

"Hydrodynamische Wechselwirkungen zwischen zwei Mikroschwimmern"

als Diplomarbeit vorgelegt von
Johannes Greber



Institut für Theoretische Physik
Juli 2010

“Aus der Ferne betrachtet, ist alles nur eine Frage der Distanz.”

Klaus Toppmöller

Einleitung

In der Natur hat sich im Laufe der Zeit eine große Vielfalt an Lebewesen im Mikro- und Makrobereich entwickelt. Die Art und Weise, wie Lebewesen dieser Größe sich in wässriger Lösung fortbewegen, also schwimmen, ist von enormem Interesse. Dabei spielen vor allem die Bewegungsabläufe eine Rolle, die sie im Laufe der Zeit entwickelt haben, um sich fortzubewegen, aber auch die Interaktionen zwischen diesen Schwimmern. Beides wird in großem Maße von den hydrodynamischen Eigenschaften ihrer Umgebung beeinflusst. Ein Maß für diese Eigenschaften ist die dimensionslose Reynoldszahl, die das Verhältnis zwischen Effekten aufgrund der Trägheit gegenüber von solchen, die durch Reibung hervorgerufen werden, misst.

Mikroschwimmer leben wegen ihrer Körperabmessungen in Umgebungen, die durch kleine Reynolds-Zahlen charakterisiert sind. In solchen Umgebungen dominieren die viskosen Kräfte die dynamischen Eigenschaften der Flüssigkeit. Diese Tatsache beeinflusst maßgeblich die Entwicklung von Mechanismen des Schwimmens auf der Mikroebene. Im Gegensatz zu einem menschlichen Schwimmer, der nach der Ausführung eines Schlags noch mehrere Körperlängen wegen seiner Massenträgheit gleitet, kommt ein Bakterium nach dem Einstellen der antreibenden Bewegungen zu einem abrupten Stillstand. Dies geschieht aufgrund der Reibung mit der Flüssigkeit, die jede Art von Trägheitseffekten in einer Umgebung kleiner Reynolds-Zahlen zunichte macht. Aus diesem Grund haben Bakterien völlig andere Bewegungsabläufe entwickelt, als wir sie in der Makrowelt in unserer alltäglichen Umgebung gewöhnt sind.

Durch die Bewegungen, mit denen ein Bakterium schwimmt, übt es ein gewisses Kraftprofil auf die umliegende Flüssigkeit aus. Dadurch wird ein hydrodynamischer Fluss erzeugt, mit dem ein Schwimmer das Verhalten anderer Schwimmer in einem System mit vielen Bakterien beeinflussen kann. Diese Arbeit soll zum Verständnis dieser hydrodynamischen, oft nichtlinearen Interaktionen beitragen, die eine große Rolle für das Verständnis des räumlichen, aber auch zeitlichen Verhaltens der Dynamik eines Ensembles vieler Bakterien spielen.

Ziel ist zum einen, ein Verständnis der Bewegungsabläufe eines einzelnen Schwimmers zu gewinnen. Zum anderen geht es um ein Verständnis der interaktiven Prozesse aufgrund der Strömungsprofile, die Bakterien in ihrer Umgebung erzeugen.

Die Erforschung des dynamischen Verhaltens eines einzelnen Schwimmers beginnt 1951 mit der Arbeit von G. Taylor [19], der erkannt hat, dass der Unterschied zwischen Fortbewegungsmechanismen eines Makroschwimmers gegenüber denen eines Mikroschwimmers lediglich von der Reynolds-Zahl abhängt. In dieser Arbeit wird die Grundlage zur theoretischen Beschreibung des Schwimmens bei kleiner Reynolds-Zahl mit der Stokes-Gleichung gelegt, mit deren Hilfe Strömungen in stark viskosen Flüssigkeiten beschrieben werden. Die Bewegungsabläufe, die in einer viskosen Umgebung zu einer erfolgreichen Fortbewegung führen, wurden von E. M. Purcell 1977 in dem berühmten Aufsatz “Life at low Reynolds number” [17] zusammengefasst und von F. Wilczek und A. Shapere [18] theoretisch eingebettet. Solche Schwimmer bewegen sich mithilfe von periodischen aber nicht zeitumkehrbaren Veränderungen der Körperform fort.

Auf der bisher gewonnenen Grundlage wird das Verhalten biologischer Schwimmer erforscht. Einige dieser Schwimmer, z. B. ein Bakterium, bestehen aus einem Kopfteil, in dessen Oberflächenmembran zufällig verteilte Flagellen verankert sind, die durch ein Motorprotein angetrieben werden. Die motorischen Mechanismen können dazu führen, dass ein Bakterium eine Vorwärtsbewegung ausführt. Dies wird als “run” bezeichnet. Weiterhin beobachtet man bei Bakterien Taumelbewegungen (“tumbles”). Diese Bewegungszustände wurden von H. C. Berg näher untersucht [3], [8].

Ein weiteres Forschungsfeld stellt die Konstruktion einfacher künstlicher Schwimmer dar. Diese können z. B. aus drei aneinander gekoppelten Kugeln bestehen, deren Abstände in einem periodischen Prozess variiert werden. Dies führt zu einer effektiven Fortbewegung des Schwimmers [14].

Mikroschwimmer beeinflussen sich gegenseitig aufgrund der Strömungsprofile, die sie in der umgebenden Flüssigkeit erzeugen. Das Verständnis des kollektiven Verhaltens in ihrer Dynamik geschieht ebenfalls auf Grundlage der linearen Stokes-Gleichung. In einem System mit vielen Bakterien ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld aller Schwimmer aus der Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder der einzelnen Schwimmer. Um kollektive Effekte zu verstehen, kann man daher nicht auf ein Verständnis der Dynamik des einzelnen Schwimmers verzichten. Die Interaktion zwischen zwei Schwimmern, seien diese nun biologisch [10] oder künstlich [16], weist dabei Konfigurationen auf, in denen

Schwimmer einander folgen, sich gegenseitig ablenken oder umeinander herum oszillieren. Diese Konfigurationen hängen zum einen von der Orientierung der Schwimmer zueinander, zum anderen aber auch von ihrem Abstand ab. Die Interaktion zwischen ihnen überspannt Bereiche, die die Körperabmessungen der einzelnen Bakterien deutlich übersteigen. In Systemen mit vielen Schwimmen sorgt dies für die Ausbildung turbulenter Strukturen, wo Bakterien in sogenannten “Jets” Bereiche bilden, in denen sie geradlinig hintereinander schwimmen oder in Wirbeln um ein gemeinsames Zentrum zirkulieren [20], [4], [9], [7].

In dieser Arbeit soll es nun darum gehen, ein einfaches Modell für das Geschwindigkeitsfeld einzelner Mikroschwimmer vorzustellen. Dieses beruht auf der Dynamik zweier Punktwirbel, die sowohl Translations- als auch Rotationsbewegungen aufweisen. Mit Hilfe dieses Modells soll im Weiteren das interaktive Verhalten zweier Schwimmer untersucht werden.

Diese Arbeit ist in drei Abschnitte gegliedert:

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden hydrodynamischen Gleichungen hergeleitet. Es beginnt mit der Navier-Stokes-Gleichung und geht im weiteren Verlauf zum einen auf die Beschreibung wirbelartiger Strukturen durch die Wirbeltransportgleichung ein. Hier betrachten wir als einen Spezialfall Strömungen, die von Punktwirbeln und speziell von zwei Punktwirbeln erzeugt werden. Zum anderen wird auf Strömungsprofile, die durch die Stokes-Gleichung beschrieben werden, eingegangen. Sie beschreibt die Dynamik von Flüssigkeiten, die durch deren Viskosität dominiert wird.

Im zweiten Abschnitt werden Konzepte des Schwimmens einzelner Schwimmer in einer stark überdämpften Umgebung vorgestellt. Hier handelt es sich um Konzepte, aufgrund derer sich sowohl künstliche als auch biologische Schwimmer in Flüssigkeiten hoher Reibung fortbewegen können.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Interaktion zwischen zwei Schwimmern. Dort wird das Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen Schwimmers durch zwei Punktwirbel beschrieben, deren Abstand d zeitlich fixiert wird. Durch Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder zweier solcher Schwimmer können wir Bewegungsgleichungen für deren Orientierung und deren Position im zweidimensionalen Raum aufstellen. Für bestimmte Anfangsbedingungen werden diese Gleichungen gelöst.

Abschließend werden die Ergebnisse zusammengefasst. Die Arbeit schließt mit einem kurzen Ausblick.

Inhaltsverzeichnis

1	Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten	1
1.1	Massenerhaltung und Inkompressibilität	1
1.2	Die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten	2
1.3	Die Wirbeltransportgleichung	5
1.4	Erhaltungsgrößen	8
1.4.1	Die kinetische Energie	8
1.4.2	Der Drehimpuls	10
1.5	Die Dynamik von Punktwirbeln	12
1.6	Dynamik zweier Punktwirbel	13
1.7	Reskalierung der Navier-Stokes-Gleichung und Reynolds-Zahl	14
1.8	Die Stokes-Gleichung	16
1.9	Zeitumkehrinvarianz in der Hydrodynamik	17
2	Fortbewegung bei kleiner Reynolds-Zahl	21
2.1	Vergleich von Schwimmern in Umgebungen von $Re > 1$ und $Re \ll 1$. . .	21
2.2	Konzepte der Bewegung bei kleiner Reynolds-Zahl	24
2.2.1	Der Dreielementschwimmer	24
2.2.2	Biologische Schwimmer	26
2.3	Bewegungen eines Bakterium	31
2.4	Erzeugen eines Geschwindigkeitsfeldes und Hydrodynamische Interaktion zwischen Bakterien	32
3	Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern	35
3.1	Die Bewegungsgleichungen zweier Schwimmer in zwei Dimensionen . . .	36
3.1.1	Der Abstand zwischen beiden Schwimmern	39
3.1.2	Die Achsen der Schwimmer	42
3.1.3	Der Gesamtschwerpunkt	45
3.2	Berechnung des Drehimpulses	46

3.3	Zwangsbedingungen und Wahl der Koordinaten	47
3.4	Zwei translierende Wirbelpaare	54
3.4.1	Frontale Kollision	55
3.4.2	Zwei Wirbelpaare folgen einander	56
3.4.3	Ein Ablenkungsprozessprozess	57
3.5	Interaktion zwischen zwei rotierenden Wirbelpaaren	61
3.5.1	Rotation in gleicher Richtung	61
3.5.2	Rotation in entgegengesetzter Richtung	63
4	Zusammenfassung und Ausblick	67
	Literaturverzeichnis	69

1 Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten

Sowohl in der Mikrowelt als auch auf makroskopischer Ebene wird das Verhalten eines Schwimmers maßgeblich von der Dynamik der ihn umgebenden Flüssigkeit beeinflusst. Auf diesen beiden Ebenen haben Lebewesen unterschiedliche Strategien entwickelt, um sich fortzubewegen. Einige dieser Strategien werden im nächsten Kapitel vorgestellt. Vorher jedoch kann nicht auf ein Verständnis der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten verzichtet werden. Aus diesem Grund stellen wir in diesem Kapitel die grundlegende hydrodynamische Bewegungsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichung, auf und gehen auf einige für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wesentliche Eigenschaften dieser Gleichung ein. Dies ist zum einen die Beschreibung wirbelartiger Strukturen mit Hilfe der Wirbeltransportgleichung und speziell der Dynamik von Punktwirbeln. Zum anderen wird auf die Beschreibung laminarer Strömungen mit der Stokes-Gleichung eingegangen.

Die hier vorgestellte Herleitung der Navier-Stokes-Gleichung sowie der Wirbeltransportgleichung hält sich dabei eng an eine Version, wie sie in [1] nachvollzogen wird.

1.1 Massenerhaltung und Inkompressibilität

Wird ein beliebiges, raumfestes Volumenelement δV einer Flüssigkeit betrachtet, so beobachtet man weder die spontane Erzeugung noch Vernichtung von Masse. Die zeitliche Änderung der Masse im Volumenelement entspricht daher der über die Oberfläche S ein- bzw. ausströmenden Masse. Dies führt auf die Gleichung:

$$\int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = - \oint_S \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{S}. \quad (1.1)$$

Hierbei ist $d\mathbf{S}$ der Vektor, der mit der Länge des Oberflächenelements dS senkrecht zur Oberfläche nach außen weist. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld und $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte in diesem durchströmten Volumenelement. Nach dem Integralsatz von Gauß erhalten wir:

$$\int_{\delta V} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \right] dV = 0. \quad (1.2)$$

Da das Volumenelement beliebig ist, verschwindet dieses Integral nur dann, wenn bereits der Integrand Null ergibt. Dies führt zur Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \nabla(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.3)$$

Diese Gleichung bezieht sich auf fließende Flüssigkeiten. Diese zeichnen sich im Gegensatz zu Gasen dadurch aus, dass ihre Dichte über den gesamten Raumbereich sowohl zeitlich als auch räumlich konstant sind. Man spricht auch von inkompressiblen Flüssigkeiten. In der Kontinuitätsgleichung verschwinden dann sämtliche räumlichen und zeitlichen Ableitungen der Dichte. Damit erhalten wir die Inkompressibilitätsbedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.4)$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ weder Quellen noch Senken hat.

1.2 Die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten

Um die Beschleunigung eines Volumenelements δV einer Flüssigkeit zu bestimmen, geht man vom zweiten Newton'schen Axiom für die Kraftdichte $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ aus, wobei \mathbf{p} die Impulsdichte $\mathbf{p} = \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ist. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ gibt die Geschwindigkeit des Volumenelements δV am Ort \mathbf{x} zur Zeit t wieder. Für eine inkompressible Flüssigkeit lässt sich schreiben:

$$\int_{\delta V} \rho \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\delta V} \mathbf{f} dV. \quad (1.5)$$

1.2 Die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten

Die Ableitung $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ wird auch substantielle Ableitung der Geschwindigkeit genannt. Für diese gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.6)$$

Sie besteht also zum einen aus der lokalen zeitlichen Änderung der Geschwindigkeit \mathbf{u} am Ort \mathbf{x} . Zum anderen enthält sie einen konvektiven Anteil $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, der berücksichtigt, dass die Masse im Volumenelement δV dem Geschwindigkeitsgradienten folgt.

Die Kraftdichte \mathbf{f} setzt sich hierbei aus den inneren Kräften \mathbf{f}_{int} und den äußeren Kräften \mathbf{f}_{ext} zusammen, die auf das gesamte Volumen δV wirken, wie z. B. die Gravitation. Äußere Kräfte können auch solche Kräfte sein, die durch den aktiven Antrieb eines Mikroschwimmers auftreten. Innere Kräfte wirken an der Oberfläche des Volumens δV . Sie werden mit Hilfe des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ ausgedrückt:

$$\int_{\delta V} \mathbf{f}_{int} dV = - \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\delta V} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.7)$$

Tragen wir dies wiederum unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Volumenelement δV beliebig ist, zusammen und setzen in (1.5) ein, so ergibt sich:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.8)$$

Die Spannungen, denen die Flüssigkeit unterliegt, können weiter spezifiziert werden. In einer ruhenden Flüssigkeit greift der Druck p stets senkrecht zur Oberfläche dS an. Wird keine Raumrichtung explizit bevorzugt, so taucht in den Diagonalelementen des Spannungstensors jeweils ein p auf. Der Spannungstensor schreibt sich also im statischen Fall

$$\boldsymbol{\sigma}_{static} = p\mathbf{I}, \quad (1.9)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix bezeichnet.

Im Fall, dass die Flüssigkeit fließt, bewegen sich benachbarte Volumenelemente relativ zueinander. Dann treten in jeder realen Flüssigkeit viskose Kräfte auf, die durch den Reibungstensor $\boldsymbol{\sigma}'$ berücksichtigt werden. Sie haben ihren Ursprung in Molekülwechselwirkungen zwischen den Flüssigkeitsmolekülen untereinander. Der gesamte Spannungstensor setzt sich nun additiv aus dem Reibungstensor und dem Druck zusammen, wobei

die Reibung der Wirkung des Drucks entgegengesetzt ist:

$$\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}'. \quad (1.10)$$

Reibung tritt nur dann auf, wenn zwei Volumenelemente relativ zueinander bewegt werden. Das bedeutet zum einen, dass der Reibungstensor für ruhende Flüssigkeiten verschwinden muss. Zum anderen hängen seine Komponenten σ'_{ij} nur von den räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeit $\frac{\partial u_i}{\partial r_j}$ ab. Diese Ableitungen können wir aufspalten in einen symmetrischen Anteil S_{ij} und einen antisymmetrischen Anteil Ω_{ij} . Es gilt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial r_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right)}_{\Omega_{ij}}. \quad (1.11)$$

Durch den antisymmetrischen Anteil werden solche Änderungen der Geschwindigkeit \mathbf{u} vermittelt, die durch Rotationen des betrachteten Volumenelements hervorgerufen werden. Diese tragen nicht zur inneren Reibung bei. Reibung entsteht, wenn zwei benachbarte Volumenelemente sich relativ zueinander bewegen. Durch den symmetrischen Verzerrungstensor $\mathbf{S} = [S_{ij}]$ gehen solche räumlichen Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes ein. Im Reibungstensor taucht nur der symmetrische Teil \mathbf{S} auf [12]. Die Komponenten σ'_{ij} des Spannungstensors können wir damit wie folgt ausdrücken:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \left[S_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right] + \eta_V \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k}. \quad (1.12)$$

Hier treten die dynamische Viskosität η und die Volumenviskosität η_V als Materialkonstanten der Flüssigkeit auf. Der Reibungstensor ergibt sich zu:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\eta \left[\mathbf{S} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] + \eta_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}. \quad (1.13)$$

Die Bewegungsgleichung schreibt sich unter Ausnutzung von $\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}))$:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \left(\eta_V + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.14)$$

Sie vereinfacht sich unter Ausnutzung von (1.4) zur Navier-Stokes-Gleichung inkompress-

sibler Flüssigkeiten:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \frac{p}{\rho}(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.15)$$

Hier bezeichnet $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ die kinematische Viskosität. Zusammen mit (1.4) bildet die Navier-Stokes-Gleichung die Grundlage der Beschreibung von Strömungsprofilen inkompressibler Flüssigkeiten.

Über $\rho(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla))$ gehen solche Effekte in die Dynamik der Flüssigkeit ein, die durch die Massenträgheit hervorgerufen werden. Hier tritt mit $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ eine Nichtlinearität auf, über die das Geschwindigkeitsfeld mit seinen räumlichen Änderungen wechselwirkt. Dies macht eine analytische Lösung der Gleichung, abgesehen von einigen Spezialfällen, unmöglich. Der Term $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ wird auch Dissipationsterm genannt. Dieser sorgt für eine Dissipation der kinetischen Energie und somit für eine Dämpfung des Flusses der Geschwindigkeit. Der letzte Term ist der Druckgradient ∇p . Dadurch, dass wir eine inkompressible Flüssigkeit betrachten, sind das Druckfeld und das Geschwindigkeitsfeld über eine Poisson-Gleichung direkt miteinander verknüpft. Eine Änderung des einen Feldes ruft also direkt eine Änderung des anderen Feldes hervor.

In der hier vorgestellten Form gelten die Gleichungen für eine räumlich unendlich ausgedehnte Flüssigkeit. Im Allgemeinen werden jedoch Situationen betrachtet, in denen feste Berandungen den Raumbereich einschränken. Solche Situationen müssen durch spezielle Randbedingungen, wie z. B. die “no-slip”-Bedingung für zähe Flüssigkeiten, festgelegt werden. Diese besagt, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ an jedem Punkt \mathbf{x}_0 der Randfläche verschwindet.

