

Dispersion passiver Partikel in der dreidimensionalen Turbulenz

als Diplomarbeit vorgelegt von

Tobias Schmitz

Juni 2010



institut für
theoretische physik

Westfälische Wilhelms-Universität
Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
2 Theoretische Grundlagen	7
2.1 Physikalische Beschreibung von Fluiden	7
2.2 Statistische Beschreibung der Turbulenz	9
2.3 Richardsonkaskade und Wirbelzerfall	10
2.4 Kolmogorovtheorie	10
2.5 Längen- und Zeitskalen	13
3 Dispersion von Partikeln	15
3.1 Diffusion	15
3.2 Relative Dispersion	18
3.2.1 Relative Dispersion nach Richardson	18
3.2.2 Relative Dispersion nach Batchelor	22
4 Experimente und Numerik – Übersicht der aktuellen Forschungsergebnisse	25
4.1 Experimentelle Untersuchungen	25
4.1.1 Eulersche Messungen	26
4.1.2 Tracking Lagrangescher Teilchen	27
4.2 Direkte numerische Simulationen	35
4.3 Zusammenfassender Überblick	40
5 Numerische Untersuchung der Zweiteilchendispersion	43
5.1 Verwendetes numerisches Verfahren	43
5.2 Zeitliche Relevanz des relativen Anfangsabstandes	44
5.3 Relative Dispersion: Batchelor vs. Richardson	50
5.4 Distance Neighbour Function	54
5.5 Berücksichtigung des ballistischen Charakters als Alternativansatz	57
5.6 Abstandsentwicklung bei Berücksichtigung des Anfangsabstandes und des ballistischen Charakters	59
5.7 Modifizierte Distance Neighbour Function	63
6 Detaillierte Bilanz in der Zweiteilchendispersion	65
6.1 Einführung	65
6.2 Theoretische Einführung	65

Inhaltsverzeichnis

6.3 Numerische Untersuchung der detaillierten Bilanz	67
7 Zusammenfassung und Ausblick	73
8 Anhang	79
Literaturverzeichnis	83

1 Einführung

Turbulenz ist ein weit verbreitetes Phänomen in der uns umgebenden Welt. Jedem wachen Beobachter seiner Umwelt begegnet sie im täglichen Leben, zum Beispiel bei dem Umrühren eines morgendlichen Milchkaffees, bei dem Luftzug in Räumen, in jedem Wasserlauf, bei dem von Zigaretten oder aus Schornsteinen aufsteigenden Rauch und bei vielen anderen Gelegenheiten. Turbulenz ist das Kernthema der vorliegenden Arbeit. Die Begriffsbildung ist auf Leonardo da Vinci zurückzuführen, der sich zu Lebzeiten auch mit diesem Phänomen beschäftigte. Aus dem lateinischen *turbare* leitet sich der Begriff Turbulenz ab, der die irregulären Bewegungen von Gasen und Flüssigkeiten beschreibt. Doch obwohl schon seit mehreren Jahrhunderten intensiv an diesem Phänomen geforscht wird, ist es bis heute nur teilweise entschlüsselt. Verglichen mit der Turbulenz sind andere Bereiche der Physik, etwa die Kernphysik, deutlich besser verstanden. Letztere hat eine bis heute sehr weit entwickelte und konsistente Theorie, das Standardmodell. Die Möglichkeit, diese Theorie erneut experimentell überprüfen zu können, wurde gerade erst am CERN durch die erfolgreiche Inbetriebnahme des Large Hadron Collider (LHC) gegeben. Das Fehlen einer allumfassenden Theorie der Turbulenz ist nicht durch einen zu geringen Forschungsaufwand begründet, sondern durch die sehr hohe Komplexität dieses Phänomens. Die Grundgleichung zur Beschreibung der Hydrodynamik, die Navier-Stokes-Gleichung, erschwert das Gewinnen einer Theorie erheblich durch ihre mathematischen Eigenschaften – Nichtlinearität und Nichtlokalität.

Die Turbulenz ist ein wichtiges Beispiel für nichtlineare Phänomene in der Natur. Ein grundlegendes Verständnis der Turbulenz ist nicht allein für die Physik, sondern auch für viele weitere Forschungsbereiche von großem Interesse. So beschäftigen sich z. B. die Chemie, die Biologie, die Medizin, die Finanzmathematik und die Verkehrsanalyse ebenfalls mit nichtlinearen Systemen. Diese Systeme gehören genau wie die Turbulenz zu der Klasse der komplexen Systeme. Als Beispiele seien genannt: Strukturbildung bei chemischen Reaktionen, Ausbreitung von Seuchen, Entwicklung von Migräne verursachenden Gehirnwellen, Signalverarbeitung und -speicherung im Gehirn, die Dynamik des Herzmuskels, die Dynamiken von Aktienkursen und des Straßenverkehrs. Forschungsbereiche, die sich mit solchen komplexen Systemen befassen, werden von einem tiefergehenden Verständnis der Turbulenz profitieren. Aber auch Themen, die direkt mit der Turbulenz verflochten sind, profitieren wahrscheinlich in einem noch größeren Maße als bisher davon. Die Turbulenz selbst trägt nicht nur zur Beschreibung der oben genannten Systeme bei, sondern tritt auch zahlreich in der Natur und in technischen Anwendungen auf. Mittels der Turbulenz lassen sich Aussagen über Strömungen in der Hemisphäre und den Ozeanen, über Einspritzdüsen und Abläufe in Verbrennungsmotoren, über Turbinen



Abbildung 1.1: Beispiele turbulenter Strömungen. Links: Aus einem von Imkern genutzten Smoker austretender Rauch. Entnommen aus [Fir]. Rechts: Brand einer Metzgereiproduktionsstätte 2009 in Freiburg. Entnommen aus [Bra].

und über die Aerodynamik von Gegenständen treffen. Hierdurch kommen wir beispielsweise in den Genuss von Wettervorhersagen sowie in den, uns mit Automobilen oder Flugzeugen fortbewegen zu können.

Den Begriff Turbulenz klar zu definieren ist schwierig, einfacher lassen sich Charakteristika der Fluidbewegung angeben. Diese hat ein irreguläres raumzeitliches Verhalten, das stark von kleinsten Veränderungen der Anfangsbedingung abhängt. Sowohl in der Zeit als auch im Raum treten mehrere Skalen unterschiedlicher Größenordnung auf.

Abbildung 1.1 zeigt zwei Beispiele turbulenter Strömungen. Das erste Bild zeigt einen Smoker, der von Imkern genutzt wird, um in Ruhe und stichfrei an einem Bienenvolk arbeiten zu können. Bei dem aus diesem Werkzeug austretenden Rauch handelt es sich nicht um eine sehr „starke“ Turbulenz. So liegen etwa die kleinen und großen Längenskalen der hier auftretenden Strukturen nicht sehr weit auseinander. Dennoch sind bereits komplexe Strukturen zu erkennen. Auf dem zweiten Bild ist der Brand einer Produktionsstätte zu sehen, der eine „stärkere“ Turbulenz aufweist. Diese hat Strukturen in mehreren verschiedenen Größenordnungen, besitzt also eine größere Vielfalt an Skalen.

Das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit liegt auf Transport und Mischung von passiven Teilchen in turbulenten Strömungen. Passiv ist hier in dem Sinne zu verstehen, dass die Teilchen das Strömungsverhalten des Fluids nicht ändern. Den Vorgang der Positionsänderung von Teilchen, also das Ausbreiten und die Separation, nennt man Dispersion. Werden als zu betrachtende Größen die Daten einzelner Teilchen ausgewertet, zum Beispiel der jeweilige Ort, die jeweilige Geschwindigkeit oder die jeweilige Beschleunigung, spricht man von Einteilchendispersion. Mit dieser lassen sich Aussagen über die raumzeitliche Entwicklung der Verteilung von Teilchen in turbulenten Strömungen treffen. Jedoch werden durch die Einteilchendispersion nicht alle Phänomene

einer solchen Entwicklung eingefangen. So werden zum Beispiel keine Informationen über die Konzentration der Teilchen an verschiedenen Orten aufgelöst. Der Effekt einer lokal variierenden Konzentration tritt aber in turbulenten Mischungsvorgängen auf.

In Abbildung 1.2 werden Resultate aus einer numerischen Simulation gezeigt. In ein Geschwindigkeitsfeld wurden sehr viele Teilchen injiziert. Dargestellt wird die zeitliche Entwicklung der Verteilung von Partikeln in einer dreidimensionalen Strömung. Die Partikel werden dicht beieinander injiziert und von der Strömung mit der Zeit auseinander getrieben. Es entsteht zunächst eine flache, bandartige Struktur. Diese reißt später auf und es bilden sich ähnliche, aber feinere längere Strukturen heraus. Zu sehen ist, dass die Teilchen nicht das ganze Volumen gleichmäßig durchsetzen. Die Konzentration von Teilchen ist also an verschiedenen Ortspunkten unterschiedlich groß. Um Effekte wie diesen erfassen zu können, wurde zur Mehrteilchendispersion übergegangen, zunächst zur Zweiteilchendispersion [Ric26, Yeu94, VD97, OM00, BS02, IK02, YB04, BBC⁺05a, BOX⁺06, OXBB06, BLMO06, SYH08]. Bei dieser werden die relativen Größen von zwei Teilchen zueinander untersucht, etwa der relative Abstand eines Teilchenpaares oder die relative Geschwindigkeit zweier Teilchen zueinander. Des Weiteren gibt es auch Bemühungen, Drei- bzw. Vierteilchendispersion zu erforschen [CPS99, BBC⁺05b, LOBM07, XOB08]. Hierbei werden Größen wie Kantenlängen oder eingeschlossene Winkel von einem durch drei Teilchen dargestellten Dreieck bzw. Form und Volumen eines durch vier Teilchen dargestellten Tetraeders untersucht. Letzteres ist jedoch nicht Thema der vorliegenden Arbeit, sondern vielmehr ist es die Zweiteilchendispersion. Durch sie soll die turbulente Mischung und der turbulente Transport in dreidimensionalen Strömungen untersucht werden.

