldes eines Punktwirbels im Koordinatenursprung. Eine Herleitung sowie die Variation nach dem Wirbel- und Hilfsfeld, die zu den Instantongleichungen in  $k$ -Raum führt, ist im Anhang (siehe A.5) zu finden.

Die Fouriertransformierte des Ansatzes aus Gleichung (5.1) lautet

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}, t) &= \sum_{i=1}^n \Gamma_i e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} C_i \mathbf{k}}, \\ \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) &= i \sum_{i=1}^m \hat{\Gamma}_i e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Größen  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{x}_i$  und  $C_i$  sowie die korrespondierenden Größen für das Hilfsfeld hängen explizit von der Zeit ab. Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned} \omega_i(\mathbf{k}, t) &= e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} C_i \mathbf{k}}, \\ \hat{\omega}_i(\mathbf{k}, t) &= i e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

<sup>2</sup>Wegen  $\mathbf{x} C^{-1} \mathbf{x} = \sum_{kl} x_k C_{kl}^{-1} x_l$  muss  $C_{kl}^{-1} = C_{lk}^{-1}$  sein. Anschaulich bedeutet dies, dass wir die Form der Ellipsen durch 3 Parameter beschreiben können, z.B. die Länge der Haupt- und Nebenachse sowie ein Winkel für die Neigung der Ellipse.

## 5.2 Annahmen und Approximationen

Um die Bewegungsgleichungen für die einzelnen Feldparameter herzuleiten, machen wir folgende Annahmen:

1. Es seien  $n = m = N$  Wirbel und elliptische Strukturen vorhanden.
2. Die Strukturen im Hilfsfeld seien so positioniert, dass der Mittelpunkt  $\hat{\mathbf{x}}_i$  der  $i$ -ten Struktur zu jeder Zeit in der Nähe des Mittelpunktes  $\mathbf{x}_i$  des  $i$ -ten Wirbels sei. Das bedeutet, dass

$$|\mathbf{x}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_i(t)| \ll \text{Ausdehnung der Wirbel} \quad (5.7)$$

gilt.

3. Die Wirbel und elliptischen Strukturen seien isoliert, sodass der Überlapp vernachlässigt werden kann. Das bedeutet, dass

$$\forall i \neq j : |\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)| \gg \text{Ausdehnung der Wirbel} \quad (5.8a)$$

und

$$\forall i \neq j : |\hat{\mathbf{x}}_i(t) - \hat{\mathbf{x}}_j(t)| \gg \text{Ausdehnung der elliptischen Strukturen} \quad (5.8b)$$

gilt.

Diese Annahmen ermöglichen es uns, die Evolutionsgleichungen der Parameter in einer möglichst einfachen Form aus der MSR-Wirkung oder den Instantongleichungen zu extrahieren. Wir werden später an einem expliziten Beispiel sehen, dass die Annahme der isolierten Wirbel konsistent mit der Lösung der Gleichungen ist, indem wir das Volumen des Überlapps ausrechnen und mit den übrigen Termen vergleichen. Die Annahme der isolierten Wirbel macht es unmöglich, das Verschmelzen von Wirbeln zu studieren, da das Überlappen der Wirbel eine intrinsische Eigenschaft der Verschmelzung darstellt. Die Annahme, dass der Abstand zwischen dem  $i$ -ten Wirbel und der  $i$ -ten elliptischen Struktur klein sei, ermöglicht es uns, die Gleichungen numerisch ohne großen Aufwand zu lösen.

## 5.3 Berechnung der Evolutionsgleichungen elliptischer Wirbel

### 5.3.1 Bewegungsgleichungen für das Wirbelfeld

Im Anhang wurde gezeigt, wie die Instantongleichungen im  $k$ -Raum aus der Wirkung erhalten werden können. Die Instantongleichung für das Wirbelfeld lautet

$$\dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) + \nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) = -iQ(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t). \quad (5.9)$$

Dies folgt natürlich auch direkt, wenn man die Instantongleichung aus Gleichung (3.55a) in den  $k$ -Raum transformiert. Wir setzen den oben beschriebenen Ansatz elliptischer Wirbel für das Wirbelfeld und das Hilfsfeld ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_i \Gamma_i \omega_i(\mathbf{k}) \left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} \right] - i\mathbf{k} \cdot \sum_{ij} \Gamma_i \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega_j(\mathbf{k}') \\ + \nu k^2 \sum_i \Gamma_i \omega_i(\mathbf{k}) = -iQ(\mathbf{k}) \sum_i \hat{\Gamma}_i \hat{\omega}_i(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Wir schreiben die Zeitabhängigkeit in  $\omega_i(\mathbf{k}, t)$  und  $\hat{\omega}_i(\mathbf{k}, t)$  nicht mehr explizit. Über  $\mathbf{x}_i$  und  $C_i$  bzw.  $\hat{\mathbf{x}}_i$  und  $\hat{C}_i$  hängen diese Größen jedoch von der Zeit ab.

Wir haben angenommen, dass die Wirbel isoliert seien, was dazu führt, dass wir auf der linken Seite der Gleichung die Summe  $\sum_i$  weglassen können, weil die Gleichung aufgrund des verschwindenden Überlapps für jeden Wirbel einzeln erfüllt sein muss. Die Summe im Advektionsterm  $\sum_j \Gamma_j$  bleibt erhalten, weil der Advektionsterm die Form einer Faltung hat und daher den  $i$ -ten Wirbel mit dem  $j$ -ten Wirbel an jedem Punkt im Raum verbindet. Auf der rechten Seite können wir die Summe über  $i$  weglassen, da wir annehmen, dass der  $i$ -te Wirbel nur mit der  $i$ -ten Struktur im Hilfsfeld überlappt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega_i(\mathbf{k}) \left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} \right] - i\mathbf{k} \cdot \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega_j(\mathbf{k}') \\ + \nu k^2 \omega_i(\mathbf{k}) = -iQ(\mathbf{k}) \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \hat{\omega}_i(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wir teilen diese Gleichung durch  $\omega_i(\mathbf{k})$  und setzen die Exponentialfunktionen für  $\omega_i$  und  $\hat{\omega}_i$  aus Gleichung (5.6) explizit ein. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} - i\mathbf{k} \cdot \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \\ \times e^{\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot C_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot C_i \mathbf{k}} + \nu k^2 = q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot (\hat{C}_i + \tilde{Q} - C_i) \mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Jetzt entwickeln wir die Exponentialfunktionen

$$e^{\frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot C_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot C_i \mathbf{k}} \approx 1 + \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot C_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot C_i \mathbf{k} \quad (5.13a)$$

und

$$e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot (\hat{C}_i + \tilde{Q} - C_i) \mathbf{k}} \approx 1 + i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot (\hat{C}_i + \tilde{Q} - C_i) \mathbf{k} \quad (5.13b)$$

in führender Ordnung der Matrizen  $C_i$  und  $\hat{C}_i$ . Damit folgt aus Gleichung (5.12)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{C}_i\mathbf{k} - i\mathbf{k} \cdot \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik'\cdot(x_i-x_j)-\frac{1}{2}k'(C_i+C_j)\mathbf{k}'} \\ \times \left(1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}C_i\mathbf{k}' + \frac{1}{2}\mathbf{k}'C_i\mathbf{k}\right) + \nu k^2 = q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \left(1 + i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) - \frac{1}{2}\mathbf{k}(\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i)\mathbf{k}\right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Damit diese Gleichung für alle  $\mathbf{k}$  erfüllt ist, muss für jede Ordnung in  $\mathbf{k}$  die Gleichung einzeln erfüllt sein. Wir finden sofort

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} &= q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i}, \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik'\cdot(x_i-x_j)-\frac{1}{2}k'(C_i+C_j)\mathbf{k}'} + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i), \\ -\frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{C}_i\mathbf{k} &= i\mathbf{k} \cdot \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik'\cdot(x_i-x_j)-\frac{1}{2}k'(C_i+C_j)\mathbf{k}'} \left[ \frac{1}{2}\mathbf{k}C_i\mathbf{k}' + \frac{1}{2}\mathbf{k}'C_i\mathbf{k} \right] \\ &\quad - \nu k^2 - \frac{1}{2}q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \mathbf{k}(\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wir definieren die Advektion

$$\mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}) = \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik'\cdot x - \frac{1}{2}k'(C_i+C_j)\mathbf{k}'} \quad (5.16)$$

und die Deformation<sup>3</sup>

$$S_{ij}(\mathbf{x}) = -i \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k}'^T e^{-ik'\cdot x - \frac{1}{2}k'(C_i+C_j)\mathbf{k}'} = \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}) \overleftarrow{\nabla}^T. \quad (5.17)$$

$\overleftarrow{\nabla}^T$  steht für das Transponierte des nach links wirkenden Nablaoperators. Dadurch ergibt sich eine  $2 \times 2$  Matrix.

Wir erhalten die Evolutionsgleichungen der elliptischen Wirbel als

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_i &= q\hat{\Gamma}_i, \\ \dot{\mathbf{x}}_i &= \sum_j \Gamma_j \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i), \\ \dot{C}_i &= \sum_j \Gamma_j \left[ S_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) C_i + C_i S_{ij}^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \textcolor{blue}{+ 2\nu\mathcal{I}} \textcolor{red}{+ q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$\mathcal{I}$  steht hier für die zweidimensionale Einheitsmatrix. Wir werden die Gleichungen und insbesondere den Einfluss der farblich gekennzeichneten Terme im Laufe dieses Kapitels ausführlich diskutieren.

---

<sup>3</sup>Für eine Herleitung siehe A.6.

### 5.3.2 Bewegungsgleichungen für das Hilfsfeld

Für das Hilfsfeld lautet die Instantongleichung im  $k$ -Raum

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) - \nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \\ = i\mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \int d^2 k' \mathbf{k}' \hat{\omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t). \quad (5.19)\end{aligned}$$

Wir setzen den Ansatz für die Felder ein und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_i \hat{\Gamma}_i e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}} \left[ \frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{\hat{C}}_i \mathbf{k} \right] \\ - i\mathbf{k} \cdot \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{x}}_i + ik' \cdot \mathbf{x}_j - \frac{1}{2} (\mathbf{k}-\mathbf{k}') \hat{C}_i (\mathbf{k}-\mathbf{k}') - \frac{1}{2} k' C_j k'} \\ - \nu k^2 \sum_i \hat{\Gamma}_i e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}} = i \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \int d^2 k' \mathbf{k}' \hat{\omega}_i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega_j(\mathbf{k}'). \quad (5.20)\end{aligned}$$

Wir vernachlässigen an dieser Stelle die rechte Seite der Gleichung, was im Folgenden ausführlich begründet wird. Wegen der Annahme isolierter Wirbel muss die Gleichung für jedes Element der Summe über  $i$  einzeln gelten und es folgt

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{\hat{C}}_i \mathbf{k} - i\mathbf{k} \cdot \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} k' (\hat{C}_i + C_j) k'} e^{\frac{1}{2} \mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \hat{C}_i \mathbf{k}} \\ - \nu k^2 = 0. \quad (5.21)\end{aligned}$$

In Analogie zur Berechnung der Bewegungsgleichungen für das Wirbelfeld entwickeln wir die Exponentialfunktion

$$e^{\frac{1}{2} \mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \hat{C}_i \mathbf{k}} \approx 1 + \frac{1}{2} \mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' \hat{C}_i \mathbf{k} \quad (5.22)$$

und benutzen wieder, dass die Gleichung für jede Ordnung in  $\mathbf{k}$  separat erfüllt sein muss. Dann folgen in Analogie zu den Bewegungsgleichungen der Wirbel mit der Advektion des Hilfsfeldes

$$\hat{\mathbf{U}}_{ij}(\mathbf{x}) = \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} k' (\hat{C}_i + C_j) k'} \quad (5.23)$$

und der Deformation des Hilfsfeldes

$$\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{U}}_{ij}(\mathbf{x}) \overleftarrow{\nabla}^T \quad (5.24)$$

die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\Gamma}}_i &= 0, \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i &= \sum_j \Gamma_j \hat{\mathbf{U}}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j), \\ \dot{\hat{C}}_i &= \sum_j \Gamma_j \left[ \hat{S}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \hat{C}_i + \hat{C}_i \hat{S}_{ij}^T(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \right] - 2\nu \mathcal{I}. \quad (5.25)\end{aligned}$$

Man sieht, dass der Viskositätsterm ([blauer Term](#)) ein anderes Vorzeichen als beim Wirbelfeld hat. Das wird im Laufe dieses Kapitels diskutiert.

Um den Einfluss der rechten Seite von Gleichung (5.20) zu berücksichtigen, betrachten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}} \left[ \frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + i\mathbf{k} \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k}\dot{\hat{C}}_i\mathbf{k} \right] \\ &= i\mathbf{u}(\mathbf{k})e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}} \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{k}' e^{-ik' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2}\mathbf{k}'(\hat{C}_i + C_j)\mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2}\mathbf{k}'\hat{C}_i\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}' \right). \quad (5.26) \end{aligned}$$

Sie folgt aus den Zeitableitungstermen auf der linken Seite und dem Term auf der rechten Seite von Gleichung (5.20) nach Multiplikation mit  $\exp[-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}]$ . Da  $\mathbf{u}(\mathbf{k})$  proportional zu  $1/k$  ist, sind die  $\mathcal{O}(\hat{C}_i)$  Terme auf der rechten Seite proportional zu  $k^0$ . Terme proportional zu  $k$  oder  $k^2$  erhält man erst in  $\mathcal{O}(\hat{C}_i^2)$  bzw.  $\mathcal{O}(\hat{C}_i^3)$ . In führender Ordnung erhalten wir also keine Beiträge zu den Bewegungsgleichungen von  $\hat{\mathbf{x}}_i$  und  $\hat{C}_i$ , da diese proportional zu  $k$  bzw.  $k^2$  sind. Der Beitrag zu  $\hat{\Gamma}_i$  ist dann durch

$$e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}} \frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} = i\mathbf{u}(\mathbf{k})e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}} \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{k}' e^{-ik' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2}\mathbf{k}'(\hat{C}_i + C_j)\mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2}\mathbf{k}'\hat{C}_i\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}' \right)$$

gegeben. Wir integrieren beide Seiten bezüglich  $\int \frac{d^2k}{2\pi}$  und erhalten:

$$\dot{\hat{\Gamma}}_i = \hat{\Gamma}_i \hat{g}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{g}(t) &= i\sqrt{\det[\hat{C}_i]} \int \frac{d^2k}{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}} \sum_j \Gamma_j \int d^2k' \mathbf{k}' \\ &\quad \times e^{-ik' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2}\mathbf{k}'(\hat{C}_i + C_j)\mathbf{k}'} \left( \frac{1}{2}\mathbf{k}'\hat{C}_i\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{k}\hat{C}_i\mathbf{k}' \right). \quad (5.27) \end{aligned}$$

Wir approximieren  $\hat{C}_i$  mit  $\hat{c}_i \mathcal{I}$  wobei  $\hat{c}_i \in \mathbb{R}$  ist. In erster Ordnung in  $\hat{C}_i$  verschwindet dann  $\hat{g}$ . Die Terme in erster Ordnung  $\hat{C}_i$  lauten explizit

$$\begin{aligned} \hat{g}(t) &\approx \hat{c}_i^2(t) \sum_j \Gamma_j \left\{ \int d^2k' \int \frac{d^2k}{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}' \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} \right. \\ &\quad \left. + \int d^2k' \int \frac{d^2k}{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}' \mathbf{k}' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right\}. \quad (5.28) \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \int d^2k' \int d^2k \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}' \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k} &= \left[ \frac{1}{12} k'_1 k'_2 \left( 3(k_1^2 + k_2^2) k'_1 k'_2 \tan^{-1} \left[ \frac{k_2}{k_1} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (k'_1 - k'_2)(k'_1 + k'_2) \left( k_1^2 - (k_1^2 + k_2^2) \ln [k_1^2 + k_2^2] \right) \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (5.29) \end{aligned}$$

und

$$\hat{c}_i^2(t) \sum_j \Gamma_j \int \frac{d^2 k}{2\pi} \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \underbrace{\int d^2 k' \mathbf{k}' \mathbf{k}' \cdot (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}_{=0} . \quad (5.30)$$

Das zweite Integral verschwindet, weil der Integrand proportional zu  $k'^3$  und somit punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Also liefert  $\hat{g}(t)$  keinen Beitrag in führender Ordnung zu den Bewegungsgleichungen des Hilfsfeldes.

## 5.4 Ableitung der Gleichungen aus einem Variationsverfahren

### 5.4.1 Die Wirkung elliptischer Wirbel

Wir haben die Bewegungsgleichungen der Ellipsenparameter aus den Instantongleichungen erhalten. Die Bewegungsgleichungen können auch aus einem Variationsverfahren abgeleitet werden, indem der Ansatz in die Wirkung eingesetzt wird. Dann kann die Lagrangefunktion gebildet werden und die Euler-Lagrange Gleichungen (siehe A.4) liefern die Bewegungsgleichungen.

Wir setzen den Ansatz für das Wirbelfeld

$$\omega(\mathbf{k}, t) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \omega_i(\mathbf{k}, t) \quad (5.31a)$$

mit

$$\omega_i(\mathbf{k}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} C_i \mathbf{k}} \quad (5.31b)$$

sowie den Ansatz für das Hilfsfeld

$$\hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = \sum_{i=1}^m \hat{\Gamma}_i \hat{\omega}_i(\mathbf{k}, t) \quad (5.31c)$$

mit

$$\hat{\omega}_i(\mathbf{k}, t) = i e^{i\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2}\mathbf{k} \hat{C}_i \mathbf{k}} \quad (5.31d)$$

in die Wirkung

$$S = \int d^2 k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) \left[ \dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) + \nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) \right] + \frac{i}{2} \int d^2 k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \quad (5.32)$$

ein. Wir erhalten eine Summe über  $i$  und  $j$  sowie im Advektionsterm eine zusätzliche

Summe über  $k$ . Die Wirkung lautet

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int d^2 k dt \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k}, t) \left[ \frac{\dot{\Gamma}_j}{\Gamma_j} + i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_j \mathbf{k} \right] \\ & - i \sum_{ijk} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \Gamma_k \int d^2 k \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' dt \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega_k(\mathbf{k}', t) \\ & + \nu \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int d^2 k dt k^2 \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k}, t) \\ & + \frac{i}{2} \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Bevor wir die Integration über  $k$  durchführen, klammern wir im Integral den Term  $\hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k}, t)$  aus. Dadurch isolieren wir die Terme, die die Zeitableitungen von  $\Gamma_i$ ,  $\mathbf{x}_i$  und  $C_i$  enthalten, für die wir später die Bewegungsgleichungen extrahieren wollen. Man erhält

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_j}{\Gamma_j} + i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_j \mathbf{k} - i \sum_k \Gamma_k \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \right. \\ & \times \left. \frac{\omega_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t)}{\omega_j(\mathbf{k}, t)} \omega_k(\mathbf{k}') + \nu k^2 + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_j}{\Gamma_j} \frac{\hat{\omega}_j(\mathbf{k}, t)}{\omega_j(\mathbf{k}, t)} Q(\mathbf{k}) \right\} \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} A_{jk}(\mathbf{k}; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, C_j + C_k, C_j) &= \int d^2 k' e^{-i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) - \frac{1}{2} \mathbf{k}'(C_j + C_k) \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k} C_j \mathbf{k}' + \frac{1}{2} \mathbf{k}' C_j \mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}, \\ K_j(\mathbf{k}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j) &= i Q(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}(\hat{C}_j - C_j) \mathbf{k}}, \\ W_{ij,k}(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i, C_j + \hat{C}_i) &= i e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i) - \frac{1}{2} \mathbf{k}(C_j + \hat{C}_i) \mathbf{k}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

und können die Wirkung als

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_j}{\Gamma_j} + i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_j \mathbf{k} - i \sum_k \Gamma_k A_{jk}(\mathbf{k}; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, C_j + C_k, C_j) \right. \\ & \left. + \nu k^2 + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_j}{\Gamma_j} K_j(\mathbf{k}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j) \right\} W_{ij,k}(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i, C_j + \hat{C}_i) \end{aligned} \quad (5.36)$$

schreiben. Um die  $k$ -Integration auszuführen, ersetzen wir in der geschweiften Klammer die  $\mathbf{k}$ 's mit  $i\nabla_{\hat{\mathbf{x}}_i} = i\hat{\nabla}$ . Da  $K_j(\mathbf{k}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j)$  von  $\hat{\mathbf{x}}_j$  abhängt, führen wir den Ordnungsoperator T gemäß

$$T : K_j(i\hat{\nabla}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j) = i e^{-(\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\nabla} - \frac{1}{2} \mathbf{k}(\hat{C}_j + C_j) \mathbf{k}} Q(i\hat{\nabla})$$

ein, der bewirkt, dass die Ableitung  $\hat{\nabla}$  immer rechts von  $\hat{\mathbf{x}}_j$  steht. Wir definieren

$$W_{ij} = \int d^2k W_{ij,k}(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i, C_j + \hat{C}_i) = i \frac{2\pi}{\sqrt{\det[C_j + \hat{C}_i]}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i)(C_j + \hat{C}_i)^{-1}(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_i)} \quad (5.37)$$

und erhalten aus Gleichung (5.36) nach Ausführen der  $k$ -Integration

$$S = \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \int dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_j}{\Gamma_j} - \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_j \hat{\nabla} - i \sum_k \Gamma_k A_{jk}(i\hat{\nabla}; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, C_j + C_k, C_j) \right. \\ \left. - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_j}{\Gamma_j} T : K_j(i\hat{\nabla}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j) \right\} W_{ij}. \quad (5.38)$$

Dabei geht  $\nu k^2$  in  $-\nu \Delta_{\hat{\mathbf{x}}_i}$  über, was wir als  $-\nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla}$  geschrieben haben. Gleichung (5.38) ist die Wirkung für elliptische Wirbel und elliptische Strukturen im Hilfsfeld. Im Folgenden werden wir zeigen, wie aus der Wirkung über ein Variationsverfahren die Bewegungsgleichungen der elliptischen Wirbel sowie der Strukturen im Hilfsfeld abgeleitet werden können. Dafür verwenden wir die in Abschnitt 5.2 gemachten Annahmen.