1.3 Die Wirbeltransportgleichung

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass zur Beschreibung eines Strömungsprofils einer inkompressiblen Flüssigkeit abgesehen von Randbedingungen die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ genügt. Durch die direkte Kopplung zwischen Druck und Geschwindigkeit ist das Geschwindigkeitsfeld allerdings nirgends stark räumlich konzentriert. Strömungsprofile inkompressibler Flüssigkeiten weisen häufig Wirbelstrukturen, wie z. B. ineinandergreifende Wirbelfäden in drei Dimensionen oder ovale Strukturen

1 Hydrodynamik inkompressibler Flüssigkeiten

in zwei Dimensionen auf, die sich dadurch auszeichnen, dass ihre räumliche Ausdehnung begrenzt ist [1]. Zur Beschreibung dieser Strukturen wird die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ definiert.

Aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung (1.4) ist das Geschwindigkeitsfeld quellen- und senkenfrei. Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ wird daher als Rotation des Geschwindigkeitsfeldes definiert:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.16)$$

Dies geschieht in Analogie zur Elektrodynamik, wo der Zusammenhang $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und der magnetischen Induktion \mathbf{B} besteht.

Das Auftreten von Wirbeln im Strömungsprofil einer Flüssigkeit erkennen wir an der räumlichen Konzentration dieser Größe. Durch die Gleichungen (1.4) und (1.16) ist das Geschwindigkeitsfeld eindeutig festgelegt. Zur Beschreibung von inkompressiblen Strömungen spielt es keine Rolle, ob das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ oder das Feld der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ gewählt wird. Dies liegt an der Gültigkeit der Beziehungen (1.16) und (1.4).

Eine Gleichung, mit der die zeitliche Änderung der Wirbelstärke beschrieben wird, kann aus der Navier-Stokes-Gleichung (1.15) ermittelt werden. Schreiben wir diese zunächst mit der Vektoridentität $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla u^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$, wobei $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ gilt, um:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.17)$$

Hier wird ausgenutzt, dass die Wirbelstärke über (1.16) definiert ist. Durch Umstellen der Terme ergibt sich:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.18)$$

Auf diese Gleichung wird der Rotationsoperator $\nabla \times$ angewendet. Dies führt unter Vertauschen des Laplace-Operators ∇^2 und der Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla \times \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.19)$$

An dieser Stelle wird ausgenutzt, dass die Rotation eines Gradientenfeldes stets verschwindet. Damit und mit der Vektoridentität $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} +$

$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$ wird diese Gleichung noch einmal etwas umgeschrieben. So erhalten wir, da aufgrund der Senken- und Quellenfreiheit der jeweiligen Felder sowohl $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ als auch $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ist:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.20)$$

Diese Gleichung wird als Wirbeltransportgleichung bezeichnet. Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wirbelstärke in einem Volumenelement. Durch Bilden der Rotation verschwindet in dieser Gleichung zwar das Druckfeld $p(\mathbf{x}, t)$. Jedoch lässt sich das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ nicht vollständig eliminieren. Es erscheint in der substantiellen Ableitung sowie im so genannten Wirbelstreckungsterm $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Zu dessen Berechnung benötigen wir an dieser Stelle das Gesetz von Biot-Savart. Dieses stellt eine Invertierung von Gleichung (1.16) dar:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\delta V'} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV'. \quad (1.21)$$

Hier taucht mit $\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ der negative Gradient der Greens-Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ des Laplace-Operators auf. Je nachdem, ob eine Strömung in zwei oder drei Dimensionen betrachtet wird, gilt:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.23)$$

Wir können hieran erahnen, dass sich Wirbelstrukturen in zwei Dimensionen anders verhalten als in drei Dimensionen. In einer in der xy -Ebene auf zwei Dimensionen eingeschränkten Flüssigkeit besteht die Wirbelstärke nur aus einer Komponente ω_z . Dies führt dazu, dass der Wirbelstreckungsterm

$$(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \omega_z(x, y, t) \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(x, y, t) \equiv 0 \quad (1.24)$$

in der Wirbeltransportgleichung verschwindet. Diese schreibt sich dann:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{\rho} \nabla \times \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.25)$$

Ohne das Wirken äußerer Kräfte reduziert sich die Wirbeltransportgleichung auf eine reine Drift- und Diffusionsgleichung. Wirbel ordnen sich zu großen ovalen Strukturen an (z. B. Wirbelstürme in der Erdatmosphäre). In drei Dimensionen sorgt der Wirbelstreckungsterm im Laufe der Zeit für eine Zunahme der räumlichen Konzentration der Wirbelstärke. Wirbel bilden sich dann in dünnen, länglichen Filamenten aus.

1.4 Erhaltungsgrößen

Werden in der Navier-Stokes-Gleichung (1.15) zum einen der viskose Term und zum anderen die äußeren Kräfte vernachlässigt, so ergibt sich die sogenannte Euler-Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \frac{p}{\rho}(\mathbf{x}, t). \quad (1.26)$$

Durch dasselbe Vorgehen wie im vorhergehenden Abschnitt erhalten wir aus dieser Gleichung eine Wirbeltransportgleichung in zwei Dimensionen

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.27)$$

die das zeitliche Verhalten der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ in Systemen beschreibt, in denen effektiv keine dissipativen Effekte auftreten. $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ bezeichnet hier, wie in den Rechnungen zuvor, die substantielle Ableitung $\frac{d}{dt}$ nach der Zeit. Aus dieser Gleichung folgt, dass die Wirbelstärke in einem Volumenelement zeitlich konstant bleibt, sofern wir sie in einem “mitfließenden System” betrachten:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.28)$$

In der Beschreibung zweidimensionaler Strömungsprofile gibt es weitere Erhaltungsgrößen, die im Folgenden vorgestellt werden sollen.

1.4.1 Die kinetische Energie

Wird die Euler-Gleichung (1.26) mit dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ multipliziert, so schreibt sie sich:

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{p}{\rho}. \quad (1.29)$$

Hieraus erhält man unter Verwendung der Inkompressibilitätsbedingung (1.4):

$$\frac{d}{dt} \frac{u^2}{2} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \frac{p}{\rho}. \quad (1.30)$$

Dieser Ausdruck wird über den gesamten Raumbereich integriert, so dass wiederum unter Berücksichtigung der Inkompressibilitätsbedingung gilt:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{u^2}{2} dV = - \int \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{p}{\rho} dV = - \int \nabla(p\mathbf{u}) dV = - \oint_S p\mathbf{u} d\mathbf{S}. \quad (1.31)$$

Der Gaußsche Integralsatz schreibt vor, dass über die Oberfläche S des betrachteten Gebiets integriert wird. Dieser Bereich ist der gesamte Raumbereich, in dem die Flüssigkeit fließt. An dessen Rand verschwindet das Geschwindigkeitsfeld, weil entweder die Randfläche im Unendlichen liegt oder aber durch entsprechende Randbedingungen vorgegeben ist, dass an jedem Punkt \mathbf{x}_0 der Randfläche das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ verschwindet. Der Ausdruck $e_{kin} = \int \frac{1}{2} u^2 dV$ wird als Dichte der kinetischen Energie bezeichnet. Diese ist nach den vorangegangenen Überlegungen eine Erhaltungsgröße:

$$\frac{d}{dt} e_{kin} = 0. \quad (1.32)$$

Setzen wir in $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ für \mathbf{u} den durch das Biot-Savart-Gesetz gegebenen Ausdruck $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' = \nabla_x \times \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV'$ ein, so ergibt sich für die Dichte der kinetische Energie:

$$e_{kin} = \frac{1}{2} \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\nabla_x \times \int_{\delta V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' \right) dV. \quad (1.33)$$

Umschreiben unter Verwendung der Identität $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$ ergibt:

$$\begin{aligned} e_{kin} = & \frac{1}{2} \int (\nabla_x \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \int_{\delta V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' dV \\ & - \frac{1}{2} \int \nabla_x \cdot \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \int_{\delta V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' \right) dV \end{aligned} \quad (1.34)$$

Das zweite dieser Integrale kann mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß auf ein Oberflächenintegral über die Randflächen des betrachteten Systems umgeschrieben werden. Da sowohl das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} als auch das Wirbelstärkefeld $\boldsymbol{\omega}$ dort verschwindet,

verschwindet dieses Integral. Im ersten Integral nutzen wir aus, dass die Wirbelstärke als $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ definiert ist. So ergibt sich letztendlich der Ausdruck

$$e_{kin} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \int_{\delta V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') dV' dV \quad (1.35)$$

für die Dichte der kinetische Energie, den wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden (vgl. [1], [11]).

1.4.2 Der Drehimpuls

Die Strömung einer Flüssigkeit ist invariant gegenüber Drehungen. Die Größe, die dies misst, ist der Drehimpuls \mathbf{l} , definiert durch

$$\mathbf{l} = \int \mathbf{x} \times \mathbf{u} dV. \quad (1.36)$$

Mit der Identität $\nabla \times (x^2 \mathbf{u}) = x^2 \nabla \times \mathbf{u} + \nabla x^2 \times \mathbf{u}$ und dem Gradienten $\nabla x^2 = 2\mathbf{x}$ ergibt sich hieraus:

$$\mathbf{l} = -\frac{1}{2} \int x^2 \nabla \times \mathbf{u} dV + \frac{1}{2} \int \nabla \times x^2 \mathbf{u} dV. \quad (1.37)$$

Im ersten dieser beiden Integrale wird wiederum für $\nabla \times \mathbf{u}$ die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ eingesetzt. Das zweite Integral schreibt man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes um:

$$\int \nabla \times x^2 \mathbf{u} dV = - \oint_S x^2 \mathbf{u} \times d\mathbf{S}. \quad (1.38)$$

Dieses verschwindet jedoch, wenn über die Randflächen des betrachteten Systems integriert wird, wiederum aus dem Grund, dass die Geschwindigkeit an den Rändern verschwindet. Der Drehimpuls ergibt sich zu:

$$\mathbf{l} = -\frac{1}{2} \int x^2 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) dV. \quad (1.39)$$

Auch der Drehimpuls ist eine Erhaltungsgröße in zweidimensionalen Systemen, die keinen dissipativen Effekten unterliegen. Dies sieht man, wenn seine zeitliche Ableitung gebildet wird:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{dt} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) dV - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}(\mathbf{x}) dV. \quad (1.40)$$

Aus Gleichung (1.28) kann entnommen werden, dass die Wirbelstärke erhalten bleibt. Das zweite dieser beiden Integrale liefert also keinen Beitrag zu einer zeitlichen Änderung des Drehimpulses. Im ersten Integral gilt zunächst $\frac{d}{dt}x^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$. Für das Geschwindigkeitsfeld setzen wir wieder das Gesetz von Biot-Savart ein. Dies ergibt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l} = - \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{x} \cdot \int_{\delta V} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV' \right) dV. \quad (1.41)$$

Hier wird nun $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil aufgeteilt. Insgesamt lässt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}}{dt} &= - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \int_{\delta V} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) dV' dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \int_{\delta V} (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) dV' dV \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ und $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ verschwindet der antisymmetrische Anteil. Der symmetrische Anteil verschwindet aufgrund der folgenden Überlegung.

Die Wirbelstärke am Ort \mathbf{x}' ist wegen $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ eine gerade Funktion in \mathbf{x} . Wenn wir in dem Produkt $f(\mathbf{x}') = (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'))$ den Ort \mathbf{x}' durch $-\mathbf{x}'$ ersetzen, ergibt sich (vgl.: [6]):

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{x}') &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(-\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} + \mathbf{x}')) \\ &= - (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(-\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \\ &= - (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')) \\ &= - f(\mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Unterteilen wir das gesamte System in symmetrische Domänen $\delta V'$, so verschwindet das Integral, da in symmetrischen Grenzen über eine ungerade Funktion integriert wird. Letzten Endes ergibt sich so, dass auch der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.

1.5 Die Dynamik von Punktwirbeln

Im Folgenden sei das Feld der Wirbelstärke in einem zweidimensionalen System durch an endlich vielen Orten $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ lokalisierte Wirbel vorgegeben. Mit Hilfe der Darstellung durch Deltafunktionen erhält man:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{e}_z. \quad (1.44)$$

Hierbei sind die $\Gamma_j = \oint \mathbf{u} d\mathbf{l}$ die Zirkulationen der einzelnen Wirbel. Sie berechnen sich durch Integration des Geschwindigkeitsfeldes über den Rand eines Gebietes, das den Wirbel enthält. Das gesamte Feld der Wirbelstärke entspricht einer Überlagerung der einzelnen Punktwirbel. Ein einzelner Punktwirbel bewegt sich also in einem Geschwindigkeitsfeld, das von den übrigen Wirbeln erzeugt wird. Die Bewegung der einzelnen Punktwirbel wird durch das Differentialgleichungssystem beschrieben, welches wir erhalten, wenn das vorgegebene Wirbelstärkeprofil in das Gesetz von Biot-Savart eingesetzt wird:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq j}^N \Gamma_i \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)}{|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)|^2}. \quad (1.45)$$

Alternativ können diese Bewegungsgleichungen aus einer Hamilton-Funktion H bestimmt werden, welche die Gesamtenergie repräsentiert. Diese besteht in einer idealen Flüssigkeit nur aus dem Anteil der kinetischen Energie. Mit (1.34) ergibt sich:

$$H = \sum_{i,j;j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j G(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j;j \neq i}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|. \quad (1.46)$$

Durch partielles Ableiten der Hamilton-Funktion nach den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten x_j und y_j können wir Gleichung (1.45) auch in folgender Weise schreiben:

$$\Gamma_j \frac{d}{dt} \mathbf{x}_j = \Gamma_j \left(\frac{dx_j}{dt}, \frac{dy_j}{dt} \right) = \left(\frac{\partial H}{\partial y_j}, -\frac{\partial H}{\partial x_j} \right). \quad (1.47)$$

Diese Gleichung entspricht den kanonischen Bewegungsgleichungen $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ und $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ mit der verallgemeinerten Koordinate $q = x_j$ und dem verallgemeinerten Impuls $p = y_j$ (vgl. [1]). Der Drehimpuls l , der im letzten Kapitel als Erhaltungsgröße identi-

ziert wurde, schreibt sich für ein System aus N Punktwirbeln:

$$l = \sum_j^N \Gamma_j |\mathbf{x}_j|^2. \quad (1.48)$$

Er hat in zweidimensionalen Systemen lediglich eine z -Komponente und kann als Quasiskalar gesehen werden. In dem Fall, dass die Summe der Zirkulationen nicht verschwindet, ergibt sich eine weitere Erhaltungsgröße. Diese ist der Schwerpunkt \mathbf{R} der Zirkulationen der einzelnen Punktwirbel. Er ist definiert durch:

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_j \Gamma_j \mathbf{x}_j}{\sum_j \Gamma_j}; \quad \sum_j \Gamma_j \neq 0. \quad (1.49)$$

Häufig ist es daher sinnvoll zu einer Beschreibung des Systems durch den Schwerpunkt \mathbf{R} und die Relativkoordinaten $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ überzugehen.

1.6 Dynamik zweier Punktwirbel

Es soll etwas eingehender ein System bestehend aus zwei Punktwirbeln mit den Zirkulationen Γ_1 und Γ_2 , die sich an den Orten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 befinden, behandelt werden. Die Bewegungsgleichungen für dieses System lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \frac{\Gamma_2}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \frac{\Gamma_1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Wir gehen über zur Beschreibung des Problems durch eine Schwerpunktskoordinate $\mathbf{R} = (\Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2)/(\Gamma_1 + \Gamma_2)$, die erhalten bleibt, und zu einer Relativkoordinate $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, die dem gerichteten Abstand zwischen beiden Punktwirbeln entspricht. Die zeitliche Änderung des Abstandsvektors wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (1.51)$$

beschrieben [1]. Dabei bleibt der Abstand r zwischen den Wirbeln zeitlich konstant. Im Spezialfall, dass die Zirkulationen $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ sich entsprechen, bedeutet dies, dass die

beiden Wirbel um den gemeinsamen Schwerpunkt $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ mit der Kreisfrequenz $\tilde{\omega} = \frac{\Gamma}{\pi}$ rotieren.

Ein anderer Spezialfall ist derjenige, in dem die beiden Wirbel genau gegensinnig rotieren ($\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$). Dann verschwindet die zeitliche Änderung des Abstandsvektors nach Gleichung (1.51). Für diesen Fall wird der Punkt $\tilde{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, der genau zwischen beiden Punktwirbeln liegt, als Schwerpunkt bezeichnet. Dessen zeitliche Änderung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2) \\ &= -\frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{4\pi}\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}. \end{aligned} \tag{1.52}$$

Die beiden Punktwirbel führen eine Translationsbewegung senkrecht zu ihrer Verbindungslinie aus. Sowohl ihre räumliche Orientierung als auch der Betrag des Abstands zwischen ihnen bleiben dabei konstant [1].

Wir können die Geschwindigkeit an jedem Punkt \mathbf{x} in der Ebene durch Superposition der beiden Felder der einzelnen Punktwirbel bestimmen. In Abb. 1.1 sind Momentaufnahmen der beiden oben erwähnten Spezialfälle gezeigt. Zu sehen ist deutlich eine Rotationsbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt für den Fall, dass die beiden Wirbel sich mit $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ in dieselbe Richtung drehen, und eine Translationsbewegung für den anderen Fall, dass sie sich mit den Zirkulationen $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ in unterschiedlichen Richtungen drehen.

1.7 Reskalierung der Navier-Stokes-Gleichung und Reynolds-Zahl

Die Art, wie ein betrachtetes hydrodynamisches System sich verhält (z.B. ob es eine turbulente oder laminare Strömung aufweist), wird dadurch bestimmt, wie groß die Terme in Gleichung (1.15) relativ zueinander sind. Für spezielle Probleme können z.B. bestimmte Terme vernachlässigt werden, ohne dass die Gleichung die Eigenschaft verliert, das betrachtete physikalische System adäquat zu beschreiben. Um die Bedeutung

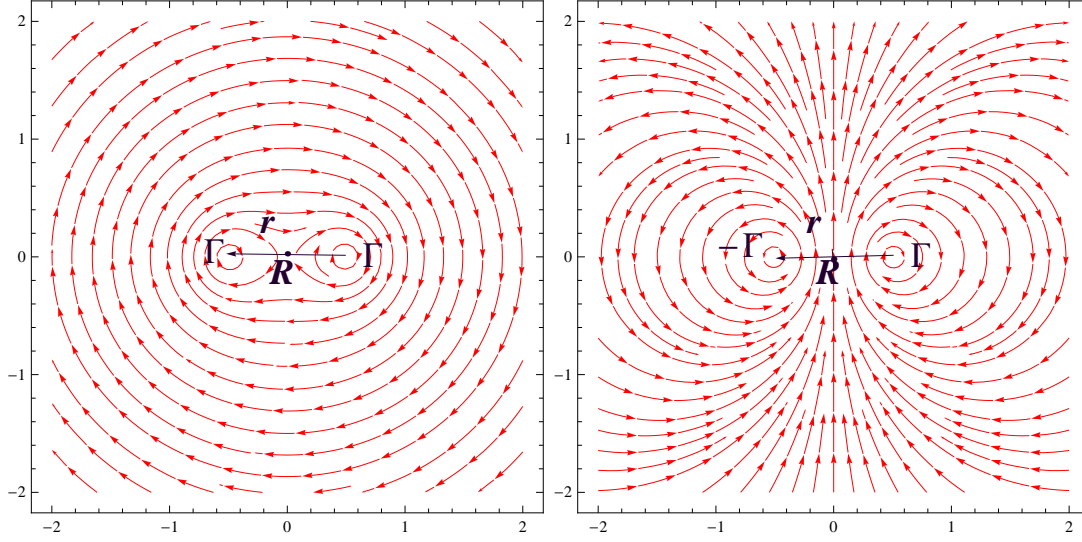


Abb. 1.1: Momentaufnahmen der Geschwindigkeitsfelder zweier Punktwirbel, die mit der Stärke $\Gamma = 2\pi$ in gleicher Richtung (links) bzw. in entgegengesetzter Richtung (rechts) drehen. Der Abstand zwischen ihnen beträgt jeweils $r = 1$.

der einzelnen Terme in der Navier-Stokes-Gleichung besser beurteilen zu können, schreiben wir sie durch das Einführen charakteristischer Größen für das betrachtete System in eine dimensionslose Gleichung um. Als diese Größen werden eine für das betrachtete System charakteristische Länge L und eine Geschwindigkeit U sowie eine von dieser Länge und Geschwindigkeit abhängige charakteristische Zeit $T = \frac{L}{U}$ gewählt [11]. Die in Gleichung (1.15) auftretenden Größen werden zu den folgenden gestrichenen Größen umgeschrieben:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}, \quad p' = \frac{L}{\eta U} p, \quad \mathbf{f}'_{ext} = \frac{L^2}{\eta U} \mathbf{f}_{ext}.$$

In die Navier-Stokes-Gleichung eingesetzt, ergibt sich eine dimensionslose Variante dieser Gleichung:

$$Re \left[\frac{\partial}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \right] \mathbf{u}' = \nabla'^2 \mathbf{u}' - \nabla' p' + \mathbf{f}'_{ext}. \quad (1.53)$$

Hier taucht nun als Systemparameter die dimensionslose Reynolds-Zahl auf:

$$Re = \frac{\rho}{\eta} L U. \quad (1.54)$$

Solange die Reynolds-Zahl gleich bleibt, sind die Lösungen von Gleichung (1.53) identisch. Man kann sagen, dass sich zwei Systeme, von denen das eine L_1, U_1, ρ_1, η_1 und

das andere L_2, U_2, ρ_2, η_2 als charakteristische Größen besitzt, gleich verhalten, solange ihre Reynolds-Zahlen identisch sind. Dies wird auch das Ähnlichkeitsgesetz genannt. Die Reynolds-Zahl bekommt die Bedeutung eines Ähnlichkeitsparameters.