Genau wie für die Turbulenz selber gibt es auch für Transport- und Mischungsphänomene eine Reihe von Beispielen in der Natur, Umweltwissenschaft und Technik. Planktonteilchen bewegen sich mit Meereströmungen, was wiederum Auswirkungen auf das Bewegungsverhalten von Fischschwärm hat; sinkt eine Bohrinsel und dringt danach weiterhin Öl aus dem Bohrloch, wird dieses Öl ebenfalls durch die Meereströmungen transportiert und verteilt; von Kraftwerken oder Fabriken freigesetzte Abgase oder durch Unfälle freigesetzte giftige Gase mischen sich mit der Luft und werden von dieser transportiert; für die Verbrennung in turbulenten Flammen, wie in Gasturbinen oder Einspritzmotoren, ist die Mischung des zu verbrennenden Fluids mit der Luft sowie die räumliche Verteilung des Gemisches von grundlegender Bedeutung. Biologen und Ökologen, die ein besseres Verständnis von Bewegungsmustern von Fischschwärmern erhalten wollen, Fischern, die wissen wollen, wann und wo es am besten zu fischen gilt, Umweltschützern und -ämtern, die Gefahrenstellen und das Gefahrenpotential dieser Stellen von Verschmutzung nach sich ziehenden Ereignissen angeben wollen, Ingenieuren, die unter Berücksichtigung zeitlicher und örtlicher Änderungen der Konzentrationen die Effizienz der Verbrennungsmaschine erhöhen können, all diesen käme ein noch besseres Verständnisses von turbulentem Transport und turbulenten Mischung zu Gute. Bereits jetzt nutzen sie intensiv das diesbezüglich vorhandene Wissen, würden aber dank neuer Erkenntnisse noch effektiver arbeiten können. Neben dem Wunsch, die Physik dieses

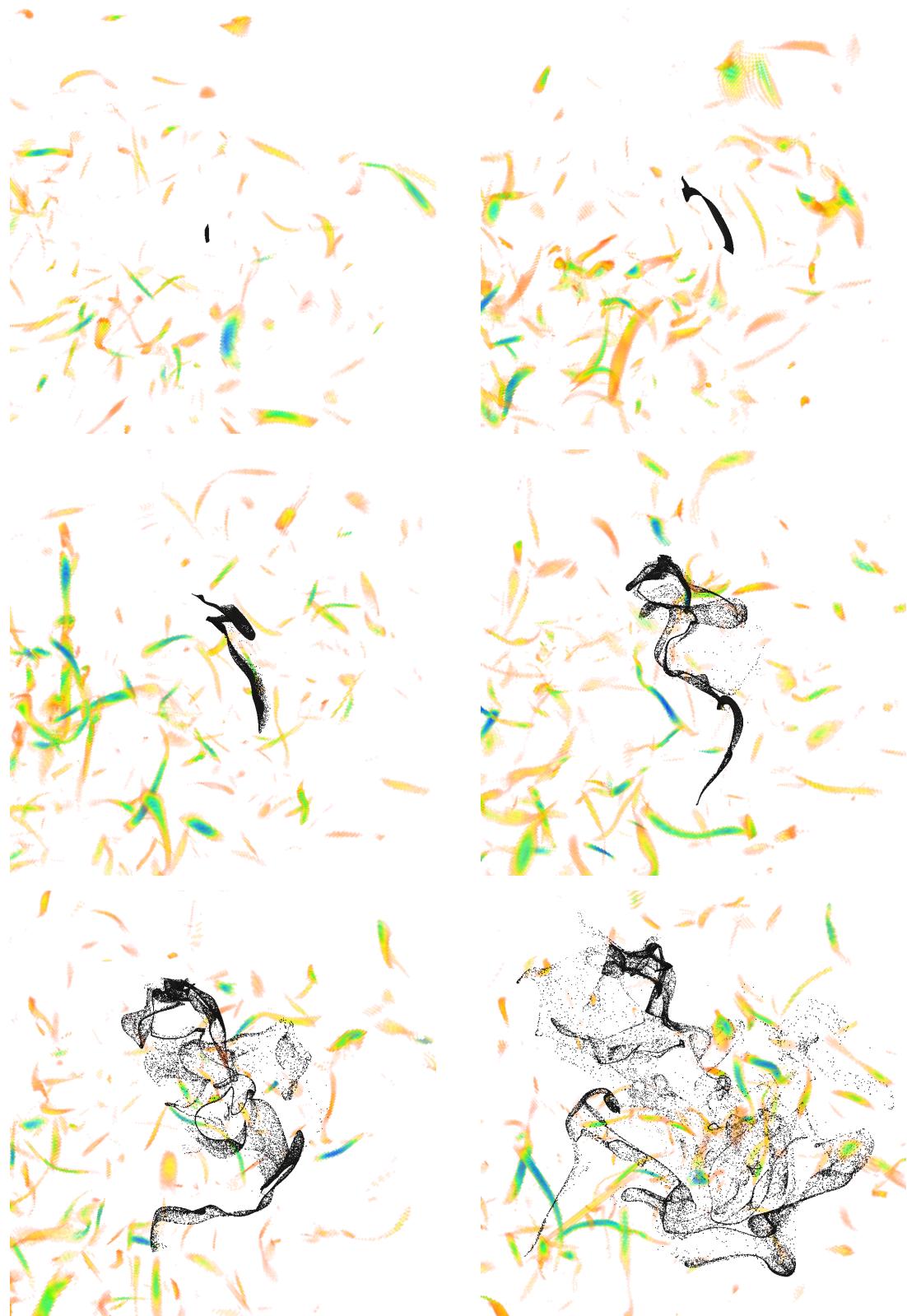


Abbildung 1.2: Dispersion von Partikeln in einem dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeld zu verschiedenen Zeitpunkten [Dai09b]. Zeilenweise von links nach rechts in chronologischer Reihenfolge gezeigt. Jeder schwarze Punkt entspricht einem Partikel. Farblich codiert ist die Wirbelstärke des Feldes.

Ablaufes besser verstehen zu können, liefert dieser Aspekt noch eine weitere Motivation, sich mit diesem Thema zu beschäftigen, welche nach Ansicht des Physikers und Mathematikers Horace Lamb wohl bitter nötig ist, als er einst sagte [MK07]:

„I am an old man now, and when I die and go to Heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics and the other is turbulence. About the former I am rather optimistic.“

Alles in allem gibt es viele Gründe sich dieses Themas in dieser Arbeit anzunehmen.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Im Anschluss an die Einführung folgt in Kapitel 2 die Besprechung der Grundlagen zur theoretischen Behandlung der Turbulenz. Neben den mathematischen Werkzeugen, wie der der Beschreibung inkompressibler Fluide zu Grunde liegenden Gleichung – der Navier-Stokes-Gleichung – wird das Lagrangebild eingeführt. Ferner wird die Frage geklärt, warum ein statistischer Zugang zur Beschreibung der Turbulenz sinnvoll ist. Die grundlegenden Überlegungen zur Energiekaskade und den Skalierungsverhalten innerhalb der Kolmogorovtheorie werden ebenfalls präsentiert. In Kapitel 3 wird die Theorie der Dispersion von passiven Partikeln behandelt. Zunächst wird dabei die normale Diffusion besprochen, danach die relative Zweiteilchendispersion nach Richardson und Batchelor. Ein Überblick über die bis heute von anderen Forschungsgruppen erlangten Ergebnisse zur relativen Dispersion von Teilchenpaaren durch Experimente und direkte numerische Simulation folgt in Kapitel 4. In Kapitel 5 werden die im Zuge dieser Diplomarbeit gewonnenen Resultate zur numerischen Untersuchung dieses Themas vorgestellt. Ein anderer Aspekt der Zweiteilchendispersion wird in Kapitel 6 behandelt. Das Prinzip der detaillierten Bilanz ist hier Gegenstand der Untersuchung. Abschließend folgt in Kapitel 7 eine Zusammenfassung und Diskussion der mit dieser Arbeit erzielten Resultate.

2 Theoretische Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es, einen kurzen Einstieg in die Theorie turbulenter Strömungen zu geben. Hierbei wird keineswegs Wert auf Vollständigkeit gelegt, vielmehr werden nur die für diese Diplomarbeit relevanten Aspekte besprochen. Dem interessierten Leser bieten Bücher wie [AFHF10, Fri95, Pop00] und die Doktorarbeit [Kam09] die Möglichkeit, sich ein tiefergehendes Wissen anzueignen. Zunächst wird die Grundgleichung der Fluidodynamik, die Navier-Stokes-Gleichung, erläutert. Auch eine alternative Formulierung mittels der Vortizität, die Wirbeltransportgleichung, wird gezeigt. Nach der Einführung des Lagrangebildes zur Beschreibung der Turbulenz wird erklärt, warum gerade eine statistische Beschreibung der Turbulenz in der Theorie verwendet wird. Den Abschluss dieses Kapitels stellt die Einführung spezieller Längen- und Zeitskalen dar, dem eine Präsentation der Richardsonenergiiekaskade, des Wirbelzerfalls und der Kolmogorovtheorie vorangeht.