#### 5.4.2 Gleichungen für das Wirbelfeld aus den Euler-Lagrange Gleichungen

Aus der Wirkung (5.38) folgt sofort die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \Gamma_j \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_j}{\Gamma_j} - \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_j \hat{\nabla} - i \sum_k \Gamma_k A_{jk}(i\hat{\nabla}; \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, C_j + C_k, C_j) \right. \\ \left. - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_j}{\Gamma_j} T : K_j(i\hat{\nabla}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j, \hat{C}_j - C_j) \right\} W_{ij} \quad (5.39)$$

über die Beziehung

$$S = \int dt \mathcal{L}.$$

Da wir  $n = m$  isolierte Wirbel und isolierte elliptische Strukturen im Hilfsfeld betrachten, wobei der  $i$ -te Wirbel stets in der Nähe der  $i$ -ten elliptischen Struktur ist, berücksichtigen wir nur die diagonalen Beiträge  $i = j$  in (5.39). Dann lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \sum_i \hat{\Gamma}_i \Gamma_i \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} - i \sum_j \Gamma_j A_{ij}(i\hat{\nabla}; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, C_i + C_j, C_i) \right. \\ \left. - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} T : K_i(i\hat{\nabla}; \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} W_{ii}. \quad (5.40)$$

Da die Lagrangefunktion nicht von  $\dot{\Gamma}_i$ ,  $\dot{\hat{x}}_i$  und  $\dot{\hat{C}}_i$  abhängt, lauten die Euler-Lagrange Gleichungen für die Variation nach dem Hilfsfeld

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Gamma}_i} = 0, \quad (5.41a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{x}}_{i_\kappa}} = 0 \quad (5.41b)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\hat{C}}_{i_{\kappa,\lambda}}} = 0. \quad (5.41c)$$

Dabei sind  $\kappa, \lambda \in (1, 2)$ , was bedeutet, dass wir nach den einzelnen Komponenten des Vektors  $\hat{x}_i$  und der Matrix  $C_i$  variieren.

Die Variation der Lagrangefunktion (5.40) nach  $\hat{\Gamma}_i$  gemäß Gleichung (5.41a) ergibt

$$0 = \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\hat{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{\hat{C}}_i \hat{\nabla} - i \sum_j \Gamma_j A_{ij}(i \hat{\nabla}; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, C_i + C_j, C_i) - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} + i \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \text{T}:K_i(i \hat{\nabla}; \hat{x}_i - \mathbf{x}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} W_{ii}, \quad (5.42a)$$

die Variation aus Gleichung (5.41b) liefert

$$0 = \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\hat{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{\hat{C}}_i \hat{\nabla} - i \sum_j \Gamma_j A_{ij}(i \hat{\nabla}; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, C_i + C_j, C_i) - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} \right\} \hat{\nabla} W_{ii} \quad (5.42b)$$

und aus (5.41c) folgt

$$0 = \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\hat{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{\hat{C}}_i \hat{\nabla} - i \sum_j \Gamma_j A_{ij}(i \hat{\nabla}; \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, C_i + C_j, C_i) - \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} + i \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \text{T}:K_i(i \hat{\nabla}; \hat{x}_i - \mathbf{x}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} \hat{\nabla} \hat{\nabla}^T W_{ii}. \quad (5.42c)$$

In Analogie zum Vorgehen bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Instan-

tongleichungen entwickeln wir

$$A_{ij}(i \hat{\nabla}; \mathbf{x}, B_1, B_2) \approx i \int d^2 k' e^{-ik' \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot B_1 \cdot \mathbf{k}'} \left( 1 + \frac{i}{2} \hat{\nabla} B_2 \mathbf{k}' + \frac{i}{2} \mathbf{k}' \cdot B_2 \hat{\nabla} \right) \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \hat{\nabla} \quad (5.43a)$$

und

$$K_i(i \hat{\nabla}; \mathbf{x}, B) \approx iq \left( 1 - \mathbf{x} \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} (\tilde{Q} + B) \hat{\nabla} \right). \quad (5.43b)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned}\alpha^{(1)} &= \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{ik' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \hat{\nabla}, \\ \alpha^{(2)} &= \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{ik' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' \cdot (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \left( \frac{i}{2} \hat{\nabla} C_i \mathbf{k}' + \frac{i}{2} \mathbf{k}' C_i \hat{\nabla} \right) \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \hat{\nabla} - \nu \hat{\Delta}, \\ \beta^{(0)} &= -q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i}, \\ \beta^{(1)} &= q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\nabla}, \\ \beta^{(2)} &= -q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \frac{1}{2} \hat{\nabla} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) \hat{\nabla}.\end{aligned}$$

Damit können wir (5.42a) als

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right] W_{ii} = 0 \quad (5.44a)$$

schreiben. Aus (5.42b) erhalten wir

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_1}} W_{ii} = 0 \quad (5.44b)$$

und

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_2}} W_{ii} = 0. \quad (5.44c)$$

Gleichung (5.42c) ergibt komponentenweise

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_1}}^2 W_{ii} = 0, \quad (5.44d)$$

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_1}} \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_2}} W_{ii} = 0, \quad (5.44e)$$

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_2}} \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_1}} W_{ii} = 0 \quad (5.44f)$$

und

$$\left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} + \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \beta^{(0)} + \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \right] \partial_{\hat{\mathbf{x}}_{i_2}}^2 W_{ii} = 0. \quad (5.44g)$$

Dabei stehen die hochgestellten, eingeklammerten Zahlen für die jeweilige Ordnung in  $\hat{\nabla}$ . Wir summieren die Gleichungen jeweils gleicher Ordnung in  $\hat{\nabla}$  und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}} & -1 & 0 \\ (\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})^2 & -(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} \\ \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} \end{pmatrix} W_{ii} \\ &= \begin{pmatrix} -\beta^{(0)} \\ -\alpha^{(1)} - \beta^{(1)} \\ -\alpha^{(2)} - \beta^{(2)} - \alpha^{(1)}(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}}) - \beta^{(0)}(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})^2 \end{pmatrix} W_{ii}. \quad (5.45) \end{aligned}$$

Die Matrix auf der linken Seite kann invertiert werden und die inverse Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}} & -1 & 0 \\ 0 & -(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}}) & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Durch Multiplikation von Gleichung (5.45) mit (5.46) erhält man

$$\begin{pmatrix} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} \\ \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} \end{pmatrix} W_{ii} = \begin{pmatrix} -\beta^{(0)} \\ \alpha^{(1)} + \beta^{(1)} - \beta^{(0)}(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}}) \\ -\alpha^{(2)} - \beta^{(2)} - \beta^{(0)}(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})^2 + (\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})\beta^{(1)} \end{pmatrix} W_{ii}. \quad (5.47)$$

Aufgrund der Annahmen aus Abschnitt 5.2 sind die Terme proportional zu  $(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})$  und  $(\partial_{\hat{x}_{i_1}} + \partial_{\hat{x}_{i_2}})^2$  in Gleichung (5.47) klein. Wir vernachlässigen diese und erhalten

$$\begin{pmatrix} \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \\ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} \\ \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} \end{pmatrix} W_{ii} = \begin{pmatrix} -\beta^{(0)} \\ \alpha^{(1)} + \beta^{(1)} \\ -\alpha^{(2)} - \beta^{(2)} \end{pmatrix} W_{ii}. \quad (5.48)$$

Daraus folgen die Evolutionsgleichungen für die Zirkulation, Advektion und Form der Wirbel. Die Gleichung für  $\dot{\Gamma}_i$  folgt aus

$$\frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} W_{ii} = -\beta^{(0)} W_{ii} \quad \rightarrow \quad \dot{\Gamma}_i = q \hat{\Gamma}_i. \quad (5.49a)$$

Für  $\dot{\mathbf{x}}_i$  erhält man aus

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\nabla} W_{ii} = \sum_j \Gamma_j \mathbf{U}_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \hat{\nabla} W_{ii} + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\nabla} W_{ii} \quad (5.49b)$$

die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \Gamma_j \mathbf{U}_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i), \quad (5.49c)$$

wobei die Advektion

$$\mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}) = \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik' \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} k' (C_i + C_j) k'}$$

wie in Gleichung (5.16) definiert ist. Die Form der Wirbel wird durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} W_{ii} &= - \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{ik' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} k' (C_i + C_j) k'} \left[ \frac{i}{2} \hat{\nabla} C_i \mathbf{k}' + \frac{i}{2} \mathbf{k}' C_i \hat{\nabla} \right] \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \hat{\nabla} W_{ii} \\ &\quad + \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} W_{ii} + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \frac{1}{2} \hat{\nabla} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) \hat{\nabla} W_{ii} \end{aligned} \quad (5.49d)$$

beschrieben. Dies kann in

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hat{\nabla} \dot{C}_i \hat{\nabla} W_{ii} &= - \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{ik' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} k' (C_i + C_j) k'} \left[ \frac{i}{2} \hat{\nabla} (\mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k}'^T) C_i \hat{\nabla} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \hat{\nabla} C_i (\mathbf{k}' \mathbf{u}^T(\mathbf{k}')) \hat{\nabla} \right] W_{ii} + \nu \hat{\nabla} \mathcal{I} \hat{\nabla} W_{ii} + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} \frac{1}{2} \hat{\nabla} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) \hat{\nabla} W_{ii} \end{aligned} \quad (5.49e)$$

umgeformt werden und liefert mit der Definition der Deformation

$$S_{ij}(\mathbf{x}) = -i \int d^2 k' e^{ik' \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} k' (C_i + C_j) k'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k}'^T = \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}) \overleftarrow{\nabla}^T$$

aus Gleichung (5.17) die Evolutionsgleichung

$$\dot{C}_i = \sum_j \Gamma_j [S_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) C_i + C_i S_{ij}^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)] + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) + 2\nu \mathcal{I} \quad (5.49f)$$

für die Form der Wirbel.

### 5.4.3 Gleichungen für das Hilfsfeld aus den Euler-Lagrange Gleichungen

Die Bewegungsgleichungen für das Hilfsfeld können ebenfalls aus den Euler-Lagrange Gleichungen erhalten werden. Um die einzelnen Terme besser zusammenfassen zu können, machen wir folgende Umformungen. Ausgehend von der Wirkung (5.33) formen wir die Integrationsvariable gemäß  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  um, wobei wir die Symmetrie der Korrelationsfunktion  $Q(\mathbf{k}) = Q(-\mathbf{k})$  ausnutzen. Des weiteren shiften wir die Integrationsvariable im Integral des Advektionsterms

$$\int d^2 k \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}, t) \omega_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega_k(\mathbf{k}', t)$$

gemäß  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$  und erhalten die Wirkung

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}) \left[ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} \right] \\ & + i \sum_{ijk} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \Gamma_k \int d^2 k dt \omega_i(-\mathbf{k}) \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \omega_k(\mathbf{k}') \\ & + \nu \sum_{ij} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt k^2 \omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}) \\ & + \frac{i}{2} \sum_{ij} \hat{\Gamma}_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \hat{\omega}_i(-\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (5.50)$$

wobei wir die Indizes  $i$  und  $j$  in Gegensatz zu (5.33) getauscht haben. Wir klammern den Term  $\omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k})$  im Integral aus und erhalten

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} + i \sum_k \Gamma_k \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \frac{\hat{\omega}_j(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\hat{\omega}_j(\mathbf{k})} \omega_k(\mathbf{k}') \right. \\ & \left. + \nu k^2 + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} Q(\mathbf{k}) \frac{\hat{\omega}_i(-\mathbf{k})}{\omega_i(-\mathbf{k})} \right\} \omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Mit den Definitionen aus (5.35) können wir die Wirkung als

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} - i \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{2} \mathbf{k} \dot{C}_i \mathbf{k} + i \sum_k \Gamma_k A_{jk}(\mathbf{k}; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_k, \hat{C}_j + C_k, \hat{C}_j) \right. \\ & \left. + \nu k^2 + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} K_i(\mathbf{k}; \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} \omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.52)$$

schreiben. Dabei sind die Argumente von  $K_i$  und  $A_{jk}$  im Vergleich zu (5.38) verschieden. Analog zum vorherigen Abschnitt ersetzen wir die  $\mathbf{k}$ 's in der geschweiften Klammer mit  $i\nabla_{\mathbf{x}_i} = i\nabla$  und führen die  $k$ -Integration aus. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S = & \sum_{ij} \Gamma_i \hat{\Gamma}_j \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla + \frac{1}{2} \nabla \dot{C}_i \nabla + i \sum_k \Gamma_k T : A_{jk}(i\nabla; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_k, \hat{C}_j + C_k, \hat{C}_j) \right. \\ & \left. - \nu \nabla I \nabla + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} T : K_i(i\nabla; \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} \hat{W}_{ij} \end{aligned} \quad (5.53)$$

mit

$$\hat{W}_{ij} = \int d^2 k \omega_i(-\mathbf{k}) \hat{\omega}_j(\mathbf{k}) = i \frac{2\pi}{\sqrt{\det[C_i + \hat{C}_j]}} e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_i)(C_i + \hat{C}_j)^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_i)}$$

und dem Ordnungsoperator  $T$ , der wie im vorherigen Abschnitt dafür sorgt, dass die  $\nabla$ -Operatoren rechts von den Vektoren  $\mathbf{x}_i$  in  $K_i$  und  $\mathbf{x}_k$  in  $A_{jk}$  stehen. Der Ausdruck

(5.53) ist äquivalent zu (5.38). Die Darstellung in dieser Form begünstigt die Variation nach dem Wirbelfeld und vereinfacht daher das Extrahieren der Bewegungsgleichungen für das Hilfsfeld.

Aus der Wirkung (5.53) können wir sofort die Lagrangefunktion ablesen. Wir betrachten wie im vorherigen Abschnitt nur die diagonalen Beiträge und erhalten

$$\mathcal{L} = \sum_i \Gamma_i \hat{\Gamma}_i \int d^2 k dt \left\{ \frac{\dot{\Gamma}_i}{\Gamma_i} + \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla + \frac{1}{2} \nabla \dot{C}_i \nabla + i \sum_j \Gamma_j T : A_{ij}(i\nabla; \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j, \hat{C}_i + C_j, \hat{C}_i) \right. \\ \left. - \nu \nabla \mathcal{I} \nabla + \frac{i}{2} \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} T : K_i(i\nabla; \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i, \hat{C}_i - C_i) \right\} \hat{W}_{ii}. \quad (5.54)$$

Im Folgenden variieren wir  $\mathcal{L}$  und bilden die Euler-Lagrange Gleichungen. Diese lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Gamma}_i} = 0, \quad (5.55a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}_{i_\kappa}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{i_\kappa}} = 0 \quad (5.55b)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{i_{\kappa,\lambda}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{C}_{i_{\kappa,\lambda}}} = 0 \quad (5.55c)$$

für  $\kappa, \lambda \in (1, 2)$ .

Die Variation von  $\mathcal{L}$  nach  $\Gamma_i$  ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_i} = \hat{\Gamma}_i \left\{ \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \nabla + \frac{1}{2} \nabla \dot{C}_i \nabla + i \sum_j \Gamma_j T : A_{ij}(i\nabla; \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j, \hat{C}_i + C_j, \hat{C}_i) - \nu \nabla \mathcal{I} \nabla \right\} \hat{W}_{ii} \\ + i \hat{\Gamma}_i \underbrace{\sum_j \Gamma_j T : A_{ij}(i\nabla; \hat{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_i, \hat{C}_j + C_i, \hat{C}_j)}_{\approx 0} \hat{W}_{ii}, \quad (5.56)$$

wobei der letzte Term, der aus der Produktregel folgt, vernachlässigt wird, da dieser analog zu  $\hat{g}(t)$  aus Gleichung (5.27) ist und daher in führender Ordnung keinen Beitrag zu den Bewegungsgleichungen liefert.

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt muss hier auch die Abhängigkeit der Lagrangefunktion von  $\hat{\Gamma}_i$  berücksichtigt werden. Man erhält

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_i} = \hat{\Gamma}_i \hat{W}_{ii}, \quad (5.57)$$

was nach der Zeit abgeleitet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Gamma}_i} = \hat{\Gamma}_i \left[ \frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} - (\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i - \dot{\mathbf{x}}_i) \cdot \nabla + \frac{1}{2} \nabla (\dot{\hat{C}}_i + \dot{C}_i) \nabla \right] \hat{W}_{ii} \quad (5.58)$$

ergibt.

Jetzt können wir die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Gamma}_i} = 0 \quad (5.59)$$

bilden und erhalten

$$0 = \left\{ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \hat{C}_i \nabla + i \sum_j \Gamma_j T : A_{ij} (i \nabla; \hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j, \hat{C}_i + C_j, \hat{C}_i) - \nu \nabla \mathcal{I} \nabla \right\} \hat{W}_{ii}. \quad (5.60)$$

Die anderen Variationen können analog durchgeführt werden. Wir definieren

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(1)} &= \sum_j \Gamma_j \hat{\mathbf{U}}_{ij} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \nabla, \\ \hat{\alpha}^{(2)} &= -\nabla \sum_j \Gamma_j [\hat{S}_{ij} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) C_i + C_i \hat{S}_{ij}^T (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j)] \nabla + \nu \nabla \mathcal{I} \nabla, \end{aligned}$$

wobei wir Umformungen analog zu (5.49e) durchgeführt haben und die Advektion sowie Deformation für das Hilfsfeld aus Gleichung (5.23) und (5.24) eingesetzt haben. Wir erhalten aus (5.55a) die Gleichung

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \hat{W}_{ii} = 0, \quad (5.61a)$$

aus (5.55b) die Gleichungen

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{x_{i_1}} \hat{W}_{ii} = 0 \quad (5.61b)$$

und

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{x_{i_2}} \hat{W}_{ii} = 0 \quad (5.61c)$$

sowie aus (5.55c) die Gleichungen

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{x_{i_1}}^2 \hat{W}_{ii} = 0, \quad (5.61d)$$

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{x_{i_1}} \partial_{x_{i_2}} \hat{W}_{ii} = 0, \quad (5.61e)$$

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \dot{\hat{C}}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{x_{i_2}} \partial_{x_{i_1}} \hat{W}_{ii} = 0 \quad (5.61f)$$

und

$$\left[ -\frac{\dot{\hat{\Gamma}}_i}{\hat{\Gamma}_i} + \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla - \frac{1}{2} \nabla \hat{C}_i \nabla + \hat{\alpha}^{(1)} + \hat{\alpha}^{(2)} \right] \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}^2 \hat{W}_{ii} = 0. \quad (5.61g)$$

Um die Bewegungsgleichungen für die Parameter der elliptischen Strukturen zu extrahieren, sortieren wir die Gleichungen (5.61a)-(5.61g) nach Ordnungen von  $\nabla$  und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 & 0 \\ -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}})^2 & (\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\hat{\Gamma}}_i \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla \\ -\frac{1}{2} \nabla \hat{C}_i \nabla \end{pmatrix} \hat{W}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\alpha}^{(1)} \\ \hat{\alpha}^{(2)} + \hat{\alpha}^{(1)}(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) \end{pmatrix} \hat{W}_{ii}. \quad (5.62)$$

Die Matrix auf der linken Seite kann invertiert werden und man erhält

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 & 0 \\ -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}})^2 & (\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 & 0 \\ 0 & -(\partial_{\mathbf{x}_{i_1}} + \partial_{\mathbf{x}_{i_2}}) & 1 \end{pmatrix}.$$

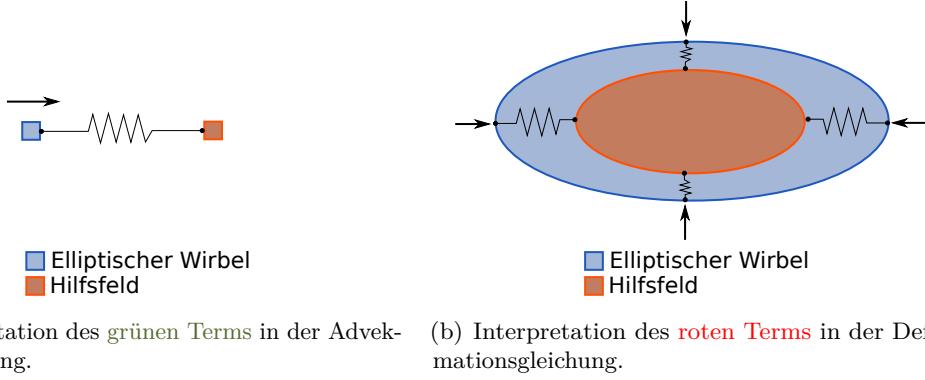
Multiplikation von (5.62) mit der inversen Matrix ergibt

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\Gamma}}_i \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i \cdot \nabla \\ -\frac{1}{2} \nabla \hat{C}_i \nabla \end{pmatrix} \hat{W}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\alpha}^{(1)} \\ \hat{\alpha}^{(2)} \end{pmatrix} \hat{W}_{ii}. \quad (5.63)$$

Mit den Definitionen von  $\hat{\alpha}^{(1)}$  und  $\hat{\alpha}^{(2)}$  ergeben sich die Bewegungsgleichungen für die Parameter der elliptischen Strukturen im Hilfsfeld, die im Folgenden zusammengefasst und diskutiert werden.