Eine Betrachtung der Dimension des Terms $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, welcher ein Ausdruck für Massenträgheitseffekte ist, ergibt $[\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = \rho \frac{U^2}{L}$. Ähnlich erhält man für die Dimension des Terms $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$, der die innere Reibung des Systems berücksichtigt, $[\eta \nabla^2 \mathbf{u}] = \eta \frac{U}{L^2}$. Ein Vergleich dieser beiden Terme offenbart eine zweite physikalische Bedeutung der Reynolds-Zahl. Es gilt:

$$\frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho}{\eta} L U = Re. \quad (1.55)$$

Die Reynolds-Zahl misst genau das Verhältnis, in dem Trägheitskräfte zu Reibungskräften stehen [11]. Je nachdem, wie groß sie ist, können gewisse Terme in der Navier-Stokes-Gleichung vernachlässigt werden.

1.8 Die Stokes-Gleichung

Im Folgenden werden Systeme betrachtet, in denen viskose Kräfte die Strömung einer Flüssigkeit gegenüber Trägheitseffekten dominieren. In diesem Fall nimmt die Reynolds-Zahl Werte von $Re \ll 1$ an. Aus (1.53) geht dann hervor, dass zum einen der nichtlineare Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ vernachlässigt werden kann. Dadurch wird die Gleichung zu einer Differentialgleichung, in der Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes nach dem Ort und der Zeit linear auftreten. Zum anderen verschwindet der Term $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$. Das Strömungsprofil in Strömungen stark viskoser Flüssigkeiten ist stationär [11]. Diese Strömungen werden auch laminar genannt. Beschrieben werden sie durch die so genannte Stokes-Gleichung, die sich durch die Vernachlässigung sämtlicher Terme, in denen die Massenträgheit über die Dichte ρ in der Navier-Stokes-Gleichung (1.15) eingeht, ergibt:

$$\nabla p(\mathbf{x}, t) - \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}_{ext}. \quad (1.56)$$

Diese Gleichung ist die Grundgleichung der Hydrodynamik in stark gedämpften Flüssigkeiten. Ihre Lösungen sind laminare Strömungsprofile, die auch als aneinander vorbeigleitende Flüssigkeitsschichten betrachtet werden können. Man spricht auch von "kriechenden" Flüssigkeiten. Gehen wir davon aus, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, so bedingt neben der Stokes-Gleichung weiterhin die Inkompressibilitätsbedingung (1.4)

die Dynamik der Flüssigkeit.

An einem Punkt \mathbf{x}' der Flüssigkeit sei durch $\mathbf{f}_{ext} = \mathbf{f}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ eine Kraft vorgegeben. Am Punkt \mathbf{x} wird dann die Fließgeschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ hervorgerufen. Aufgrund der Linearität der Stokes-Gleichung gilt zunächst $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{f}_0$. Da die Stokes-Gleichung linear ist, gilt das Prinzip der Superposition. Die Geschwindigkeit ergibt sich bei Vorgabe eines Kraftprofils $\mathbf{f}(\mathbf{x}')$ durch Integration über das Volumen $\delta V'$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\delta V'} \mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}') dV'. \quad (1.57)$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten, ein gegebenes hydrodynamisches Problem in viskosen Flüssigkeiten zu lösen. Einerseits kann die Stokes-Gleichung durch die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes direkt gelöst werden. Andererseits kann das Geschwindigkeitsfeld durch Vorgabe eines äußeren Kraftprofils und Angabe der Randbedingungen berechnet werden. Der Oseen-Tensor (1.56) $\mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ kann durch eine längere Rechnung aus der Stokes-Gleichung bestimmt werden. Er soll an dieser Stelle angegeben werden (vgl. [16]):

$$\mathbf{J}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right). \quad (1.58)$$

\otimes bezeichnet hierbei ein dyadisches Produkt im Gegensatz zur Bezeichnung eines Skalarprodukts zwischen diesen Vektoren mit $(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. \mathbf{I} stellt die Einheitsmatrix dar. Über den Oseen-Tensor fällt das Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit des Abstandes zwischen den Punkten \mathbf{x} und \mathbf{x}' in zwei Dimensionen mit $-\ln|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ ab. Das bedeutet, dass noch in großen Entfernungen vom Ursprung der Kraft ein Beitrag zum Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ festzustellen ist, da die Funktion $f(x) = -\ln(x)$ nur langsam abfällt.

1.9 Zeitumkehrinvarianz in der Hydrodynamik

In den letzten Abschnitten wurden zwei Grundgleichungen aufgestellt, mit deren Hilfe hydrodynamische Probleme beschrieben werden. Der für inkompressible Flüssigkeiten allgemein gültigen Navier-Stokes-Gleichung, die z. B. auch turbulente Strömungen beschreibt, steht die Stokes-Gleichung gegenüber, die das Geschwindigkeitsprofil laminarer Strömungen beschreibt. Beide Strömungsprofile zeichnen sich durch völlig unterschiedliche Eigenschaften aus. Laminare Strömungen können durch eine Gleitbewegung benach-

barter Flüssigkeitsschichten beschrieben werden. Bewegen sich zwei Flüssigkeitsschichten zunächst in eine Richtung relativ zueinander, so stellt sich der ursprüngliche Zustand nach der Umkehr der Richtung, in der die betrachteten Schichten sich relativ zueinander bewegen, wieder ein. Strömungsprofile die mit der Navier-Stokes-Gleichung beschrieben werden, haben diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Dies lässt sich mathematisch mit Hilfe der Zeitumkehrinvarianz ausdrücken.

Betrachten wir hierfür die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine konservative Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

wobei $\mathbf{x}(t)$ eine allgemeine Lösung dieser Gleichung sei. Dann ist auch $\mathbf{x}(-t)$ Lösung dieser Gleichung, sofern die Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V$ konservativ ist, also dem negativen Gradienten eines im Ort symmetrischen Potentials V entspricht.

Betrachten wir die Terme der Navier-Stokes-Gleichung bzw. der Stokes-Gleichung unter diesem Aspekt. Kehren wir das Vorzeichen in der Zeit $t \rightarrow -t$ um, so führt dies automatisch ebenfalls zu einer Umkehr des Vorzeichens in der Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, -t) \rightarrow -\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ wegen $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Abgesehen vom Druckgradienten und äußeren Kräften verhalten sich die einzelnen Terme in der Navier-Stokes-Gleichung (1.15) wie folgt:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, -t) &= \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ \rho(\mathbf{u}(\mathbf{x}, -t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, -t) &= \rho(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, -t) &= -\eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Die Umkehr des Vorzeichens im dissipativen Term $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ unter Zeitumkehr sorgt für einen Bruch der Zeitumkehrinvarianz in der Navier-Stokes-Gleichung, da sich das Vorzeichen in den Trägheitstermen nicht verändert. In der Stokes-Gleichung tauchen diese beiden Terme nicht mehr auf. Sie ist daher symmetrisch bei rückwärtslaufender Zeit, sofern die Vorzeichen im Druckfeld $p(\mathbf{x}, -t) = -p(\mathbf{x}, t)$ und in der von außen wirkenden Kraft $\mathbf{f}(-t) = -\mathbf{f}(t)$ sich ebenfalls ändern.

Die Zeitumkehrinvarianz in viskosen Flüssigkeiten lässt sich experimentell in einer Taylor-Couette-Zelle zeigen, die mit einer hochviskosen Flüssigkeit (z. B. Öl) gefüllt ist. Eine solche Zelle besteht aus zwei Zylindern, die gegeneinander verdreht werden können. Bringt man nun einen Farbfleck in die Flüssigkeit und verdreht den inneren Zylinder gegenüber dem äußeren, so erscheint der Farbfleck nach einigen Umdrehungen als Farb-

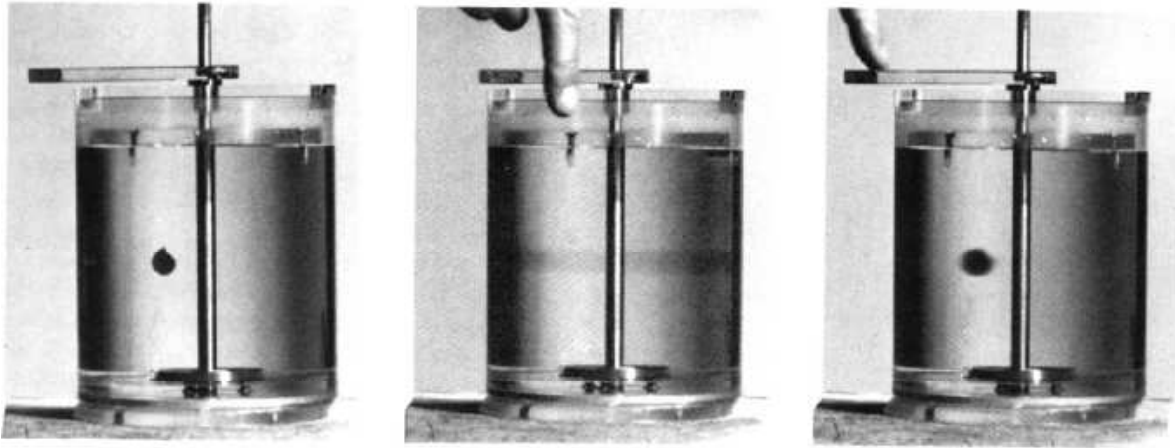


Abb. 1.2: Zum experimentellen Nachweis der Zeitinvarianz in viskosen Flüssigkeiten: Ein Farbfleck wird durch mehrfaches Umdrehen des inneren Zylinders einer Taylor-Couette-Zelle in die Länge gezogen und taucht nach Zurückdrehen des Zylinders in seine ursprüngliche Position wieder auf [15].

streifen. Dreht man nun den Zylinder in seine Ursprungsposition, so erscheint der Fleck in seiner ursprünglichen Form abgesehen davon, dass er durch diffusive Effekte etwas verschmiert erscheint (siehe Abb. 1.2) [15].

2 Fortbewegung bei kleiner Reynolds-Zahl

Mit “Schwimmen” wird ganz allgemein die Vorwärtsbewegung eines Schwimmers durch einen zyklischen Bewegungsablauf bezeichnet. Für diese Bewegungen haben Mikroorganismen wie Bakterien völlig andere Konzepte entwickelt als Lebewesen in der makroskopischen Welt, wie zum Beispiel ein menschlicher Schwimmer. Die Umgebungen, in denen diese beiden Schwimmer sich bewegen, unterscheiden sich lediglich durch die Reynolds-Zahl. Sie ist als einziger Parameter für die Verschiedenheit der Konzepte des Schwimmens verantwortlich.

Nachdem die grundlegenden Gleichungen der Hydrodynamik bekannt sind, soll in diesem Kapitel eingehender das Verhalten von Mikroschwimmern untersucht werden, deren Bewegungen maßgeblich von der Viskosität der Flüssigkeit, in der sie sich bewegen, beeinflusst werden.

2.1 Vergleich von Schwimmern in Umgebungen von $Re > 1$ und $Re \ll 1$

Betrachten wir einen menschlichen Schwimmer, dessen Körperlänge ungefähr $L \approx 2\text{ m}$ beträgt und der die 100 m-Strecke in etwa 50 s zurücklegt. Seine Reynolds-Zahl beträgt mit den für Wasser üblichen Werten der Dichte $\rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und der Viskosität $\eta = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$ in etwa $Re \approx 4 \cdot 10^6$. In diesem Bereich der Reynolds-Zahl sind die Terme, in denen die Massendichte in der Navier-Stokes-Gleichung (1.15) auftauchen, wie in (1.53) gesehen, nicht vernachlässigbar. Dies macht sich durch den Effekt bemerkbar, dass der Schwimmer nach Einstellen der Schwimmbewegungen noch eine gewisse Strecke in der Flüssigkeit weitergleitet. Konzepte der Fortbewegung in dieser Umgebung machen sich

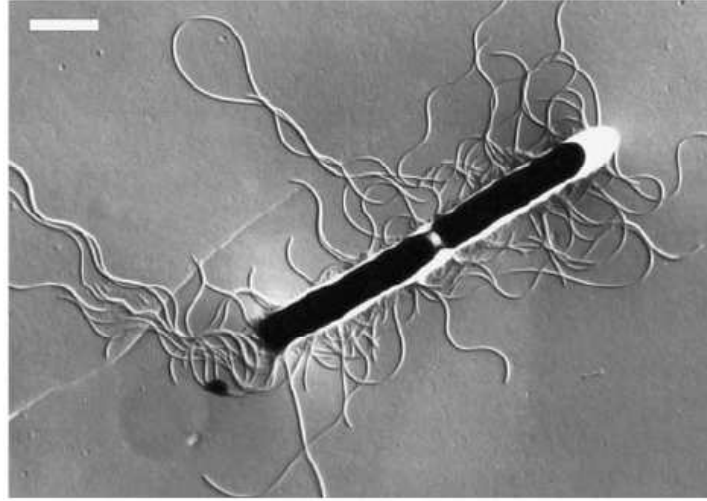


Abb. 2.1: Abbildung zweier sich teilender *B. subtilis* Bakterien [4]. Der Durchmesser des Körpers liegt im Bereich von $1\ \mu\text{m}$. Deutlich zu erkennen sind mehrere aus dem Zellkörper hervortretende Flagellen, mit deren Hilfe die Bakterien sich aktiv fortbewegen.

gerade diese Trägheitseffekte zunutze. Offensichtlich wird dies z. B. bei einem Ruderboot, das zwischen zwei Ruderschlägen eine gewisse Strecke Δx gleitet.

Für ein Bakterium, dessen Körperabmessung im Bereich von $L = 1\ \mu\text{m}$ liegt und das sich mit einer Geschwindigkeit von etwa $U = 30\ \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}$ bewegt, liegt die Reynolds-Zahl in einem Bereich von $Re \approx 10^{-4}$. Abb. 2.1 zeigt als Beispiel für einen biologischen Mikroschwimmer *B. subtilis* Bakterien. Ein solches Bakterium nimmt die wässrige Lösung, in der es sich bewegt, als stark gedämpfte Flüssigkeit wahr. Die Strecke des Gleitens Δx kann für ein solches Bakterium abgeschätzt werden.

Die Reibungskraft $\mathbf{f}_{frict} = -\alpha\mathbf{v}$, die der Bewegung des Schwimmers entgegenwirkt, ist in Newtonschen Flüssigkeiten wie Wasser proportional zur Geschwindigkeit \mathbf{v} des Schwimmers. Die Konstante α wird hier als Reibungskoeffizient bezeichnet. Für eine Kugel mit Radius r ist er durch das Stokesche Gesetz $\alpha = 6\pi\eta r$ gegeben.

Die Änderung der Geschwindigkeit des Schwimmers ergibt mit dem zweiten Newtonschen Axiom:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\mathbf{u}. \quad (2.1)$$

Diese Bewegungsgleichung wird durch

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \exp\left\{-\frac{\alpha}{m}t\right\} \quad (2.2)$$

2.1 Vergleich von Schwimmern in Umgebungen von $Re > 1$ und $Re \ll 1$

gelöst, wobei \mathbf{u}_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Einstellens der antreibenden Bewegung ist. Die Strecke Δx , die der Schwimmer nach der Zeit t zurückgelegt hat, berechnet sich gemäß

$$\Delta x(t) = x - x_0 = \frac{u_0 m}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{m} t \right\}. \quad (2.3)$$

Für die vom Schwimmer nach der Zeit $\tau = \frac{m}{\alpha}$ zurückgelegte Strecke $S(\tau)$ ergibt sich unter der Annahme eines kugelförmigen Körpers des Schwimmers mit dem Radius $r = L/2 = 1 \mu\text{m}$, dessen Dichte in etwa der von Wasser entspricht, näherungsweise:

$$\Delta x(\tau) = \frac{4u_0 \rho r^2}{18\eta} \frac{1}{e} \approx 0,01 \text{ nm}. \quad (2.4)$$

Das Einstellen der Bewegung hat für ein Bakterium aufgrund der Reibung mit der umgebenden Flüssigkeit einen sofortigen Stillstand zur Folge. Konzepte des Schwimmens in Flüssigkeiten hoher Viskosität können daher nicht auf Trägheitseffekte zurückgreifen. Aber wie genau funktioniert nun eine effektive Fortbewegung in der Umgebung niedriger Reynolds-Zahlen?

Die einzige Möglichkeit eines Schwimmers, sich fortzubewegen, besteht darin, seine Körperform zeitlich zu ändern. Diese Änderung muss periodisch sein, damit er nach einem Schlag, mit dem er nur eine begrenzte Strecke zurücklegen kann, weitere Schläge ausführen kann [17]. Am Ende dieses Schlages muss der Schwimmer zudem eine gewisse Strecke Δx zurückgelegt haben. Wie unterschiedlich die Resultate einer Strategie des Schwimmens bei hoher bzw. bei niedriger Reynolds-Zahl sein können, zeigt das folgende auch unter “scallop theorem” bekannte Beispiel [17].

Ein Schwimmer bestehe aus zwei Muschelschalen, die er öffnen und wieder schließen kann. Durch langsames Öffnen der Schalen saugt er Wasser an, welches er durch ruckartiges Verschließen wieder ausstößt. Bei hoher Reynolds-Zahl führt dies aufgrund des Rückstoßes, also der Trägheit der Masse, zu einer effektiven Vorwärtsbewegung. Bei kleiner Reynolds-Zahl ($Re \ll 1$) ist diese Strategie der Fortbewegung jedoch nicht erfolgreich. Dies liegt daran, dass Öffnen und Schließen der Schalen einen zeitlich reversiblen Prozess darstellen. Da es aufgrund der Unabhängigkeit der Stokes-Gleichung von Ableitungen nach der Zeit, keine Rolle spielt, wie schnell das Öffnen bzw. Schließen sich ereignen, bedeutet ein zeitlich reversibler Bewegungsablauf, dass der Schwimmer sich zwar durch das Öffnen der Schalen fortbewegt, diese Strecke jedoch beim Schließen der Schalen direkt wieder in umgekehrter Richtung zurücklegt. Der Schwimmer befindet sich

nach einem Schlag also wieder an seinem Ausgangspunkt.