2.1 Physikalische Beschreibung von Fluiden

Die *Navier-Stokes-Gleichung* ermöglicht die theoretische Behandlung eines strömenden inkompressiblen Fluids. Durch sie wird die zeitliche Entwicklung eines Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ beschrieben

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = -\nabla p(\mathbf{x},t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x},t) + \mathbf{f}(\mathbf{x},t). \quad (2.1)$$

Dabei ist $p(\mathbf{x},t)$ der Druck, ν die Viskosität und $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ eine von außen antreibende Kraft. Zusammen mit der Bedingung der Inkompressibilität

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0 \quad (2.2)$$

liefert Gleichung (2.1) eine vollständige Beschreibung, mit der sich alle Phänomene einer inkompressiblen Flüssigkeit oder eines Gases beschreiben lassen. Im physikalischen Sinne ist die Navier-Stokes-Gleichung eine Bilanzgleichung für den Impuls. Wird auf sie die Divergenz angewendet und dabei Relation (2.2) ausgenutzt, erhält man in Analogie zur Elektrodynamik eine Poissons-Gleichung

$$\Delta p(\mathbf{x},t) = \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x},t)).$$

Mit entsprechend gewählten Randbedingungen lautet deren Lösung

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}', t))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x'.$$

Hier zeigt sich, dass der Druck nicht lokal von dem Geschwindigkeitsfeld abhängt, sondern vielmehr von dem gesamten Geschwindigkeitsfeld. Dieser nichtlokale Charakter kommt seinerseits wieder in der Navier-Stokes-Gleichung (2.1) zum Tragen. Das Strömungsverhalten eines Fluids an einem Punkt wird also durch das Geschwindigkeitsfeld an allen anderen Ortspunkten beeinflusst.

Eine Alternative zur Beschreibung der Fluidodynamik über das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ bietet die *Wirbelstärke* bzw. *Vortizität*

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) := \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

Durch Anwendung der Rotation auf Gleichung (2.1) erhält man die *Wirbeltransportgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Dabei ist der Term $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ der sogenannte *Wirbelstreckungsterm*. Er spielt eine wichtige Rolle bei dem Herausbilden filamentartiger Strukturen der Vortizität.

Mit Hilfe einer typischen Längenskala L_0 und einer typischen Geschwindigkeitsskala U_0 des Systems lässt sich der advektive Term der Navier-Stokes-Gleichung zu U_0^2/L_0 abschätzen und der viskose zu Term $\nu U_0/L_0^2$. Aus ihrem Verhältnis zueinander ergibt sich eine wichtige Größe zur Beschreibung einer Strömung, die *Reynoldszahl* Re . Sie ist definiert über

$$\frac{\frac{U_0^2}{L_0}}{\nu \frac{U_0}{L_0^2}} = \frac{U_0 L_0}{\nu} =: Re. \quad (2.4)$$

Die Reynoldszahl gibt an, wie turbulent eine Strömung ist. Größere Werte stehen für „stärkere“ Turbulenz, kleinere für „schwächere“. Zudem existiert für jedes System eine kritische Reynoldszahl. Unterhalb dieser ist die Strömung laminar. Wird der kritische Wert der Reynoldszahl jedoch überschritten, bildet sich turbulente Strömung aus.

Die bis jetzt genutzte Beschreibungsweise ist das sogenannte *Eulersche Bild*. Hierbei wurde stets auf raumfeste Punkte \mathbf{x} Bezug genommen. Ein anderer, gerade zur Beschreibung von Transport und Mischung intuitiver Zugang ist das *Lagrangebild*. Bei diesem wird ein mitbewegtes Koordinatensystem genutzt und die Strömung mittels punktförmiger Teilchen beschrieben, welche die Dichte des Fluids haben. Diese Teilchen werden im weiteren Verlauf auch Lagrangeteilchen, Partikel, oder Tracer genannt. Veranschaulichen kann man sich die beiden Bilder wie folgt: Im Falle des Eulerschen Bildes steht man als Beobachter neben dem System, etwa einem Fluss. Man registriert das Strömungsverhalten an verschiedenen festen Ortspunkten, etwa Bereiche, in denen sich Strudel,

Stromschnellen oder gleichmäßig fließende Stellen herausbilden. Im Falle des Lagrangebildes würde man als Beobachter auf einem Wasserteilchen Platz nehmen und sich mit diesem durch die Strömung bewegen lassen. Dadurch würde man an allen Ortspunkten, die das Teilchen passiert, Informationen über das Strömungsverhalten erhalten. Die Bahn $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ bzw. Trajektorie eines Teilchens hat seinen Startpunkt bei

$$\mathbf{X}(t = t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Die Geschwindigkeit eines Teilchens entspricht stets der des Fluids am Ort des Teilchens, d. h.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t).$$

Somit gilt für seine Beschleunigung $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t) &= \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{X}(t, \mathbf{y}) \\ &= [-\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{X}(t, \mathbf{y})}, \end{aligned}$$

was gerade die Rechte-Hand-Seite von Gleichung (2.1) am Orte $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ des Teilchens ist.

2.2 Statistische Beschreibung der Turbulenz

Warum auf turbulente Strömungen eine statistische Beschreibung angewendet werden sollte, wird zunächst unklar sein. Auch könnte dieser Ansatz den Eindruck erwecken, dass die Entwicklung solcher Strömungen rein stochastisch abläuft. Letzteres ist aber nicht der Fall. Schließlich liegt mit der Navier-Stokes-Gleichung eine deterministische Entwicklungsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld von Strömungen vor. Um ein System vollständig beschreiben zu können, wäre die Kenntnis entsprechender Größen, wie zum Beispiel $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ oder $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ an allen Ortspunkten des Systems notwendig. Dies wäre jedoch eine extrem große Menge an Informationen, die nicht zu bewältigen wäre. Anstatt ein System vollkommen beschreiben zu können, ist es sinnvoller, Kenntnis über charakteristische *Eigenschaften* der entsprechenden Größen zu gewinnen. Gerade dies wird durch die statistische Beschreibung der Turbulenz ermöglicht. Ein wichtiger Aspekt dabei ist, dass die statistischen Größen allgemeine Bedeutung haben, und somit unabhängig von der Realisierung des Systems sind. Eine analoge Vorgehensweise wird bei der Untersuchung idealer Gase verwendet. Auch hier ist die Gewinnung und Verarbeitung der Größen jedes einzelnen Gasteilchens nicht umsetzbar, einfach wegen der Fülle an Daten bei Millionen von Teilchen. Zur Beschreibung von Zuständen im thermodynamischen Gleichgewicht bedient man sich der statistischen Physik, mittels welcher sich makroskopische Größen wie Druck, Temperatur etc. bestimmen lassen. Für die statistische Beschreibung der Turbulenz nutzt man Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, zu englisch „probability density function“, im weiteren Verlauf mit PDF abgekürzt. Eine

solche Mehrpunkt-PDF wäre $f_n(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{v}_n, \mathbf{x}_n, t_n)$. Mit ihr lässt sich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ an den Raumzeitpunkten $\mathbf{x}_1, t_1; \dots; \mathbf{x}_n, t_n$ zu messen. Die Wahl der in der PDF enthaltenden Größen sowie die Anzahl der Raumzeitpunkte ist der jeweiligen Problemstellung anzupassen.

2.3 Richardsonkaskade und Wirbelzerfall

Im Gegensatz zu dem Versuch, Turbulenz mittels statistischer Eigenschaften zu beschreiben, handelt es sich bei dem von Richardson entwickelten Modell [Ric22], der Richardsonkaskade, um eine phänomenologische Theorie für dreidimensionale Turbulenz. Seiner Vorstellung nach besteht eine Strömung aus Wirbelstrukturen unterschiedlicher Größen r . Wird einem Fluid auf einer Längenskala L mit konstanter Rate ϵ Energie zugeführt, entstehen Wirbel eben auf dieser Längenskala. Allerdings haben die Wirbel nur eine begrenzte Lebensdauer und zerfallen nach deren Ablauf in kleinere Wirbel. Hierbei wird die gesamte Energie in kleinere Strukturen überführt. Diese zerfallen nach Ablauf weiterer Zeit wiederum und hinterlassen noch kleinere Strukturen, denen die Energie einverleibt wird. Die Kaskade setzt sich nun solange fort, bis Wirbelstrukturen der Größenordnung η entstehen. Wirbel dieser Skala brechen nicht mehr weiter auf, sondern verlieren ihre Energie durch Dissipation, wodurch die Kaskade zum Erliegen kommt.

Diese Überlegung ermöglicht eine Einteilung der Strömungsstruktur in drei Bereiche:

- $r > L$ Im *Injektionsbereich*, dem Bereich oberhalb der integralen Längenskala L , wird dem System Energie zugeführt.
- $\eta \ll r \ll L$ Durch eine Kaskade wird im *Inertialbereich* die Energie den kleinen Skalen zugeführt. Die Dissipation ist hier vernachlässigbar.
- $r \ll \eta$ Im *Dissipationsbereich* wird die Energie dem System mittels Dissipation entzogen.

Weiterhin ist nach Richardson das gesamte Volumen der Strömung mit Wirbeln aller Skalen ausgefüllt. Richardson nimmt darauf aufbauend an, dass, unabhängig von der betrachteten Skala, innerhalb des Kaskadenbereichs die Struktur der Strömung dieselbe bleibt. Die Strömung ist somit skaleninvariant.

2.4 Kolmogorovtheorie

Mit Hilfe von Richardsons Vorüberlegungen zur Energiekaskade lieferte Kolmogorov 1941 eine Theorie [Kol41a, Kol41b]¹ zur statistischen Beschreibung der Turbulenz. Sie wird heute gemeinhin als K41-Theorie bezeichnet. Die für diese Arbeit relevanten Hypothesen und die daraus gewonnenen Ergebnisse werden hier vorgestellt.

¹Artikel in Russisch. Englische Übersetzungen erschienen in [Kol91a, Kol91b].

Wird einer Strömung auf großen Skalen Energie zugeführt, zeigen sich meistens Anisotropien auf diesen Skalen. Die Annahme zur ersten Hypothese ist, dass die Strömung auf kleinen Skalen diese Anisotropien verloren hat. Sie hat auf diesen Skalen vielmehr universelle Eigenschaften, trägt also keine Informationen mehr über ihre Entstehung in sich. Die erste Hypothese ist die

Hypothese der lokalen Isotropie: Bei hoher Reynoldszahl sind die kleinskaligen ($r \ll L$) turbulenten Bewegungen statistisch isotrop.