## 5.5 Zusammenfassung und Interpretation der Gleichungen

Wir haben aus den Instantongleichungen und aus einem Variationsverfahren die Bewegungsgleichungen für elliptische Wirbel und elliptische Strukturen im Hilfsfeld mit



**Abbildung 5.1:** Interpretation der farblich gekennzeichneten Terme aus den Evolutionsgleichungen durch Federkräfte.

geeigneten Annahmen und Näherungen hergeleitet. Die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 \dot{\Gamma}_i &= q\hat{\Gamma}_i, \\
 \dot{\mathbf{x}}_i &= \sum_j \Gamma_j \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i), \\
 \dot{C}_i &= \sum_j \Gamma_j \left[ S_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) C_i + C_i S_{ij}^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] + q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) + 2\nu\mathcal{I}, \\
 \dot{\hat{\Gamma}}_i &= 0, \\
 \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i &= \sum_j \Gamma_j \hat{\mathbf{U}}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j), \\
 \dot{\hat{C}}_i &= \sum_j \Gamma_j \left[ \hat{S}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \hat{C}_i + \hat{C}_i \hat{S}_{ij}^T(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_j) \right] - 2\nu\mathcal{I}.
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Der **grüne Term** in der Bewegungsgleichung für die Advektion der Wirbelzentren und der **rote Term** in der Deformationsgleichung der Wirbelformen können als überdämpfte Federkräfte interpretiert werden. Der **grüne Term** in der Advektionsgleichung bewirkt, dass das Zentrum des  $i$ -ten Wirbels zum Zentrum der  $i$ -ten elliptischen Struktur gezogen wird, was konsistent mit der Annahme ist, dass der  $i$ -te Wirbel sich in der Nähe der  $i$ -ten elliptischen Struktur befindet. Der **rote Term** in der Deformationsgleichung lässt die Form der Wirbel auf die von der Breite der Korrelation und der  $i$ -ten elliptischen Struktur bestimmte Form  $\tilde{Q} + \hat{C}_i$  relaxieren. Dies ist in Abbildung 5.1(b) schematisch dargestellt. Die Terme führen zu Relaxationen, aber nicht zu Schwingungen. Dieses Verhalten entspricht dem einer überdämpften Feder in der klassischen Mechanik.

## 5.6 Näherung für Advektion und Deformation

Im Folgenden wollen wir die Gleichungen für die Advektion  $\mathbf{U}_{ij}$  und die Deformation  $S_{ij}$  approximieren. Dafür entwickeln wir zuerst  $\mathbf{U}_{ij}$  in

$$\mathbf{U}_{ij}(\mathbf{r}) = i \int \frac{d^2 k'}{4\pi^2} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}'}{k'^2} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}' \right] \quad (5.65)$$

$$= i \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla_r (C_i + C_j) \nabla_r \right] \mathbf{e}_z \times \int \frac{d^2 k'}{4\pi^2} \frac{\mathbf{k}'}{k'^2} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (5.66)$$

$$= \left[ 1 + \frac{1}{2} \nabla_r (C_i + C_j) \nabla_r \right] \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}}{2\pi|\mathbf{r}|^2}, \quad (5.67)$$

sodass sich die Bewegungsgleichung für die Wirbelmittelpunkte als

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \sum_{j \neq i} \Gamma_j \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{2\pi|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} + \sum_{j \neq i} \Gamma_j [\nabla_{x_i} (C_i + C_j) \nabla_{x_i}] \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{2\pi|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} \quad (5.68)$$

schreiben lässt. Der erste Term in der Advektionsgleichung ist analog zum PunktWirbelproblem. Der zweite Term beschreibt eine Erweiterung dazu, deren Einfluss wir später noch genauer sehen werden. Wir definieren den Vektor

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{1}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

und können damit die Advektion als

$$\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{V} + C_{11}^{(ij)} \mathbf{V}_{x,x} + C_{12}^{(ij)} \mathbf{V}_{x,y} + C_{21}^{(ij)} \mathbf{V}_{y,x} + C_{22}^{(ij)} \mathbf{V}_{y,y} \quad (5.70)$$

schreiben. Dabei ist  $C_{\mu\nu}^{(ij)} = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu}^{(i)} + C_{\mu\nu}^{(j)})$  die Summe der  $\mu\nu$ -ten Komponenten der  $i$ -ten und  $j$ -ten Matrix  $C_i$  und  $C_j$ . Die Indizes in  $\mathbf{V}_{\alpha,\beta}$  stehen für die Ableitungen bezüglich  $\alpha$  und  $\beta$ , d.h.  $\mathbf{V}_{\alpha,\beta} = \partial_\alpha \partial_\beta \mathbf{V}(x, y)$ .

Die Deformation  $S_{ij}$  lässt sich aufgrund von

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{r}) \overleftarrow{\nabla}^T \quad (5.71)$$

in der gleichen Approximation leicht berechnen. Wir definieren die Matrix

$$M(x, y) = \mathbf{V}(x, y) \overleftarrow{\nabla}^T = \frac{1}{2\pi r^4} \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 - r^2 \\ -2x^2 + r^2 & -2xy \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

und erhalten für die Deformation

$$S_{ij}(\mathbf{r}) = M + C_{11}^{(ij)} M_{x,x} + C_{12}^{(ij)} M_{x,y} + C_{21}^{(ij)} M_{y,x} + C_{22}^{(ij)} M_{y,y}. \quad (5.73)$$

Dabei ist  $C_{\mu\nu}^{(ij)}$  wie vorher definiert und die Indizes bezeichnen wieder die entsprechenden Ableitungen.

Für das Hilfsfeld können wir Advektion und Deformation analog nähern. Mit

$$\hat{\mathbf{U}}_{ij}(\mathbf{x}) = \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-ik' \mathbf{x} - \frac{1}{2} k' (\hat{C}_i + C_j) \mathbf{k}'} \quad (5.74)$$

erhält man die Advektion des Hilfsfeldes

$$\hat{\mathbf{U}}_{ij} = \mathbf{V} + \tilde{C}_{11}^{(ij)} \mathbf{V}_{x,x} + \tilde{C}_{12}^{(ij)} \mathbf{V}_{x,y} + \tilde{C}_{21}^{(ij)} \mathbf{V}_{y,x} + \tilde{C}_{22}^{(ij)} \mathbf{V}_{y,y} \quad (5.75)$$

und die Deformation des Hilfsfeldes

$$\hat{S}_{ij}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{U}}_{ij}(\mathbf{r}) \overleftarrow{\nabla}^T, \quad (5.76)$$

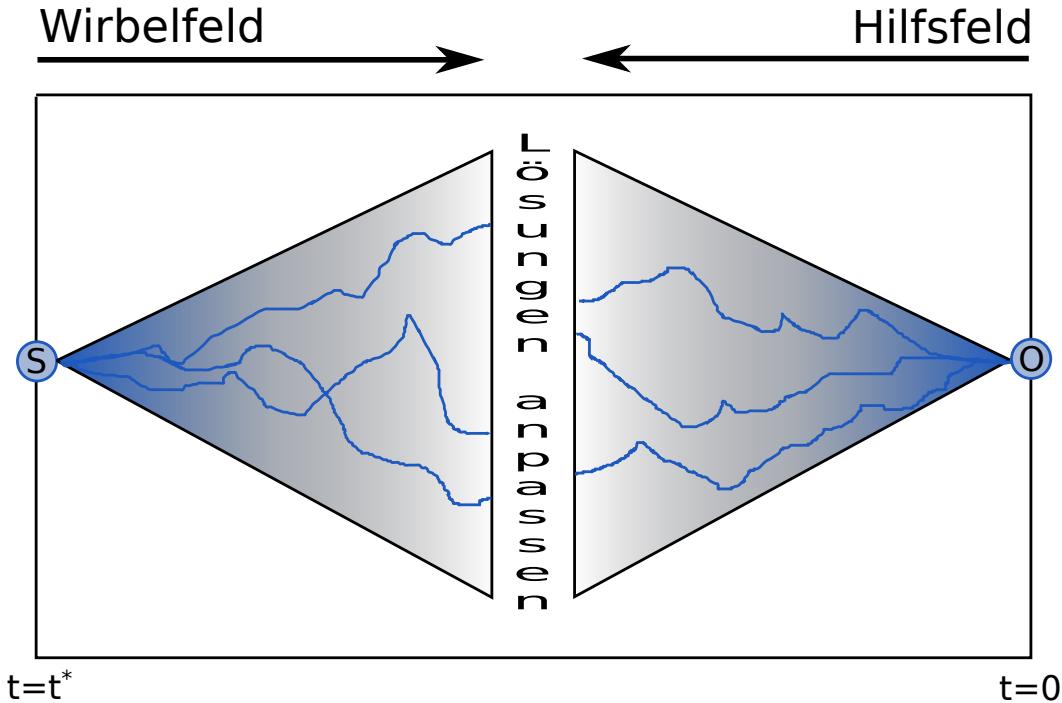
wobei  $\tilde{C}_{\mu\nu}^{(ij)} = \hat{C}_{\mu\nu}^{(i)} + C_{\mu\nu}^{(j)}$  die Summe der  $\mu\nu$ -ten Komponente der Matrix  $\hat{C}_i$  und  $C_j$  ist. Ableitungen werden wieder durch die Indizes dargestellt.

Wir haben in diesem Abschnitt die Advektion  $\mathbf{U}_{ij}$  und die Deformation  $S_{ij}$  in erster Ordnung  $C_i$  bzw.  $\hat{C}_i$  approximiert. In den Evolutionsgleichungen für die Wirbelformen in Gleichungen (5.64) werden die Deformationsmatrizen  $S_{ij}$  mit  $C_i$  bzw.  $\hat{C}_i$  multipliziert, sodass wir nichtlineare Gleichungen erhalten. Wir werden später in expliziten Berechnungen sehen, dass die Änderung der Form der Ellipsen eine Elongation der Hauptachsen und eine Kontraktion der Nebenachsen beschreibt und dass dieser Vorgang sich selbst beschleunigt, was durch die Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen hervorgerufen wird.

## 5.7 Iteratives Verfahren zur numerischen Lösung

Um die Evolution des Wirbelfeldes bzw. des Hilfsfeldes auszurechnen, muss das jeweils andere Feld zu jeder Zeit  $t^* \leq t \leq 0$  bekannt sein. Dies ist in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt. Man startet für die Berechnung des Wirbelfeldes bei  $t = t^*$  und für die Berechnung des Hilfsfeldes bei  $t = 0$ . An diesen Zeitpunkten ist die jeweilige Lösung durch die Anfangsbedingung vorgegeben. Man muss alle möglichen Lösungen der Felder bestimmen bis diese konsistent mit der Lösung des jeweils anderen Feldes ist. Ein solches Verfahren bezeichnet man als *Shooting Verfahren*.

Wir können an dieser Stelle ein eleganteres und effizienteres Verfahren anwenden. Basierend auf den unter 5.2 gemachten Annahmen können wir von einer Punktirbellösung startend iterativ eine Lösung der Evolution elliptischer Wirbel bestimmen. Für den Grenzfall  $\hat{C}_i \rightarrow 0$  und  $C_i \rightarrow 0$  gehen die Wirbel und das Hilfsfeld in Punktirbel über. Dann erhalten wir sowohl für das Hilfsfeld als auch für das Wirbelfeld ein System aus je zwei Punktirbeln. Die Bewegung von einem System zweier Punktirbel gleicher Zirkulation ist bekannt und wurde im Kapitel 2 ausführlich erklärt. Die Lösung besteht aus einer Drehung der Punktirbel um deren gemeinsamen Wirbelschwerpunkt. Die deltaförmigen Strukturen im Hilfsfeld werden durch das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  advekiert, das über das Biot-Savart Gesetz mit dem Wirbelfeld verknüpft ist. Wenn die Wirbelpositionen und die Positionen der Punktirbel im Hilfsfeld zu einer Zeit  $t$  identisch sind, so gilt dies auch für alle Zeiten. Da wir angenommen haben, dass die Mittelpunkte der Wirbel und der



**Abbildung 5.2:** Schematische Darstellung des Problemes der numerischen Berechnung einer Lösung. Auf der  $y$ -Achse sind mögliche Lösungen zum jeweiligen Zeitschritt dargestellt.

elliptischen Strukturen nah beieinander liegen, ist es intuitiv, die Anfangsbedingungen unseres PunktWirbelproblems gemäß

$$\hat{\mathbf{x}}_i(0) = U(\vartheta|t^*|)\mathbf{x}_i(t^*) \quad (5.77)$$

zu definieren. Dabei sind  $\mathbf{x}_i(t^*)$  die anfänglichen Orte der PunktWirbel zur Zeit  $t^* < 0$  und  $\hat{\mathbf{x}}_i(0)$  die Positionen der deltaförmigen Strukturen im Hilfsfeld zur Zeit  $t = 0$ . Aus Gleichung (5.77) folgt, dass die Positionen der PunktWirbel und der deltaförmigen Strukturen im Hilfsfeld zu jeder Zeit  $t$  identisch sind, d.h. insbesondere auch  $\mathbf{x}_i(t^*) = \hat{\mathbf{x}}_i(t^*)$ . Also können wir

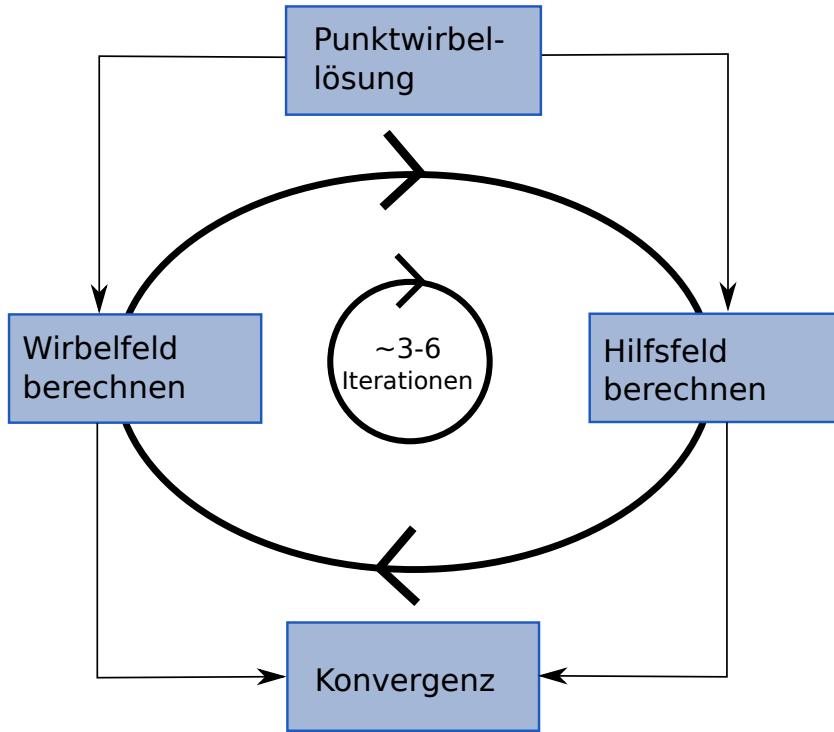
$$\hat{\mathbf{x}}_i(t) = U(\vartheta(t - t^*))\mathbf{x}_i(t^*) \quad (5.78)$$

schreiben, wobei die Drehfrequenz  $\vartheta$  sich als  $(\Gamma_1 + \Gamma_2)/(2\pi d^2)$  ergibt (siehe Kapitel 2).

Da  $\partial_t \hat{\Gamma}_i \approx 0$ , wächst die Zirkulation  $\Gamma_i$  linear gemäß

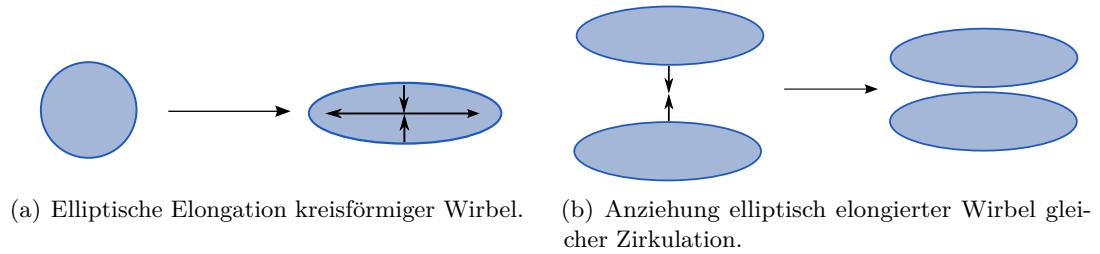
$$\Gamma_i(t) = q\hat{\Gamma}_i(t - t^*) + \Gamma_i^0. \quad (5.79)$$

Jetzt wollen wir den Fall  $C_i \neq 0$  betrachten. Das Wirbelfeld gehorcht beliebigen Anfangsbedingungen zur Zeit  $t^*$ , sodass  $C_i(t^*) = C_i^{(0)}$  gilt. Zur Berechnung der Evolution



**Abbildung 5.3:** Iteratives Verfahren ausgehend von einer Punktwirbellösung für das Wirbel- und Hilfsfeld. Konvergenz wird bereits nach wenigen Iterationsschritten erreicht.

des Wirbelfeldes ist in jedem Zeitschritt die Kenntnis des Hilfsfeldes erforderlich. Da zur Berechnung des Hilfsfeldes jedoch die Kenntnis des Wirbelfeldes in jedem Zeitschritt notwendig ist und die Berechnung zu einer anderen Zeit startet, ist eine gleichzeitige Auswertung der Gleichungen nicht möglich. Man kann jedoch zunächst das Hilfsfeld als Punktwirbelsystem betrachten, was dazu führt, dass man die analytisch bekannte Lösung verwenden kann, um in erster Näherung die Evolution der elliptischen Wirbel anhand von  $\mathbf{x}_i$  und  $C_i$  zu berechnen. Dafür können die in Gleichung (5.64) aufgestellten herkömmlichen Differentialgleichungen mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren gelöst werden. Wir verwenden dabei die im Vorherigen gemachten Näherungen für die Advektion und Deformation. Aufgrund der Verkettung von partiellen Ableitungen sind diese Gleichungen sehr lang, aber nicht kompliziert zu lösen. Aufgrund der Multiplikation von  $C_i$  mit  $S_{ij}$  treten nichtlineare Terme in den Matrixkomponenten auf, da wir  $S_{ij}$  mit Hilfe der Matrix  $M$  (siehe Gleichung (5.72)) in linearer Ordnung in  $C_i$  approximiert haben. Da die Gleichungen sehr lang sind und die numerische Lösung verhältnismäßig einfach, wurde für die numerische Evaluation der explizite Runge-Kutta-Algorithmus von *Mathematica* verwendet. Ein *Notebook File* mit der Berechnung ist auf der beigefügten CD zu finden.



**Abbildung 5.4:** Phänomenologie elliptischer Wirbel.

Um die Lösung zu verbessern, kann ein iteratives Verfahren angewandt werden. Die soeben berechnete Lösung für das Wirbelfeld bestehend aus der Evolution von  $\Gamma_i(t)$ ,  $\mathbf{x}_i(t)$  sowie  $C_i(t)$  im Zeitintervall von  $t^*$  bis 0 kann genutzt werden, um eine Lösung für das Hilfsfeld für den Fall  $\hat{C}_i \neq 0$  zu berechnen. Dies erfolgt rückwärts in der Zeit startend von  $t = 0$  und man erhält eine Ausdehnung der anfangs deltaförmigen Strukturen in elliptische Strukturen aufgrund der Wechselwirkung mit den elliptischen Wirbeln und aufgrund der Viskosität (die rückwärts in der Zeit verläuft, was direkt aus der Instantongleichung für das Hilfsfeld (3.55b) zu sehen ist). Die Viskosität würde die deltaförmigen Strukturen zu Kreisen ausweiten. Wie in den Beispielen in Abbildung 5.5, 5.7 und 5.9 zu sehen ist, bilden sich jedoch elliptische Strukturen, was auf die Kopplung an das Wirbelfeld zurückzuführen ist.

Mit der verbesserten Lösung für das Hilfsfeld, die zur Bildung elliptischer Strukturen führt, kann jetzt eine genauere Lösung des Wirbelfeldes mit dem vorher beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Dafür setzen wir die Lösungen für  $\hat{\mathbf{x}}_i(t)$  und  $\hat{\Gamma}_i(t)$  explizit ein.

Diese Schritte können beliebig oft wiederholt werden, da wir jedoch von relativ kleinen  $q$ -Werten ausgehen, konvergiert das Verfahren bereits nach einige Schritten. Der erste Iterationsschritt kann als störungstheoretischer Ansatz interpretiert werden, sodass bei sehr kleinen  $q$ -Werten diese Lösung bereits eine gute Näherung darstellt. Eine schematische Darstellung dieses iterativen Verfahrens in Abbildung 5.3 dargestellt.

## 5.8 Phänomenologie des Modells

Wir lösen das Modell für zwei Wirbel gleicher Zirkulation. Man beobachtet, dass kreisförmige Wirbel zu Ellipsen elongiert werden (Abbildung 5.4(a)). Dabei werden die Nebenachsen der Ellipsen kontrahiert, was konsistent mit den Beobachtungen von Chen et al. [13] ist. Bereits elongierte Wirbel gleicher Zirkulationen ziehen sich an (Abbildung 5.4(b)). Dies ist eine Evidenz für das Verschmelzen von Wirbeln in zweidimensionalen Strömungen, das von Nielsen et al. in [14] beobachtet wurde.

## 5.9 Explizite Berechnung für zwei Wirbel

Im Folgenden lösen wir die Gleichungen explizit für zwei Wirbel. Wie bereits beschrieben sind die Anfangsbedingungen für das Wirbelfeld und das Hilfsfeld zu verschiedenen Zeiten vorgegeben. Da die Gleichungen gekoppelt sind, ist eine direkte Lösung nicht möglich, da man zur Berechnung eines Feldes die Lösung des jeweils anderen benötigt. Es ist jedoch möglich, eine Lösung in der Nähe der Lösung eines Systems zweier PunktWirbel mit einem iterativen Verfahren zu berechnen.

### 5.9.1 Anfangsbedingungen

Die beiden Felder gehorchen Anfangsbedingungen zu verschiedenen Zeiten. Das Wirbelfeld wird zur Zeit  $t^* < 0$  über die Bedingung

$$\omega(\mathbf{x}, t^*) = \omega_0(\mathbf{x}) \quad (5.80)$$

fixiert, während das Hilfsfeld zur Zeit  $t = 0$  als

$$\hat{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i) \quad (5.81)$$

gegeben ist.  $|t^*|$  bezeichnet dabei die Lebensdauer des Instantons. Wir werden später sehen, dass man diese mit dem Zirkulationsinkrement in Verbindung bringen kann.

### 5.9.2 Explizite Iterationsschritte

Der Konvergenzprozess des hier entwickelten Verfahrens soll anhand von zwei Beispielen verdeutlicht werden.