2.2 Konzepte der Bewegung bei kleiner Reynolds-Zahl

Um nun in einer solchen überdämpften Umgebung erfolgreich zu schwimmen, muss ein Schwimmer die zeitliche Symmetrie der Lösungen der Stokes-Gleichung brechen. Mit zwei Elementen ist dies, wie das letzte Beispiel zeigt, nicht möglich. Um diese Symmetrie zu brechen, benötigt ein Schwimmer mindestens drei relativ zueinander bewegliche Elemente. Der Dreikugelschwimmer von Golestanian [14] dient hier als Beispiel.

2.2.1 Der Dreielementschwimmer

Dieser Schwimmer besteht aus drei Kugeln 1, 2 und 3, von denen Kugel 1 und Kugel 2 sowie Kugel 1 und Kugel 3 über zwei Arme miteinander verbunden sind. Der maximale Abstand zwischen den Kugeln betrage D , kann jedoch durch Verkürzen der Arme um eine Strecke von ϵ variiert werden (siehe Abb. 2.2). Eine periodische, zeitlich jedoch nicht umkehrbare Bewegung dieses Schwimmers besteht aus vier Schritten:

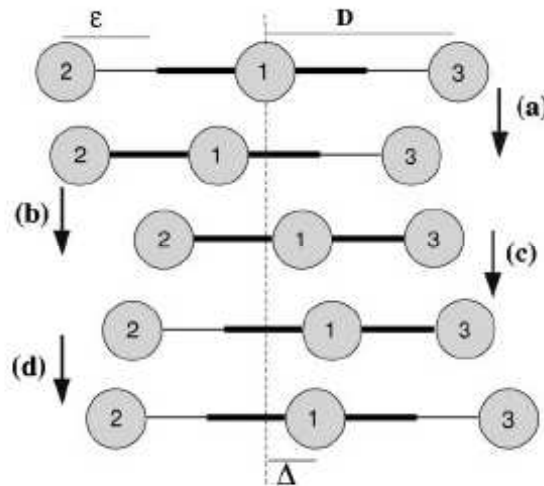


Abb. 2.2: Der Dreikugelschwimmer: Durch die periodische Veränderung des Abstands zwischen je zwei der drei Kugeln wird die zeitliche Symmetrie der Bewegung gebrochen. Nach einer Periode hat der Schwimmer eine Strecke von Δ zurückgelegt [14].

- a) Während die Länge des rechten Arms konstant bleibt, wird die Länge des linken Arms auf $D - \epsilon$ verkürzt.
- b) Die Länge des linken Arms bleibt konstant, und der rechte Arm wird ebenfalls auf $D - \epsilon$ verkürzt.
- c) Der linke Arm wird wieder auf D verlängert, wohingegen der rechte die Länge von $D - \epsilon$ beibehält.
- d) Mit der Verlängerung des rechten Arms auf die ursprüngliche Länge D wird der Anfangszustand wieder erreicht.

Die Strecke Δ , um die sich der Schwimmer während eines Schlags, d. h. eines Durchlaufs dieses periodischen Bewegungsablaufs, fortbewegt, setzt sich aus den Strecken zusammen, die er während der einzelnen Schritte zurücklegt. Während eines Teilschrittes wird die Länge eines Arms verlängert oder verkürzt, während die Länge des anderen Arms konstant gehalten wird. Die Strecken, die der Schwimmer während der einzelnen Schritte zurücklegt, hängen nun davon ab, ob der Abstand zwischen den Kugeln, der während eines solchen Schrittes konstant gehalten wird, groß ist, also D beträgt, oder mit $D - \epsilon$ klein ist. Je kleiner dieser Abstand ist, desto weniger bremst die äußerste der Kugeln die Fortbewegung des Schwimmers aufgrund der Reibung mit der Flüssigkeit. Betrachten wir die Positionsänderung der mittleren Kugel nach den einzelnen Schritten, welche als Positionsänderung des gesamten Schwimmers angesehen werden kann. Schritt (a) führt zu einer kurzen Positionsänderung, da der Abstand zwischen Kugel 1 und 3 mit D maximal ist und eine Verkürzung des Abstands zwischen Kugel 2 und 3 entgegen der Bewegungsrichtung wirkt. Schritt (b) führt zu einer größeren Änderung der Position, da der Abstand zwischen Kugel 2 und 3 nach dem ersten Schritt mit $D - \epsilon$ minimal ist und Verkürzung des Abstands zwischen 1 und 3 in Bewegungsrichtung wirkt. Der Schritt (c) entspricht dem zeitlich umgedrehten Schritt (a), wobei die Distanz zwischen Kugel 1 und 3 nun mit $D - \epsilon$ minimal ist. Dieser Schritt führt also ebenfalls zu einer großen Änderung der Position in Bewegungsrichtung. Der letzte Schritt (d) stellt nun den zeitlich umgekehrten Prozess zu (b) bei großem Abstand D zwischen den Kugeln dar. Dies führt zu einer kleinen Änderung der Position gegen die Bewegungsrichtung. Summieren wir diese Strecken auf, so erhalten wir insgesamt eine Positionsänderung von Δ des Schwimmers, die von Null verschieden ist.

2.2.2 Biologische Schwimmer

Der Dreielementschwimmer ist das Resultat von Überlegungen, wie ein Schwimmer prinzipiell die Symmetrie in der Zeitumkehr der Stokes-Gleichung überwinden kann. Biologische Schwimmer in einer solchen Umgebung, wie Bakterien, haben andere Konzepte entwickelt, effizient in einer Umgebung hoher Viskosität zu schwimmen. Abb. 2.1 zeigt zwei Beispiele solcher Zellen. Aus der Oberfläche des Kopfes treten längliche Filamente hervor, die Flagellen genannt werden. Durch ein Motorprotein sind sie in der Oberfläche des Zellkörpers verankert. Diese Motorproteine können die Flagellen in zwei Richtungen drehen: entweder im Uhrzeigersinn oder gegen diesen. Bakterien können sich zur Fortbewegung lediglich Reibungseffekte mit der Flüssigkeit zunutze machen. Das Konzept der Fortbewegung mit Flagellen beruht daher auf Unterschieden der Reibungskoeffizienten in paralleler bzw. senkrechter Richtung zur Symmetrieachse des Flagellums. Diese sollen im Folgenden bestimmt werden.

Reibungskoeffizienten eines Zylinders in viskosen Flüssigkeiten

Bewegt sich ein Schwimmer in einer viskosen Flüssigkeit, so muss er eine gewisse Kraft \mathbf{f} aufwenden, um die Geschwindigkeit \mathbf{u} zu halten. In dieser Umgebung stellt der Reibungstensor $\boldsymbol{\zeta}$ aufgrund der Linearität der Stokes-Gleichung einen linearen Zusammenhang zwischen Kraft und Geschwindigkeit her:

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Dieser Tensor kann nun in die Teile, die parallel und senkrecht zur Bewegungsrichtung wirken, aufgeteilt werden:

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Die hier auftretenden Reibungskoeffizienten sollen im Folgenden bestimmt werden. Dazu wird ein Zylinder, dessen Position im Raum durch $x^2 + y^2 = a^2$ und $-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$ beschrieben wird, betrachtet. Bewegt dieser sich in einer viskosen Flüssigkeit, so übt er eine gewisse Kraft auf diese aus. Dadurch erzeugt er ein Geschwindigkeitsprofil, welches durch den Oseen-Tensor (1.58) vermittelt wird. Diese Kraft und Geschwindigkeit werden in solchen Anteile \mathbf{f}_{\parallel} , \mathbf{u}_{\parallel} , die parallel zur Achse des Zylinders gerichtet sind, und in

Anteile \mathbf{f}_\perp , \mathbf{u}_\perp , die in senkrechter Richtung zu dieser Achse zeigen, aufgespalten [13]. Für die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich:

$$\mathbf{u}_{\parallel,\perp} = \int \frac{1}{8\pi\eta} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \cdot \mathbf{f}_{\parallel,\perp} dV'. \quad (2.7)$$

Die parallele Komponente der Geschwindigkeit \mathbf{u}_\parallel wird durch das Einsetzen einer Kraft $\mathbf{f}_\parallel = f_z \mathbf{e}_z \delta(x) \delta(y) \delta(z - z')$ an den Ort $\mathbf{x}' = (0, 0, z')$ bestimmt. Den Betrag dieser Kraft betrachten wir als konstant. Gleichung (2.7) wird damit zu:

$$\mathbf{u}_\parallel = \frac{f_z}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{x(z - z')}{r^3}, \frac{y(z - z')}{r^3}, \frac{(z - z')^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right) dz'. \quad (2.8)$$

Hierbei sei mit $r = (x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{1/2}$ der Abstand von dem Punkt bezeichnet, an dem die Kraft \mathbf{f}_\parallel wirkt. Bei der Integration über die Oberfläche des Zylinders ($x'^2 + y'^2 = a^2$ und $-L/2 < z' < +L/2$) verschwindet die x -Komponente ebenso wie die y -Komponente, da ein Integral über eine ungerade Funktion berechnet wird, wobei die Grenzen bei $z' = -L/2$ und $z' = +L/2$ liegen. Der Abstand r vereinfacht sich zu $r = (a^2 + z'^2)^{1/2}$. Für die Komponente u_z der Geschwindigkeit ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{f_z}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{z'^2}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{1/2}} \right) dz' \\ &= \frac{f_z}{8\pi\eta} \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{z'}{a} \right) - \frac{z'}{(a^2 + z'^2)^{1/2}} \right) \Big|_{z'=-L/2}^{z'=L/2} \\ &= \frac{f_z}{4\pi\eta} \left(2 \sinh^{-1} \left(\frac{L}{2a} \right) - \frac{1}{2} \frac{L}{(a^2 + \frac{L^2}{4})^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Wir formen den letzten Term unter Ausnutzung von $\sinh^{-1} x = \ln\{x + (1 + x^2)^{1/2}\}$ um:

$$u_z = \frac{f_z}{2\pi\eta} \ln \left\{ \frac{L}{2a} + \frac{L}{a} \left(\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2} \right)^{1/2} \right\} - \frac{f_z}{8\pi\eta} \frac{1}{(\frac{1}{4} + \frac{a^2}{L^2})^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Für einen langen, dünnen Zylinder ($a \ll L$) können Terme der Ordnung $O(a^2 L^{-2})$ an dieser Stelle vernachlässigt werden. Dies ergibt [13]:

$$u_z = \frac{f_z}{4\pi\eta} \left(2 \ln \frac{L}{a} - 1 \right). \quad (2.11)$$

2 Fortbewegung bei kleiner Reynolds-Zahl

Der Reibungskoeffizient in paralleler Richtung zur Achse des Zylinders ζ_{\parallel} ergibt sich aus dem Zusammenhang $f_z = \zeta_{\parallel} u_z$. Nach Umstellen der letzten Gleichung kann er abgelesen werden:

$$\zeta_{\parallel} = 4\pi\eta \frac{1}{2\ln \frac{L}{a} - 1}. \quad (2.12)$$

Im Folgenden werden die Orthogonalkomponenten \mathbf{u}_{\perp} der Geschwindigkeit bestimmt. Für diese sei die Kraft $\mathbf{f}_{\perp} = (f_x, f_y, 0)$ vorgegeben. Gleichung (2.7) wird dann für die x -Komponente zu:

$$\mathbf{u}_{\perp}^0 = \frac{f_x}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{r^2 + x^2}{r^3}, \frac{xy}{r^3}, \frac{x(z - z')}{r^3} \right) dz'. \quad (2.13)$$

Betrachten wir die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Achse des Zylinders, so muss berücksichtigt werden, dass der Zylinder wie ein Dipol wirkt, der sich durch die Flüssigkeit bewegt. Es gibt daher den Beitrag eines Dipolfeldes zum Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u}_{\perp} . Dieses ist gegeben durch:

$$\mathbf{u}_{\perp}^1 = \frac{a^2 f_x}{16\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, -\frac{3xy}{r^5}, -\frac{3x(z - z')}{r^5} \right) dz'. \quad (2.14)$$

Durch die Integration über die Oberfläche des Zylinders ergibt sich:

$$\mathbf{u}_{\perp} = \frac{f_x}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3}, \frac{xy}{r^3}, -\frac{xz'}{r^3} \right) + \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}, -\frac{3xy}{r^5}, \frac{3xz'}{r^5} \right) dz'. \quad (2.15)$$

Zunächst verschwindet in diesem Integral die z -Komponente aus demselben Grund wie bei der Berechnung von \mathbf{u}_{\parallel} . Die Integration läuft wieder über eine ungerade Funktion in den Grenzen von $-L/2$ bis $L/2$. Weiter gilt für die Integrale $\int r^{-3} dz'$ und $\int r^{-5} dz'$ auf der Oberfläche des Zylinders:

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} dz' &= \frac{z'}{a^2(a^2 + z'^2)^{1/2}} \Big|_{z'=-L/2}^{z'=L/2} \\ &= \frac{L}{a^2(a^2 + \frac{L^2}{4})^{1/2}} \\ \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{5/2}} dz' &= \frac{2z'}{3a^4(a^2 + z'^2)^{1/2}} + \frac{z'}{a^2(a^2 + z'^2)^{3/2}} \Big|_{z'=-L/2}^{z'=L/2} \\ &= \frac{2L}{3a^4(a^2 + \frac{L^2}{4})^{1/2}} + \frac{L}{a^2(a^2 + \frac{L^2}{4})^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es werden wieder Terme der Ordnung $O(a^2 L^{-2})$ vernachlässigt. Dann ergibt sich:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} dz' = \frac{3}{2} a^2 \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{5/2}} dz'. \quad (2.17)$$

Beide Integrale tauchen in (2.15) in der Form auf, dass die Terme, die von x^2/r^3 und xy/r^3 abhängen, sich gerade ausgleichen. Es gibt nur einen Beitrag zur x -Komponente der Geschwindigkeit u_x . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{f_x}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{r^2 + \frac{a^2}{2}}{r^3} \right) dz' \\ &= \frac{f_x}{8\pi\eta} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{z'^2 + \frac{3}{2}a^2}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} dz' \\ &= \frac{f_x}{8\pi\eta} \left(\sinh^{-1} \left(\frac{z'}{a} \right) + \frac{z'}{2(a^2 + z'^2)^{1/2}} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dies ergibt, wenn wiederum Terme der Ordnung $O(a^2 L^{-2})$ vernachlässigt werden [13]:

$$u_x = \frac{f_x}{8\pi\eta} \left(2 \ln \frac{L}{a} + 1 \right). \quad (2.19)$$

Die Rechnung für die Komponente u_y erfolgt auf analoge Weise. Wir erhalten für den Reibungskoeffizienten in senkrechter Richtung zur Achse des Zylinders:

$$\zeta_{\perp} = 8\pi\eta \frac{1}{2 \ln \frac{L}{a} + 1}. \quad (2.20)$$

Ein Vergleich der in (2.12) und (2.20) aufgeführten Reibungskoeffizienten zeigt näherungsweise ein Verhältnis von $\zeta_{\perp} \approx 2\zeta_{\parallel}$ für Zylinder deren Länge L den Radius ihres Querschnitts deutlich übersteigt.

Vortrieb durch Unterschiede in den Reibungskoeffizienten

Ein Flagellum kann als Aneinanderkettung von länglichen, dünnen Zylindern betrachtet werden. Die Achsen der Zylinder werden auf einer helikalen Linie angeordnet. Die Rotation dieser Helix stellt die einzige zeitlich nicht reziproke, periodische Bewegung dar, mit der ein Bakterium sich fortbewegen kann. Die Rotationsachse sei im Folgenden durch die z -Achse eines Koordinatensystems festgelegt.

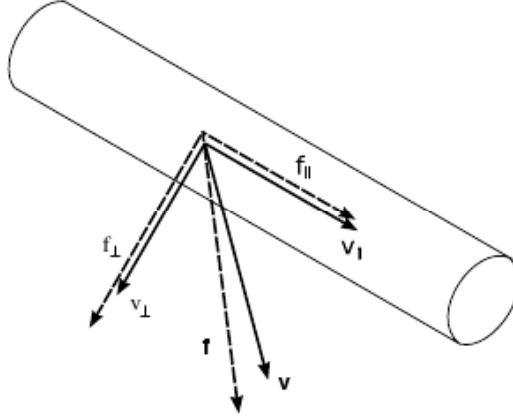


Abb. 2.3: Ein langer dünner Zylinder wird mit einer Geschwindigkeit \mathbf{u} durch eine viskose Flüssigkeit gezogen. Hierbei treten Kraftkomponenten \mathbf{f}_{\parallel} parallel und \mathbf{f}_{\perp} senkrecht zur Symmetrieachse des Zylinders auf. Da sich die Reibungskoeffizienten in paralleler und senkrechter Richtung unterscheiden, zeigt die resultierende Kraft \mathbf{f} nicht in Richtung der Geschwindigkeit \mathbf{v} [15].

Dreht sich diese Helix in einer viskosen Flüssigkeit, so wird dieser Zylinder mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ durch die Flüssigkeit gezogen. Dabei wird durch die Reibung der Flüssigkeit eine Kraft auf ihn ausgeübt. Da die Symmetrieachse des Zylinders weder in der xy -Ebene liegt noch senkrecht zu ihr steht, gibt es Geschwindigkeitskomponenten sowohl parallel zur Symmetrieachse des Zylinders u_{\parallel} als auch solche (u_{\perp}) orthogonal zu ihr. Auch die Kraft \mathbf{f} , die auf den Zylinder wirkt, lässt sich in solche Komponenten aufspalten, die parallel f_{\parallel} und senkrecht f_{\perp} zur Symmetrieachse des Zylinders stehen. Da sich die Reibungskoeffizienten ζ_{\parallel} und ζ_{\perp} unterscheiden, zeigt die resultierende Kraft \mathbf{f} in eine andere Richtung als die Geschwindigkeit \mathbf{u} , mit der der Zylinder bewegt wird (Siehe Abb. 2.3) [15].

In Abb. 2.4 sind zwei Segmente des Flagellums hervorgehoben. Die Nettokräfte, die Reibungskraft und die von den beiden Nachbarsegmenten auf das betrachtete Segment ausgeübte Kraft $d\mathbf{f}$ müssen verschwinden, da ansonsten das Flagellum seine Form ändern würde. Wird das Bakterium um eine z -Achse gedreht, die durch die Symmetrieachse des Zylinders definiert wird, in dessen Oberfläche die Achse des Flagellums verläuft, so gibt es Komponenten v_x und v_y der Geschwindigkeit, mit der das Segment durch die Flüssigkeit gezogen wird. Die Komponente v_z verschwindet dann. Die Ausrichtung der Achse des Segments enthält jedoch sehr wohl eine z -Komponente. Daher spaltet sich die resultierende Kraft $d\mathbf{f}$ in einen Parallelanteil und einen senkrechten Anteil auf. Da der Reibungskoeffizient α_{\perp} größer ist als α_{\parallel} , entsteht so neben den Komponenten df_x

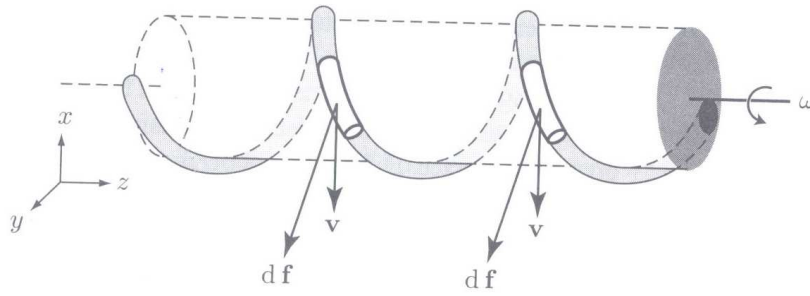


Abb. 2.4: Zwei hervorgehobene Segmente des helikalen Flagellums. Das Flagellum selbst rotiere um die z -Achse, weshalb keine Komponente seiner Geschwindigkeit in z -Richtung vorliegt. Aufgrund von Unterschieden in den Reibungskoeffizienten einer senkrecht bzw. parallel zum Segment des Flagellums ausgeführten Bewegung entsteht jedoch eine Kraft in z -Richtung, die zur Fortbewegung des gesamten Bakteriums führt [15].

und df_y eine Komponente df_z . Summieren wir die resultierende Kraft einer gesamten Windung des Bakteriums, so müssen aus Symmetriegründen die Komponenten df_x und df_y verschwinden. Die Komponente df_z verschwindet jedoch nicht. Stellen wir uns vor, dass am rechten Ende des Flagellums in Abb. 2.4 der Kopfteil des Bakteriums sitzt, so wird das gesamte Bakterium durch diesen Bewegungsvorgang mit einer Geschwindigkeit von u_z nach links gezogen [15].