Die Parameter von denen die Energiedissipationsrate ϵ und die kinematische Viskosität ν , durch die der Abbruch der Kaskade bestimmt wird. Die Verallgemeinerung auf alle statistischen Größen ist die

erste Ähnlichkeitshypothese: Bei hoher Reynoldszahl und im Bereich kleiner Längenskalen ($r \ll L$) haben die statistischen Beschreibungsgrößen universellen Charakter. Sie sind nur noch von ϵ , r und ν abhängig.

Durch Dimensionsanalyse können die sogenannten Kolmogorovskalen gebildet werden, je eine für Länge, Zeit und Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\eta &= (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \\ \tau_\eta &= (\nu/\epsilon)^{1/2} \\ u_\eta &= \eta/\tau_\eta = (\epsilon\nu)^{1/4}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Eine weitere Hypothese macht Aussagen über das statistische Verhalten im Inertialbereich. Dies ist die

zweite Ähnlichkeitshypothese: Bei hinreichend hoher Reynoldszahl und in einem Bereich der Längenskala $\eta \ll r \ll L$ sind die Statistiken der Bewegung von universeller Form, die ausschließlich von r und ϵ abhängt und unabhängig von ν ist.

Ein aus den oben angeführten Hypothesen folgendes Ergebnis ist das Skalierungsverhalten für das von der Wellenzahl k abhängige Energiespektrum $E(k)$ im Inertialbereich

$$E(k) \propto k^{-5/3}.$$

Experimentell und numerisch ist diese Aussage verifiziert. Ein weiteres Ergebnis wurde für die Eulerschen Strukturfunktionen $S_n(r)$ erhalten. Diese sind die Momente der PDFs der Geschwindigkeitsinkremente und sind wie folgt definiert:

$$S_n(r) := \left\langle \left[(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]^n \right\rangle.$$

Das Symbol $\langle \cdot \rangle$ stellt den Mittelwert dar und bezeichnet in dieser Arbeit stets das Ensemblemittel, das die Mittelung über alle möglichen Realisierungen beschreibt, und nicht das Zeitmittel.

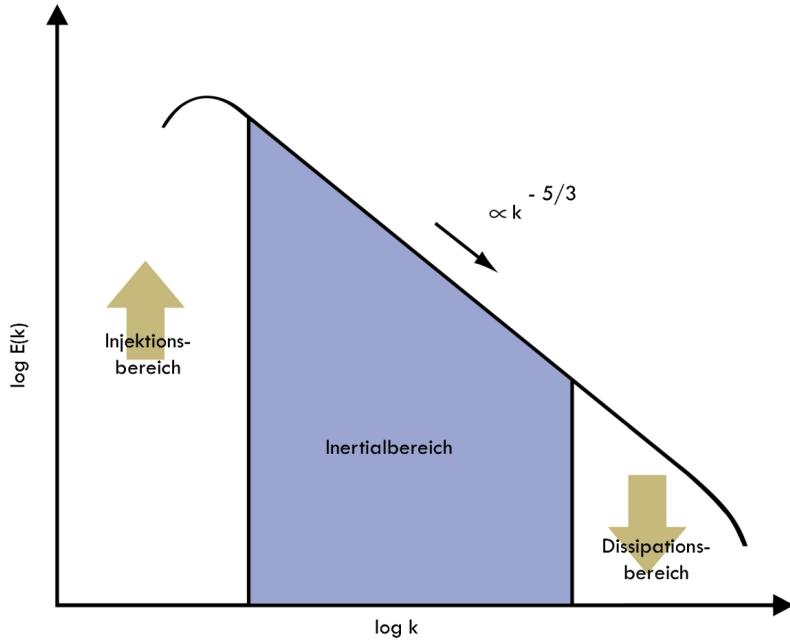


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Energiespektrums und der Energiekaskade.

Nach der Kolmogorovtheorie erhält man für die jeweiligen Strukturfunktionen [AFHF10]

$$S_n = C_n (\epsilon r)^{n/3}, \quad (2.6)$$

mit C_n als dimensionsloser, universeller Konstante. Gestützt wird diese phänomenologische Theorie durch die dritte Strukturfunktion. Diese lässt sich direkt aus der Navier-Stokes-Gleichung ableiten [Kol41b] und ist das sogenannte 4/5-Gesetz:

$$S_3(r) = -\frac{4}{5} \epsilon r.$$

Aus der Form der zweiten Strukturfunktion ergibt sich für das Energiespektrum [Fri95]

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3},$$

wobei C eine universelle Konstante ist. Dieses Skalierungsverhalten wird als das Kolmogorovsche 5/3-Gesetz bezeichnet und ist in Abbildung 2.1 skizziert.

Für (2.6) findet man jedoch Abweichungen, vor allem für große n . Bezeichnet wird dieses nicht selbstähnliche Verhalten der Eulerschen Inkremente mit dem Begriff Intermittenz.

2.5 Längen- und Zeitskalen

Neben den Kolmogorovskalen gibt es noch weitere Skalen, die in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Auf sie soll an dieser Stelle kurz eingegangen werden. Neben η stellt die *integrale Längenskala* L der Geschwindigkeit die zweite Begrenzung des Inertialbereichs dar. Diese Skala ist wie folgt definiert:

$$L := \int_0^\infty \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + r \cdot \mathbf{e}_i, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 \rangle} dr.$$

Sie ist im Falle isotroper Turbulenz unabhängig von i . Ähnlich ist die *integrale Zeitskala* T_L entlang einer Lagrangeschen Trajektorie definiert:

$$T_L := \int_0^\infty \frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{X}, t + \tau) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \rangle}{\langle \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)^2 \rangle} d\tau.$$

Mit Hilfe der Standardabweichung der Geschwindigkeit

$$\sigma_u := \sqrt{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 \rangle}$$

lassen sich zwei weitere Skalen angeben: zum einen eine typische Längenskala L_0 der Größenordnung der integralen Längenskala

$$L_0 := \frac{\sigma_u^3}{\epsilon},$$

und zum anderen die *Large Eddy Turnover Time* T_0 der Größenordnung der integralen Zeitskala

$$T_0 := \frac{L_0}{\sigma_u}.$$

Im Gegensatz zu den kleinen Kolmogorovschen Skalen (2.5) sind L , T_L , σ_u , L_0 und T_0 große Skalen. T_0 gibt Aufschluss über die Zeitskalen, auf denen sich große Strukturen des turbulenten Feldes ändern. Eine weitere kleine Skala ist die Taylorskala λ . Sie liegt zwischen η und L_0 und stellt in etwa die Grenze zwischen dem Inertialbereich und dem dissipativen Bereich dar. Sie berechnet sich durch

$$\lambda := \sqrt{\frac{\langle u_i(\mathbf{x}, t)^2 \rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \right)^2 \right\rangle}}.$$

Durch sie lässt sich die Taylor-Reynolds-Zahl R_λ angeben als

$$R_\lambda := \frac{\lambda \sigma_u}{\nu}.$$

Zwischen der Reynoldszahl und der Taylor-Reynolds-Zahl besteht näherungsweise die Relation (siehe [Fri95])

$$R_\lambda = \sqrt{15 \text{Re}}.$$

Im späteren Verlauf wird die Taylor-Reynolds-Zahl teilweise auch mit Re_λ bezeichnet, bedingt durch die Verwendung dieser Darstellung in aus der Literatur entnommenen Abbildungen.

3 Dispersion von Partikeln

Den Vorgang der Positionsänderung von Teilchen, also das Ausbreiten und die Separation, nennt man Dispersion. Es handelt sich dabei um die Dynamik der Abstandsänderungen zwischen Teilchen. Es gibt zwei grundlegende Arten von Dispersion: zum einen die, die ohne äußere Kräfte oder Einwirkungen, sondern ausschließlich durch die thermische Energie der Teilchen abläuft; zum anderen die, bei der äußere Effekte mitwirken. Ein Beispiel für den ersten Fall ist eine Tasse Kaffee, in die ein Zuckerwürfel gelegt wird. Wird nicht umgerührt, lässt man den Kaffee also ruhen, löst sich der Zuckerwürfel mit der Zeit ausschließlich per molekularer Diffusion oder kurz Diffusion auf. Dieselbe Situation ist zugleich auch ein Beispiel für den zweiten Fall. Wird der Kaffee nun umgerührt, werden die Zuckermoleküle in Ergänzung zur molekularen Diffusion durch das Geschwindigkeitsfeld des Wassers bewegt und voneinander separiert. Dieser zusätzliche Effekt ist das turbulente Mischen bzw. der turbulente Transport. Dieses Kapitel beschäftigt sich zunächst mit der Diffusion. Im Zuge der sich daran anschließenden Beschreibung der Theorie Richardsons zur relativen Dispersion wird dessen Vorstellung zum Ablauf der Teilchenseparation dargestellt¹. Danach wird das Richardson-Obukhov-Gesetz und die Batchelortheorie zur Separation von Teilchenpaaren erläutert, jeweils mit Darbietung der zugehörigen PDF des relativen Abstandes.