Für  $q = 0.5$  ist ein konkretes Beispiel für die Konvergenz der Lösung in Abbildung 5.13 und 5.14 dargestellt. Man sieht im ersten Iterationsschritt eine deutlich geringere Elongation als bei der konvergierten Lösung, während im zweiten Iterationsschritt die Elongation etwas größer ist als nach der Konvergenz (am Besten im letzten Zeitschritt zu sehen). Dies liegt daran, dass das Wirbel- und Hilfsfeld jeweils einzeln gelöst wird und der Effekt der jeweiligen Lösung erst im folgenden Iterationsschritt eine Veränderung hervorruft. Nach dem vierten Iterationsschritt ist mit dem bloßen Auge keine Veränderung mehr beobachtbar.

Auch für  $q = 0.05$  wechseln sich anfangs Zustände stärkerer und schwächerer Elongation analog zum vorherigen Fall ab. Aufgrund des kleineren Wertes für  $q$  sind die Unterschiede jedoch geringer. Der Konvergenzprozess für dieses Beispiel ist in Abbildung 5.15 und 5.16 dargestellt.

### 5.9.3 Parameter

An dieser Stelle soll ein Überblick über die Parameter der in diesem Kapitel illustrierten Beispiele gegeben werden. In allen Beispielen wurde  $d = 4$ ,  $\lambda = \sqrt{2}$  sowie  $\nu = 0.9/|t^*|$

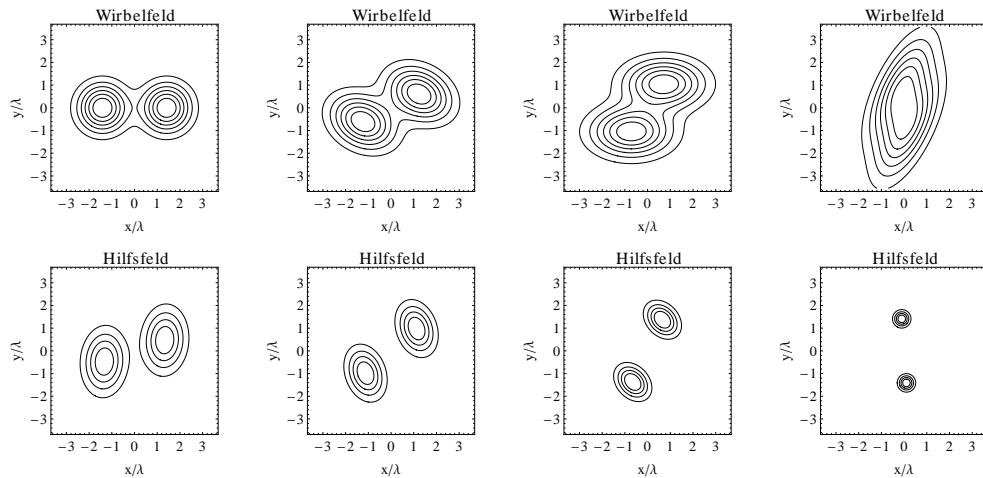
gewählt. Für die dargestellten Evolutionen der Wirbel- und Hilfsfelder sind die Parameter in Tabelle 5.1 zu finden. In der Spalte **Video** ist der Name des entsprechenden Videos auf der beigefügten CD zu finden. Für die Beispiele der Konvergenz des iterativen Verfahrens sind die Parameter in Tabelle 5.2 zu finden. Dabei wurde  $\nu = 0.6/|t^*|$  gewählt.

<b>Evolution</b>	<b>Distanz</b>	<b>Anfangsbed.</b>	$ t^* $	$q$	<b>Video</b>
Abb. 5.5	Abb. 5.6	$C_i = \mathcal{I}^{(2)}$	58.6	0.007	Elongation_I_Wirbel.mpg
Abb. 5.7	Abb. 5.8	$C_i = \mathcal{I}^{(2)}$	60	0.002	Elongation_I_Wirbel_1.mpg
Abb. 5.9	Abb. 5.10	$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}$	65.5	0.002	Elongation_II_Ellipsen.mpg
Abb. 5.11	Abb. 5.12	$C_i = \begin{pmatrix} 1 & \pm 0.2 \\ \pm 0.2 & 1 \end{pmatrix}$	60	0.002	Elongation_V_Ellipsen.mpg

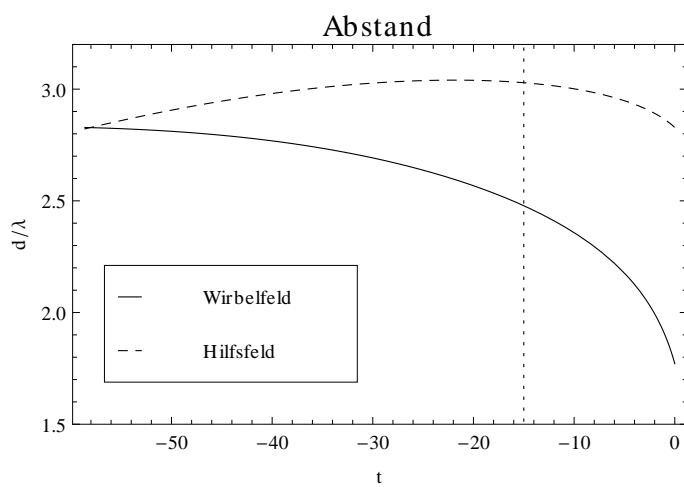
**Tabelle 5.1:** Parameter der hier illustrierten Beispiele der Evolution

<b>Abbildung</b>	<b>Anfangsbed.</b>	$ t^* $	$q$	<b>Wirbelstärke bei <math>t^*</math> (<math>\Gamma_i^{(0)}</math>)</b>	$\hat{\Gamma}_i$
Abb. 5.13, 5.14	$C_i = \mathcal{I}^{(2)}$	12	0.5	0.5	0.5
Abb. 5.15, 5.16	$C_i = \mathcal{I}^{(2)}$	38	0.05	0.5	0.5

**Tabelle 5.2:** Parameter der hier illustrierten Beispiele für die Konvergenz der Lösung



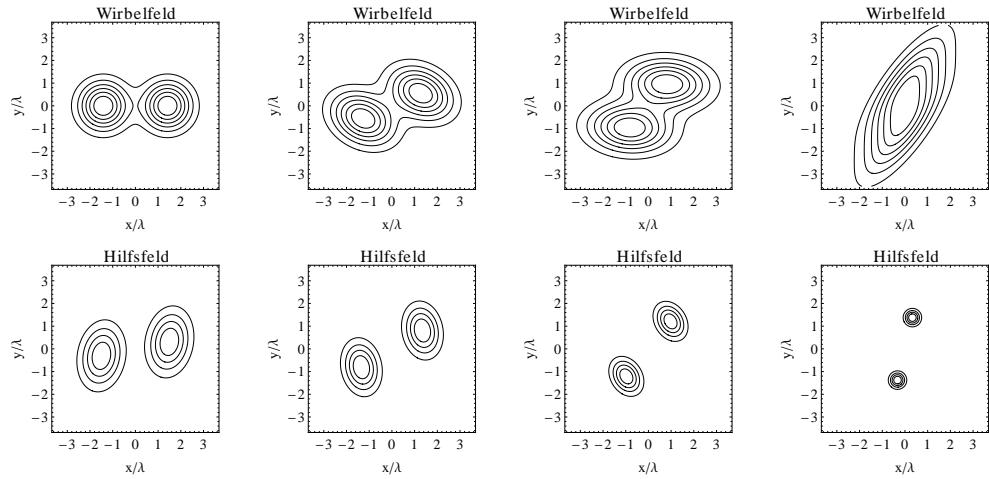
**Abbildung 5.5:** Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für kreisförmige Anfangsbedingungen und  $q = 0.007$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts.



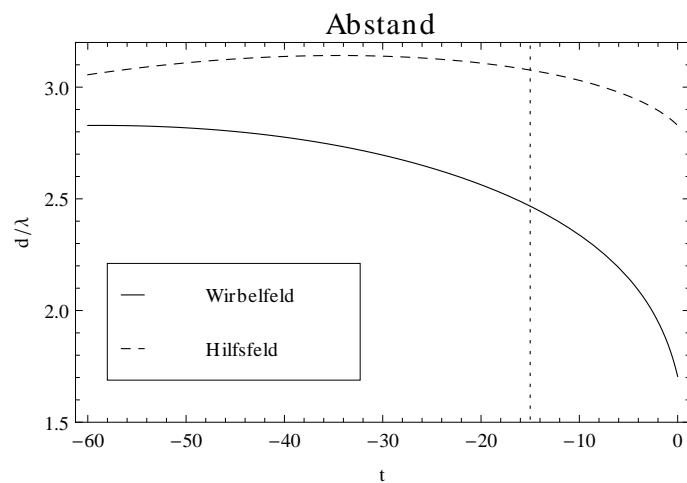
**Abbildung 5.6:** Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.5.

## 5 Modellierung durch elliptische Wirbel

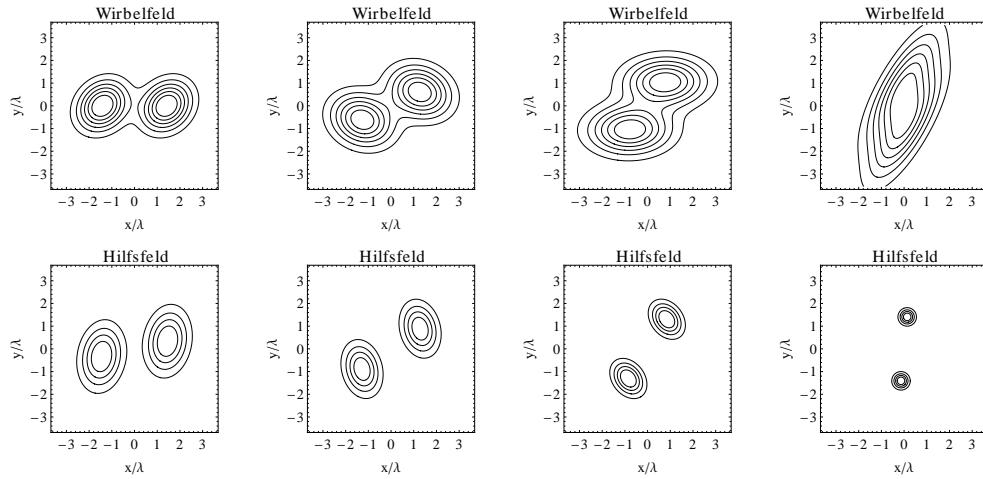
---



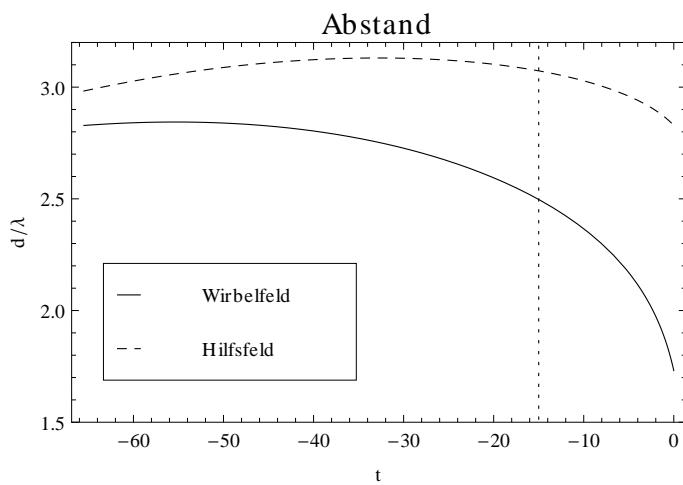
**Abbildung 5.7:** Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für kreisförmige Anfangsbedingungen und  $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts.



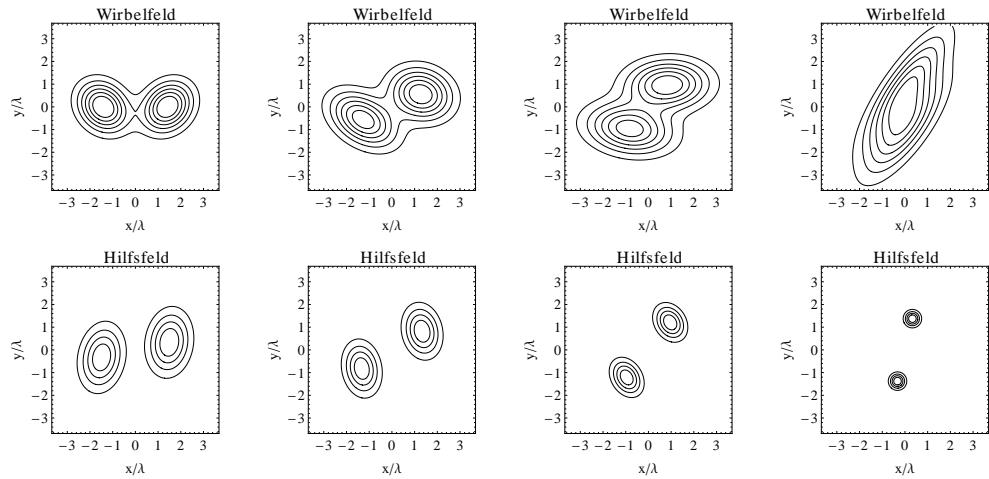
**Abbildung 5.8:** Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.7.



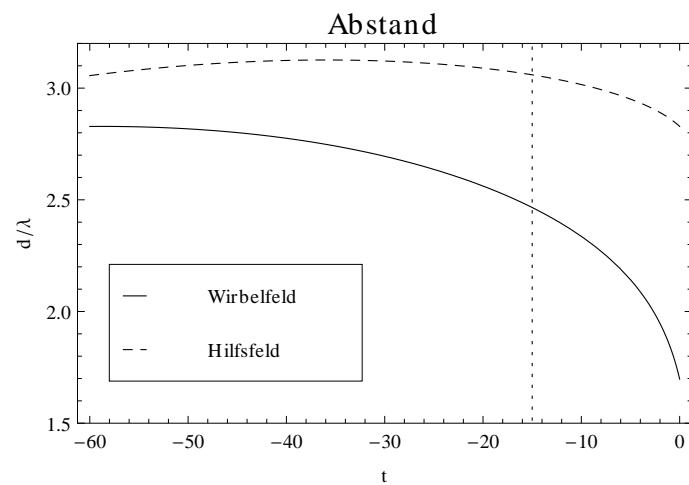
**Abbildung 5.9:** Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für elliptische Anfangsbedingungen mit parallelen Hauptachsen und  $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts.



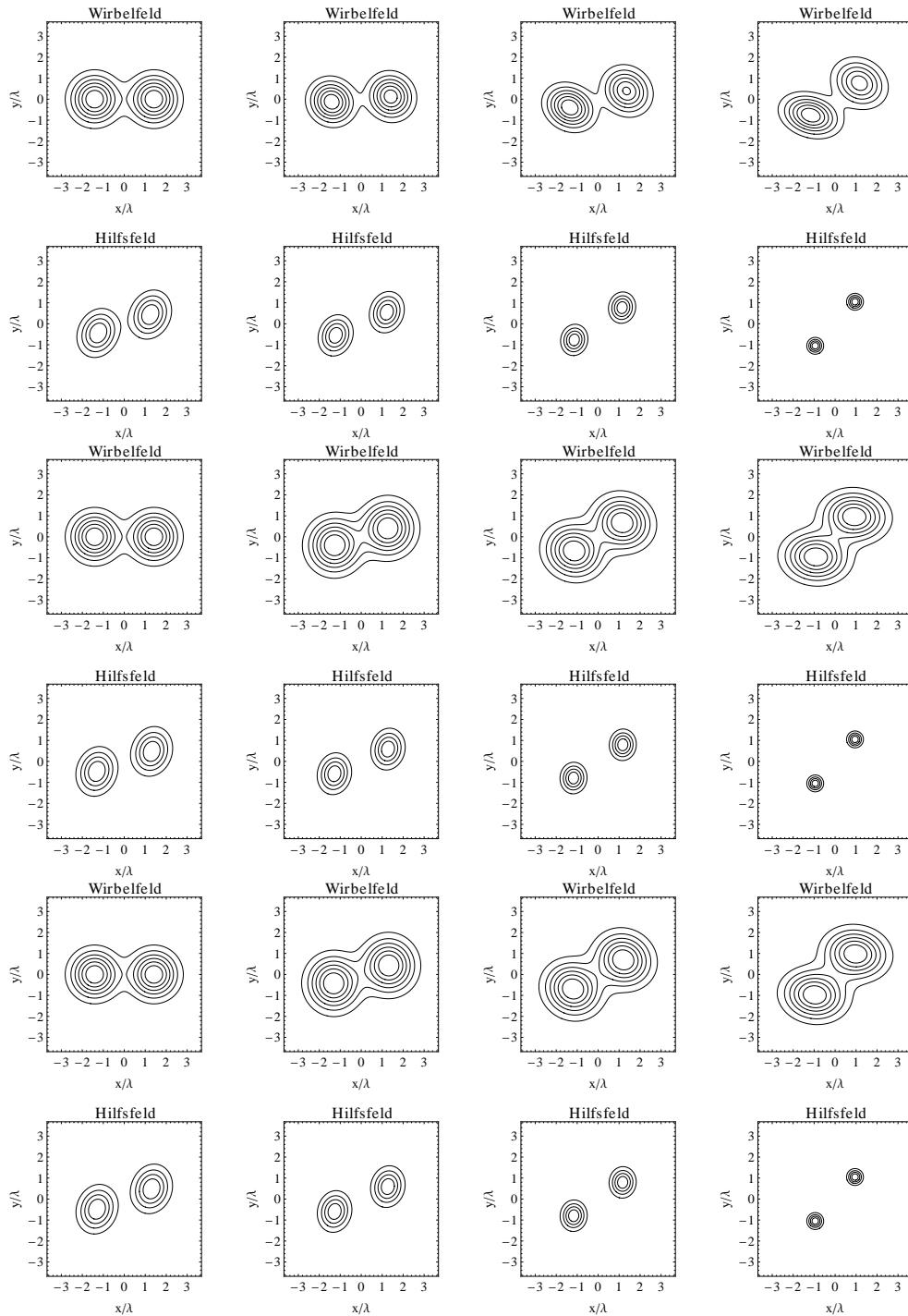
**Abbildung 5.10:** Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.9.



**Abbildung 5.11:** Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für elliptische Anfangsbedingungen mit antiparallelen Hauptachsen und  $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts.



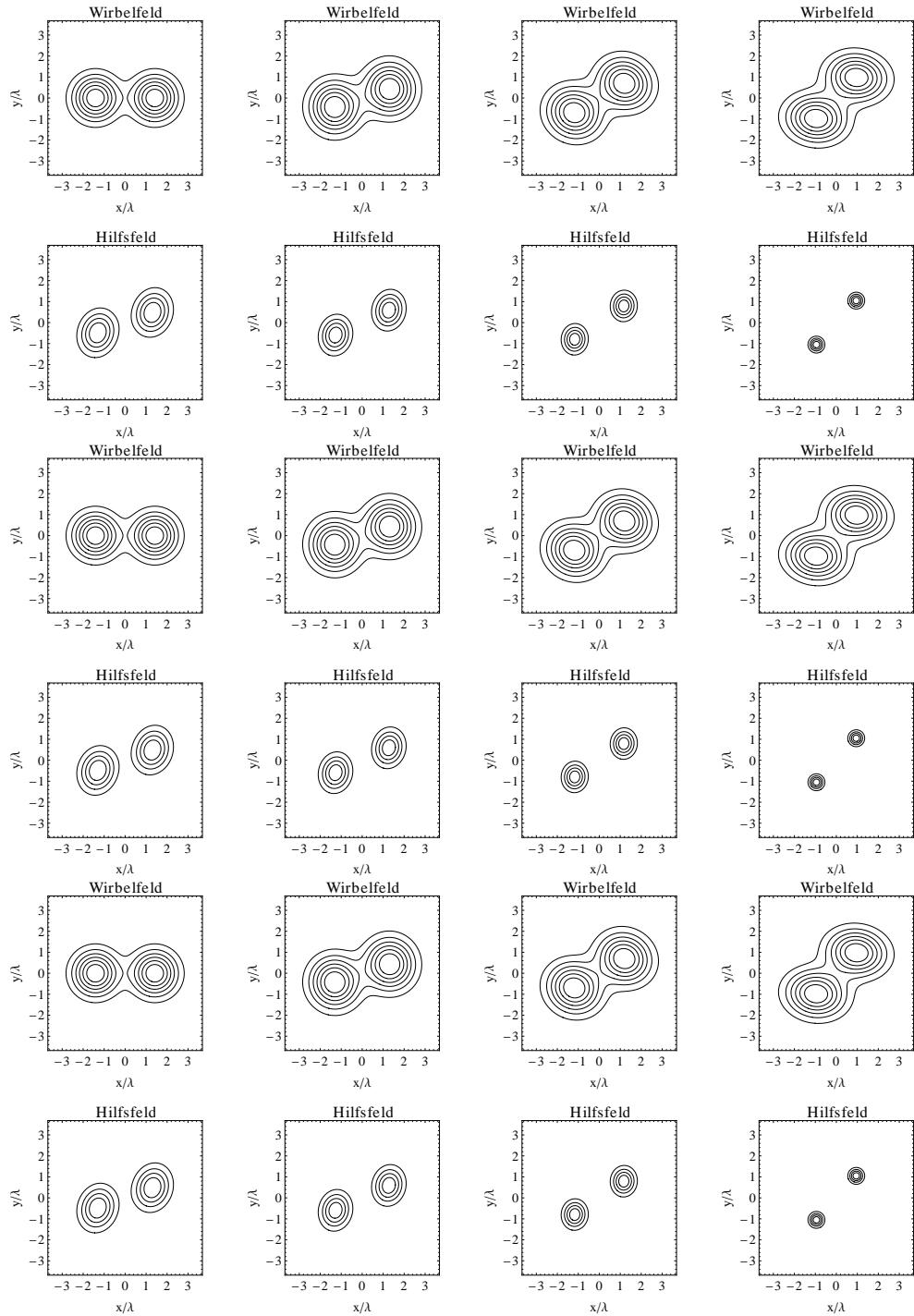
**Abbildung 5.12:** Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.11.