2.3 Bewegungen eines Bakterium

Der aktive Antrieb dient Bakterien in erster Linie zum Auffinden solcher Gegenden, in denen viele Nährstoffe vorliegen. Dies geschieht in einem “random-walk”. Dabei führen Bakterien während eines “runs” Translationsbewegungen aus. Die mittlere Dauer, während der ein Bakterium einen “run” ausführt, beträgt etwa 1 s. Auf einen “run” folgt eine Taumelbewegung des Bakteriums von einer mittleren Dauer von 0,1 s, während der es unkontrolliert rotiert und so seine Bewegungsrichtung ändert. Dieser Bewegungszustand wird “tumble” genannt. Diesen beiden Bewegungszuständen sind klare Konfigurationen der Flagellen zugeordnet.

Bakterien, wie in Abb. 2.1 gezeigt, benutzen mehrere Flagellen, die über die Oberfläche des Kopfteils verteilt sind. Durch das Motorprotein können sie mit oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht werden. Drehen alle Flagellen gegen den Uhrzeigersinn, so organisieren sie sich zu einem Bündel. Der Kopfteil des Bakteriums wird durch das Wasser

gedrückt. Seine Bewegungsrichtung ändert sich dabei nicht. Das Bakterium führt einen “run” aus.

Die Bewegungsrichtung des Bakteriums ändert sich, wenn sich die Drehrichtung mindestens eines Flagellums umkehrt. Dieses dreht nun mit dem Uhrzeigersinn und durchläuft einige Bewegungszustände, ehe es wieder gegen den Uhrzeigersinn dreht und durch den Wiedereintritt in das ursprüngliche Bündel einen neuen “run” initiiert. Durch die Änderung der Drehrichtung ist dieses Flagellum gezwungen, das Bündel zu verlassen. Dadurch entsteht das Einwirken einer weiteren Kraft auf den Zellkörper. In der Zeit, während der das Flagellum sich aus dem Bündel losgelöst dreht, bewegt es sich unkontrolliert im Raum. Die Richtung der Kraftwirkung ist also nicht vorgegeben. Jedoch sorgt die Wirkung des Bündels und des Flagellums zusammen für eine ebenfalls unkontrollierte Änderung der Bewegungsrichtung des Bakteriums. Es scheint zu taumeln [2].

2.4 Erzeugen eines Geschwindigkeitsfeldes und Hydrodynamische Interaktion zwischen Bakterien

Durch seine antreibenden Bewegungen übt ein Bakterium eine Kraft \mathbf{f} auf die Flüssigkeit aus, in der es schwimmt. Diese erzeugt, vermittelt durch den Oseen-Tensor (1.58), ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ abhängig vom Ort \mathbf{x} . Abb. 2.5 zeigt die Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes, wie es von einem langen, stabförmigen Bakterium erzeugt wird [5]. Das Bakterium bewegt sich in einer dünnen Flüssigkeitsschicht, die näherungsweise als zweidimensional betrachtet werden kann.

In einer Umgebung um das Bakterium, die einige Körperlängen umspannt, ist ein Beitrag zum Geschwindigkeitsfeld zu erkennen, der über ein stets gegenwärtiges Rauschen hinausgeht und auf die antreibenden Bewegungen des Bakteriums zurückzuführen ist. Diese lange Reichweite ist ein Resultat des langsamen Abfallens des Oseen-Tensors (1.58) mit $1/r$, wobei r den Abstand zu dem Punkt bezeichnet, in dem eine Kraft \mathbf{f} auf die Flüssigkeit ausgeübt wird.

Weiter fällt auf, dass in der näheren Umgebung um das Bakterium die Flüssigkeit in wirbelartigen Strukturen zirkuliert. Auch in [4] werden Strömungsprofile gezeigt, die

wirbelartige Strukturen aufweisen. Dies scheint verwunderlich, da laminare Strömungen nicht die Eigenschaft besitzen solche Strukturen aufzuweisen.

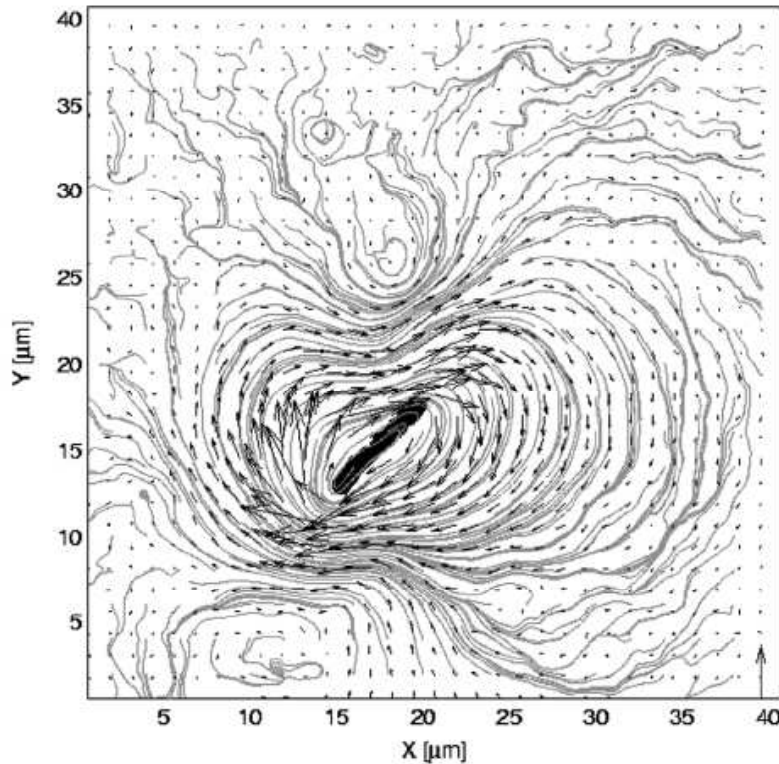


Abb. 2.5: Stationäre Feldlinien des Geschwindigkeitsfeldes um ein längliches, stabförmiges Bakterium [4].

Durch die lange Reichweite des Geschwindigkeitsfeldes beeinflussen Schwimmer ihre Umgebung und in Systemen mit mehr als einem Schwimmer sind Interaktionsprozesse aufgrund hydrodynamischer Wechselwirkungen zu erwarten. [4], [20] zeigen beispielsweise die Ausbildung von turbulenzartigen Strukturen in der Dynamik der gesamten Bakterienkolonie, wobei sich Verwirbelungen und “Jets” ausbilden, in denen mehrere Bakterien hintereinander schwimmen.

Im folgenden Kapitel wird ein einfaches Modell dieses Geschwindigkeitsfeldes vorgestellt, mit dessen Hilfe wir die Interaktion zwischen zwei Bakterien näher untersuchen wollen.

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

Im letzten Kapitel wurde erwähnt, dass Schwimmer über weite Strecken hinweg durch das Erzeugen von Geschwindigkeitsfeldern in der Flüssigkeit, in der sie sich fortbewegen, miteinander wechselwirken können. In diesem Kapitel wird ein System bestehend aus zwei Schwimmern betrachtet. An dieser Stelle soll nicht die Stokes-Gleichung für zwei einzelne Schwimmer gelöst werden, wie dies in [10] und [16] geschieht. Vielmehr soll hier ein einfaches Modell für das Geschwindigkeitsfeld, das von einem Bakterium erzeugt wird, vorgestellt werden. Auf der Grundlage dieses Modells soll die Interaktion zwischen zwei Schwimmern untersucht werden.

Im ersten Kapitel wurde die Dynamik zweier Punktwirbel behandelt. Dort wurden zwei Fälle behandelt. Einerseits führen beide Punktwirbel eine Rotationsbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt aus, wenn sich ihre Zirkulationen Γ_i entsprechen. Andererseits ergibt sich eine Translationsbewegung des gesamten Systems, wenn die Wirbelstärken entgegengesetzt gleich groß sind. Der Abstand zwischen den Wirbeln bleibt in beiden Fällen konstant.

Wir wollen durch ein solches Teilsystem aus zwei Wirbeln, deren Abstand zeitlich nicht variiert, nun das Geschwindigkeitsfeld eines Schwimmers beschreiben, der sich in einem von anderen Schwimmern erzeugten Geschwindigkeitsfeld bewegt. Hierbei stehe ein Wirbelsystem, das eine Translationsbewegung ausführt, für das Geschwindigkeitsfeld eines Schwimmers, der einen “run” ausführt. Ein rotierendes Wirbelsystem beschreibe hingegen einen taumelnden Schwimmer.

Das Gesamtsystem für mehr als einen Schwimmer besteht aus mindestens vier Punktwirbeln. Solche Systeme sind im Allgemeinen nicht integrierbar. Für einige Spezialfälle

sind die Bewegungsgleichungen für die Orientierungen und Positionen der Schwimmer jedoch lösbar.

3.1 Die Bewegungsgleichungen zweier Schwimmer in zwei Dimensionen

Die Dynamik zweier Punktwirbel weist, ebenso wie die Dynamik von Mikroschwimmern, einerseits die der Translationsbewegung, andererseits der Rotationsbewegung auf. Da Mikroschwimmer, wie im letzten Kapitel kurz angedeutet wurde, Geschwindigkeitsfelder erzeugen, die ebenfalls Wirbelstrukturen enthalten, soll hier für das Geschwindigkeitsfeld eines Schwimmers modellhaft angenommen werden, dass es aus zwei Punktwirbeln besteht, die in der Umgebung des Schwimmers erzeugt werden. Der Abstand zwischen ihnen sei zeitlich konstant.

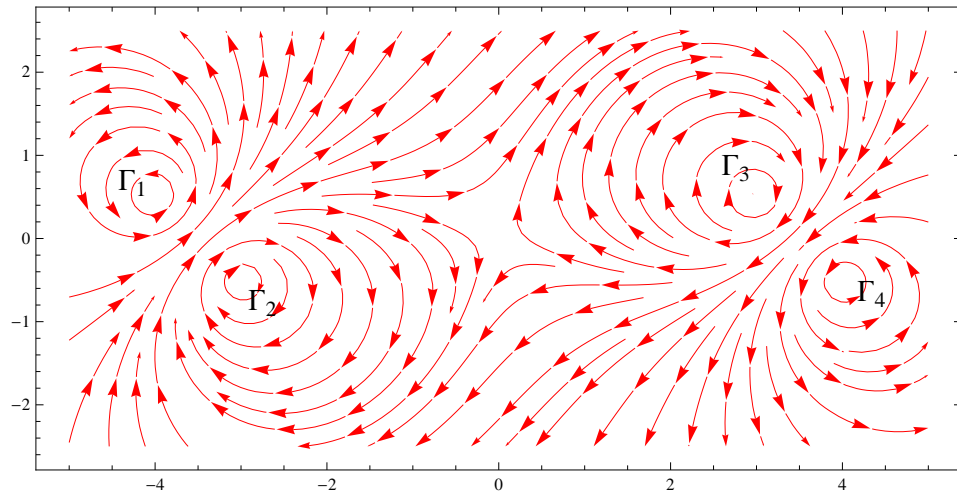


Abb. 3.1: Momentaufnahme des Geschwindigkeitsfeldes zweier Schwimmer bestehend aus den vier Punktwirbeln Γ_1 bis Γ_4 .

Ein System bestehend aus zwei Schwimmern a und b , die jeweils zwei Punktwirbel erzeugen (siehe Abb. 3.1), enthält insgesamt vier Punktwirbel. In diesem System zeichnen sich an späterer Stelle zwei Wirbelpaare durch den konstanten Abstand zwischen ihnen aus. Diese Bedingung muss explizit gefordert werden, da in einem System von vier Wirbeln chaotisches Verhalten möglich ist und so der Abstand zwischen zwei ausgezeichneten Wirbeln im Allgemeinen nicht konstant bleibt.

3.1 Die Bewegungsgleichungen zweier Schwimmer in zwei Dimensionen

Die Bewegungsgleichungen der einzelnen Wirbel können wir nach Gleichung (1.45) aufstellen. Wir erhalten:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_2 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} + \Gamma_3 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2} + \Gamma_4 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4|^2} \right] \quad (3.1a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_1 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} + \Gamma_3 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2} + \Gamma_4 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|^2} \right] \quad (3.1b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_1 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2} + \Gamma_2 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2} + \Gamma_4 \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|^2} \right] \quad (3.1c)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_1 \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4|^2} + \Gamma_2 \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4|^2} + \Gamma_3 \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4|^2} \right]. \quad (3.1d)$$

Diese Gleichungen werden zunächst auf die Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $\mathbf{D}_{a,b}$ und $\mathbf{d}_{a,b}$ der einzelnen Schwimmer umgeschrieben. Im Folgenden betrachten wir solche Fälle, in denen die Zirkulationen der vier Wirbel im Betrag übereinstimmen. Sie unterscheiden sich lediglich in ihrem Vorzeichen voneinander. Die Schwerpunkte sind daher stets durch $\mathbf{D}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ und $\mathbf{D}_b = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4)$ definiert. Mit den Schwerpunkten bezeichnen wir im Folgenden die Position des jeweiligen Schwimmers in der zweidimensionalen Ebene.

Die Relativkoordinaten erhält man zu $\mathbf{d}_a = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{d}_b = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4$. Sie geben den gerichteten Abstand zwischen den beiden Wirbeln an, die das Feld bilden, welches von einem Schwimmer erzeugt wird. Ihre zeitlichen Änderungen entsprechen der Richtung, in die der Schwimmer a bzw. der Schwimmer b sich zu einer gewissen Zeit t fortbewegen (siehe Abb. 3.2).

Drücken wir die Abstände zwischen solchen Wirbeln im Geschwindigkeitsfeld unterschiedlicher Schwimmer durch diese vier Größen aus, so erhalten wir:

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{D}_a - \mathbf{D}_b + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) = \mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4 = \mathbf{D}_a - \mathbf{D}_b + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) = \mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = \mathbf{D}_a - \mathbf{D}_b - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) = \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \quad (3.2c)$$

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4 = \mathbf{D}_a - \mathbf{D}_b - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) = \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b). \quad (3.2d)$$

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

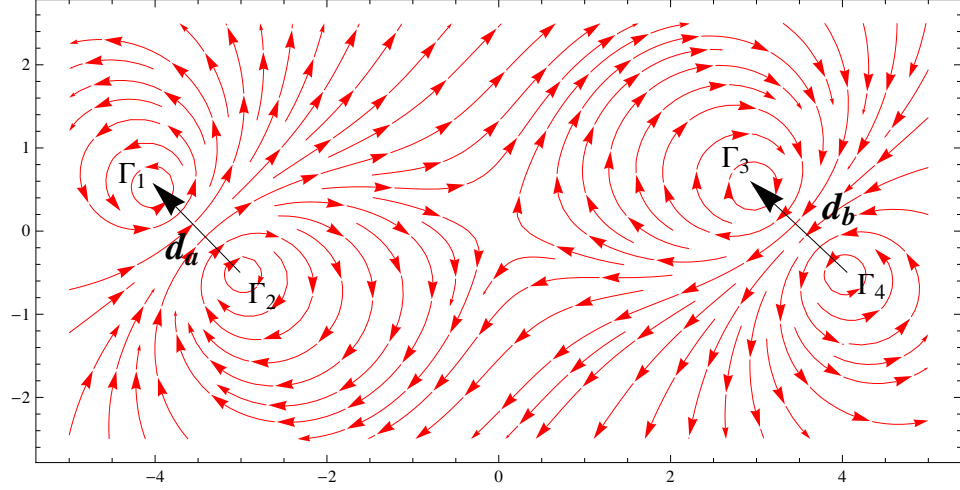


Abb. 3.2: Zur Definition der Achsen \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b , welche die Orientierung der Schwimmer im Raum wiedergeben.

Hier haben wir den Abstand $\mathbf{r} = \mathbf{D}_a - \mathbf{D}_b$ zwischen beiden Schwimmern als weiteren Parameter eingeführt. Als vierte Größe betrachten wir den Schwerpunkt des gesamten Systems \mathbf{R} , der sich zu $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_a + \mathbf{D}_b)$ ergibt. Dieser ist im Allgemeinen zwar zeitlich konstant, kann sich jedoch in solchen Fällen, in denen die Summe der Zirkulationen verschwindet, verändern (siehe Abb. 3.3).

Wir erhalten zunächst durch Einsetzen der Gleichungen (3.2) in (3.1):

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_2 \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \Gamma_3 \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} + \Gamma_4 \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right] \quad (3.3a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[-\Gamma_1 \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \Gamma_3 \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} + \Gamma_4 \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right] \quad (3.3b)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[\Gamma_4 \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} - \Gamma_1 \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} - \Gamma_2 \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right] \quad (3.3c)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \frac{1}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \left[-\Gamma_3 \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} - \Gamma_1 \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} - \Gamma_2 \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right]. \quad (3.3d)$$

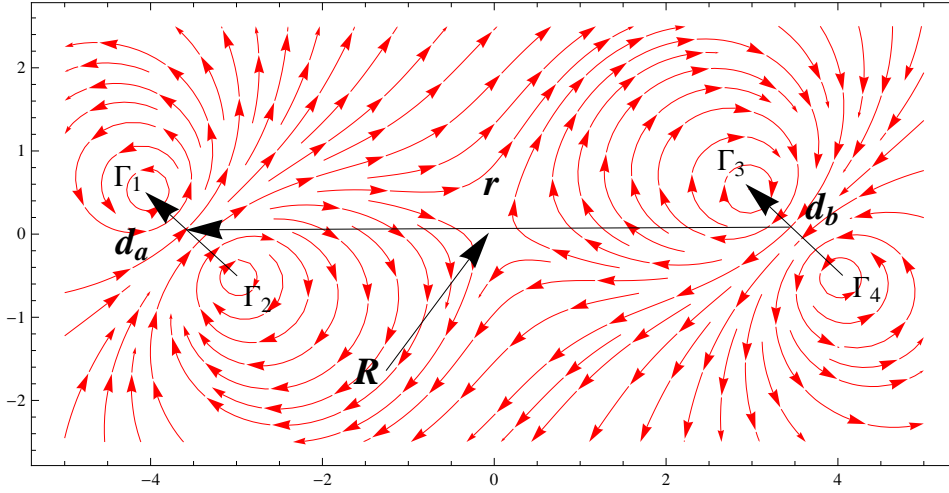


Abb. 3.3: Zur Definition des Abstandsvektors \mathbf{r} zwischen beiden Schwimmern und des Gesamtschwerpunkts \mathbf{R} der vier Punktwirbel.