3.1 Diffusion

Zur Beschreibung von Diffusion ist die Positionsänderung der Teilchen von großem Interesse. Aus ihr kann man Kenntnis darüber gewinnen, wie weit die Teilchen während der Diffusion im Mittel kommen. In einem System mit n Teilchen bezeichnet $\mathbf{x}^i(t)$, $i \in [1, n]$, jeweils die Position des i -ten Teilchens zum Zeitpunkt t . Für den Mittelwert gilt dann

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i(t).$$

Die Teilchen seien als Teilchenwolke so positioniert, dass zum Startzeitpunkt t_0 für die mittlere Position $\langle \mathbf{x}(t_0) \rangle = 0$ gilt. Der Abstand zwischen den Teilchen nimmt mit der Zeit zu, die Wolke breitet sich aus, zerfließt also. Werden die Komponenten einzeln

¹Richardsons Theorie basiert auf einem modifizierten Diffusionsprozess. Um Effekte des turbulenten Transports mit einzubeziehen, wurde von ihm in der Diffusionsgleichung ein skalenabhängiger Diffusionskoeffizient verwendet.

betachtet, bewegen sich für jeden Zeitschritt im Mittel fast gleich viele Teilchen in entgegengesetzte Richtungen. Die mittlere Position der Teilchen ändert sich von Zeitpunkt zu Zeitpunkt daher nicht. Deswegen bleibt sie gleich Null. In Abbildung 3.1 ist dieses Verhalten verdeutlicht.

Die mittlere Position ist somit nicht das zu analysierende Maß der Wahl. Mehr Aufschluss bietet die Varianz der Position, also $\langle x(t)^2 \rangle$. Diese Größe ist nun zeitabhängig. Für normale Diffusionsprozesse ist sie dies auf lineare Art und Weise. Beschreibt $x(t)$ eine brownsche Bewegung man erhält die Relation [Bak08]

$$\langle \mathbf{x}(t)^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}^i(t))^2 = aDt.$$

Hierbei ist D der Diffusionskoeffizient, der das Ausbreiten von bestimmten Partikeln in einem bestimmten Medium bei einer bestimmten Temperatur beschreibt. Der Faktor a ist dimensionsabhängig. Für eine eindimensionale Betrachtung ist $a = 2$, für eine dreidimensionale ist $a = 6$.

Turbulenter Transport kann durchaus nichtdiffusiv sein, so dass das Skalierungsverhalten $\langle \mathbf{x}(t)^2 \rangle \propto t$ nicht immer stimmt. Ein solches Verhalten wird anomale Diffusion genannt. Generell unterscheidet man zwischen

- *Subdiffusion* mit $\langle \mathbf{x}(t)^2 \rangle \propto t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$
 - *normaler Diffusion* mit $\langle \mathbf{x}(t)^2 \rangle \propto t^\alpha$, $\alpha = 1$
 - *Superdiffusion* mit $\langle \mathbf{x}(t)^2 \rangle \propto t^\alpha$, $1 < \alpha < 2$.

Wie wir sehen werden, geht turbulentes Mischen schneller vonstatten als molekulare Diffusion, ist also superdiffusiv. Denkt man noch einmal an den oben angeführten Zuckerwürfel im Kaffee, wird man aus Erfahrung wissen, dass sich der Zuckerwürfel unter Rühren schneller auflöst als ohne.

Zur mathematischen Beschreibung der Diffusion dienen die Fickschen Gesetze. Aus dem ersten Fickschen Gesetz lässt sich die klassische eindimensionale Diffusionsgleichung gewinnen [Bak08]

$$\frac{\partial n_V(x_i, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_V(x_i, t)}{\partial x_i^2}. \quad (3.1)$$

Hierbei ist $n_V(x_i, t)$ die Teilchendichte pro Einheitsvolumen am Ort x_i , also zum Beispiel die Konzentration. Für eine zum Zeitpunkt $t = 0$ injizierte Punktquelle mit n Teilchen hat (3.1) eine gaußförmige Lösung

$$n_V(x_i, t) = \frac{n}{(4\pi D t)^{1/2}} e^{-x_i^2/4Dt}. \quad (3.2)$$

Für den dreidimensionalen Fall nimmt die Diffusionsgleichung die Form

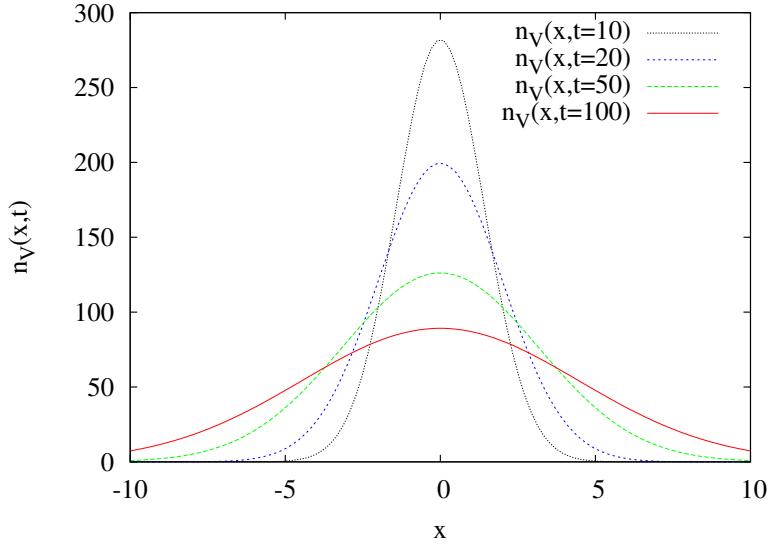


Abbildung 3.1: Gezeigt werden Lösungen der eindimensionalen Diffusionsgleichung zu vier verschiedenen Zeitpunkten, entsprechend der Gleichung (3.2) mit $n = 1000$ und für $D = 0,1$. Deutlich zu erkennen ist, wie die Gaußverteilung mit der Zeit auseinander läuft, dabei aber um den Mittelwert 0 zentriert bleibt.

$$\frac{\partial n_V(\mathbf{x},t)}{\partial t} = D \Delta n_V(\mathbf{x},t)$$

an. Im Falle sphärischer Symmetrie erhält man

$$\frac{\partial n_V(r,t)}{\partial t} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial n(r,t)}{\partial r} \right] \quad (3.3)$$

mit einer für Punktquellen ebenfalls gaußförmigen Lösung

$$n_V(r,t) = \frac{n}{(4\pi Dt)^{3/2}} e^{-r^2/4Dt}.$$

Für den Fall eines nicht konstanten Diffusionskoeffizienten, zum Beispiel eines skalenabhängigen Diffusionskoeffizienten $D(x)$ bzw. $D(r)$ ändert sich Gleichung (3.1) und (3.3) zu [Bak08]

$$\frac{\partial n_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} D(x) \frac{\partial n_V}{\partial x}$$

bzw. zu

$$\frac{\partial n_V}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 D(r) \frac{\partial n}{\partial r} \right]. \quad (3.4)$$

3.2 Relative Dispersion

In diesem Abschnitt werden nicht mehr die Position einzelner Teilchen, sondern deren relativer Abstand zueinander betrachtet. Wir beschränken uns dabei auf Teilchenpaare, also auf die Zweiteilchendispersion. Wiederum liegt eine Strömung vor, in die n Teilchen injiziert werden. Jedes Teilchen hat zum Zeitpunkt t den Ortspunkt $\mathbf{x}^i(t)$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{u}^i(\mathbf{x},t)$, $i \in [1,n]$. Der relative Abstand zweier Teilchen ist dann definiert als

$$\mathbf{r}(t) := \mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)$$

mit der Norm

$$r(t) = |\mathbf{r}(t)|.$$

Die relative Geschwindigkeit zweier Teilchen ist definiert als

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) := \mathbf{u}^1(\mathbf{x},t) - \mathbf{u}^2(\mathbf{x},t)$$

mit der Norm

$$v(\mathbf{x},t) = |\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|.$$

Den Mechanismus hinter der Teilchenpaarseparation zu verstehen ist von großem Interesse und birgt, wie zu Beginn der Arbeit erwähnt, einen großen potentiellen Nutzen für theoretische und praktische Anwendungen. Jedoch ist der Mechanismus seit den ersten Überlegungen von Richardson zur Paarseparation nach wie vor ein noch zu lösendes Puzzle.

3.2.1 Relative Dispersion nach Richardson

Es war Richardson, der das Maß des relativen Abstandes zweier Teilchen zur Beschreibung der turbulenten Dispersion heranzog. Er war nicht nur Mathematiker und Physiker, sondern auch Meteorologe. Zu Beginn der 20. Jahrhunderts wurden Wettervorhersagen zumeist so betrieben, dass zu der aktuellen Wetterlage Daten gleicher Form in alten Aufzeichnungen gesucht wurden, mit deren Hilfe dann Hochrechnungen angestellt wurden. 1922 veröffentlichte Richardson das Buch „Weather prediction by numerical process“ [Ric22], in dem er numerische Methoden zur Wettervorhersage vorstellte. Vier Jahre später versuchte er, in einem Artikel [Ric26] die Diffusion in der Atmosphäre, speziell das enorme Wachstum von Wolken in der Hemisphäre, zu erklären. Hierfür nutzte er nicht räumliche Skalen in der Größenordnung der einzelnen Moleküle, sondern von der Größenordnung her solche, wie sie in der von ihm untersuchten Turbulenz auftraten. Richardson führte in diesem Artikel als Maß den Mittelwert der Quadrate des Abstandes von Teilchenpaaren ein sowie statistische Angaben zur Separation einer Teilchenwolke, die aus einer Vielzahl von Teilchen besteht. Bedingt durch die Inkompressibilität des Geschwindigkeitsfeldes nimmt der mittlere Abstand zweier Teilchen im Laufe der Zeit zu. Richardsons Vorstellung zum Ablauf der turbulenten Separation ist heutzutage nach wie vor aktuell und soll kurz erläutert werden.