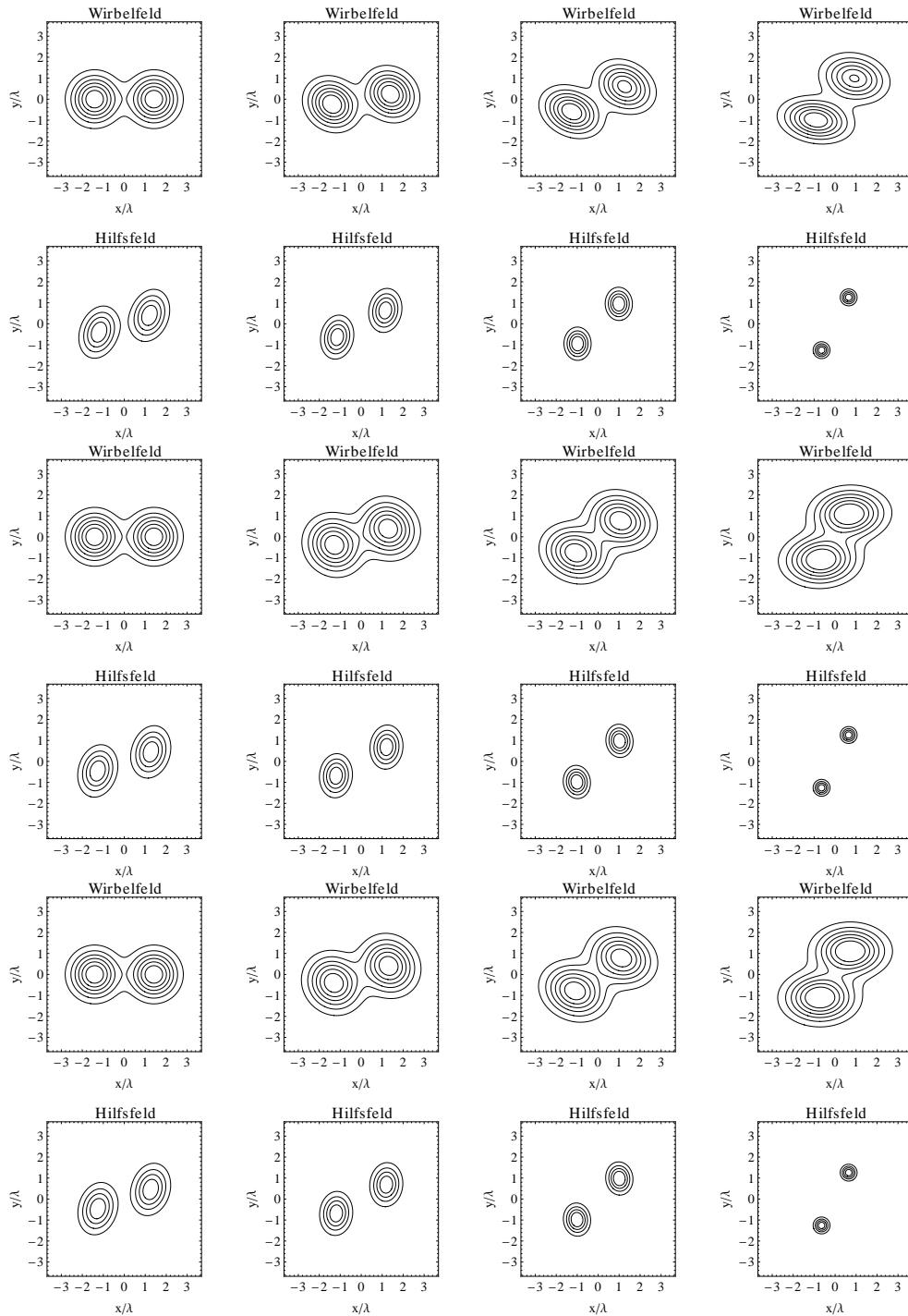
**Abbildung 5.13:** Beispiel für Iterationen mit  $q = 0.5$ : Schritte 1-3. Zeit jeweils von links nach rechts aufsteigend, Wirbel- und Hilfsfeld untereinander für jeden Iterationsschritt.

## 5 Modellierung durch elliptische Wirbel

---



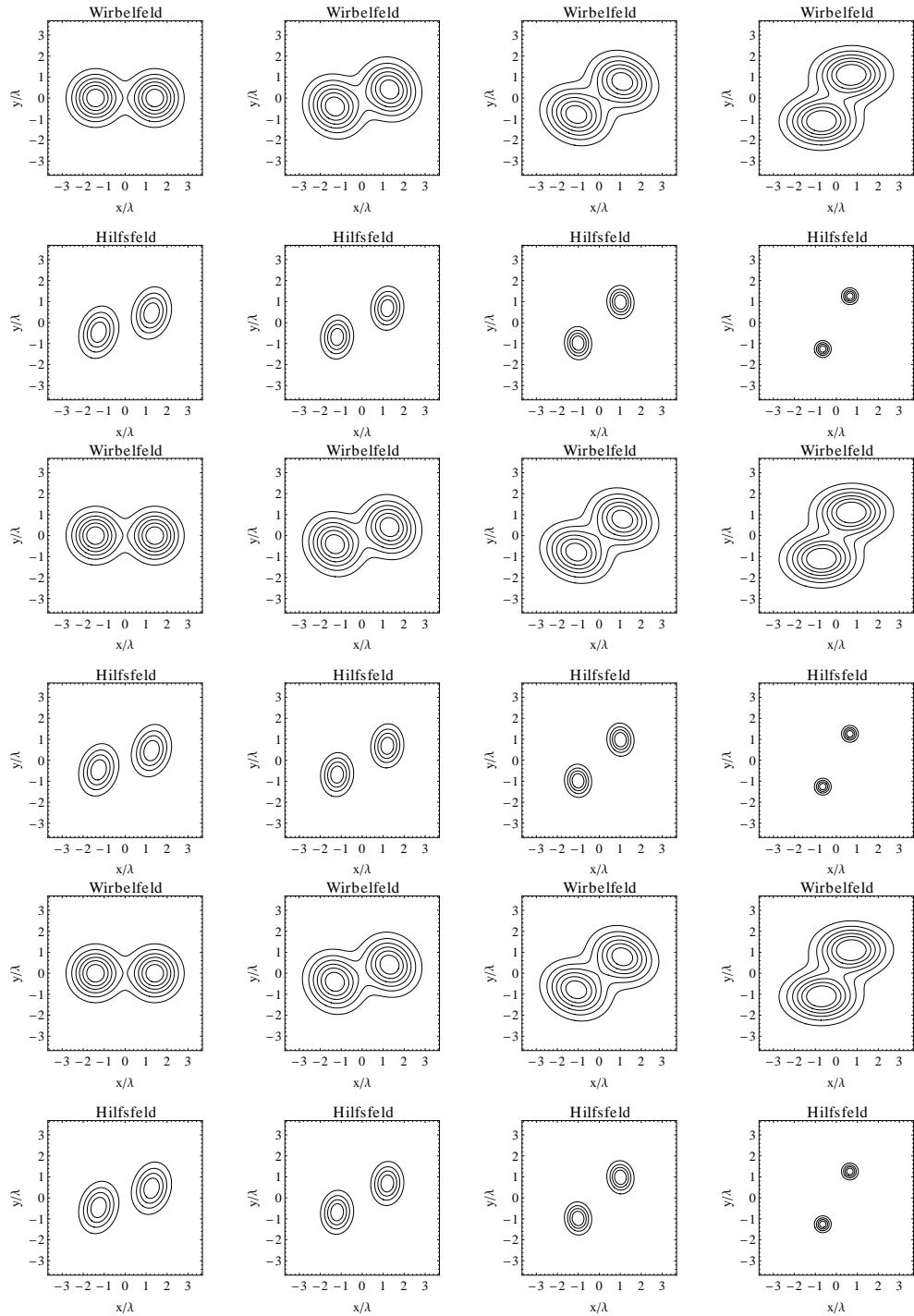
**Abbildung 5.14:** Beispiel für Iterationen mit  $q = 0.5$ : Schritte 4-6



**Abbildung 5.15:** Beispiel für Iterationen mit  $q = 0.05$ : Schritte 1-3. Zeit jeweils von links nach rechts aufsteigend, Wirbel- und Hilfsfeld untereinander für jeden Iterationsschritt.

## 5 Modellierung durch elliptische Wirbel

---



**Abbildung 5.16:** Beispiel für Iterationen mit  $q = 0.05$ : Schritte 4-6

# 6 Statistik im Instantonformalismus

## 6.1 Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit für elliptische Wirbel

In Kapitel 3 haben wir die statistische Bedeutung der Instantonapproximation ausführlich erklärt. Im Folgenden soll mithilfe des Modells elliptischer Wirbel der Zusammenhang zwischen dem Mechanismus der Elongation der Wirbel und der Übergangswahrscheinlichkeit qualitativ und quantitativ verdeutlicht werden.

### 6.1.1 Verbindung von Statistik und Dynamik

In der Instantonnäherung ersetzt man das charakteristische Funktional

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\omega \mathcal{D}\hat{\omega} e^{iS + \int d^2x dt \eta\omega + \hat{\eta}\hat{\omega}}$$

durch das Maximum der Wirkung  $S_e$  gemäß

$$\mathcal{Z} \approx e^{iS_e}.$$

Setzt man die Instantongleichung für die Wirbelstärke (siehe Gleichung (5.9)) in die Wirkung ein, so erhält man die extreme Wirkung

$$S_e = -\frac{i}{2} \int d^2k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t), \quad (6.1)$$

wobei das Hilfsfeld durch die explizite Lösung der Instantongleichung ersetzt werden muss. Mit dem verallgemeinerten Gaußintegral

$$\int d^2k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{k}C\mathbf{k}} = 2\pi \frac{e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}C^{-1}\mathbf{x}}}{\sqrt{\det[C]}}$$

kann die  $k$ -Integration in Gleichung (6.1) mit der Korrelation

$$Q = q e^{-\frac{1}{2}\mathbf{k}\tilde{Q}\mathbf{k}}$$

analytisch gelöst werden. Man erhält für zwei elliptische Strukturen

$$S_e = i\pi \int dt \left\{ \frac{\hat{\Gamma}_1^2}{\sqrt{\det \tilde{Q} + 2\hat{C}_1}} + \frac{\hat{\Gamma}_2^2}{\sqrt{\det \tilde{Q} + 2\hat{C}_2}} + \frac{\hat{\Gamma}_1 \hat{\Gamma}_2 e^{-\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1)A(\hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1)}}{\sqrt{\det \tilde{Q} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2}} \right\}, \quad (6.2)$$

wobei  $A$  für das Inverse der Matrix  $\tilde{Q} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2$  steht. Dabei gilt für hinreichend weit entfernte Wirbel, dass der Überlapp

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)A(\hat{x}_2 - \hat{x}_1)}}{\sqrt{\det \tilde{Q} + \hat{C}_1 + \hat{C}_2}} \approx 0 \quad (6.3)$$

vernachlässigt werden kann. Für das Hilfsfeld ist der Überlapp und das Volumen der restlichen Terme im Integranden für das Beispiel aus Abbildung 5.5 in Abbildung 6.1(b) dargestellt. Der Überlapp ist ungefähr drei Größenordnungen kleiner und kann daher vernachlässigt werden.

Wir wollen die Übergangswahrscheinlichkeit

$$f_C \left( \{ \mathbf{x}_i^0, \Gamma_i^0 \} \mid \{ \mathbf{x}_i, \Gamma_i \} \right) = e^{iS_e} \quad (6.4)$$

berechnen, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, zur Zeit  $t = 0$  elliptische Wirbel der Zirkulationen  $\Gamma_i$  bei  $\mathbf{x}_i$  mit den Formen  $C_i(0)$  zu finden. Dabei geben wir die Formen  $C_i(t^*)$ , die Positionen  $\mathbf{x}_i(t^*)$  und die Zirkulationen  $\Gamma_i(t^*)$  vor.

Dafür muss die Lebensdauer des Instantons  $|t^*|$  aus der Gleichung

$$\Gamma_i(t) = q\hat{\Gamma}_i(t - t^*) + \Gamma_i(t^*) \quad (6.5)$$

extrahiert werden, wobei das Zirkulationsinkrement  $\Gamma_i(0) - \Gamma_i(t^*)$  vorgegeben wird. Zusätzlich muss man eine Abbildung finden, die die Anfangsbedingungen des Hilfsfeldes auf die Endpunkte der Wirbelzentren gemäß

$$\mathbf{x}_1(t^*), \mathbf{x}_2(t^*); \hat{\mathbf{x}}_1(0), \hat{\mathbf{x}}_2(0) \rightarrow \mathbf{x}_1(t^*), \mathbf{x}_2(t^*); \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0) \quad (6.6)$$

abbildet. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $f_C$  hängt zusätzlich von der Form der Ellipsen  $C$  zur Zeit  $t^*$  ab. Für die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit  $f$  muss dann über alle möglichen Ellipsenformen  $C$  bei gegebener Verteilung  $p(C)$  gemäß

$$f \left( \{ \mathbf{x}_i^0, \Gamma_i^0 \} \mid \{ \mathbf{x}_i, \Gamma_i \} \right) = \int dC p(C) f_C \left( \{ \mathbf{x}_i^0, \Gamma_i^0 \} \mid \{ \mathbf{x}_i, \Gamma_i \} \right) \quad (6.7)$$

integriert werden.

### 6.1.2 Übergangswahrscheinlichkeit

#### Übergangswahrscheinlichkeit für kreisförmige Wirbel

Wir wollen die Übergangswahrscheinlichkeit für zwei anfangs kreisförmige Wirbel berechnen, wobei wir das Lösungsverfahren für die Instantongleichungen aus dem vorherigen Kapitel benutzen. Dies ist nur für isolierte Wirbel in der Nähe von Punktirbelllösungen gültig, sodass wir nur spezielle Übergänge betrachten können, die den unter 5.2 beschriebenen Annahmen genügen. Wir variieren das Zirkulationsinkrement und damit die

## 6.1 Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit für elliptische Wirbel

---

Lebensdauer  $|t^*|$  des Instantons sowie den Abstand  $d$  der Wirbel zur Zeit  $t^*$ . Aufgrund der gekoppelten Anfangsbedingungen<sup>1</sup> gemäß

$$\hat{\mathbf{x}}_i(0) = U(\vartheta|t^*|)\mathbf{x}_i(t^*)$$

haben die Strukturen im Hilfsfeld zur Zeit  $t = 0$  denselben Abstand  $d$  wie die Punkte  $\mathbf{x}_i$  zur Zeit  $t^*$ . Das heißt, wir betrachten Übergänge von einer Wirbelkonfiguration zur Zeit  $t^*$  mit zwei kreisförmigen Wirbeln mit dem Abstand  $d$  und den Zirkulationen  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$  zu einer Wirbelkonfiguration zur Zeit  $t = 0$  mit zwei Wirbeln der Formen  $C_i(0)$ , die sich bei  $\mathbf{x}_1(0)$  und  $\mathbf{x}_2(0)$  befinden und die Zirkulationen  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1 + \Delta\Gamma$  besitzen. Dabei folgt  $C_i(0)$  und  $\mathbf{x}_i(0)$  aus der Lösung der Instantongleichungen. Wir definieren für diesen Übergang die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(d, \Delta\Gamma) = f_{\mathcal{I}} \left( |x_1^0 - x_2^0| = d, \{\Gamma_i^0 = 1\} \middle| \{\mathbf{x}_i(0), \Gamma_i(0) = 1 + \Delta\Gamma\} \right) \quad (6.8)$$

und die extreme Wirkung  $S_e(d, \Delta\Gamma)$ .  $S_e$  folgt aus Gleichung (6.2) und hängt von der Lösung der Instantongleichungen für die entsprechenden Anfangsbedingungen ab. Die Übergangswahrscheinlichkeit  $P$  erhält man in der Instantonnäherung über  $P \approx \exp[iS_e]$ .

In Abbildung 6.2 ist der Verlauf der extremalen Wirkung  $S_e(d, \Delta\Gamma)$  und der Übergangswahrscheinlichkeit  $P(d, \Delta\Gamma)$  dargestellt. Auf der  $x$ -Achse ist der Abstand  $d$  der Wirbel zur Zeit  $t^*$  dargestellt und auf der  $y$ -Achse das Zirkulationsinkrement  $\Delta\Gamma$ .

### Übergangswahrscheinlichkeit für elliptische Wirbel

Wir wollen analog zum vorherigen Abschnitt Übergänge von anfangs elliptischen Wirbeln betrachten. Dann erhalten wir die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(d, \Delta\Gamma) = f_C \left( \mathbf{x}_1^0 = \frac{d}{2}\mathbf{e}_x, \mathbf{x}_2^0 = -\frac{d}{2}\mathbf{e}_x, \{\Gamma_i^0 = 1\} \middle| \{\mathbf{x}_i(0), \Gamma_i(0) = 1 + \Delta\Gamma\} \right) \quad (6.9)$$

in Abhängigkeit der Form  $C_i$  der Wirbel zur Zeit  $t^*$ . Wir wollen im Folgenden elliptische Wirbel mit parallelen und senkrechten Hauptachsen betrachten.

Wir wählen die Anfangsbedingungen für die Formen der Wirbel gemäß

$$C_1(0) = C_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Hauptachsen der Ellipsen sind dabei parallel zueinander. Man beobachtet<sup>2</sup>, dass die elliptischen Wirbel zuerst kreisförmig werden und dann in die andere Richtung elongiert werden, d.h. Haupt- und Nebenachsen tauschen ihre Rollen bevor die Elongation einsetzt. Dies liegt an der Form und Position der Strukturen im Hilfsfeld in der Nähe von  $t^*$ . Wir variieren den anfänglichen Abstand  $d$  und das Wirbelstärkeninkrement  $\Delta\Gamma$ . Das Ergebnis

<sup>1</sup>Siehe Gleichung (5.77).

<sup>2</sup>Siehe Abbildung 5.9 oder Video “Elongation.II.Ellipsen.mpg“ auf der CD. Die Evolution entspricht den Parametern des linken oberen Punktes in den Plots.

ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Man beobachtet eine leichte Steigung der Höhenlinien von rechts nach links, die bei größeren Zirkulationsinkrementen stärker wird.

Für senkrechte Hauptachsen sieht die Anfangsbedingung wie ein "V" aus<sup>3</sup>. Wir wählen

$$C_1(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.11a)$$

und

$$C_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.11b)$$

Die extreme Wirkung und die Übergangswahrscheinlichkeit ist für diese Anfangsbedingungen in Abbildung 6.4 dargestellt. Man sieht qualitativ den gleichen Verlauf wie bei den anderen Beispielen.

## 6.2 Zusammenfassung

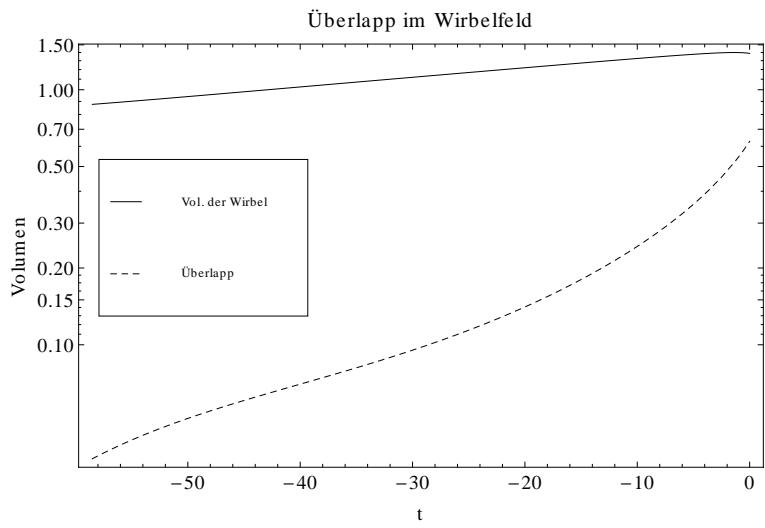
Wir haben sowohl für kreisförmige als auch für elliptische Wirbel die Übergangswahrscheinlichkeit berechnet. Dabei haben wir den Abstand der Wirbel zur Zeit  $t^*$  und das Zirkulationsinkrement variiert, welches proportional zur Lebensdauer des Instantons ist. Man beobachtet, dass die Höhenlinien der Übergangswahrscheinlichkeit vor allem für kleine Zirkulationsinkremente parallel zur  $x$ -Achse verlaufen. Das bedeutet, dass die Lebensdauer der Instantonen der dominante Faktor für die Übergangswahrscheinlichkeit ist. Das heißt, je länger das Instanton lebt, desto unwahrscheinlicher wird der Übergang. Dies ist intuitiv klar, denn je mehr Zeit vergeht, desto mehr Möglichkeiten existieren für die Evolution des Wirbelfeldes.

Die Evolution der Wirbel geschieht langsamer, wenn die Wirbel anfangs weiter entfernt sind, was konsistent mit der Abhängigkeit der Frequenz der Rotation von zwei Punktspiralen  $\vartheta = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/(2\pi d^2)$  vom Abstand  $d$  ist. Nach einer gewissen Zeit dominiert die Elongation der Hauptachsen die Dynamik, was bei kleineren Abständen früher eintritt als bei größeren. In den Plots in Abbildungen 6.2-6.4 entspricht dies jeweils der oberen linken Ecke. Man sieht, dass die bei kleineren Lebensdauern parallel zur  $x$ -Achse verlaufenden Höhenlinien sich im Bereich starker Elongation nach oben biegen. Das bedeutet, dass Zustände starker Elongation eine höhere Übergangswahrscheinlichkeit aufweisen.