3.1.1 Der Abstand zwischen beiden Schwimmern

Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen für \mathbf{r} , \mathbf{R} sowie für \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b aufgestellt. Starten wir mit dem Abstandsvektor \mathbf{r} zwischen beiden Schwimmern. Dessen zeitliche Änderung ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.3) zu:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{D}}_a - \dot{\mathbf{D}}_b = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_3 - \dot{\mathbf{x}}_4) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \Gamma_1 \mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \Gamma_2 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \Gamma_3 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \Gamma_4 \mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbei bezeichnet $d = |\mathbf{d}_a| = |\mathbf{d}_b|$ den Abstand zwischen zwei Wirbeln des Wirbelfeldes eines Schwimmers.

Es tauchen an dieser Stelle zum einen solche Terme auf, die lediglich von \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b abhängen. Diese beschreiben die Dynamik der einzelnen Schwimmer aufgrund ihrer eigenen vorantreibenden Bewegungen. Zum anderen gibt es hier Terme, die vom Abstandsvektor

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

\mathbf{r} abhängen. In diesen Termen tauchen zusätzlich Summen und Differenzen der Vektoren \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b auf. Über sie geht der Abstand zwischen den beiden Schwimmern, aber auch ihre räumliche Orientierung in die Bewegung ein. Sie sind gerade die Terme, durch die die Interaktion zwischen beiden Schwimmern beschrieben wird.

Unser Modell eines Schwimmers entspricht einem Dipol aus zwei Wirbeln der Stärke $\pm\Gamma$ im Abstand d . Die Reichweite des Geschwindigkeitsfeldes ist aufgrund des seines Abfallens mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \propto x^{-1}$ lang. An dieser Stelle ist interessant, wie die Schwimmer in einem Abstand r voneinander interagieren, der den Abstand zwischen den beiden Wirbeln des Feldes eines Schwimmers d deutlich übersteigt ($d \ll r$). Hierzu werden die Terme $|\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a \pm \mathbf{d}_b)|^{-2}$ bis zur ersten Ordnung in r entwickelt. Dies ergibt:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a \pm \mathbf{d}_b)|^2} = \frac{1}{r^2} \pm \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a \pm \mathbf{d}_b) \cdot \nabla \frac{1}{r^2}, \quad (3.5)$$

wobei der Gradient von r^{-2} sich zu $\nabla \frac{1}{r^2} = -2\frac{\mathbf{r}}{r^4}$ ergibt. Für die von \mathbf{r} abhängigen Terme ergibt sich:

$$\frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \quad (3.6a)$$

$$\frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \quad (3.6b)$$

$$\frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \quad (3.6c)$$

$$\frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b). \quad (3.6d)$$

3.1 Die Bewegungsgleichungen zweier Schwimmer in zwei Dimensionen

In Gleichung (3.4) eingesetzt, ergibt sich hiermit:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} = & \frac{1}{4\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
& \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right).
\end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} = & \frac{1}{4\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{d}_a}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_b}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
& + \frac{1}{4\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{d}_b}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right)
\end{aligned}$$

und man erhält, wenn Terme in dieser Gleichung zu Summen $\Gamma_1 \pm \Gamma_2$ und $\Gamma_3 \pm \Gamma_4$

zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}} = & \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{d}_a - 2 \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{d}_b - 2 \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1.2 Die Achsen der Schwimmer

Mit den Gleichungen (3.3) ergibt sich für die zeitliche Änderung der Achsen \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b , die angeben, wie der jeweilige Schwimmer im Raum orientiert ist:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_a = & \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 \\
 = & \frac{1}{2\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} - \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} - \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_b = & \dot{\mathbf{x}}_3 - \dot{\mathbf{x}}_4 \\
 = & \frac{1}{2\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} - \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} - \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Auch diese Gleichungen werden für große Abstände $r \gg d$ entwickelt. Mit den Aus-

3.1 Die Bewegungsgleichungen zweier Schwimmer in zwei Dimensionen

drücken (3.6) erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_a = & \frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_2 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_3 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_4 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_b = & \frac{1}{2\pi} \Gamma_3 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_4 \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_1 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right) \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi} \Gamma_2 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Diese vereinfachen sich wiederum zu:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_a &= \frac{1}{2\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_b &= \frac{1}{2\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_b}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right).\end{aligned}$$

Auch diese Gleichungen werden zu Summen und Differenzen $\Gamma_1 \pm \Gamma_2$ und $\Gamma_3 \pm \Gamma_4$ umgeschrieben. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_a &= \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\ &+ \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{1}{r^2}\mathbf{d}_a - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} \right)\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}_b &= -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{1}{r^2}\mathbf{d}_b - 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2}\end{aligned}\tag{3.11}$$

3.1.3 Der Gesamtschwerpunkt

Als letzte Größe spielt der Gesamtschwerpunkt \mathbf{R} eine Rolle. Für dessen zeitliche Änderung erhält man mit den Gleichungen (3.3):

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{D}}_a + \dot{\mathbf{D}}_b) = \frac{1}{4}(\dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 + \dot{\mathbf{x}}_3 + \dot{\mathbf{x}}_4) \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_z \times \Gamma_1 \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_z \times \Gamma_2 \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_z \times \Gamma_3 \left(-\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} \mathbf{e}_z \times \Gamma_4 \left(\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b)|^2} + \frac{\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b)|^2} \right). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Mit der, wie für die übrigen Größen, durchgeführten Multipolentwicklung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}} &= -\frac{1}{8\pi} \Gamma_1 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{8\pi} \Gamma_2 \mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} \Gamma_3 \mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} \Gamma_4 \mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b}{r^2} - \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b}{r^2} + \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b) \right).
 \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}} = & -\frac{1}{8\pi}\Gamma_1\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{d}_a}{r^2} - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
 & -\frac{1}{8\pi}\Gamma_2\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_a}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
 & +\frac{1}{8\pi}\Gamma_3\mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_b}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
 & +\frac{1}{8\pi}\Gamma_4\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_b}{d^2} + 2\frac{\mathbf{r}}{r^2} + \frac{\mathbf{d}_b}{r^2} + 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right).
 \end{aligned}$$

Auch hier werden die auftretenden Terme zu Summen bzw. Differenzen von $\Gamma_1 \pm \Gamma_2$ und $\Gamma_3 \pm \Gamma_4$ zusammengefasst. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}} = & -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{d}_a - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} \right) \\
 & -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right) \\
 & -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{d}_b - 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{r} \right) \\
 & +\frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4}\mathbf{d}_b \right).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

3.2 Berechnung des Drehimpulses

Im ersten Kapitel wurde der Drehimpuls l als eine Erhaltungsgröße eines Systems aus n Punktwirbeln identifiziert. Diese Eigenschaft wird im Folgenden ausgenutzt, um die im letzten Abschnitt aufgestellten Bewegungsgleichungen zu lösen. Schreiben wir Gleichung (1.48) für vier Punktwirbel aus, so ergibt sich:

$$l = \Gamma_1 \mathbf{x}_1^2 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2^2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_3^2 + \Gamma_4 \mathbf{x}_4^2. \tag{3.14}$$

Diese Gleichung wird in Abhängigkeit des Abstandsvektors \mathbf{r} , des Gesamtschwerpunkts

\mathbf{R} sowie der Achsen \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b der jeweiligen Schwimmer geschrieben:

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{1}{2}(\Gamma_1 \mathbf{x}_1^2 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2^2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_3^2 + \Gamma_4 \mathbf{x}_4^2) \\
 &= -\frac{1}{2}(\Gamma_1(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_a)^2 + \Gamma_2(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}_a)^2 \\
 &\quad + \Gamma_3(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_b)^2 + \Gamma_4(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}_b)^2).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Die Klammern werden ausmultipliziert und in der Gleichung wird nach Summen von $\Gamma_1 \pm \Gamma_2$ sowie $\Gamma_3 \pm \Gamma_4$ umsortiert:

$$\begin{aligned}
 l &= -\frac{1}{2}((\Gamma_1 - \Gamma_2)(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a + (\Gamma_1 + \Gamma_2)((\mathbf{R} + \frac{1}{2}\mathbf{r})^2 + \frac{1}{4}\mathbf{d}_a^2) \\
 &\quad + (\Gamma_3 - \Gamma_4)(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b + (\Gamma_3 + \Gamma_4)((\mathbf{R} - \frac{1}{2}\mathbf{r})^2 + \frac{1}{4}\mathbf{d}_b^2)).
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.3 Zwangsbedingungen und Wahl der Koordinaten

Im letzten Abschnitt wurden die Bewegungsgleichungen aufgestellt, die benötigt werden, um die Interaktion zwischen zwei Schwimmern zu untersuchen. Fassen wir sie an dieser Stellen noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{R}} &= -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{d}_a - 2\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 &\quad -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right) \\
 &\quad -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{r^2} \right) \mathbf{d}_b - 2\frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 &\quad +\frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(2\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right)
 \end{aligned} \tag{3.17a}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{r}} = & \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{d}_a - 2 \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) \mathbf{d}_b - 2 \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b \right).
 \end{aligned} \tag{3.17b}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_a = & \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_a}{d^2} \\
 & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{d}_a - 2 \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right)
 \end{aligned} \tag{3.17c}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_b = & -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{d}_a \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2)\mathbf{e}_z \times \left(\frac{1}{r^2} \mathbf{d}_b - 2 \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{d}_b}{d^2}.
 \end{aligned} \tag{3.17d}$$

Bis zu dieser Stelle wurde nicht berücksichtigt, dass das Geschwindigkeitsfeld, das ein Bakterium erzeugt, stationär ist, die beiden Wirbel, die es erzeugt, sich also nicht von ihm ablösen und frei im Raum bewegen. Sie bleiben stets in der Umgebung des Bakteriums. Dies soll durch die Forderung realisiert werden, dass der Abstand d zwischen zwei Wirbeln des Feldes eines Schwimmers, also zwischen Γ_1 und Γ_2 sowie Γ_3 und Γ_4 , zeitlich konstant bleibt. Es gilt dann:

$$\dot{d} = 0. \tag{3.18}$$

Wir betrachten, wenn wir die Bahnkurven der zwei Schwimmer aufgrund ihrer hydrodynamischen Interaktionen beschreiben, ein System aus vier Punktwirbeln, von denen nun jeweils zwei aneinander gekoppelt sind. Ein solches System weist fünf Freiheitsgra-

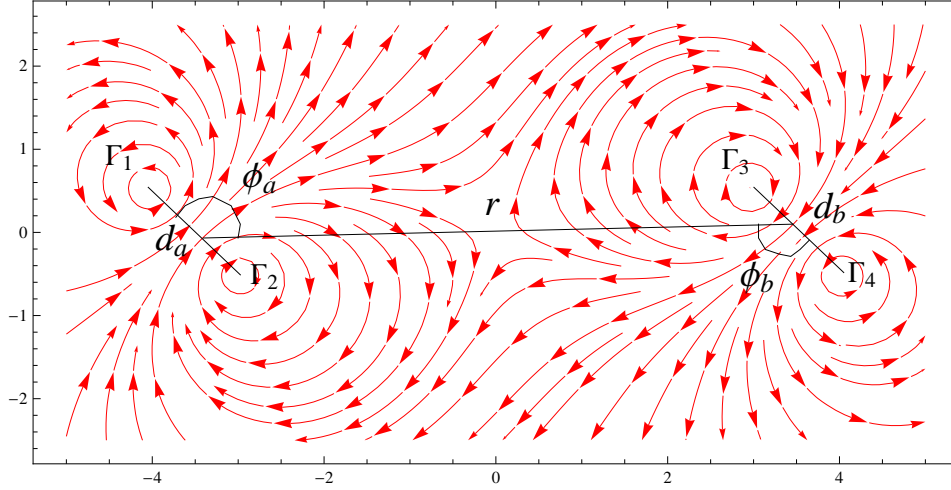


Abb. 3.4: Zur Definition der Winkel ϕ_a und ϕ_b . Die Strecken $d_a = d_b = d$ sind die Abstände zwischen den Wirbeln des Paares a und b . Sie werden im Folgenden konstant gehalten.

de auf. Dies sind zwei Freiheitsgrade für die Schwerpunktbewegung, die wir angeben in einer zur Abstandslinie \mathbf{r} senkrechten und einer parallelen Komponente. Hinzu kommt der Abstand r zwischen den beiden Schwimmern und zwei Winkel ϕ_a und ϕ_b , die die räumliche Orientierung der Schwimmer wiedergeben. Dies seien jene Winkel, die von den Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{d}_a bzw. \mathbf{d}_b umschlossen werden. Diesen fünf Parametern stehen zwei Erhaltungsgrößen e_{kin} und \mathbf{l} sowie zweimal die Bedingung $\dot{d} = 0$ gegenüber. Es ist daher nur in bestimmten Spezialfällen lösbar. Diese sollen im Folgenden untersucht werden.

Die Winkel ϕ_a und ϕ_b sind definiert über das Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b mit dem Vektor \mathbf{r} :

$$\mathbf{d}_{a,b} \cdot \mathbf{r} = dr \cos \phi_{a,b}. \quad (3.19)$$

Im weiteren Verlauf benötigen wir zusätzlich das Skalarprodukt zwischen den Vektoren \mathbf{d}_a und \mathbf{d}_b mit dem zu \mathbf{r} senkrecht stehenden Vektor $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$. Es gilt:

$$(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_{a,b} = dr \sin \phi_{a,b}. \quad (3.20)$$

Die zeitliche Änderung der oben genannten Variablen ϕ_a, ϕ_b und r sollen hier bestimmt werden. Dazu leitet man diese Skalarprodukte nach der Zeit ab. Es ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{d}_{a,b} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{d}}_{a,b} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{d}_{a,b} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}d \cos \phi_{a,b} + \underbrace{\dot{d}r \cos \phi_{a,b}}_{=0} - r d \dot{\phi}_{a,b} \sin \phi_{a,b}. \quad (3.21)$$

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

Es gilt nach Voraussetzung $\dot{d} = 0$. Durch Umstellen dieser Gleichung nach $\dot{\phi}_{a,b}$ erhält man:

$$\dot{\phi}_{a,b} = \frac{\dot{r} \cos \phi_{a,b}}{r \sin \phi_{a,b}} - \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{d}}_{a,b} + \mathbf{d}_{a,b} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{rd \sin \phi_{a,b}}. \quad (3.22)$$

Die zeitliche Änderung des Abstands \dot{r} ergibt sich aus der Projektion des Vektors $\dot{\mathbf{r}}$ aus Gleichung (3.17b) auf den Vektor \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} r\dot{r} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = & -\frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_a \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_a + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_b \right) \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_b \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_a + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \mathbf{d}_b \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Hier wurde die Eigenschaft des Spatprodukts $(\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_{a,b}) \cdot \mathbf{r} = -(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_{a,b}$ ausgenutzt. Mit den Gleichungen (3.19) und (3.20) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{r} = & -\frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) d \sin \phi_a \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_a + \cos \phi_b \sin \phi_b) \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) d \sin \phi_b \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_a + \cos \phi_b \sin \phi_b). \end{aligned} \quad (3.24)$$

In Gleichung (3.22) tauchen die Skalarprodukte $\dot{\mathbf{d}}_{a,b} \cdot \mathbf{r}$ und $\mathbf{d}_{a,b} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ auf. Diese berechnen sich aus den Gleichungen (3.17). Man erhält zunächst für die Produkte $\mathbf{d}_{a,b} \cdot \dot{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_a \cdot \dot{\mathbf{r}} = & -\frac{2}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{2}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{d}_a \right) \\ & - \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{d}_a - 2 \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \right) \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(\frac{2}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a - \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_b) \cdot \mathbf{d}_a \right) \end{aligned} \quad (3.25a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_b \cdot \dot{\mathbf{r}} = & \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{d^2} \right) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b - 2 \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b \right) \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(2 \frac{2}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b \right) \\ & + \frac{2}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b \\ & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(2 \frac{2}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b - \frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b \right). \end{aligned} \quad (3.25b)$$

Für die Produkte $\dot{\mathbf{d}}_{a,b} \cdot \mathbf{r}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_a \cdot \mathbf{r} = & -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{1}{d^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \\ & - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \right) \\ & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{1}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \end{aligned} \quad (3.25c)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_b \cdot \mathbf{r} = & \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{\mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b + \frac{\mathbf{d}_b \cdot \mathbf{r}}{r^4} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \right) \\ & - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{1}{r^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b \\ & - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{1}{d^2} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b. \end{aligned} \quad (3.25d)$$

Die Terme $(\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b = -(\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b$ werden auf die Vektoren \mathbf{r} und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ projiziert.

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{d}_b &= \frac{1}{r^2} ((\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_b + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{d}_a) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b) \\
 &= \frac{1}{r^2} (-(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_a \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_a \cdot \mathbf{r} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}_b) \\
 &= -d^2 \sin \phi_a \cos \phi_b + d^2 \cos \phi_a \sin \phi_b,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

wobei in der letzten Zeile die Gleichungen (3.19) und (3.20) ausgenutzt wurden. Verwenden wir diese Gleichungen in (3.25), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_a \cdot \dot{\mathbf{r}} &= -\frac{2}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \frac{d^2}{r^2} d \cos \phi_a \sin \phi_a \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(2\frac{d}{r} \sin \phi_a - \frac{d^3}{r^3} \cos \phi_b (\sin \phi_a \cos \phi_b - \cos \phi_a \sin \phi_b) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\left(\frac{d^2}{r^2} - 1 \right) (\sin \phi_a \cos \phi_b - \cos \phi_a \sin \phi_b) - 2\frac{d^2}{r^2} \cos \phi_b \sin \phi_a \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(2\frac{d}{r} \sin \phi_a - \frac{d^3}{r^3} \cos \phi_b (\sin \phi_a \cos \phi_b - \cos \phi_a \sin \phi_b) \right)
 \end{aligned} \tag{3.27a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_b \cdot \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\left(\frac{d^2}{r^2} - 1 \right) (\cos \phi_a \sin \phi_b - \sin \phi_a \cos \phi_b) - 2\frac{d^2}{r^2} \cos \phi_a \sin \phi_b \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(2\frac{d}{r} \sin \phi_b - \frac{d^3}{r^3} d^2 \cos \phi_a (\cos \phi_a \sin \phi_b - \sin \phi_a \cos \phi_b) \right) \\
 &\quad + \frac{2}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \frac{d^2}{r^2} \cos \phi_b \sin \phi_b \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(2\frac{d}{r} \sin \phi_b - \frac{d^3}{r^3} \cos \phi_a (\cos \phi_a \sin \phi_b - \sin \phi_a \cos \phi_b) \right)
 \end{aligned} \tag{3.27b}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_a \cdot \mathbf{r} &= -\frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{r}{d} \sin \phi_a \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \frac{d^2}{r^2} (\cos \phi_a \sin \phi_b + \cos \phi_b \sin \phi_a) \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{d}{r} \sin \phi_a
 \end{aligned} \tag{3.27c}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{d}}_b \cdot \mathbf{r} = & \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{d^2}{r^2}(\cos \phi_a \sin \phi_b + \cos \phi_b \sin \phi_a) \right. \\
 & - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{d}{r} \sin \phi_b \\
 & \left. - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{r}{d} \sin \phi_b. \right.
 \end{aligned} \tag{3.27d}$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann nun die zeitliche Änderung der Winkel ϕ_a und ϕ_b bestimmt werden. Es ergibt sich durch Einsetzen der soeben bestimmten Ausdrücke in Gleichung (3.22) für $\dot{\phi}_a$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_a = & \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{d}{r^3} + \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_a \\
 & + \frac{2}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{d^2}{r^4}(\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_b + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \frac{d \sin \phi_b}{r^3 \sin \phi_a} \cos \phi_a \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{d^2}{r^4}(\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Entsprechend erhalten wir die zeitliche Änderung des Winkels ϕ_b :

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_b = & -\frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_a - \frac{1}{2\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \frac{d \sin \phi_a}{r^3 \sin \phi_b} \cos \phi_b \\
 & + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{d^2}{r^4}(\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \\
 & - \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{d}{r^3} + \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_b \\
 & + \frac{1}{2\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{4\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \frac{d^2}{r^4}(\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Die Änderung des Schwerpunkts $\dot{\mathbf{R}}$ wird auf die Vektoren \mathbf{r} bzw. $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$ projiziert. So ergeben sich die Komponenten, die zur Änderung dieser Größe parallel bzw. senkrecht

zur Abstandslinie beitragen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\dot{R}_{\parallel} = & \frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right) \sin \phi_a \\ & - \frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(\frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_a + \cos \phi_b \sin \phi_b) \right) \\ & + \frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right) \sin \phi_b \\ & + \frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(\frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_a + \cos \phi_b \sin \phi_b) \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}\dot{R}^{\perp} = & -\frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 - \Gamma_2) \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{r^2} \right) \cos \phi_a \\ & - \frac{1}{8\pi}(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left(2\frac{1}{r} - \frac{d^2}{r^3} (\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \right) \\ & - \frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 - \Gamma_4) \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{r^2} \right) \cos \phi_b \\ & + \frac{1}{8\pi}(\Gamma_3 + \Gamma_4) \left(2\frac{1}{r} - \frac{d^2}{r^3} (\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \right).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Die Gleichungen (3.28), (3.29), (3.30) und (3.31) zusammen mit Gleichung (3.24) bilden den vollständigen Satz an Differentialgleichungen, welche die Interaktion zwischen zwei Schwimmern beschreiben. Im Folgenden wollen wir sie für einige Spezialfälle lösen.