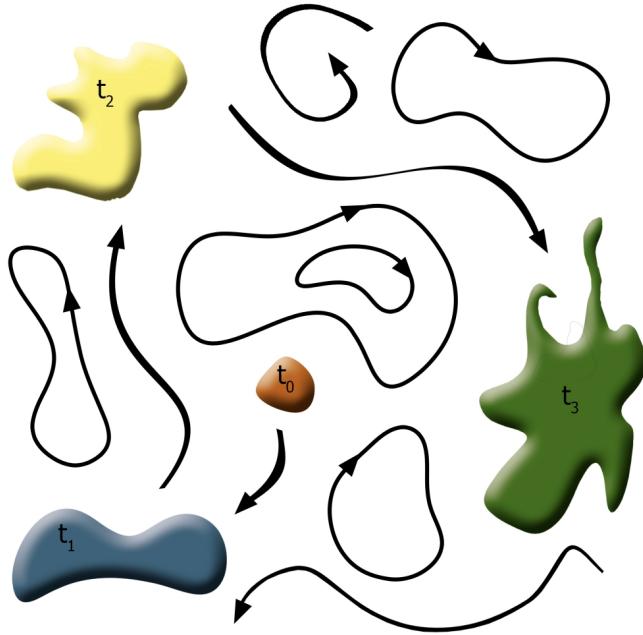


Abbildung 3.2: Skizziert Ablauf der relativen Teilchenseparation. Die farbigen Flächen stellen die Teilchenwolke zu vier verschiedenen Zeitpunkten innerhalb eines turbulenten Feldes dar.

Eine einzelne Wolke vieler dicht beieinanderliegender Teilchen wird in einer turbulenten Strömung losgelassen. Die grundlegende Idee ist die, dass zu allen Zeiten nur Wirbel von ähnlicher Größe des Abstandes zweier Teilchen effektiv zur Separation beitragen, größere Wirbel also fast nahezu keinen Einfluss haben. Der Prozess der Separation läuft nun in mehreren Schritten ab. Schematisch ist er in Abbildung 3.2 dargestellt. Zu Anfang sind alle Partikel dicht beieinander. Der relative Abstand ist also gering und nur wenige Wirbel sind klein genug, um zur Abstandsvergrößerung der Teilchen beizutragen. Mit zunehmender Zeit bewegen sich die Teilchen im Mittel weiter auseinander. Da sich nicht alle Teilchenpaare merklich voneinander entfernt haben, sondern einige auch nahe beieinander geblieben sind, treten neben den größeren Abständen nach wie vor auch noch kleinere auf. Das Spektrum des Teilchenabstandes ist also größer geworden und dadurch auch die Bandbreite der Einfluss habenden Wirbel. Der Prozess der turbulenten Separation geht so lange vonstatten, bis der Teilchenabstand größer als die größten existenten Wirbelstrukturen geworden ist, welche im Bereich der integralen Längenskala liegen. Ist dies der Fall, liegt der relative Abstand außerhalb des Inertialbereichs. Ist diese Grenze überschritten, wird deshalb die Bewegung eines Teilchens unabhängig von der des anderen und es liegt nun normale Diffusion vor.

Richardsonskalierung

Richardson suchte nach einer Möglichkeit zur Beschreibung der Entwicklung der sphärisch gemittelten Wahrscheinlichkeitsdichte $q(\mathbf{r},t)$, zwei anfänglich dicht beieinander liegende Partikel zum Zeitpunkt t mit der Separation \mathbf{r} vorzufinden. Durch die Annahme der sphärischen Symmetrie vereinfacht sich diese Wahrscheinlichkeitsdichte zu $q(\mathbf{r},t) = q(r,t)$. Die Funktion $q(r,t)$ wurde von ihm *Distance Neighbour Function* genannt und ist nichts anderes als die sphärisch gemittelte PDF der relativen Dispersion. Er schlug vor, zur Beschreibung dieser Entwicklung eine Diffusionsgleichung zu nutzen.

Berücksichtigt man, dass nach Richardsons oben erläuterter Vorstellung die Diffusivität skalenabhängig ist, also $K = K(r)$ gilt, wird zur Beschreibung des Diffusionsprozesses die Diffusionsgleichung (3.4) genutzt, welche mit den jetzt eingeführten Variablen

$$\frac{\partial q(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 K(r) \frac{\partial q(r,t)}{\partial r} \right] \quad (3.5)$$

lautet. Um herauszufinden, wie die Diffusivität $K(r)$ mit der Skala r variiert, wertete Richardson sieben experimentell gewonnene Daten der Diffusivität aus [Ric26]. Diese in dem Zeitraum von 1908 bis 1922 ermittelten Datenpunkte setzen sich aus molekularer Diffusion, in verschiedenen Höhen platzierten Windgeschwindigkeitsmessern, Wetterballonen, der Bahn von Ballonen, Vulkanasche sowie durch Zyklone verursachte Diffusion zusammen, welche von Richardson selber bereits in [Ric22] publiziert wurden. Der doppeltlogarithmische Plot dieser Daten ist in Abbildung (3.3) zu sehen. In ihm ist die Gerade ein Fit mit $K(r) = 0.2 \cdot l^{4/3}$, wobei Richardson anmerkt, dass für verschiedene Skalenbereiche der Vorfaktor variiert. So gibt er diesen für den Bereich zwischen einem Meter und zehn Kilometern mit 0,2 an, im Bereich von Zentimetern hingegen mit 0,4. Allgemein führt ihn das zu folgender Aussage über die Skalenabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten

$$K(r) = C_R r^{4/3}, \quad (3.6)$$

wobei C_R die Richardsonkonstante bezüglich des Diffusionskoeffizienten ist. Dieses Ergebnis ist das sogenannte 4/3-Gesetz.

Im selben Artikel gelang es Richardson, die Gleichung (3.6) herzuleiten. Neben der Annahme, dass q und die Teilchenkonzentration im unendlichen Null sind, ist eine weitere besonders hervorzuhebende Einschränkung die, dass ab jetzt als Anfangsbedingung nur noch eine Punktquelle betrachtet wird, in der für alle Teilchenpaare $r(0) = 0$ gilt. Ein anfänglicher Abstand zwischen Teilchen wird also nicht länger berücksichtigt. Mittels einer Fourierlösung für seine Diffusionsgleichung, Gleichung (3.5), und dem zweiten Moment der Konzentrationsverteilung leitete Richardson eine Gleichung für die Varianz $\langle r(t)^2 \rangle$ der Abstände her. Mit Hilfe dieser gelang ihm der Beweis der Gültigkeit von Gleichung (3.6). Für eine ausführlichere Herleitung sei der interessierte Leser an dieser Stelle auf [Ric26] verwiesen, insbesondere §7.1. Die oben angesprochene für $\langle r(t)^2 \rangle$ gewonnene Relation ist eines der zentralen Resultate dieses Artikels. Durch sie wird die

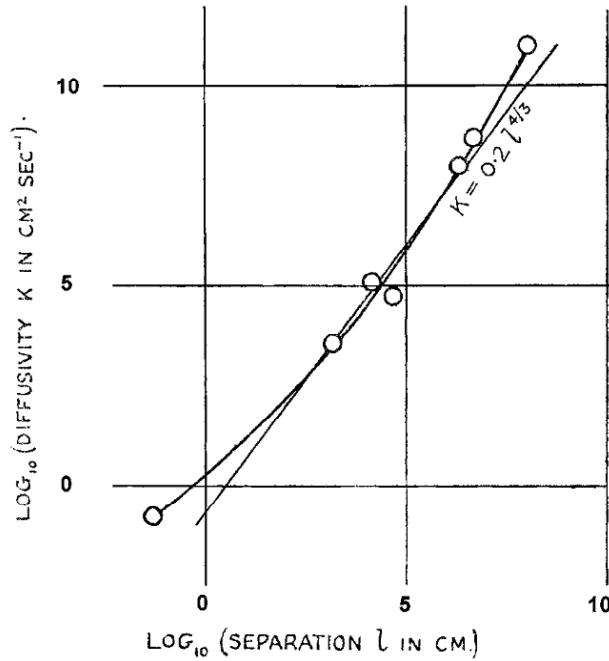


Abbildung 3.3: Doppeltlogarithmischer Plot des relativen Abstandes r gegen die Diffusivität $K(r)$. Die Messwerte liegen auf einer leichten Kurve. Die Gerade zeigt einen Fit mit $K(r) = 0,2 \cdot l^{4/3}$. Entnommen aus [Ric26].

zeitliche Entwicklung der Varianz des Abstandes von Teilchenpaaren beschrieben. Die Relation lautet

$$\langle r(t)^2 \rangle \propto t^3 \quad (3.7)$$

und offenbar ein Skalierungsverhalten dieser Größe.

Richardson-Obukhov-Gesetz

Obukhov, ein Schüler Kolmogorovs, erkannte, dass es in Kombination mit Kolmogorovs Theorie für einen im Inertialbereich ausschließlich von r abhängenden Diffusionskoeffizienten nur eine dimensionsmäßig konsistente Lösung von $K(r)$ gibt, nämlich

$$K(r) = k_0 \epsilon^{1/3} r^{4/3},$$

wobei k_0 eine dimensionslose Konstante ist [Obu41]. Mit diesem Ansatz für $K(r)$ ergibt sich eine selbstähnliche Lösung für Gleichung (3.5). Neben der weiterhin geltenden Anfangsbedingung der Punktquelle, z. B. $q(r,0) = \delta(r)$, und der Randbedingung des Verschwindens von q im Unendlichen $q(\infty,t) = 0$ wird zusätzlich $q(r,\infty) = 0$ angenommen.