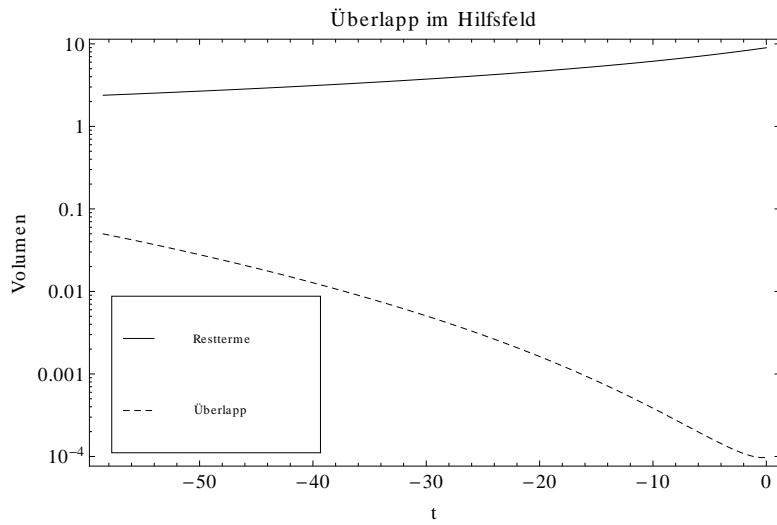
Mit unserem Modell ist es aufgrund der Annahmen aus 5.2 nicht möglich, allgemeinere Übergänge als durch Gleichung (6.9) beschrieben zu berechnen.

---

<sup>3</sup>Siehe Abbildung 5.11 oder Video "Elongation\_V\_Ellipsen.mpg". Die Evolution entspricht ebenfalls den Parametern des linken oberen Punktes in den Plots.

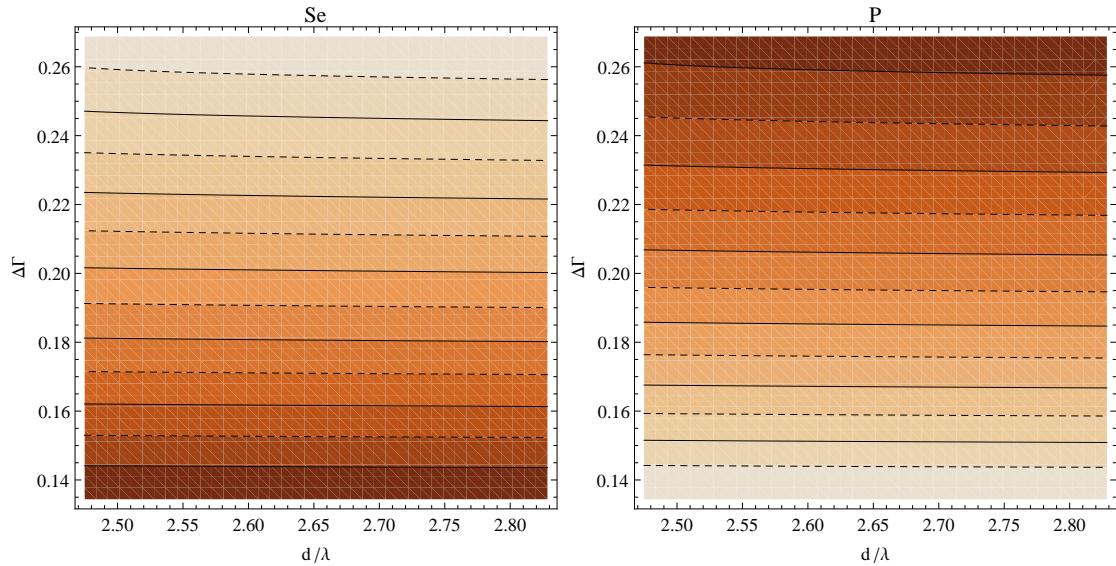


(a) Überlapp des Wirbelfeldes.

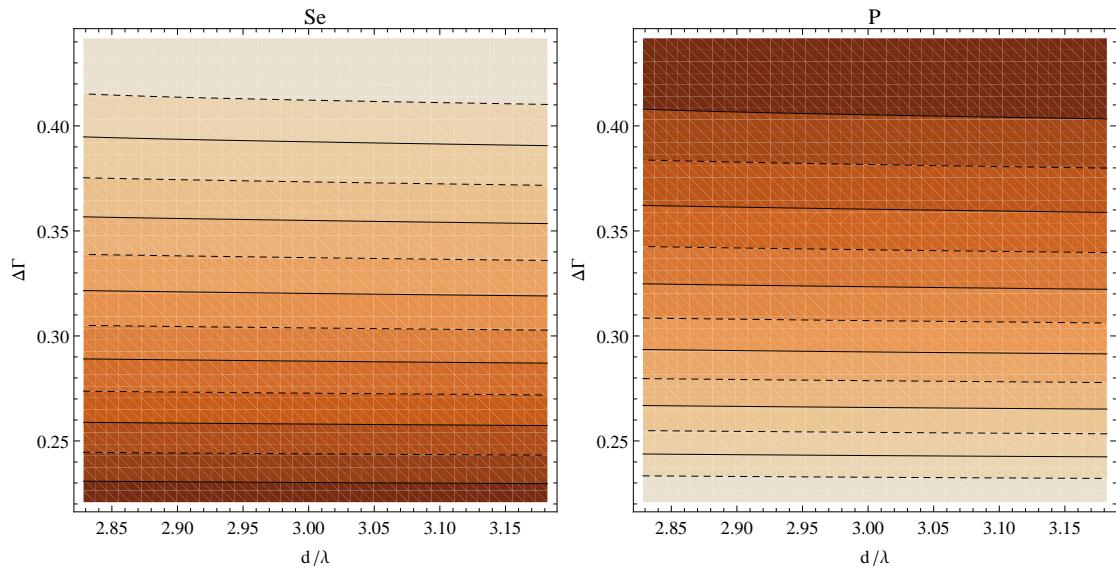


(b) Überlapp des Hilfsfeldes.

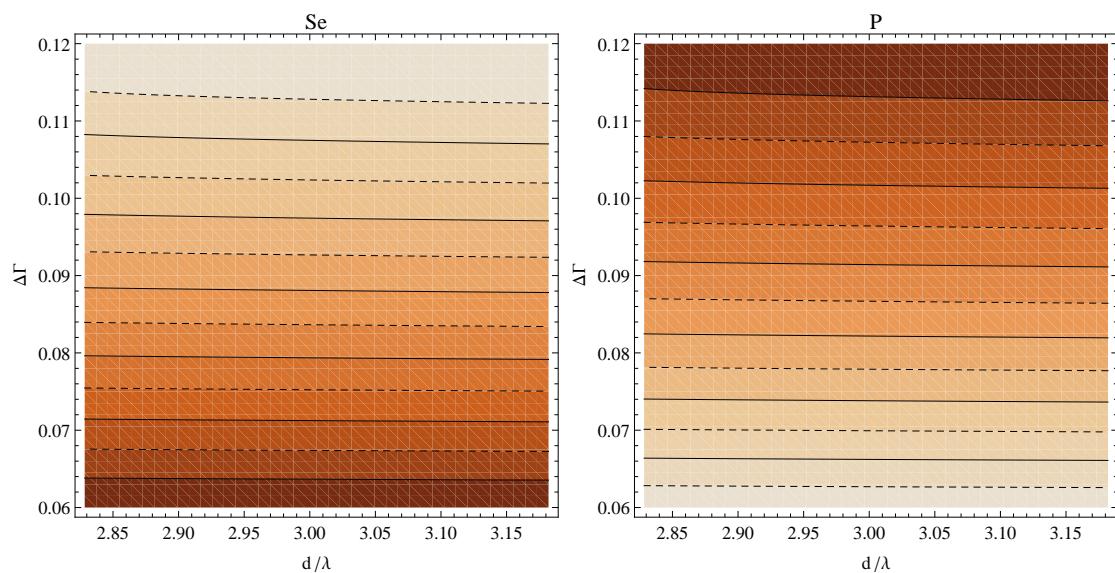
**Abbildung 6.1:** Größe des Überlapps im Wirbel- und Hilfsfeld für die in Abbildung 5.5 dargestellte Evolution.



**Abbildung 6.2:** Links: Wirkung bei Variation des Abstandes  $d$  und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit  $P$ . Jeweils für  $q = 0.007$



**Abbildung 6.3:** Links: Wirkung bei Variation des Abstandes  $d$  und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit  $P$ . Jeweils für  $q = 0.007$  bei anfangs elliptischen Wirbeln.



**Abbildung 6.4:** Links: Wirkung bei Variation des Abstandes  $d$  und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit  $P$ . Jeweils für  $q = 0.007$  bei "V"-förmiger Anfangsbedingung.



# 7 Rotor Approximation

Wir haben im vorherigen Kapitel ein Modell elliptischer Wirbel vorgestellt. Die Lösung des Wirbel- und Hilfsfeldes mittels eines iterativen Verfahrens in der Nachbarschaft von PunktWirbellösungen zeigt eine Elongation der Hauptachsen der Wirbel und eine Annäherung der elongierten Wirbel. Im Folgenden machen wir eine Fernfeldapproximation der elliptischen Wirbel und approximieren den Einfluss des Hilfsfeldes in geeigneter Form, um eine große Anzahl an Wirbeln lösen zu können. Dies führt zum von J. und R. Friedrich betrachteten Rotor-Modell welches eine inverse Kaskade in Form von Clusterbildung von Wirbelpaaren gleicher Zirkulation entwickelt.

## 7.1 Idee

Das Rotor-Modell wurde von J. und R. Friedrich entwickelt (siehe [23]) und besteht aus PunktWirbelpaaren gleicher Zirkulation, die durch eine inelastische Kopplung verbunden sind. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 7.1 gezeigt. An den Positionen  $\mathbf{x}_i(t)$  und  $\mathbf{y}_i(t)$  befinden sich PunktWirbel der Zirkulation  $\Gamma_i$ . Die inelastische Kopplung kann man sich als überdämpfte Feder vorstellen. Werden die Punkte aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, relaxieren sie zurück in die Ruhelage, führen jedoch keine Schwingungen aus.

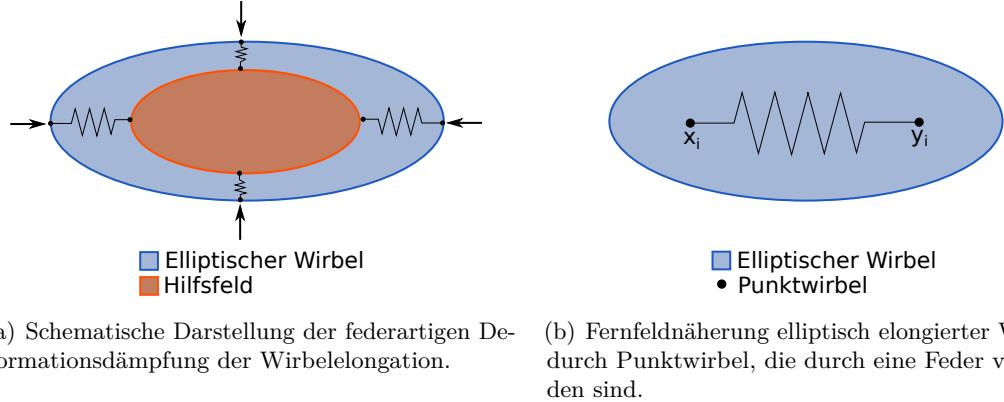
## 7.2 Rotor Approximation elliptischer Wirbel

Das numerische Verfahren zur Lösung der Evolutionsgleichungen elliptischer Wirbel wurde im vorherigen Kapitel auf zwei Wirbel und zwei elliptische Strukturen angewandt. Das Verfahren lässt sich direkt auf  $N$  Wirbel und  $N$  elliptische Strukturen erweitern, solange die Annahmen (siehe 5.2) gewährleistet sind. Die Lösung für die PunktWirbel (erster Iterationsschritt) kann im allgemeinen Fall dann nicht mehr analytisch angegeben werden sondern muss numerisch bestimmt werden. Ausgehend von dieser Lösung kann das iterative Verfahren analog verwendet werden. Für die Betrachtung von sehr vielen Wirbeln wird der numerische Aufwand jedoch sehr hoch, sodass wir hier den Effekt des Hilfsfeldes folgendermaßen modellieren:

1. Die Positionen der Hilfswirbel seien zu jeder Zeit identisch mit den Positionen der Wirbel (nicht nur im ersten Iterationsschritt). Dann fallen die zusätzlichen Terme

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i \rightarrow q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i) = 0 \quad (7.1)$$

in der Advektionsgleichung weg.



**Abbildung 7.1:** Schematische Darstellung der Rotor Approximation für elliptische Wirbel.

2. Die elliptischen Wirbel werden durch zwei Punktwirbel gleicher Zirkulation approximiert, die auf der Hauptachse der jeweiligen Ellipse in einem bestimmten Abstand positioniert sind.
3. Der rote Term in der Deformationsgleichung

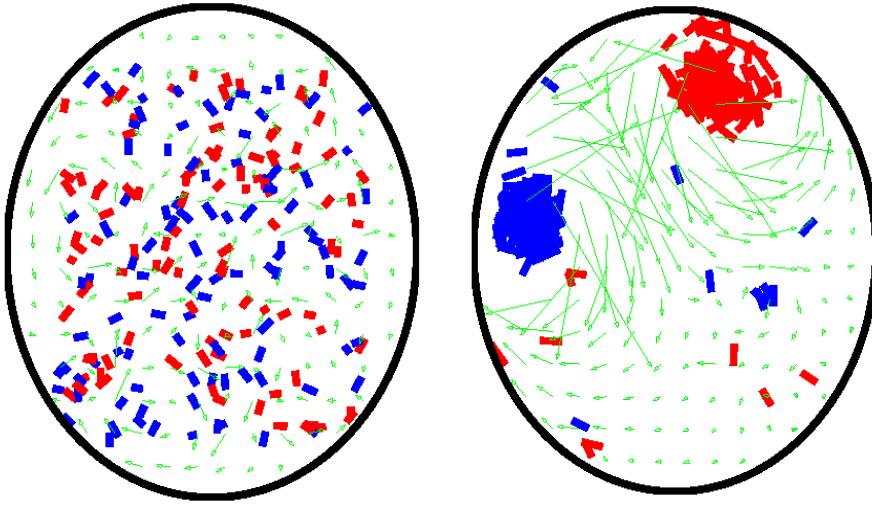
$$q \frac{\hat{\Gamma}_i}{\Gamma_i} (\tilde{Q} + \hat{C}_i - C_i) \quad (7.2)$$

wird durch eine überdämpfte Feder modelliert, die die beiden Punktwirbel verbindet und die Ruhelage  $D_0$  sowie eine geeignete Federkonstante  $\gamma/2$  hat. Der Effekt des roten Terms ist anschaulich in Abbildung 7.1(a) dargestellt, in Abbildung 7.1(b) ist die Approximation der elliptischen Wirbel durch zwei Punktwirbel mit entsprechender Kopplung schematisch dargestellt.

Die Punktwirbelpaare nennen wir *Rotore*. Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 7.1 zu finden. Die Rotor Approximation führt zu den Bewegungsgleichungen für die Positionen  $\mathbf{x}_i(t)$  und  $\mathbf{y}_i(t)$  der beiden Punktwirbel, die den  $i$ -ten Rotor bilden. Man erhält (siehe [23]):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{\gamma}{2} (D_0 - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|) \mathbf{e}_i + \Gamma_i \mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) + \sum_{j \neq i} \Gamma_j [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j)] \\ \dot{\mathbf{y}}_i &= -\frac{\gamma}{2} (D_0 - |\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i|) \mathbf{e}_i + \Gamma_i \mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) + \sum_{j \neq i} \Gamma_j [\mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) + \mathbf{u}(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_j)] \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dabei ist  $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}}{2\pi r^2}$  das Geschwindigkeitsfeld eines Punktwirbels im Ursprung. Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|}$  zeigt in Verbindungsrichtung der Punktwirbel  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{y}_i$  bzw. in Richtung der Hauptachse des elliptischen Wirbels. Die ersten Terme auf der rechten Seite beschreiben die Federkraft, die die Punktwirbel  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{y}_i$  zusammenhält. Die restlichen Terme beschreiben die Advection jeden Punktwirbels durch das Geschwindigkeitsfeld, das von allen anderen Punktwirbeln erzeugt wird (siehe Kapitel 2.3).



**Abbildung 7.2:** Evolution des Rotor-Modells für 200 Wirbelpaare. Links: Anfangszustand, rechts: Zustand zu einem späteren Zeitpunkt. Die Rotoren positiver und negativer Zirkulationen haben sich in Clustern organisiert. Abb. aus [23].

### 7.3 Evaluation des Modells

Zur Untersuchung der Dynamik des Rotormodells haben J. und R. Friedrich 200 Wirbelpaare positiver und negativer Zirkulation zufällig in einem Gebiet angeordnet und die Evolution beobachtet. Die Evolution von zufälligen Anfangsbedingungen für 200 Wirbelpaare ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Die roten Rechtecke sind positive Rotoren, d.h. Paare von zwei Wirbeln der Zirkulation  $\Gamma = 1$ , die blauen Rechtecke sind negative Rotoren der Zirkulation  $\Gamma = -1$ . Es stellt sich heraus, dass die positiven und negativen Wirbelpaare jeweils Cluster von Rotoren gleicher Zirkulation bilden, die sich wie große Wirbel positiver bzw. negativer Zirkulation verhalten. Dies zeigt, dass das hier entwickelte Modell elliptischer Wirbel die Dynamik beinhaltet, die zur Bildung einer inversen Kaskade führt.



## 8 Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde ein dynamisches Modell für die inverse Kaskade zweidimensionaler Turbulenz ausgehend von den Grundgleichungen der Hydrodynamik entwickelt. Dafür haben wir den Instantonformalismus verwendet, der die Evolution der wahrscheinlichsten Feldkonfiguration des Wirbelfeldes und eines Hilfsfeldes beschreibt. Diese Evolution wird über die Instantongleichungen beschrieben, die für das Wirbel- und Hilfsfeld Anfangsbedingungen zu verschiedenen Zeiten gehorchen, was die numerische Lösung schwierig gestaltet.

In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass aus den Quelltermen im charakteristischen Funktional sich eine Anfangsbedingung für das Hilfsfeld ergibt, die aus einer Superposition von Deltafunktionen zur Zeit  $t = 0$  besteht. Der Zeitpunkt  $t = 0$  der Observation wurde hierbei willkürlich gewählt. Das Wirbelfeld gehorcht beliebigen Anfangsbedingungen zur Zeit  $t^* < 0$ . Anschaulich bedeutet der Instantonformalismus, dass zur Zeit  $t^*$  ein Instanton erzeugt wird, welches zu einem Beobachter propagiert und dort zur Zeit  $t = 0$  vernichtet wird. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist dabei durch eine Sattelpunktapproximation<sup>1</sup> des charakteristischen Funktionalen näherungsweise gegeben.

Für den nichtviskosen Grenzfall konnten wir in Kapitel 4 näherungsweise das Hilfs- und Wirbelfeld durch einen PunktWirbelansatz lösen. Wir haben ein Geschwindigkeitsfeld im Lagrange'schen Bezugssystem erhalten, das von der Geschichte des Systems abhängt. Die Dynamik zweier PunktWirbel unterscheidet sich signifikant von der bekannten Lösung für zwei PunktWirbel ohne treibende Kraft. Während ein herkömmliches System aus zwei PunktWirbeln gleicher Zirkulation eine Rotation der Wirbel um ihren Mittelpunkt beschreibt und dabei den Abstand der Wirbel erhält, zeigt die PunktWirbellösung der Instantongleichungen eine Anziehung der beiden Wirbel auf spiralförmigen Bahnen. Dies führt zu neuen Skalen und ist konsistent mit unseren späteren Ergebnissen und Beobachtungen über das Verhalten von elliptischen Wirbeln in zweidimensionalen Strömungen. Wirbel entgegengesetzter Zirkulation führen eine Translationsbewegung senkrecht zu ihrem Verbindungsvektor aus. Die PunktWirbellösungen der Instantongleichungen folgen denselben Trajektorien, es ergibt sich jedoch zusätzlich eine Beschleunigung der Bewegung. Der Abstand bleibt dabei erhalten.

In Kapitel 5 haben wir das Modell durch einen Ansatz elliptischer Wirbel und elliptischer Strukturen für das Hilfsfeld erweitert. Wir konnten die Bewegungsgleichungen für die Zirkulationen, Positionen und Formen der Wirbel und elliptischen Strukturen im Hilfsfeld ableiten. Dabei haben wir angenommen, dass gleich viele Wirbel und elliptische Strukturen im Hilfsfeld vorhanden sind, der  $i$ -te Wirbel sich in der Nähe der  $i$ -ten Struktur befindet

---

<sup>1</sup>auch *stationary phase approximation* genannt

und die Wirbel bzw. elliptischen Strukturen im Hilfsfeld isoliert sind (d.h. der Überlapp des  $i$ -ten und  $j$ -ten Wirbels ist für  $i \neq j$  zu vernachlässigen). Zusätzlich zu den Termen, die aus der Wirbeltransportgleichung folgen, erhalten wir einen Term in der Advektionsgleichung der Wirbelmittelpunkte, der als überdämpfte Federkraft interpretiert werden kann und die Position des  $i$ -ten Wirbels an die Position der  $i$ -ten Struktur im Hilfsfeld zieht. Außerdem erhalten wir einen Term in der Deformationsgleichung, der die Form des  $i$ -ten Wirbels auf eine Form zieht, die durch die Form der  $i$ -ten elliptischen Struktur im Hilfsfeld und durch die Breite der Korrelationsfunktion gegeben ist. Es ergibt sich außerdem ein unterschiedliches Vorzeichen der Viskosität in der Deformationsgleichung der Wirbel und der elliptischen Strukturen im Hilfsfeld. Das liegt daran, dass das Wirbelfeld vorwärts in der Zeit von  $t^*$  bis  $t = 0$  gelöst werden muss, während die Evolution des Hilfsfeldes rückwärts von  $t = 0$  bis  $t^*$  zu lösen ist. Wir haben ein iteratives Verfahren zur numerischen Lösung der Gleichungen entwickelt, welches ausgehend von einem PunktWirbelsystem die Verformung der Wirbel und elliptischen Strukturen sukzessive berechnet. Dies ermöglicht es uns, die gekoppelten Gleichungen zu lösen, obwohl diese Anfangsbedingungen zu verschiedenen Zeiten erfüllen. Man beobachtet eine Elongation der Hauptachsen und eine Kontraktion der Nebenachsen der Ellipsen. Des Weiteren nähern die Wirbel sich einander schnell an, sobald die Elongation dominiert. Dies ist konsistent mit den Beobachtungen von Chen et al. [13] und Nielsen et al. [14]. Aufgrund der Annahme isolierter Wirbel konnten wir das Verschmelzen der Wirbel nicht beschreiben. Die Annäherung der Wirbel stellt jedoch Evidenz für einen solchen Vorgang dar.