3.4 Zwei translierende Wirbelpaare

Zunächst wird die Interaktion zwischen zwei Schwimmern untersucht, die eine Translationsbewegung durchführen. Dies geschieht, wenn die Wirbelstärken im Felde eines Schwimmers sich in ihrem Vorzeichen unterscheiden. Für diese wird in die Bewegungsgleichungen $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_3 = -\Gamma_4 = \Gamma$ eingesetzt. Das ergibt den folgenden Satz an Gleichungen:

$$\dot{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^2} - \frac{1}{d} \right) (\sin \phi_a - \sin \phi_b) \quad (3.32)$$

$$\dot{\phi}_a = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} + \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_a + \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_b + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d}{r^3} \frac{\sin \phi_b}{\sin \phi_a} \cos \phi_a \quad (3.33)$$

$$\dot{\phi}_b = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_a - \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} + \frac{1}{dr} \right) \cos \phi_b - \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d}{r^3} \frac{\sin \phi_a}{\sin \phi_b} \cos \phi_b. \quad (3.34)$$

Für die Bewegung des Schwerpunkts ergibt sich:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right) \sin \phi_a + \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right) \sin \phi_b \quad (3.35)$$

$$\dot{R}^{\perp} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{r^2} \right) \cos \phi_a - \frac{\Gamma}{4\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{r^2} \right) \cos \phi_b. \quad (3.36)$$

Diese fünf Differentialgleichungen werden im Folgenden für einige Spezialfälle gelöst.

3.4.1 Frontale Kollision

Den einfachsten Fall erhält man mit den Anfangsbedingungen $\phi_{b0} = \frac{\pi}{2} = -\phi_{a0}$. Dies entspricht einer Bewegung der Schwimmer direkt auf einander zu. Beide Winkel sowie der Gesamtschwerpunkt ändern sich zeitlich nicht, so dass sich lediglich eine Bewegungsgleichung für die zeitliche Änderung des Abstandes r ergibt. Diese lautet:

$$\dot{r} = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{d}{r^2} - \frac{1}{d} \right). \quad (3.37)$$

Diese Gleichung lässt sich durch Trennung der Variablen zwar aufintegrieren, so dass wir eine Funktion $t(r)$ erhalten. Diese lautet:

$$t(r) = \frac{\pi d}{\Gamma} \left(d \tanh^{-1} \frac{r}{d} - r \right) + C. \quad (3.38)$$

Diese Funktion lässt sich aber nicht ohne weiteres zu einer Funktion des Abstands $r(t)$ von der Zeit invertieren. Die Konstante C wird hierbei durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Durch Einsetzen von Werten $r > d$ erkennt man, dass die Schwimmer sich annähern, da dann $\frac{d}{r^2} < \frac{1}{d}$, also $\dot{r} < 0$. Für $r = d$ gilt $\dot{r} = 0$. Durch eine numerische Integration von Gleichung (3.37) ergeben sich die in Abb. 3.5 aufgetragenen Kurven. Man sieht deutlich zum einen, dass für $r = d$ der Abstand zwischen beiden Schwimmern konstant bleibt. Zum anderen erkennen wir, dass für die Startwerte $r > d$ beide Schwimmer sich bis auf $r = d$ annähern.

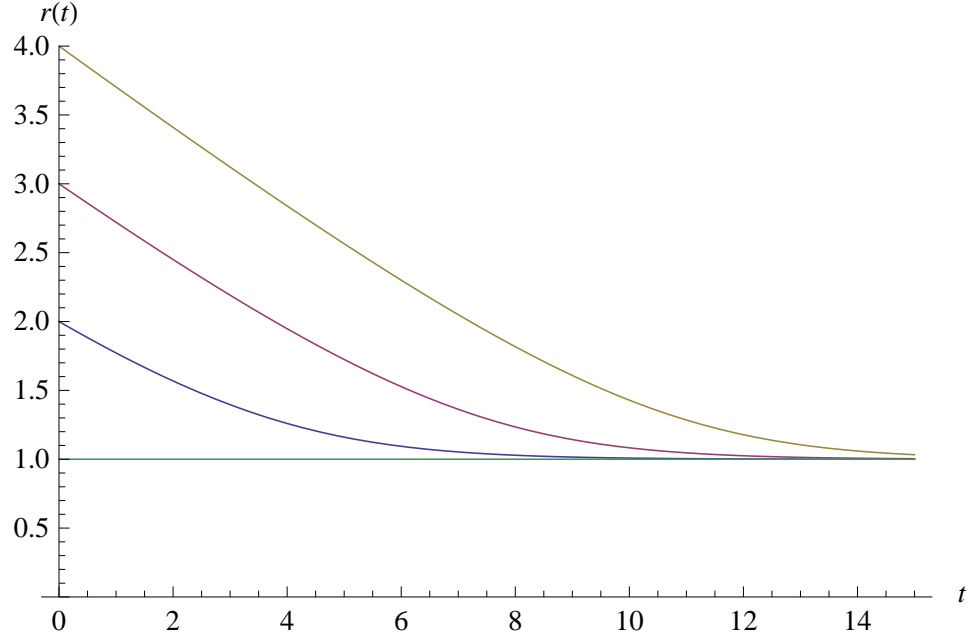


Abb. 3.5: Der Abstand r im Verlauf der Zeit für zwei sich frontal aufeinander zu bewegendes Schwimmer. Die Werte für Γ und d wurden auf 1 festgelegt. Die Kurven repräsentieren den zeitliche Verlauf für Startwerte von $r = 4, 3, 2, 1$. Die beiden Schwimmer nähern sich bis auf eine Distanz von d an und bleiben dann stehen.

3.4.2 Zwei Wirbelpaare folgen einander

Sind die Anfangsbedingung $\phi_{a0} = \phi_{b0} = \frac{\pi}{2}$, so wird der Fall konstruiert, in dem ein Schwimmer dem anderen folgt. Aus den Bewegungsgleichungen für die Winkel ϕ_a und ϕ_b (Gleichungen (3.33) und (3.34)) sowie für den Abstand (3.32) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\phi}_a, b &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso verschwindet die Änderung der Schwerpunktsbewegung R_{\parallel} senkrecht zur Verbindungslinie zwischen beiden Schwimmern in diesem Fall und es ändert sich als einzige Größe:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right). \quad (3.39)$$

In dieser Gleichung tauchen nur Konstanten auf. Die Geschwindigkeit $v_{kol} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right)$ ist diejenige, mit der die beiden Schwimmer sich parallel zu ihrer Verbindungslinie fortbewegen. Abb. 3.6 zeigt diese Situation. Die Geschwindigkeit, mit der jeder einzelne

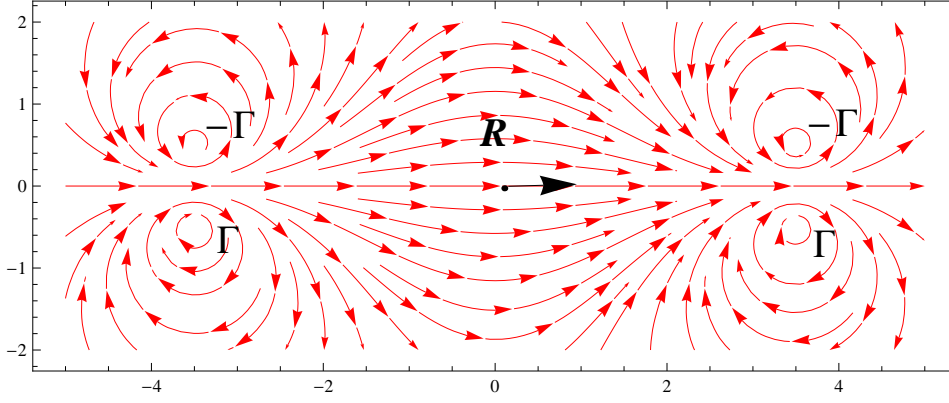


Abb. 3.6: Ein Schwimmer folgt dem anderen. Beide schwimmen mit der Geschwindigkeit $v = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right)$. Die Bewegung verläuft parallel zu ihrer Verbindungsline.

Schwimmer sich ohne die Interaktion mit dem anderen fortbewegt, beträgt $v_s = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{d}$. Da sowohl d als auch r positive, reelle Zahlen sind, ist die kollektive Geschwindigkeit, mit der ein Schwimmer sich aufgrund der hydrodynamischen Wechselwirkung fortbewegt, größer, als die Geschwindigkeit mit der jedes einzelne Bakterium sich ohne Interaktion mit anderen Schwimmern fortbewegt.

3.4.3 Ein Ablenkungsprozessprozess

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt mit Hilfe der Beziehungen $\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$ und $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ umgeschrieben:

$$\dot{R}_{\parallel} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{d}{r^2} \right) \cos \frac{\phi_a - \phi_b}{2} \sin \frac{\phi_a + \phi_b}{2} \quad (3.40)$$

$$\dot{R}^{\perp} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{d}{r^2} \right) \cos \frac{\phi_a - \phi_b}{2} \cos \frac{\phi_a + \phi_b}{2}. \quad (3.41)$$

Beide Komponenten ändern sich zeitlich nicht, wenn die Winkel ϕ_a und ϕ_b sich um eine Phase von π voneinander unterscheiden. Dies sei im Folgenden die Anfangsbedingung:

$$\phi_{b0} = \phi_{a0} - \pi. \quad (3.42)$$

In den Gleichungen (3.33) und (3.34) ergibt sich dann für die Quotienten $\sin \phi_a / \sin \phi_b = \sin \phi_b / \sin \phi_a = -1$. Es ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen für die Winkel ϕ_a

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

und ϕ_b :

$$\dot{\phi}_a = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) (\cos \phi_a - \cos \phi_b) \quad (3.43)$$

$$\dot{\phi}_b = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) (\cos \phi_a - \cos \phi_b). \quad (3.44)$$

Ziehen wir beide Gleichungen voneinander ab, so ergibt sich:

$$\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = 0. \quad (3.45)$$

Ihre Orientierung zueinander ändert sich im Verlauf der Zeit nicht. Addiert man die beiden Bewegungsgleichungen, so erhält man die zeitliche Änderung des Winkels $\theta = \phi_a + \phi_b$, der angibt, wie stark die Schwimmer sich gegenseitig ablenken. Es gilt:

$$\dot{\theta} = -\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) (\cos \phi_a - \cos \phi_b). \quad (3.46)$$

Zusätzlich zu dieser Gleichung betrachten wir die zeitliche Änderung des Abstands zwischen beiden Schwimmern:

$$\dot{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{d}{r^2} - \frac{1}{d} \right) (\sin \phi_a - \sin \phi_b). \quad (3.47)$$

Beide Gleichungen werden mit den Relationen $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$ und $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$ umgeformt. Dies ergibt unter Verwendung der Bedingung $\phi_a - \phi_b = \pi$:

$$\dot{r} = -\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{d}{r^2} - \frac{1}{d} \right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.48)$$

$$\dot{\theta} = 2\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{d}{r^3} - \frac{1}{dr} \right) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3.49)$$

Um nun den Abstand $r(\theta)$ der Schwimmer in Abhängigkeit des Winkels θ zu erhalten, wird die Kettenregel angewandt. Man erhält für das Differential dr :

$$dr = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} d\theta.$$

Hiermit ergibt sich:

$$dr = -\frac{r}{2} \cot \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Nach einer Trennung der Variablen ergibt sich:

$$\frac{dr}{r} = -\frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Integrieren wir nun beide Seiten, so erhalten wir:

$$\ln r = -\ln \sin \frac{\theta}{2} + \ln C.$$

C stellt eine Integrationskonstante dar, die noch zu bestimmen ist. Der Ausdruck vereinfacht sich zu:

$$r = \frac{C}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (3.50)$$

Die Integrationskonstante wird mit Hilfe des Drehimpulses bestimmt. Aus Gleichung (3.16) ergibt sich unter Verwendung von $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_3 = -\Gamma_4 = \Gamma$:

$$l = -\Gamma \mathbf{R} \cdot (\mathbf{d}_a + \mathbf{d}_b) - \frac{\Gamma}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b). \quad (3.51)$$

Der Schwerpunkt ist im hier betrachteten Fall eine Erhaltungsgröße. Er kann als Ursprung eines Koordinatensystems gewählt werden, in dem die Bewegung der beiden Schwimmer beschrieben wird. Wir legen $\mathbf{R} = 0$ fest und erhalten:

$$l = -\frac{\Gamma}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d}_a - \mathbf{d}_b). \quad (3.52)$$

Mit den Definitionen der Winkel ϕ_a und ϕ_b durch die hier auftretenden Skalarprodukte (3.19) und wiederum mit $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$ ergibt sich unter Beachtung der Anfangsbedingung und $\theta = \phi_a + \phi_b$:

$$l = \Gamma r d \sin \frac{\theta}{2}. \quad (3.53)$$

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

Die Integrationskonstante aus Gleichung (3.50) schreibt sich dann

$$C = \frac{l}{\Gamma d} \quad (3.54)$$

und der Abstand r zwischen beiden Schwimmern in Abhängigkeit des Ablenkungswinkels θ ergibt sich zu

$$r(\theta) = \frac{l}{\Gamma d} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}. \quad (3.55)$$

In Abb. 3.7 ist der Abstand zwischen beiden Schwimmern für verschiedene Werte des Drehimpulses l aufgetragen. Die Schwimmer nähern sich bis auf einen Mindestabstand von $r_{min} = \frac{l}{\Gamma d}$, wobei sich jeder von ihnen im Raum dreht, ohne dass sich dabei ihre Orientierung zueinander verändert. Die Stärke dieser Drehung hängt davon ab, wie weit beide Schwimmer voneinander entfernt sind. Der Mindestabstand wird für den Winkel $\theta = \pi/2$ angenommen. Die beiden Schwimmer bewegen sich aneinander vorbei und entfernen sich wieder voneinander. Diese Bewegung ist vergleichbar mit dem Stoß zweier Massepunkte in der klassischen Mechanik, in der bei einem Stoß ein Massepunkt gegenüber dem anderen ebenfalls um einen Streuwinkel θ , allerdings in Abhängigkeit vom Impuls \mathbf{p} , abgelenkt wird.

Nun betrachten wir den Fall der Interaktion zwischen zwei Schwimmern, deren Abstand $r \gg d$ größer als der Abstand zwischen den Wirbeln ist, die das Feld eines Schwimmers bilden. Die Schwimmer bewegen sich aneinander vorbei, ohne dass die Felder, welche sie erzeugen, sich durcheinander hindurch bewegen. Der Mindestabstand r_{min} unterschreitet den Abstand d in keinem Fall. Für den Drehimpuls bedeutet dies:

$$l > \Gamma d^2. \quad (3.56)$$

Dies hat unmittelbar Einfluss auf die Wahl der Anfangsbedingungen. Zum einen wählen wir $r_o > d$. Zum anderen gilt für den Anfangswert des Ablenkungswinkels θ_0 :

$$\theta_0 > \sin^{-1} \frac{l_{min}}{\Gamma d r_o} = \sin^{-1} \frac{d}{r_o}. \quad (3.57)$$

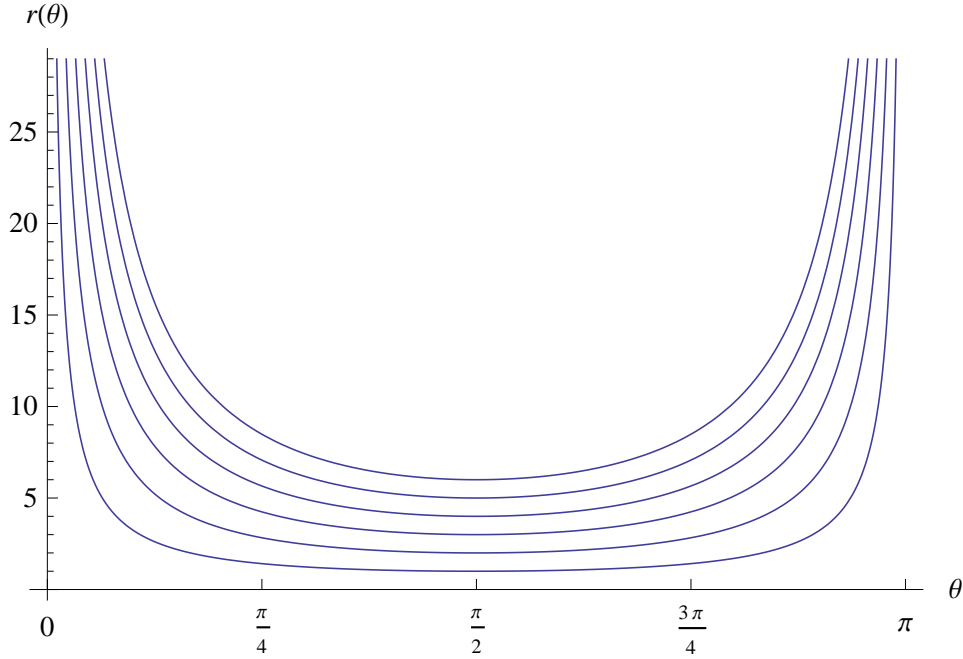


Abb. 3.7: Der Abstand r aufgetragen in Abhängigkeit des Winkels θ für Werte von $\Gamma = 1$ und $d = 1$. Für den Drehimpuls sind die Werte $l = 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 gewählt.

3.5 Interaktion zwischen zwei rotierenden Wirbelpaaren

Die Interaktion zwischen zwei rotierenden Wirbelpaaren enthält zwei Fälle. Die beiden Paare können sich in die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung drehen. Es ergeben sich zwei unterschiedliche Sätze von Bewegungsgleichungen, die man erhält, wenn man $\Gamma_i = \Gamma$ für jeden der vier Wirbel bzw. $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_3 = \Gamma_4$ in die Gleichungen (3.28), (3.29), (3.30) und (3.31) und (3.24) einsetzt.