Das daraus resultierende Ergebnis lautet

$$q_R(r,t) = \frac{429}{70} \sqrt{\frac{143}{2}} \left[\frac{1}{\pi \langle r(t)^2 \rangle} \right]^{3/2} \exp \left[- \left(\frac{1287 r(t)^2}{8 \langle r(t)^2 \rangle} \right)^{1/3} \right]. \quad (3.8)$$

Man beachte hierbei, dass $q_R(r,t)$ die sphärisch gemittelte PDF des Vektors \mathbf{r} ist und nicht die PDF der Norm r des Vektors. Dies impliziert für die Varianz des relativen Abstandes das Skalierungsgesetz

$$\langle r(t)^2 \rangle = g \epsilon t^3 \quad (3.9)$$

mit $g = \frac{1144}{81} k_0^3$ als sogenannte Richardsonkonstante. Gleichung (3.8) ist eine nicht-gaußsche Verteilung mit einem sehr ausgeprägten Peak im Ursprung. Gleichung (3.9) wird als Richardson-Obukhov-Gesetz bezeichnet. Anzumerken ist hier, dass die Idee der Beschreibung relativer Dispersion mittels einer Diffusionsgleichung die physikalische Annahme beinhaltet, dass das Geschwindigkeitsfeld in der Zeit kurz korreliert ist. In der Tat ist Gleichung (3.5) für in der Zeit δ -korrelierte Geschwindigkeitsfelder exakt [BS02]. Im allgemeinen, realistischen Fall von Turbulenz mit endlichen Korrelationen in der Zeit sind noch keine theoretischen Angaben zu den generellen Eigenschaften von $q(r,t)$ erzielt worden.

3.2.2 Relative Dispersion nach Batchelor

Batchelor entwickelte Richardsons Theorie weiter und erkannte, dass, wenn die anfängliche Separation r_0 berücksichtigt wird, ein zweites Skalierungsgesetz gewonnen werden kann. Seine Theorie offenbart für Zeiten kleiner als eine charakteristische Zeit t_B ein neues Regime mit einem Skalierungsverhalten $\langle r^2 \rangle \propto t^2$ [Bat50]. Die Zeit t_B hängt dabei von der anfänglichen Separation r_0 ab. Betrachtet werden hierzu die den Separationsvektor zweier Teilchen beschreibenden kinematischen Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(t') dt',$$

wobei $\mathbf{v}(t)$ nach wie vor die relative Geschwindigkeit zwischen zwei Teilchen ist. Für die Wachstumsrate der mittleren Separation zweier Teilchen gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d \langle r^2 \rangle}{dt} &= \langle \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{v}(t) \rangle \\ &= \langle \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}(t) \rangle + \int_0^t \langle \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{v}(t) \rangle dt'. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch Anwendung der ersten und zweiten Ähnlichkeitshypothese der K41-Theorie (Abschnitt 2.4) gelingt es Batchelor, Aussagen für kleine und mittlere Zeiten für Gleichung (3.10) zu treffen. In der Originalfassung des Artikels setzte Batchelor den Term $\langle \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}(t) \rangle$

gleich Null, dadurch begründet, dass die anfängliche Separation und die relative Geschwindigkeit unkorreliert wären [Bat50]. Bei der Auswertung in Kapitel 5 und in Experimenten von Oulette et al. [OXBB06] wird jedoch gezeigt, dass der Term nicht vernachlässigt werden darf. Deshalb wird er in weiteren Berechnungen beibehalten.

Die Grenze zwischen kleinen und mittleren Zeiten stellt die sogenannte Bachelorzeit t_B dar. Bis zu diesem Zeitpunkt „erinnert“ sich ein Teilchenpaar an seinen anfänglichen Abstand. Er ist definiert als

$$t_B = \left(\frac{r_0^2}{\epsilon} \right)^{1/3}. \quad (3.11)$$

Somit haben Teilchenpaare mit unterschiedlichen Anfangsseparationen entsprechend unterschiedliche Bachelorzeiten. Für Zeiten $t \ll t_B$ ändert sich die relative Geschwindigkeit nur langsam. Deshalb bleibt sie über den Integrationszeitraum nahezu konstant (und gleich $\mathbf{v}(0)$), wodurch sich Gleichung (3.10) zu

$$\frac{1}{2} \frac{d \langle r^2 \rangle}{dt} - \langle \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}(t) \rangle = \langle \mathbf{v}(0)^2 \rangle t \quad (3.12)$$

reduziert. Liegen sowohl r_0 und $r(t)$ im Inertialbereich, folgt aus der zweiten Ähnlichkeitshypothese Kolmogorovs, dass die rechte Seite von Gleichung (3.12) universellen Charakter hat und nur noch von ν , ϵ und r_0 abhängt. Dimensionale Argumente führen zu

$$\frac{1}{2} \frac{d \langle r^2 \rangle}{dt} - \langle \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}(t) \rangle = \begin{cases} \frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} t & \text{für } t \ll t_B \\ \frac{3}{2} g \epsilon t^2 & \text{für } t_B \ll t \ll T_L, \end{cases} \quad (3.13)$$

wobei C_2 die Kolmogorovkonstante der longitudinalen zweiten Strukturfunktion der Geschwindigkeit aus Gleichung (2.6) ist, g noch dieselbe Bedeutung wie im Richardson-Obukhov-Gesetz zukommt und T_L die integrale Zeitskala ist. Die Integration von Gleichung (3.13) liefert

$$\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle = \begin{cases} \frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} t^2 & \text{für } t \ll t_B \\ \frac{3}{2} g \epsilon t^3 & \text{für } t_B \ll t \ll T_L. \end{cases} \quad (3.14)$$

Hiermit zeigte Batchelor die Existenz eines bis dahin noch nicht behandelten Bereichs für $t \ll t_B$ auf, auf den man sich heute als Bachelorregime bezieht. Die zweite Vorhersage von Gleichung (3.14) wird als Richardson-Obukhov-Regime bezeichnet.

Distance Neighbour Function nach Batchelor

Ebenso wie Richardson beschäftigte sich auch Batchelor mit der Distance Neighbour Function $q(r,t)$. Er wählte jedoch einen anderen Ansatz. Nach Batchelors Theorie ist der Diffusionskoeffizient K Ergebnis statistischer Mittelung über verschiedene Gruppen von Skalen. Er schlug daher vor, an Stelle eines skalenabhängigen einen zeitabhängigen

Diffusionskoeffizienten $K(t) = k_0 \epsilon t^2$ zu verwenden. Wird dieser in Richardsons Diffusionsgleichung (3.5) eingesetzt und unter denselben von Richardson verwendeten Anfangs- und Randbedingungen gelöst, ergibt sich die Batchelor-PDF zu

$$q_B(r,t) = \left(\frac{3}{2\pi \langle r(t)^2 \rangle} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{3}{2} \frac{r(t)^2}{\langle r(t)^2 \rangle} \right]. \quad (3.15)$$

Ebenso wie $q_R(r,t)$ ist auch $q_B(r,t)$ die PDF des Vektors \mathbf{r} . Gleichung (3.15) impliziert auch Gleichung (3.9), jedoch mit $g = 2k_0$. Sie ist im Gegensatz zu der von Richardson angegebenen PDF $q_R(r,t)$ (3.8) eine Gaußverteilung.

4 Experimente und Numerik – Übersicht der aktuellen Forschungsergebnisse

Zusammen mit stetig wachsenden Rechnerleistungen ermöglichen neue experimentelle Techniken die systematische und quantitative Untersuchung turbulenter Dispersion bei kleinen und großen Reynoldszahlen. Sowohl Experiment als auch Numerik sind aber immer noch durch unterschiedliche Probleme in ihren Möglichkeiten begrenzt. Im Falle der direkten numerischen Simulation (DNS) der Navier-Stokes-Gleichung bzw. der Wirbeltransportgleichung ist das Erzielen hoher Reynoldszahlen das Problem, im Falle von Experimenten das Messvolumen und die Erfassungszeit. Im folgenden Kapitel wird ein Überblick über die in den letzten Jahren erzielten Resultate aus Laboren und Computersimulationen gegeben. Es werden ausgewählte Plots aus entsprechender Literatur dargeboten. Es sind solche, wie sie im hierauf folgenden Kapitel zur Auswertung gezeigt werden. Dadurch soll ein Vergleich zwischen den im Rahmen dieser Diplomarbeit gewonnenen Resultaten mit denen der vorgestellten Literatur vereinfacht werden. Der erste Teil beschäftigt sich mit den experimentellen Ergebnissen. Dabei werden ausschließlich Experimente aus Laboren besprochen, keine in der Umwelt durchgeführten. Letztere untersuchen Strömungen in der Atmosphäre und in Ozeanen, welche auf Grund ihrer – im Vergleich zu der ausgedehnten Breite und Tiefe – nur geringen Höhe vom Strömungsverhalten her der zweidimensionalen und nicht der dreidimensionalen Turbulenz entsprechen. Der zweite Teil dieses Kapitels stellt mittels DNS gewonnene Resultate vor.

4.1 Experimentelle Untersuchungen

Die experimentellen Untersuchungen turbulenter Strömungen können in zwei Techniken unterschieden werden: der Eulerschen und der Lagrangeschen. Beide haben mit den oben genannten Grenzen zu kämpfen. Um Lagrangesche Messdaten über alle Skalen zu gewinnen, muss das Messvolumen von der Größenordnung des von der integralen Länge aufgespannten Volumens L^3 sein, die Erfassungszeit von der Größenordnung der Large Eddy Turnover Time T_0 und die zeitliche Auflösung kleiner als die Kolmogorovzeit τ_η . Zusätzlich haben die verwendeten Lagrangeschen Teilchen bestimmte Anforderungen zu erfüllen. Schließlich sollen sie der turbulenten Strömung möglichst direkt folgen. Um das zu gewährleisten, muss ihre Größe und ihre Reaktionszeit klein sein im Vergleich zu den entsprechenden charakteristischen Größen der Strömung, z. B. der Kolmogorovlänge η und der Kolmogorovzeit τ_η . Für verschiedene Fluide zeigt Abbildung 4.1 die Kolmo-