Wir haben in Kapitel 6 die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Instantonformalismus für die genannten Annahmen berechnet. Dabei haben wir den anfänglichen Abstand der Wirbel und das Wirbelstärkeninkrement variiert. Das Wirbelstärkeninkrement ist die Differenz aus der Wirbelstärke zur Zeit der Observation und der anfänglichen Wirbelstärke. Da die Wirbelstärke linear in der Zeit wächst, ist das Wirbelstärkeninkrement proportional zur Lebensdauer des Instantons. Wir haben eine unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeit für zur Zeit der Observation elongierte und nicht elongierte Zustände gefunden. Aufgrund unserer Annahmen können wir nur Systeme betrachten, bei denen die Wirbel und elliptischen Strukturen in der Nähe sind und die Wirbel nicht verschmelzen. Außerdem hängt die Übergangswahrscheinlichkeit noch von der Form der Wirbel zur Zeit  $t^*$  ab. Um die allgemeine Übergangswahrscheinlichkeit zu berechnen, muss über alle möglichen Formen mit einer geeigneten Verteilungsfunktion integriert werden. Dieses Vorgehen kann mit der K-62 Theorie verglichen werden, bei der über die lokale Energiedissipationsrate mit geeigneter Verteilungsfunktion gemittelt wird. Da die Energiedissipationsrate mit dem Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes zusammenhängt, kann diese mit der Deformationsrate in unserem Modell verglichen werden.

Um die Dynamik vieler Wirbel berechnen zu können, haben wir in Kapitel 7 den Einfluss des Hilfsfeldes approximiert anstatt dieses explizit zu lösen. Dafür haben wir angenommen, dass die Wirbel und elliptischen Strukturen sich an den gleichen Positionen befinden, sodass der Federterm in der Advektionsgleichung verschwindet. Wir haben die elliptischen Wirbel durch zwei PunktWirbel gleicher Zirkulation approximiert, die sich auf der Hauptachse des entsprechenden Wirbels befinden. In der Deformationsgleichung tritt

---

ein Term auf, der die Form des  $i$ -ten Wirbels an eine Form koppelt, die durch die Form der  $i$ -ten elliptischen Struktur im Hilfsfeld und durch die Breite der Korrelationsfunktion bestimmt ist. Der Einfluss dieses Terms wurde approximiert, indem wir die Punktwirbel auf den Hauptachsen der Ellipsen durch eine überdämpfte Feder mit einem geeigneten Gleichgewichtsabstand und einer geeigneten Federkonstante verbunden haben. Dies führt zum Rotor-Modell, welches von J. und R. Friedrich betrachtet wurde [23]. Es zeigt das Auftreten einer inversen Kaskade durch Clusterbildung von Rotoren negativer bzw. positiver Zirkulation ausgehend von zufälligen Anfangsbedingungen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass wir ausgehend von der Wirbeltransportgleichung ein dynamisches Modell für die inverse Kaskade entwickelt haben. Dafür haben wir die Evolution der wahrscheinlichsten Feldkonfiguration elliptischer Wirbel berechnet. Man beobachtet eine Elongation der Hauptachsen und eine Kontraktion der Nebenachsen sowie eine Annäherung der Wirbel. Die Verallgemeinerung dieser Dynamik auf ein System vieler Wirbel (Rotor-Modell) zeigt die Bildung einer inversen Kaskade durch Clusterbildung von Wirbeln gleicher Zirkulation. Dies deutet darauf hin, dass die Elongation der Wirbelstrukturen die grundlegende Dynamik der inversen Kaskade darstellt.

Die Lösung der vorgestellten Dynamik elliptischer Wirbel für mehr als zwei Wirbel mit dem hier entwickelten numerischen Verfahren ist möglich. Ein offenes Problem stellt jedoch die Lösung der Dynamik im allgemeinen Fall dar, d.h. für eine Abweichung aus der Nachbarschaft einer Punktwirbellösung. Es bleibt eine offene Frage, wie die Übergangswahrscheinlichkeit durch Mittelung über die anfänglichen Formen der Wirbel für allgemeine Übergänge berechnet werden kann. Es wäre außerdem interessant, eine Erweiterung des Ansatzes elliptischer Wirbel vorzunehmen und z.B. eine Krümmung der Achsen zuzulassen. Die Erweiterung des Formalismus auf dreidimensionale Turbulenz stellt ebenfalls eine interessante Perspektive dar.



# A Anhang

## A.1 Pfadintegrale

Eine sehr anschauliche und damit vor allem für nicht Quantenfeldtheoretiker interessante Einführung in den Pfadintegralformalismus ist im Buch *Quantum Field Theory in a Nutshell* von A. Zee [25] zu finden. Im Folgenden werde ich die grundlegenden Ideen daraus zusammenfassen.

### A.1.1 Die Idee

Einen anschaulichen Zugang zu Pfadintegralen stellt die Verallgemeinerung des Doppelspaltexperiments dar. Der Aufbau ist vergleichbar zu Abbildung A.1(a) folgender: von einer Quelle  $S$  (engl. *Source*) propagiert ein Teilchen (z.B. ein Elektron) zu einem Beobachter  $O$  (engl. *Observer*) auf dem Schirm. Stellt man zwischen der Quelle und dem Beobachter einen Schirm mit zwei Spalten auf, so tritt ein Interferenzmuster auf. Das Doppelspaltexperiment wurde mit Elektronen derart durchgeführt, dass sich jeweils nur ein Elektron gleichzeitig in der Messanordnung befand. Dass sich auch in diesem Fall ein Interferenzmuster gebildet hat, gilt als Beleg für den Wellencharakter von Teilchen.

*1961 wurde das Doppelspaltexperiment mit Elektronen durch Claus Jönsson durchgeführt und im September 2002 in einer Umfrage der englischen physikalischen Gesellschaft in der Zeitschrift „Physics World“ zum schönsten physikalischen Experiment aller Zeiten gewählt<sup>1</sup>. (Siehe [26])*

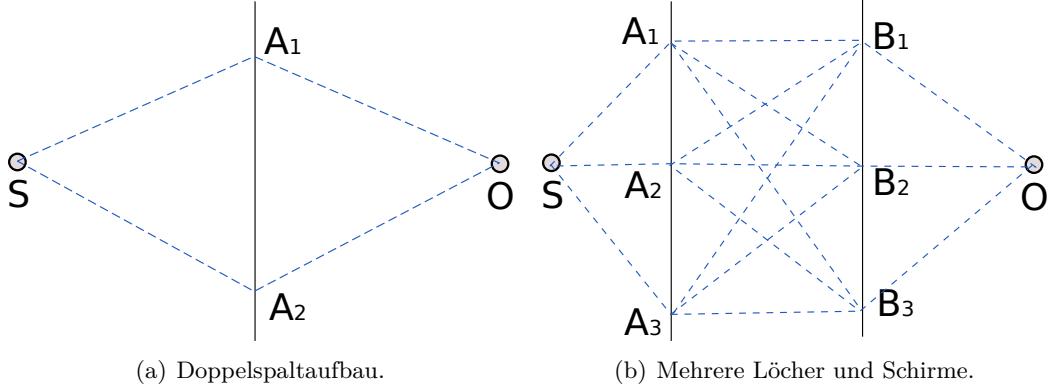
Um in der Quantenmechanik die Übergangsamplitude von  $S$  nach  $O$  zu berechnen, summiert man über die Amplituden der Übergänge

$$\sum_i \mathcal{A}[S \rightarrow A_i \rightarrow O]$$

von  $S$  nach  $A_1$ ,  $A_2$  und von  $A_1$  sowie  $A_2$  nach  $O$ . Die Amplitude für jeden dieser Übergänge wird durch den unitären Operator  $e^{-iHT}$  beschrieben, wobei  $T$  die Zeitdifferenz und  $H$  der Hamiltonoperator ist. Wir können auch Übergänge betrachten, bei denen mehr als zwei Löcher in den Schirmen sind und mehrere Schirme zwischen der Quelle und dem Beobachter aufgestellt sind. Dies wird für zwei Schirme mit je drei Löchern in Abbildung A.1(b) illustriert. Die Amplitude für den Übergang von der Quelle zum Beobachter ist

---

<sup>1</sup>Quelle: Wikipedia, 23. Februar 2012



**Abbildung A.1:** Propagation von Wellen oder Teilchen durch Spalte

dann durch die Summe über alle Übergänge

$$\sum_{ij} \mathcal{A}[S \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow O]$$

gegeben.  $A_i$  und  $B_j$  sind die Löcher in der Schirme wie in Abbildung A.1(b) dargestellt. Die gestrichelten blauen Linien entsprechen den jeweiligen Propagationsamplituden  $e^{-iHT}$ , über die summiert wird.

Wir stellen uns jetzt vor, zwischen Quelle und Beobachter wären unendlich viele Schirme mit unendlich vielen Löchern (die Schirme existieren dann nicht mehr wirklich, aber die Summierung über die einzelnen Wege bleibt erhalten). Dies ist in Abbildung A.2 dargestellt, wobei die blauen gestrichelten Linien representativ für alle möglichen Pfade stehen, die  $S$  und  $O$  im Zeitintervall  $T$  verbinden. Es ist intuitiv, dass die Übergangsamplitude durch eine Summe über alle möglichen Pfade zwischen der Quelle und dem Beobachter

$$\sum_{\text{Pfade}} \mathcal{A}(\{S \rightarrow O\}_{\text{über entsprechenden Pfad}})$$

mit der Gewichtung  $e^{-iHT}$  gegeben ist. Wie eine solche Summe konkret aussieht, werden wir im Folgenden sehen.

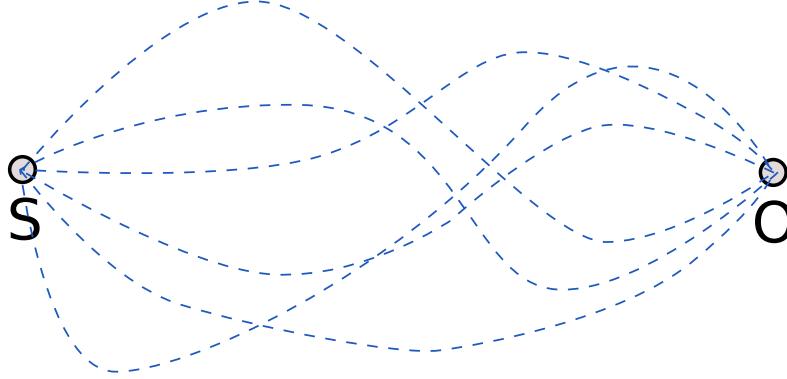
### A.1.2 Mathematische Formulierung

Wir betrachten den Übergang von einem quantenmechanischen Zustand<sup>2</sup>  $|q_I\rangle$  (engl. *initial*) zu einem Zustand  $|q_F\rangle$  (engl. *final*). Wir können den Übergang in  $N$  Teile der Dauer  $\delta t = T/N$  gemäß

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \langle q_f | e^{-iH\delta t} \cdots e^{-iH\delta t} | q_I \rangle \quad (\text{A.1})$$

---

<sup>2</sup>Wir verwenden hier die Dirac Notation. Siehe [27]



**Abbildung A.2:** Der Übergang zu unendlich vielen Schirmen mit unendlich vielen Löchern führt zum Pfadintegralformalismus.

aufteilen. Die Zustände  $|q\rangle$  bilden eine vollständige Basis, sodass die Relation

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1$$

gilt. Wir setzen diese Beziehung jeweils zwischen den Produkten in Gleichung (A.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle \\ &= \left( \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \right) \langle q_F | e^{-iH\delta t} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-iH\delta t} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-iH\delta t} | q_I \rangle. \end{aligned}$$

Für ein freies Teilchen mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m}$$

können wir  $\langle q_{j+1} | e^{-iH\delta t} | q_j \rangle$  ausrechnen<sup>3</sup> und erhalten

$$\langle q_{j+1} | e^{-i\frac{P^2}{2m}\delta t} | q_j \rangle = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\delta t}} e^{i\delta t \frac{m}{2} \left[ \frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t} \right]^2}.$$

Für den gesamten Übergang gilt dann

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \sqrt{\frac{m}{i2\pi\delta t}}^N \prod_{j=0}^{N-1} \int dq_j e^{i\delta t \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t} \right]^2}.$$

---

<sup>3</sup>Dafür setzen wir die vollständige Basis im Impulsraum  $\int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle \langle p| = 1$  als Eigenzustände des Impulsoperators ein.

Jetzt lassen wir die Zeitinkremente  $\delta t$  gegen 0 gehen, was gleichzeitig den Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  impliziert. Wir definieren

$$\int \mathcal{D}q(t) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{i2\pi\delta t}}^N \prod_{j=0}^{N-1} \int dq_j.$$

Durch das Bilden des kontinuierlichen Grenzwertes geht  $\frac{q_{j+1}-q_j}{\delta t}$  in die Ableitung  $\dot{q}(t)$  über. Wir erhalten die Pfadintegraldarstellung

$$\langle q_F | e^{-iHT} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}q(t) e^{i \int_0^T dt \frac{1}{2} m \dot{q}^2}$$

des Übergangs für ein freies Teilchen.

### A.1.3 Pfadintegraldarstellung am Beispiel des freien Skalarfeldes

Durch den Übergang zur feldtheoretischen Beschreibung durch das Feld<sup>4</sup>  $\varphi(x)$  sowie durch Hinzufügen von einem Potential  $V(\varphi)$  sowie Quelltermen  $J(x)\varphi(x)$  erhält man das sogenannte *Erzeugendenfunktional*

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)]}$$

wobei  $\mathcal{L}$  die entsprechende Lagrangedichte ist.  $\mathcal{Z}$  heißt deswegen Erzeugendenfunktional, weil in der Störungstheorie daraus alle Green'schen Funktionen abgeleitet werden können. Für eine Herleitung und weitere Diskussion verweise ich auf [25]. Die Gauß'sche bzw. freie Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi^2]$$

und stellt einen Sonderfall dar, weil das Pfadintegral des Erzeugendenfunktionsals damit analytisch lösbar ist. Dies wollen wir im Folgenden zeigen.

Wir stellen uns das Erzeugendenfunktional (es wurde im Exponent partiell integriert)

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + m^2)\varphi + J\varphi]}$$

in einer diskreten Form vor. Dies entspricht der Darstellung vor der Grenzwertbildung  $N \rightarrow \infty$ , die zu dem Auftreten der Pfadintegrale geführt hat. Der Differentialoperator  $-(\partial^2 + m^2)$  wird dann durch eine geeignete Matrix  $A$  ersetzt, deren genaue Form nicht wichtig ist. Die Felder  $\varphi$  und  $J$  gehen dann in die Vektor  $q$  und  $J$  über. Mit dem verallgemeinerten Gauß'schen Integral

$$\int dq_1 \cdots dq_N e^{\frac{i}{2} q A q + i J q} = \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det[A]}} e^{-\frac{i}{2} J A^{-1} J}$$

---

<sup>4</sup>x beschreibt hier den 4er Vektor der Minkowski Raumzeit.

kann das Problem im diskreten Grenzfall gelöst werden. Wir gehen wieder ins Kontinuum über, wodurch aus der Summe  $\sum_{kl} J_k A_{kl}^{-1} J_l$  das doppelte Integral

$$\int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y)$$

wird. Analog zu  $\sum_j A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik}$  muss dann

$$-(\partial^2 + m^2) D(x-y) = \delta(x-y)$$

gelten, was zum freien Propagator führt. Das Erzeugendenfunktional ergibt sich dann als

$$\mathcal{Z}(J) = \mathcal{C} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y)},$$

wobei  $\mathcal{C}$  das kontinuierliche Limit des Vorfaktors aus dem verallgemeinerten Gauß'schen Integral beschreibt. Für den freien Propagator  $D(x-y)$  erhält man

$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}.$$

Dabei muss im Nenner das infinitesimale  $i\varepsilon$  eingefügt werden, um zu vermeiden, dass das Integral die Polstellen trifft. Man kann die  $k^0$  Integration mit dem Residuensatz lösen, was hier jedoch nicht gezeigt wird.

## A.2 Funktionalableitung

Funktionalableitungen treten in der Physik häufig in der analytischen Mechanik und den Euler-Lagrange Gleichungen auf. In diesem Kontext ist die Einführung von W. Nolting aus *Grundkurs Theoretische Physik 2* (siehe [28]) zu empfehlen. In der hier vorliegenden Arbeit ist der Spezialfall

$$\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(x')} = \delta(x-x')$$

relevant.

## A.3 Instantongleichungen in einem mitbewegten Bezugssystem

Wir definieren das Inkrement der Wirbelstärke

$$\Omega_x(\mathbf{r}, t) = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \omega(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.2})$$

und des Hilfsfeldes

$$\hat{\Omega}_x(\mathbf{r}, t) = \hat{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \hat{\omega}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.3})$$

als Differenz des Feldes am Ort  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  und  $\mathbf{x}$  zur gleichen Zeit  $t$ .

Durch Bilden der Differenz der Wirbeltransportgleichung am Ort  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  und  $\mathbf{x}$  erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \cdot \nabla_r \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_x \omega(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\Delta_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) \equiv \Delta_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) - \lim_{\mathbf{r} \rightarrow 0} [\Delta_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t)].$$

Wir benutzen

$$\nabla_x \omega(\mathbf{x}, t) = \nabla_r \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \nabla_x \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t),$$

wie man schnell nachrechnen kann und erhalten aus (A.4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) + [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \cdot \nabla_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_x \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) = \nu \Delta_r \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.5})$$

Wir gehen in ein mitbewegtes Bezugssystem über. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_x \Omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{r}, t),$$

was wir in Gleichung (A.5) einsetzen. Der Beobachter soll sich im Koordinatenursprung befinden, sodass  $\mathbf{x} = 0$  gilt. Dann folgt

$$\frac{d}{dt} \Omega(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_r \Omega(\mathbf{r}, t) = \nu \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.6})$$

mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(0, t) = \int d^2 r' \left[ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}'}{2\pi |\mathbf{r}'|} \right] \Omega(\mathbf{r}', t).$$

### MSR Wirkung

Wir wollen die Martin-Siggia-Rose Wirkung für  $\Omega$  und  $\hat{\Omega}$  bilden. Man erhält analog zur Wirkung aus Gleichung (3.32)

$$S_{\text{MSR}} = \int d^2 r dt \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) \left[ \dot{\Omega}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}, t) - \nu \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) \right] + \frac{i}{2} \int d^2 r d^2 r' dt' \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t). \quad (\text{A.7})$$

Das charakteristische Funktional

$$\mathcal{Z}(\eta, \hat{\eta}) = \int \mathcal{D}\Omega \mathcal{D}\hat{\Omega} e^{iS + i \int d^2 r dt [\eta(\mathbf{r}, t) \Omega(\mathbf{r}, t) + \hat{\eta}(\mathbf{r}, t) \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t)]} \quad (\text{A.8})$$

ergibt sich in Analogie zu (3.21) mit den Quellfeldern  $\eta$  und  $\hat{\eta}$  bezüglich  $\Omega$  und  $\hat{\Omega}$ .

### Instantongleichungen

Durch Variation nach  $\Omega$  und  $\hat{\Omega}$  können aus der Wirkung die Instantongleichungen bestimmt werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_r \Omega(\mathbf{r}, t) + \nu \Delta \Omega(\mathbf{r}, t) - i \int d^2 r' C(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t) \\ \dot{\hat{\Omega}}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) - \nu \Delta \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \int d^2 r' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t) \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{2\pi |\mathbf{r}|^2} \right\} \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t).\end{aligned}\tag{A.9}$$

Die Variation geschieht im Großteil analog zum Vorgehen in Kapitel 3. An dieser Stelle soll nur die Variation des Advektionsterms nach  $\Omega(\mathbf{r}, t)$  gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta \Omega(\mathbf{r}, t)} \int d^2 r' dt' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t') \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t') \\ = - \int d^2 r' dt' [\nabla \cdot \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t') \mathbf{v}(\mathbf{r}', t')] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \\ + \int d^2 r' dt' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t') \left[ \frac{\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}', t')}{\delta \Omega(\mathbf{r}, t)} \right] \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t').\end{aligned}$$

Die Variation des Geschwindigkeitsfeldes ergibt

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathbf{v}(\mathbf{r}', t')}{\delta \Omega(\mathbf{r}, t)} &= \frac{\delta}{\delta \Omega(\mathbf{r}, t)} \int d^2 r'' \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} + \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}'')}{2\pi |\mathbf{r}''|^2} \right\} \Omega(\mathbf{r}'', t') \\ &= \int d^2 r'' \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}''}{2\pi |\mathbf{r}''|^2} \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \delta(t - t') \\ &= \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{2\pi |\mathbf{r}|^2} \right\} \delta(t - t').\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta \Omega(\mathbf{r}, t)} \int d^2 r' dt' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t') \mathbf{v}(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t') \\ = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \hat{\Omega}(\mathbf{r}, t) + \int d^2 r' \hat{\Omega}(\mathbf{r}', t) \left\{ \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{2\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} + \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{2\pi |\mathbf{r}|^2} \right\} \cdot \nabla \Omega(\mathbf{r}', t).\end{aligned}$$

## A.4 Euler-Lagrange Gleichungen

### A.4.1 Eine Funktion und eine Variable

Die Euler-Lagrange Gleichung stammt aus der analytischen Mechanik und folgt aus der Annahme der Extremalisierung der Wirkung. Im einfachsten Fall hängt die Lagrangefunktion vom Ort  $q(t)$  und der Geschwindigkeit  $\dot{q}(t)$  eines Teilchens ab. Damit die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}[q(t), \dot{q}(t)]\tag{A.10}$$

extremal wird, muss für eine kleine Variation  $\delta q(t)$  mit  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  die Änderung  $\delta S$  der Wirkung verschwinden. Es gilt

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}[q(t), \dot{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right). \quad (\text{A.11})$$

Des weiteren gilt  $\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$  und man erhält aus Gleichung (A.11) durch partielle Integration sofort

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q. \quad (\text{A.12})$$

Damit  $\delta S = 0$  erfüllt ist, folgt sofort die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (\text{A.13})$$

da  $\delta q$  eine beliebige, infinitesimale Variation beschreibt. Ich verweise den Leser an “Methods of Mathematical Physics: Vol I” von R. Courant and D. Hilbert [29] oder “Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik” von Wolfgang Nolting [28] für eine weiterführende Diskussion sowie Beweise.