3.5.1 Rotation in gleicher Richtung

Entsprechen sich die Wirbelstärken der vier Wirbel ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_3 = \Gamma_4 = \Gamma$), so drehen sich die zwei Wirbelpaare in die gleiche Richtung. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu:

$$\dot{r} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_a + \cos \phi_b \sin \phi_b) \quad (3.58)$$

$$\dot{\phi}_a = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^4} (\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \quad (3.59)$$

3 Hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Schwimmern

$$\dot{\phi}_b = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^4} (\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b). \quad (3.60)$$

Die zeitliche Änderung des Schwerpunktes verschwindet in diesem Fall:

$$\dot{\mathbf{R}} = 0. \quad (3.61)$$

Die Gleichungen (3.58) bis (3.60) werden mit den Identitäten $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ und $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ sowie $\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$ und $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ umgeformt zu den Bewegungsgleichungen für den Abstand r .

$$\dot{r} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^3} \cos(\phi_a - \phi_b) \sin(\phi_a + \phi_b) \quad (3.62)$$

und die beiden Winkel ϕ_a und ϕ_b :

$$\dot{\phi}_{a,b} = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{d^2}{r^4} \right) + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^4} \cos(\phi_a - \phi_b) \cos(\phi_a + \phi_b). \quad (3.63)$$

Mit der Definition des Winkels $\alpha = \phi_a - \phi_b$, der wiederum die Orientierung der beiden Schwimmer zueinander misst, und des Winkels $\theta = \phi_a + \phi_b$, der eine Drehung des gesamten Systems misst, erhalten wir als vollständigen Satz an Bewegungsgleichungen:

$$\dot{r} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^3} \cos \alpha \sin \theta \quad (3.64)$$

$$\dot{\alpha} = 0 \quad (3.65)$$

$$\dot{\theta} = 2 \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} + 2 \frac{d^2}{r^4} \right) + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{d^2}{r^4} \cos \alpha \cos \theta. \quad (3.66)$$

Diese Gleichungen sind lösbar für den Fall, dass der konstante Winkel $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ beträgt. Abb. 3.8 zeigt die Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes für diese Konfiguration. Die übrigen beiden Bewegungsgleichungen für den Abstand r und den Winkel θ ergeben dann:

$$\dot{r} = 0 \quad (3.67)$$

$$\dot{\theta} = 2 \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{d^2}{r^4} \right). \quad (3.68)$$

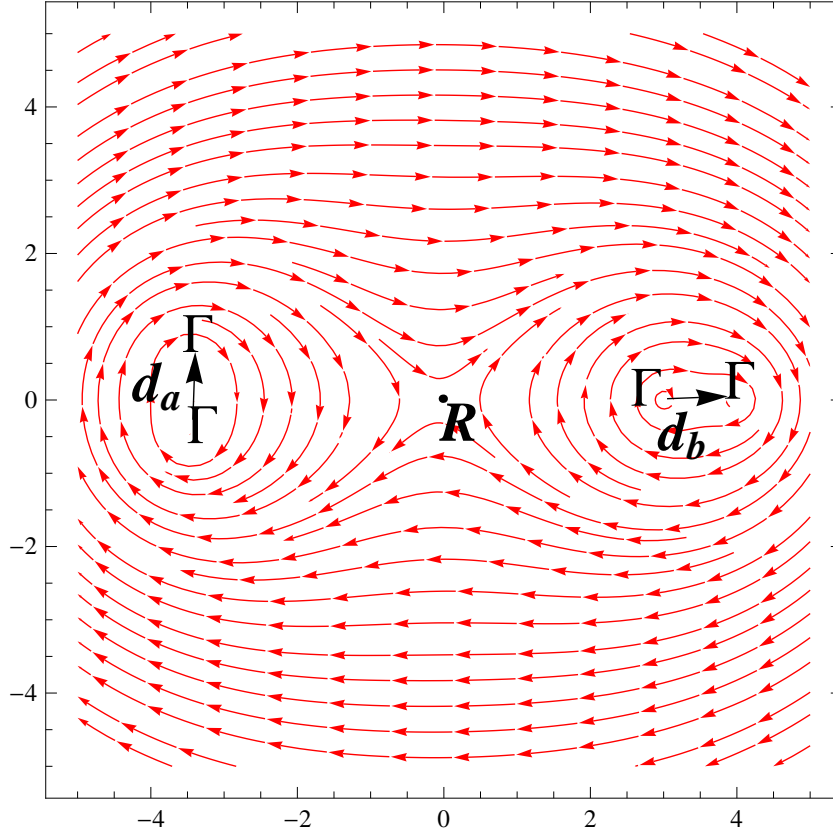


Abb. 3.8: Strömungsprofil zweier taumelnder Schwimmer zu der Anfangsbedingung $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Beide Schwimmer rotieren mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ um den gemeinsamen Schwerpunkt \mathbf{R} .

Die beiden Wirbelpaare rotieren mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\dot{\theta} = 2\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{d^2}{r^4} \right)$ um den gemeinsamen Schwerpunkt. Die Interaktion der beiden Wirbelpaare sorgt hier aufgrund des Minuszeichens vor dem Term $1/r^2$ umso mehr für eine Abbremsung der Rotationsbewegung, je näher die Schwimmer sich kommen.

3.5.2 Rotation in entgegengesetzter Richtung

Der zweite Fall der Interaktion zwischen zwei rotierenden Wirbelpaaren ergibt sich, wenn sie sich in unterschiedliche Richtungen drehen. Durch Einsetzen von $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ und $\Gamma_3 = \Gamma_4 = -\Gamma$ ergeben sich folgende Bewegungsgleichungen aus den Gleichungen (3.28) bis (3.31) und (3.24):

$$\dot{r} = 0 \quad (3.69)$$

$$\dot{\phi}_a = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.70)$$

$$\dot{\phi}_b = -\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.71)$$

$$\dot{R}_{\parallel} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{d^2}{r^3} (\cos \phi_a \sin \phi_b + \cos \phi_b \sin \phi_a) \quad (3.72)$$

$$\dot{R}_{\perp} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{2}{r} - \frac{d^2}{r^3} (\cos^2 \phi_a + \cos^2 \phi_b) \right). \quad (3.73)$$

Diese Gleichungen werden wieder in Abhängigkeit der oben definierten Winkel α und θ geschrieben. Es ergibt sich:

$$\dot{\alpha} = 2\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (3.74)$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad (3.75)$$

$$\dot{R}_{\parallel} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{d^2}{r^3} \cos \alpha \sin \theta \quad (3.76)$$

$$\dot{R}_{\perp} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{2}{r} - \frac{d^2}{r^3} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{d^2}{r^3} \cos \alpha \cos \theta. \quad (3.77)$$

Zwar drehen sich die beiden Schwimmer mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von $\dot{\phi}_a = \dot{\phi}_b = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right)$, jedoch findet aufgrund von $\dot{\theta} = 0$ keine Rotation des gesamten Systems statt. Auch hier wirkt die Interaktion zwischen den Schwimmern bremsend auf die Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Schwimmer. Weiterhin verändert sich die Position des Schwerpunkts in einer Translationsbewegung, die genau senkrecht zum Abstand r zwischen den beiden Schwimmern verläuft, wenn $\theta = 0$ als Anfangsbedingung gewählt wird. Dann ergibt sich:

$$\dot{R}_{\parallel} = 0 \quad (3.78)$$

$$\dot{R}_{\perp} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{2}{r} - \frac{d^2}{r^3} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{d^2}{r^3} \cos \alpha. \quad (3.79)$$

Die Geschwindigkeit, mit der der Winkel α sich zeitlich ändert, ist, da der Abstand zwischen den Schwerpunkten der beiden Paare sich nicht ändert, mit $\dot{\alpha} = 2\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{r^2} \right)$ konstant. Dies führt auf eine Translationsbewegung des gesamten Systems senkrecht zur Verbindungslinie zwischen beiden Schwimmern, wobei die Geschwindigkeit periodisch zwischen einem Maximalwert von $\dot{R}_{\perp max} = -\frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{d^2}{r^3} \right)$ und einem Minimalwert von $\dot{R}_{\perp min} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{r}$ schwankt. Dieser Fall wird in Abb. 3.9 gezeigt.

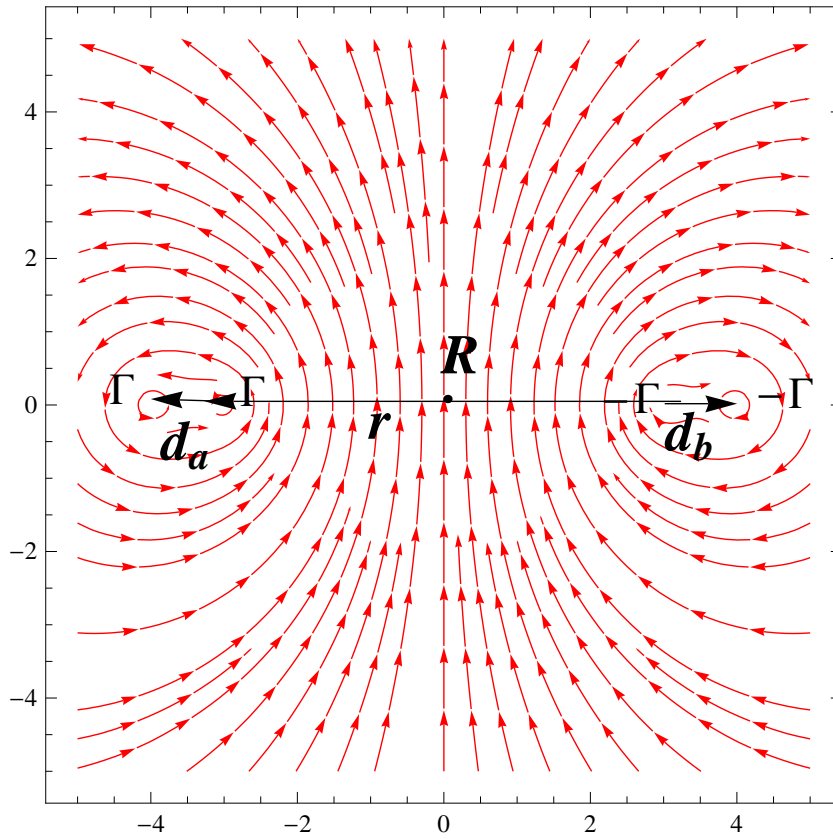


Abb. 3.9: Strömungsprofil zweier gegensinnig taumelnder Schwimmer zu der Anfangsbedingung $\theta = \pi$. Das gesamte System bewegt sich senkrecht zur Verbindungsachse zwischen den beiden Schwerpunkten der Wirbelpaare. Die Geschwindigkeit, mit der der Schwerpunkt sich fortbewegt, schwankt dabei periodisch.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die hydrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Mikroschwimmern in zweidimensionalen Systemen untersucht. Die Grundlage zur Beschreibung der interaktiven Prozesse ist ein Modell für das Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen dieser Schwimmer. Dabei ging es nicht darum, wie sonst üblich, die Stokes-Gleichung für die Bewegungsabläufe eines einzelnen Schwimmers zu lösen und die hydrodynamische Interaktion durch die Überlagerung dieser Lösungen zu beschreiben (vgl. [16], [10]). Vielmehr wurde für die zwei Bewegungszustände, den “run” und “tumble”, eines biologischen Schwimmers die vereinfachte Annahme gemacht, dass das erzeugte Geschwindigkeitsfeld aus zwei entweder in gegensätzlicher oder gleicher Richtung drehenden Punktwirbeln besteht, deren Abstand konstant gehalten wird. Die Motivation für dieses einfache Modell lag in einem Vergleich der Bewegungsmuster, die ein Bakterium ausführt, mit der Dynamik von zwei Punktwirbeln. Beide weisen sowohl die Möglichkeit der Translation als auch der Rotation auf.

Sowohl das Schwimmen auf der mikroskopischen Ebene als auch die Dynamik von Punktwirbeln erfordert ein grundlegendes Verständnis der hydrodynamischen Grundgleichungen. Aus diesem Grund wurden diese im ersten Kapitel hergeleitet. Die Eigenschaften von Systemen, in denen auf der einen Seite Wirbelstrukturen, speziell Punktwirbel, auftreten, als auch auf der anderen Seite von solchen, die sich durch eine stark viskose Flüssigkeit auszeichnen, wurden hier betrachtet.

Im zweiten Kapitel wurden verschiedene Strategien von künstlichen und biologischen Schwimmern behandelt, das Problem der Fortbewegung in stark viskosen Flüssigkeiten effektiv zu lösen. Dies geht stets darauf zurück, die Zeitumkehr-Symmetrie der Stokes-Gleichung durch periodische Bewegungen zu brechen. Bei künstlichen Schwimmern kann dies z. B. durch das Variieren des Abstands zwischen mindestens drei aneinander gekoppelten Kugeln geschehen. Bei biologischen Schwimmern geschieht dies durch das Rotieren von Flagellen in der Flüssigkeit.

Im dritten Kapitel wurde ein Modell für das Geschwindigkeitsfeld eines Schwimmers vorgestellt. Die Bewegungsgleichungen für die Positionen und Orientierungen der Schwimmer wurden aufgestellt. Für einige Spezialfälle, in denen zwei Bakterien einander folgen oder aufeinander zu schwimmen, konnten Lösungen der Gleichungen gefunden werden. Die Geschwindigkeit zweier Wirbelpaare, die einander folgen, nimmt z. B. abhängig von deren Abstand voneinander zu. Diese Lösung spiegelt das Verhalten biologischer Schwimmer, beobachtet z. B. von L. H. Cisneros und J. Kessler [4], wider.

Weiter ergibt sich eine Lösung, bei der beide Paare sich gegenseitig ablenken, in dem Fall, dass sie sich in genau entgegengesetzte Richtungen orientieren. Auch ein solches Verhalten wird bei realen Mikroschwimmern beobachtet [10].

Auch rotierende Wirbelpaare interagieren miteinander. Sie können z. B. unter bestimmten Anfangsbedingungen umeinander herum rotieren bzw. bewegen sich in einer oszillierenden Translationsbewegung des gesamten Systems fort.

Nachdem das kollektive Verhalten zweier Wirbelpaare in Spezialfällen gelöst wurde und dadurch ein Eindruck entstanden ist, wie zwei Mikroschwimmer sich gegenseitig beeinflussen, steht für die Zukunft die Beschreibung eines Ensembles vieler Schwimmer an. Dazu wird eine Langevin-Gleichung für die Positionen der von den Schwimmern erzeugten Punktwirbel formuliert, in der der Übergang von der Translationsbewegung in eine Rotationsbewegung der Schwimmer im Rauschterm dieser Gleichung durch statistische Änderungen der Wirbelstärken berücksichtigt wird. Fragestellungen werden dann z. B. sein, ob sich beobachtete Jets oder Wirbel, also das turbulente Verhalten des Flussfeldes der Bakterien, einstellen [4], [20].

Literaturverzeichnis

- [1] ARGYRIS, J. ; FAUST, G. ; HAASE, M. ; FRIEDRICH, R.: *Die Erforschung des Chaos*. Springer, 2010
- [2] BERG, H. C.: *Random Walks in Biology*. Princeton University Press, 1983
- [3] BERG, H. C.: The rotary motor of bacterial flagella. In: *Annual Review of Biochemistry* 72 (2003), S. 19 – 54
- [4] CISNEROS, L. H. ; CORTEZ, R. ; DOMBROWSKI, C. ; GOLDSTEIN, R. E. ; KESSLER, J. O.: Fluid dynamics of self-propelled microorganisms, from individuals to concentrated populations. In: *Experiments in Fluids* 43 (2007), S. 737–753
- [5] CISNEROS, L. H. ; KESSLER, J. O.: Unexpected Bipolar Flagellar Arrangements and Long-Range Flows Driven by Bacteria near Solid Boundaries. In: *Physical Review Letters* 101 (2008), S. 168102
- [6] COTTET, G.-H. ; KOUMOUTSAKOS, P. D.: *Vortex Methods*. Cambridge University Press, 2000
- [7] CZIROK, A. ; BEN-JACOB, E. ; COHEN, I. ; VICSEK, T.: Formation of complex bacterial via self-generated vortices. In: *Physical Review E* 54 (1996), S. 1791 – 1801
- [8] DARNTON, N. C. ; TURNER, L. ; ROJEVSKY, S ; BERG, H. C.: On Torque and Tumbling in Swimming Escheria coli. In: *Journal of Bacteriology* 189 (2007), S. 1756 – 1764
- [9] DOMBROWSKI, C. ; CISNEROS, L. H. ; CHATKAEW, S. ; GOLDSTEIN, R. E. ; KESSLER, J. O.: Self-Concentration and Larg-Scale Coherence in Bacterial Dynamics. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), S. 098103
- [10] ISHIKAWA, T. ; SEKIYA, G. ; IMAI, Y. ; YAMAGUCHI, T.: Hydrodynamic Interactions between Two swimming Bacteria. In: *Biophysical Journal* 93 (2007), S. 2217–2225

- [11] KAMBE, T.: *Elementary Fluid Mechanics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007
- [12] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik VI - Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, 1966
- [13] LIGHTHILL, J.: Flagellar Hydrodynamics. In: *Society for Industrial and Applied Mathematics Review* 18 (1976), S. 161–230
- [14] NAJAFI, A. ; R., Golestanian: Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres. In: *Physical Review E* 69 (2004), S. 062901
- [15] NELSON, P. C.: *Biological Physics - Energy, Information, Life*. W. H. Freeman and Company, 2008
- [16] POOLEY, C. M. ; ALEXANDER, G. P. ; YEOMANS, J. M.: Hydrodynamic Interaction between Two Swimmers at Low Reynolds Number. In: *Physical Review Letters* 99 (2007), S. 228103
- [17] PURCELL, E. M.: Life at low Reynolds number:. In: *American Journal of Physics* 45 (1977), S. 3–11
- [18] SHAPER, A. ; WILCZEK, F.: Geometry of self-propulsion at low Reynolds number. In: *Journal of Fluid Mechanics* 198 (1989), S. 557 – 585
- [19] TAYLOR, G.: Analysis of the swimming of Microscopic Organisms. In: *Proceedings of the Royal Society* 209 (1951), S. 447 – 461
- [20] WOLGEMUTH, C. W.: Collective Swimming and the Dynamics of Bacterial Turbulence. In: *Biophysical Journal* 95 (2008), S. 1564 – 1574

Danksagung

Abschließend möchte ich mich ganz herzlich bedanken für die Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit.

An erster Stelle möchte ich hier Herrn Prof. Dr. Friedrich nennen, dessen Betreuung während der anderthalb Jahre der Entstehungszeit dieser Arbeit stets anregend und freundlich war und dessen Geduld keine Grenzen kannte, wenn Probleme bei Rechnungen auftraten.

Ich möchte mich für die Unterstützung meiner Eltern Elisabeth und Winfried Greber, die mir das Studium der Physik überhaupt erst ermöglicht haben, bedanken. An dieser Stelle gilt mein Dank auch meinen Geschwistern Ruth-Anna und Andreas Greber.

Für sein unermüdliches Interesse und seine Fragen das Thema dieser Arbeit betreffend möchte ich Herrn Dr. med. dent. Ernst Grafe meinen Dank aussprechen.

Den Kollegen des Büros 421 im Institut für theoretische Physik Robert Hahn, Christoph Honisch, Michael Rath, aber auch Oliver Kamps, Michael Köpf, Johannes Lülff, Cornelia Petrovic, Michael Sinhuber, Michel Voßkuhle und Michael Wilczek möchte ich für die interessanten Gespräche über physikalische Themen aber auch Hilfen bei der Behebung technischer und auch physikalischer Probleme ganz herzlich Danke sagen.

Bei Max-Theodor Kuchel und Michel Voßkuhle möchte ich mich ganz herzlich für das akribische Auffinden der Fehler, die sich in dieser Arbeit gefunden haben, danken.

Der Dank, der Eva Baresel gilt, lässt sich gar nicht in Worte fassen. Danke für die lebenswerte und geduldige Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit und auch für viele schöne Momente in den vergangenen anderthalb Jahren.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, 19. Juli 2010

Unterschrift