#### A.4.2 Mehrere Funktionen und mehrere Variablen

Besonders in der Elementarteilchenphysik betrachtet man häufig die *Lagrangedichte* anstatt der aus der analytischen Mechanik bekannten Lagrangefunktion. Der Unterschied ist, dass die Wirkung dann als Integral der Lagrangedichte über die Raumzeit gebildet wird, z.B. für den vierdimensionalen<sup>5</sup> Fall

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (\text{A.14})$$

Da wir uns mit zweidimensionaler Turbulenz beschäftigen und die Wirkung im  $k$ -Raum für die Beschreibung nutzen, ergibt sich

$$S = \int d^2k dt \mathcal{L} [\mathbf{k}, t; \{f_\alpha, \dot{f}_\alpha, \partial_k f_\alpha\}]. \quad (\text{A.15})$$

Analog zum eindimensionalen Fall lassen sich dann die Euler-Langagegleichungen herleiten. Diese lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_\alpha} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_\alpha} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial k_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{k_i} f_\alpha)} = 0, \quad (\text{A.16})$$

wobei  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  für die Anzahl unterschiedlicher Funktionen steht. In dieser Arbeit sind das  $\Gamma_i, \mathbf{x}_i, C_i$  sowie  $\hat{\Gamma}_i, \hat{\mathbf{x}}_i$  und  $\hat{C}_i$ .

---

<sup>5</sup>drei räumliche Dimensionen und die Zeit

## A.5 Wirkung und Instantongleichungen im Fourieraum

Die Martin-Siggia-Rose Wirkung wurde in Gleichung (5.4) für das Wirbelfeld  $\omega$  und das Hilfsfeld  $\hat{\omega}$  im  $k$ -Raum als

$$S = \int d^2k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) \left[ \dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) + \nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) \right] \\ + \frac{i}{2} \int d^2k dt \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)$$

geschrieben. Dies folgt direkt aus der Wirkung im Ortsraum, indem man die Beziehung

$$\begin{aligned} \int d^2x f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) &= \int d^2x \int \frac{d^2k}{2\pi} \int d^2k' f(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^2k}{2\pi} \int d^2k' f(\mathbf{k} - \mathbf{k}') g(\mathbf{k}') \underbrace{\int d^2x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}_{=2\pi\delta(\mathbf{k})} = \int d^2k f(-\mathbf{k}) g(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

benutzt. Der letzte Term in (A.17) kann dabei als Faltung

$$\begin{aligned} \int d^2x d^2x' \hat{\omega}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\omega}(\mathbf{x}') &= \int d^2x \hat{\omega}(\mathbf{x}) Q * \hat{\omega}|_{\mathbf{x}} \\ &\rightarrow \int d^2k \hat{\omega}(-\mathbf{k}) \mathcal{F}[Q * \hat{\omega}] = \int d^2k \hat{\omega}(-\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

aufgefasst werden, was dazu führt, dass im  $k$ -Raum nur noch ein Integral über  $\mathbf{k}$  anstelle der Integrale über  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$  auftritt. Man kann die Instantongleichungen im  $k$ -Raum durch Transformation der Instantongleichungen im Ortsraum ((3.55a) und (3.55b)) berechnen. Alternativ kann man auch die Wirkung  $S$  (5.4) im  $k$ -Raum nach den Feldern  $\omega(\mathbf{k}, t)$  und  $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)$  variieren. Wir variieren die Wirkung nach dem Hilfsfeld  $\delta S / \delta \hat{\omega} = 0$  und erhalten nach  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  die Instantongleichung für das Wirbelfeld im  $k$ -Raum als

$$\dot{\omega}(\mathbf{k}, t) - i\mathbf{k} \cdot \int d^2k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) + \nu k^2 \omega(\mathbf{k}, t) = -iQ(\mathbf{k}) \hat{\omega}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.18})$$

Man kann schnell nachrechnen, dass dies der Fouriertransformierten der Instantongleichungen im Ortsraum entspricht. Der Term auf der rechten Seite ist wieder das Ergebnis der Faltung der Korrelation  $Q$  mit dem Hilfsfeld  $\hat{\omega}$ . Analog führt die Variation nach dem Wirbelfeld  $\omega(\mathbf{k}, t)$  gemäß  $\delta S / \delta \omega = 0$  zu der Instantongleichung im  $k$ -Raum für das Wirbelfeld. Wir variieren jeden Term einzeln und erhalten

$$\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{k}, t)} \int d^2k' dt' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t') \dot{\omega}(\mathbf{k}', t') = -\hat{\omega}(-\mathbf{k}, t), \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{k}, t)} \int d^2 k' dt' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t') (-i \mathbf{k}') \int d^2 k'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') \omega(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \omega(\mathbf{k}'') \\
&= \int d^2 k' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t) (-i \mathbf{k}') \int d^2 k'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') \omega(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'', t) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \\
&+ \int d^2 k' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t) (-i \mathbf{k}') \int d^2 k'' \mathbf{u}(\mathbf{k}'') \omega(\mathbf{k}'', t) \delta(\mathbf{k} - (\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')) \\
&= -i \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \int d^2 k' \mathbf{k}' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}' - \mathbf{k}, t) \\
&\quad - i \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}(-\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

und

$$\frac{\delta}{\delta \omega(\mathbf{k}, t)} \int d^2 k' dt' \hat{\omega}(-\mathbf{k}', t') \nu k^2 \omega(\mathbf{k}', t') = \hat{\omega}(-\mathbf{k}, t) \nu k^2. \quad (\text{A.21})$$

Verbindet man Gleichungen (A.19) - (A.21), so erhält man nach Übergang  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$

$$\begin{aligned}
& \dot{\hat{\omega}}(\mathbf{k}, t) - i \mathbf{k} \cdot \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') \hat{\omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t) - \nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \\
&= i \mathbf{u}(\mathbf{k}) \cdot \int d^2 k' \mathbf{k}' \hat{\omega}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t) \omega(\mathbf{k}', t). \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

Dies ist die Instantongleichung für  $\hat{\omega}$  im  $k$ -Raum, wie man ebenfalls schnell nachrechnen kann.

## A.6 Berechnung der Deformation

Aus Gleichung (5.15) folgt für die Änderung der Wirbelform  $\dot{C}_i$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T \dot{C}_i \mathbf{k} &= -i \mathbf{k}^T \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{k}'^T C_i \mathbf{k} \\
&\quad - i \mathbf{k}^T \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' \mathbf{u}(\mathbf{k}') e^{-i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{k}^T C_i \mathbf{k}'.
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile können wir das Skalarprodukt  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{k}') = \mathbf{u}(\mathbf{k}') \cdot \mathbf{k} = \mathbf{u}^T(\mathbf{k}') \mathbf{k}$  an  $\mathbf{k}^T C_i \mathbf{k}'$  vorbeiziehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^T \dot{C}_i \mathbf{k} &= -i \mathbf{k}^T \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{-i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k}'^T C_i \mathbf{k} \\
&\quad - i \mathbf{k}^T C_i \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{-i \mathbf{k}' \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{k}' \mathbf{u}^T(\mathbf{k}') \mathbf{k}. \quad (\text{A.23})
\end{aligned}$$

Mit

$$S_{ij}(\mathbf{x}) = -i \sum_j \Gamma_j \int d^2 k' e^{-i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{k}' (C_i + C_j) \mathbf{k}'} \mathbf{u}(\mathbf{k}') \mathbf{k}'^T = \mathbf{U}_{ij} \overleftarrow{\nabla}$$

erhalten wir aus (A.23)

$$\mathbf{k}^T \dot{C}_i \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \sum_j \Gamma_j \left[ S_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) C_i + C_i S_{ij}^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \mathbf{k}.$$

Daraus folgt direkt die Evolutionsgleichung für die Wirbeldeformation.



# **Danksagung**

Ich danke meinen Eltern, die mich während dem Studium stets unterstützt haben und es mir dadurch ermöglicht haben, dieses spannende Studium zu ergreifen.

Besonderer Dank geht auch an Professor Friedrich, der es mir ermöglicht hat, an diesem spannenden Thema zu forschen und mir stets mit wertvollem Rat zur Seite stand. Da ich der erste in der Arbeitsgruppe bin, der an dieser Thematik arbeitet, war ich sehr häufig auf seine Hilfe angewiesen und konnte stets mit seiner vollsten Unterstützung rechnen. Des weiteren ermöglichte er mir die Teilnahme an Konferenzen, wodurch ich einen tiefen Einblick in die Welt der Wissenschaft erlangt habe und mein Fachwissen sowie meine Präsentationsfähigkeiten verbessern konnte.

Bei der gesamten Arbeitsgruppe möchte ich mich für die gemeinsame Zeit bedanken. Besonders die gelungene Zaferna Fahrt wird mir noch lange in Erinnerung bleiben.

Ich danke außerdem meinen Freunden und Kommilitonen, die mich in meinem Studium begleitet haben und diesen schönen und lehrreichen Lebensabschnitt mitgestaltet haben. Besonderer Dank geht außerdem an alle Korrekturleser.



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Wirbelschleppen eines Flugzeuges. . . . .	2
2.1	Zwei Punktwirbel gleicher Zirkulation. . . . .	8
2.2	Veranschaulichung des Lagrange'schen Bezugssystems . . . . .	9
2.3	Die Bildung von Wirbelclustern gleicher Zirkulationen in der inversen Kaskade. . . . .	16
3.1	Hintereinanderausführung mehrerer Übergänge von $i = 0$ bis $i = n$ . . . . .	20
3.2	Illustration zur Instantonapproximation. . . . .	26
4.1	Instantongleichungen für zwei Punktwirbel gleicher Zirkulation. . . . .	38
4.2	Instantongleichungen für zwei Punktwirbel entgegengesetzter Zirkulation. .	40
5.1	Interpretation der farblich gekennzeichneten Terme aus den Evolutionsgleichungen durch Federkräfte. . . . .	61
5.2	Schematische Darstellung des Problemes der numerischen Berechnung einer Lösung. . . . .	64
5.3	Schematische Darstellung des iterativen Lösungsverfahrens. . . . .	65
5.4	Phänomenologie elliptischer Wirbel. . . . .	66
5.5	Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für kreisförmige Anfangsbedingungen und $q = 0.007$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts. . . . .	69
5.6	Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.5. . . . .	69
5.7	Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für kreisförmige Anfangsbedingungen und $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts. . . . .	70
5.8	Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.7. . . . .	70
5.9	Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für elliptische Anfangsbedingungen mit parallelen Hauptachsen und $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts. . . . .	71
5.10	Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.9. . . . .	71
5.11	Evolution des Wirbel- und Hilfsfeldes für elliptische Anfangsbedingungen mit antiparallelen Hauptachsen und $q = 0.002$ . Zeit aufsteigend von links nach rechts. . . . .	72
5.12	Abstand der Wirbel und elliptischen Strukturen aus Abbildung 5.11. . . . .	72
5.13	Beispiel für Iterationen mit $q = 0.5$ : Schritte 1-3. Zeit jeweils von links nach rechts aufsteigend, Wirbel- und Hilfsfeld untereinander für jeden Iterationsschritt. . . . .	73

5.14	Beispiel für Iterationen mit $q = 0.5$ : Schritte 4-6 . . . . .	74
5.15	Beispiel für Iterationen mit $q = 0.05$ : Schritte 1-3. Zeit jeweils von links nach rechts aufsteigend, Wirbel- und Hilfsfeld untereinander für jeden Iterationsschritt. . . . .	75
5.16	Beispiel für Iterationen mit $q = 0.05$ : Schritte 4-6 . . . . .	76
6.1	Größe des Überlapps im Wirbel- und Hilfsfeld für die in Abbildung 5.5 dargestellte Evolution. . . . .	81
6.2	Links: Wirkung bei Variation des Abstandes $d$ und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit $P$ . Jeweils für $q = 0.007$ . . .	82
6.3	Links: Wirkung bei Variation des Abstandes $d$ und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit $P$ . Jeweils für $q = 0.007$ bei anfangs elliptischen Wirbeln. . . . .	82
6.4	Links: Wirkung bei Variation des Abstandes $d$ und des Zirkulationsinkrements, rechts: Übergangswahrscheinlichkeit $P$ . Jeweils für $q = 0.007$ bei "V"-förmiger Anfangsbedingung. . . . .	83
7.1	Schematische Darstellung der Rotor Approximation für elliptische Wirbel.	86
7.2	Evolution des Rotor-Modells für 200 Wirbelpaare. Links: Anfangszustand, rechts: Zustand zu einem späteren Zeitpunkt. Die Rotoren positiver und negativer Zirkulationen haben sich in Clustern organisiert. Abb. aus [23].	87
A.1	Propagation von Wellen oder Teilchen durch Spalte . . . . .	94
A.2	Der Übergang zu unendlich vielen Schirmen mit unendlich vielen Löchern führt zum Pfadintegralformalismus. . . . .	95

# **Tabellenverzeichnis**

5.1	Parameter der hier illustrierten Beispiele der Evolution . . . . .	68
5.2	Parameter der hier illustrierten Beispiele für die Konvergenz der Lösung . .	68



# Stichwortverzeichnis

- Ähnlichkeitsprinzip, 5
- Übergangswahrscheinlichkeit, 20, 77, 78
- Übergangswahrscheinlichkeitsdichte, 20, 22
- äußere Kräfte, 14
- Advektion, 47, 48, 62
- bedingte Wahrscheinlichkeit, 17
- Biot-Savart Gesetz, 6, 10, 31, 34
- chaotische Systeme, 11
- Chapman-Kolmogorov Gleichung, 18
- charakteristische Funktion, 22
- charakteristisches Funktional, 25, 26, 77
- Clusterbildung, 41, 85
- Deformation, 47, 48, 62
- Diffusionsmatrix, 18, 21
- diskretes System, 23
- Dissipationsbereich, 15
- DNS, 43
- Driftvektor, 18
- Energiedissipationsrate, 13
- Ensemblemittel, 11
- Ergodenhypothese, 11
- erste Ähnlichkeitshypothese, 15
- Erzeugendenfunktional, 96
- Euler'sche Beschreibung, 9
- Euler-Lagrange Gleichung, 99
- Euler-Lagrange Gleichungen, 50
- Experimente, 11
- final, 94
- Fokker-Planck Gleichung, 18
- Freiheitsgrade, 11
- Funktionalableitung, 24
- Geschwindigkeitsautokorrelation, 12
- Green'sche Funktion, 5
- Grundkurs Theoretische Physik 2, 97
- Hilfsfeld, 25, 31
- Hypothese der lokal isotropen Turbulenz, 15
- initial, 94
- Inkompressibilitätsbedingung, 5, 10
- inkompressible newtonsche Fluide, 3
- Instantonapproximation, 19
- Instantonformalismus, 43, 77
- Instantongleichungen, 26, 30, 45, 48, 60
- Instantonnäherung, 19, 77
- integrale Länge, 13
- Intertialbereich, 15
- inverse Kaskade, 16, 36, 41, 43, 85
- isotrope Tensorfelder, 12
- iteratives Verfahren, 66
- Jacobideterminante, 10
- Jakobideterminante, 35
- K-41, 15
- K-62, 15
- Kaskade, 11, 13, 15
- kinematische Viskosität, 3, 13
- kinetische Energie, 14
- Kolmogorov, 11, 13, 15
- Kolmogorov'sche Dissipationslänge, 13
- Kolmogorov'sche Zeitskala, 13

- Korrelationsfunktion, 25
- Lagrange'sche Geschwindigkeit, 10
- Lagrange'sche Trajektorie, 35
- Lagrange'sche Wirbelstärke, 10
- Lagrange'schen Beschreibung, 9
- Lagrange'sches Bezugssystem, 35
- Lagrangedichte, 100
- Lagrangefunktion, 50
- laminare Strömung, 13
- Lebensdauer des Instantons, 79
- lokale Energiedissipationsrate, 12
- Markov Bedingung, 17
- Markov Eigenschaft, 17, 19
- Markov Prozess, 17, 19
- Markov-Prozess, 23
- Martin-Siggia-Rose Formalismus, 19
- Martin-Siggia-Rose Wirkung, 25, 33, 44
- Momente, 24
- MSR-Wirkung, 45
- Navier-Stokes Gleichung, 11
- Navier-Stokes Gleichungen, 3
- no-slip Randbedingungen, 4
- normalisierter Druck, 3
- Observer, 93
- periodische Randbedingungen, 4
- Pfadintegral, 22, 23, 25
- Poisson-Gleichung, 5
- probability density function, 19
- Propagator, 21
- Punktwirbel, 7, 43
- Punktwirbelansatz, 33
- Quellterm, 22
- reibungsfrei, 15
- Responcefunktion, 24
- Reynolds-Zahl, 5, 13
- Richardson, 11
- Rotor, 86
- Rotor Approximation, 85
- Rotore, 86
- Sattelpunktapproximation, 25
- Shooting Verfahren, 63
- Source, 93
- spektrale Energiedichte, 15, 16
- Stationarität, 11
- stationary phase approximation, 19, 25, 89
- statistischen Hydrodynamik, 11
- Stochastisches System, 19
- Taylor, 13
- Taylor-Mikroskala, 13
- Taylor-Reynoldszahl, 14
- treibende Kraft, 21
- Variationsverfahren, 50, 60
- Verbundwahrscheinlichkeit, 17
- viskose Dissipation, 12
- Viskosität, 14
- vortex thinning, 43
- wahrscheinlichste Feldkonfiguration, 31, 43, 44
- Wirbelfeld, 25, 31
- Wirbelstreckungsterm, 6, 7
- Wirbeltransportgleichung, 5, 25
- Zeitmittel, 11
- Zirkulation, 16, 38, 39, 43, 85
- Zirkulationsinkrement, 78
- zweite Ähnlichkeitshypothese, 16

# Literaturverzeichnis

- [1] U. Frisch. Turbulence: The legacy of a.n. kolmogorov. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.
- [2] John Argyris, Gunter Faust, Maria Haase, and Rudolf Friedrich. *Die Erforschung des Chaos*. 2009.
- [3] P. G. Saffman. *Vortex Dynamics*. 1995.
- [4] Guido Boffetta and Robert E. Ecke. Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1):427–451, 2012.
- [5] Patrick Tabeling. Two-dimensional turbulence: a physicist approach. *Physics Reports*, 362:1–62, 2002.
- [6] S. B. Pope. *Turbulent flows*. 2000.
- [7] J. Cardy, G. Falkovich, and K. Gawedzki. *Non-equilibrium Statistical Mechanics and Turbulence*. 2008.
- [8] G.J.F. van Heijst and H.J.H. Clercx. Laboratory modeling of geophysical vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 41:143–64, 2009.
- [9] H. Kellay and W. Goldburg. Two-dimensional turbulence: a review of some recent experiments. *Rep. Prog. Phys.* 65, pages 845–894, 2002.
- [10] R. Kraichnan. *Phys. Fluids*, 10(1417), 1967.
- [11] Michael Eckert. Turbulenz – ein problemhistorischer abriss. *NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin*, 16:39–71, 2008. 10.1007/s00048-007-0278-6.
- [12] R. Friedrich, M. Vosskuhle, O. Kamps, and M. Wilczek. Two-point vorticity statistics in the inverse turbulent cascade. *arXiv:1012.3356*, 2010.
- [13] Shiyi Chen, Robert E. Ecke, Gregory L. Eyink, Michael Rivera, Minping Wan, and Zuoli Xiao. Physical mechanism of the two-dimensional inverse energy cascade. *Phys. Rev. Lett.*, 96:084502, Feb 2006.
- [14] A. H. Nielsen, J. Juul Rasmussen X. He, and T. Bohr. Vortex merging and spectral cascade in two-dimensional flows. *Phys. Fluids* 8, 2263, 1996.

- [15] R. Friedrich and J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a fokker-planck equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78:863–866, Feb 1997.
- [16] Rudolf Friedrich, Joachim Peinke, Muhammad Sahimi, and M. Reza Rahimi Tabar. Approaching complexity by stochastic methods: From biological systems to turbulence. *Physics Reports*, 506:87–162, 2011.
- [17] Michel Voßkuhle. *Statistische Analysen zweidimensionaler Turbulenz, WWU Münster, Diplomarbeit*. 2009.
- [18] Anton Daitche. *Statistische und geometrische Eigenschaften turbulenter Strömungen, WWU Münster, Diplomarbeit*. 2009.
- [19] P. C. Martin, E. Siggia, and H. Rose. *Phys. Rev.*, A8(423), 1973.
- [20] Gregory Falkovich and Vladimir Lebedev. Vorticity statistics in the direct cascade of two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, 83:045301, Apr 2011.
- [21] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*. 2005.
- [22] Richard Phillips Feynman. *Quantum Electrodynamics*. 1998.
- [23] J. Friedrich and R. Friedrich. Vortex-model for the inverse cascade of 2d-turbulence. *arXiv:1111.5808v1*, 2011.
- [24] M. V. Melander, A. S. Styczek, and N. J. Zabusky. Elliptically desingularized vortex model for the two-dimensional euler equations. *Phys. Rev. Lett.*, 53:1222–1225, Sep 1984.
- [25] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. 2003.
- [26] C. Jönsson. Electron diffraction at multiple slits. *American Journal of Physics*. 42, page 4–11, 1974.
- [27] P. A. M. Dirac. A new notation for quantum mechanics. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 35, pages 416–418, 1939.
- [28] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik*.
- [29] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics: Vol I*. 1953.

# **Erklärung zur Diplomarbeit**

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und, außer den angegebenen, keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 16. Mai 2012