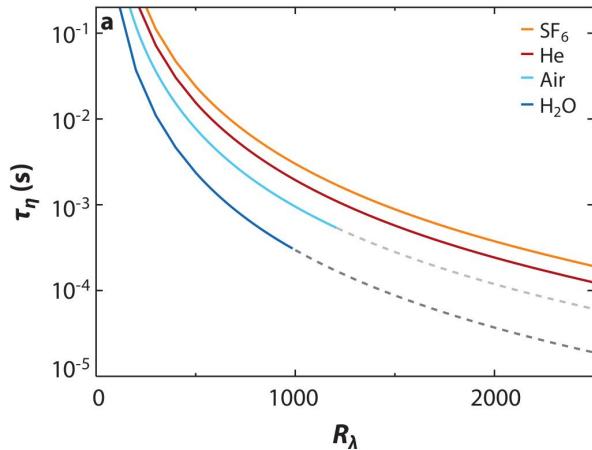


Abbildung 4.1: Gezeigt wird die Auftragung der Kolmogorovzeit τ_η gegen die Taylor-Reynolds-Zahl R_λ in turbulenten Strömungen. Die graugestrichelten Linien geben Taylor-Reynolds-Zahlen an, welche durch die begrenzten Möglichkeiten noch nicht erreicht werden können. Heliumdaten bei niedrigen Temperaturen aus den Experimenten von Tabeling et al. [TZB⁺96] (Energieinjektionsskala $L' = 0,2\text{ m}$, $R_\lambda < 3000$), Luftdaten aus dem Experiment von Mydlarski & Warhaft [MW98] ($L' = 0,5\text{ m}$, $R_\lambda < 1200$), Wasserdaten vom Experiment von La Porta et al. [LVC⁺01] und von Voth et al. [VLPC⁺02] ($L' = 0,07\text{ m}$, $R_\lambda < 1000$) und SF₆-Verlauf ist geschätzt ($L' = 0,07\text{ m}$, $R_\lambda < 3500$, $p = 20\text{ bar}$). Entnommen aus [TB09].

gorovzeiten und die Grenzen der Möglichkeiten, die in den jeweiligen Experimenten aufgetreten sind.

4.1.1 Eulersche Messungen

Experimentelle Untersuchungen turbulenter Strömungen werden von Eulerschen Messungen dominiert, z. B. von Messungen an festen Ortspunkten in der Strömung. Erkenntnisse über Dispersion lassen sich besser aus Lagrangeschen Messvarianten gewinnen, weil die dafür notwendigen Daten bei dieser Methode leichter zu bestimmen sind (s. u.). Deshalb soll auf die Eulerschen Messungen an dieser Stelle nur kurz eingegangen werden. Der interessierte Leser sei auf die entsprechend angegebene Literatur verwiesen.

Eine weitverbreitete Methode beruht auf der Verwendung von Hitzdrähten. Mit ihnen ist die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes an mehreren Orten messbar. Unter Verwendung der Taylorhypothese ist eine Transformation der Messwerte von dem Zeitwertebereich in den Ortswertebereich möglich und dadurch auch die Angabe von Druck- und Beschleunigungsstatistiken [GAW04, HW95, MY75]. Ebenso lassen sich Geschwindigkeitsgradienten angeben [GKK⁺07]. Alternative Techniken zu den Hitzdrähten stellen die Laserdoppleranemometrie (LDA) und die Particle Image Velocimetry (PIV) dar. Bei der ersten wird ein Laserstrahl mittels eines Strahlteilers geteilt. Am Messpunkt kreuzen sich die Strahlen wieder, wodurch ein Interferenzstreifenmuster entsteht.

Passiert ein Teilchen den Messpunkt, reflektiert es Licht der konstruktiven Interferenz in einen hinter der Probe befindlichen Photodetektor. Durch das Messen der Dopplerfrequenzverschiebung des gestreuten Lichtes lässt sich die Geschwindigkeit des Teilchens und damit auch die des Fluids an dieser Stelle angeben. Die Laserdoppleranemometrie erlaubt jedoch nur punktweise Messungen und ist dadurch in ihrer Anwendung limitiert. Bei dem PIV werden die mit dem Fluid mitströmenden Teilchen pulsierend von einem zur Ebene aufgeweiteten Laser beleuchtet. Je nach Verfahren werden während eines Pulses entweder ein oder zwei Bilder geschossen, wobei die Auslösegeschwindigkeit der Kamera der Strömungsgeschwindigkeit anzupassen ist. Aus den Aufnahmen lässt sich die Geschwindigkeit des Teilchens und somit auch die lokale Geschwindigkeit des Fluids an dieser Stelle bestimmen. Auch wenn die Messvarianten dieser Methoden vollkommen Eulersch sind, lassen sich einige Größen, wie z. B. die Teilchengeschwindigkeiten angeben. Diese sind jedoch durch Lagrangesche Messungen leichter zu bestimmen.

4.1.2 Tracking Lagrangescher Teilchen

Der Begriff Tracking beinhaltet alle Bearbeitungsschritte, die der gleichzeitigen Verfolgung von bewegten Objekten dienen. Forscher nutzen verschiedene Trackingtechniken, um die Lagrangeschen Eigenschaften von turbulenten Strömungen zu messen. Die wichtigsten seien hier kurz genannt. Die Molecular Flow Tagging Velocimetry (MFT) kommt ohne Tracer aus und basiert auf dünnen, markierten Linien, die von einem Laser in die Strömung gezeichnet werden [MLZ91, Ele05]. Es werden für kurze Zeiten die Verschiebung und Formänderung der Linien mittels laserinduzierter Fluoreszenz ermittelt. Das Problem der MFT ist die disperse Aufweitung in der Richtung der Linien, weshalb nur begrenzte Zeitintervalle ausgewertet werden können. Eine andere Technik ist die Acoustic Doppler Velocimetry (ADV) [MMMP01, MDL⁺02, MLP04, QBB⁺07]. Basierend auf dem Dopplereffekt dient sie der Geschwindigkeitsmessung von Teilchen. Jedoch sind hierbei die Messungen auf Teilchen der Größe von etwa der fünffachen Kolmogorovskala beschränkt. Des Weiteren löst die ADV keine Ortsinformationen auf und erlaubt nur das Tracken eines einzelnen Teilchens. Eine neue Entwicklung in den letzten Jahren sind instrumentalisierte Partikel zur Untersuchung Lagrangescher Turbulenz [GSG⁺07, SGG⁺07]. Diese verfügen über eingebaute Sensoren zur Messung lokaler Größen, wie z. B. Temperatur oder Beschleunigung, und sind in der Lage, die gemessenen Daten in Echtzeit zu übertragen. Das Problem dieser vielversprechenden Methode ist die derzeitige Größe der Teilchen, die ihren Einsatz zur Erforschung turbulenter Strömungen stark beschränkt. Weitere Verkleinerungen der Elektronik und der Energiequelle können dieses Problem jedoch minimieren.

Die gegenwärtig erfolgreichste Methode zur Messung Lagrangescher Turbulenz ist das Lagrangian Particle Tracking (LPT). Dieses optische Verfahren ermöglicht zugleich die Messung von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mehrerer Teilchen. Zwar gibt es unterschiedliche Durchführungen der LPT, aber der Versuchsaufbau ist bei allen im Großen und Ganzen derselbe. Der Aufbau und Ablauf wird kurz im Allgemeinen erläu-

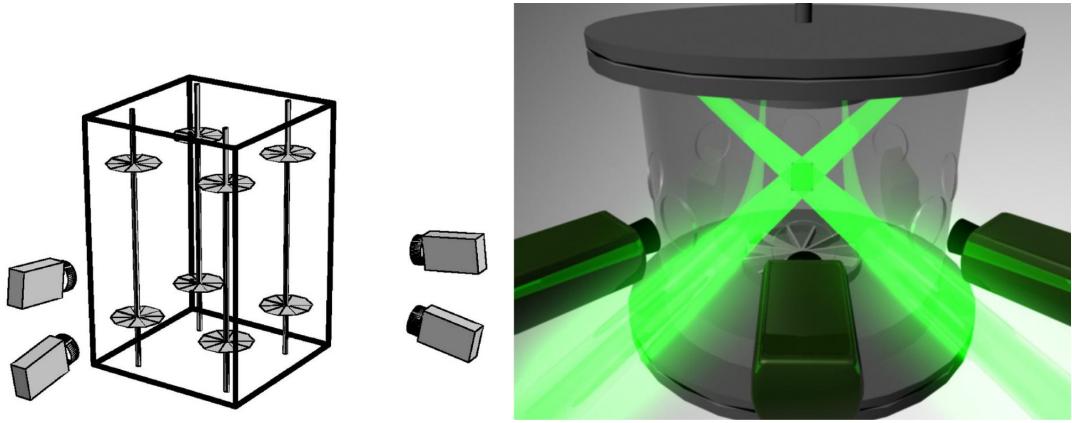


Abbildung 4.2: Zwei Versuchsaufbauten. Links: Verwendet werden vier Kameras und acht in den Ecken platzierte Propeller. Entnommen aus [BLMO06]. Rechts: Zwei sich gegenläufig drehende strukturierte Platten, drei Kameras und zwei Nd:YAG-Laser zur Ausleuchtung werden verwendet. Entnommen aus [OXBB06].

tert. Detailliertere Informationen sind in [VD97, OM00, BOX⁺06, OXBB06, BLMO06] nachzulesen. In einem geschlossenen Messvolumen, meist zylindrisch oder rechteckig geformt, wird durch einen Antrieb Turbulenz erzeugt. Beispielsweise geschieht dies in rechteckigen Gefäßen mittels in jeder Ecke des Gefäßes platzierten Propellern, welche in festen Zeitintervallen ihren Drehsinn ändern. In zylindrischen Gefäßen dagegen werden dazu oben und unten im Gefäß befindliche, sich gegenläufig drehende strukturierte Platten verwendet. Abbildung 4.2 zeigt zwei solcher Versuchsaufbauten.

Zum Tracken der Partikel werden eine Lichtquelle zum Ausleuchten der Partikel sowie drei oder vier Kameras verwendet. Das eigentliche Tracken kann allgemein in drei Schritte unterteilt werden. Zunächst müssen die Partikel auf den von den Kameras aufgenommenen Bildern identifiziert und ihre Mittelpunkte bestimmt werden. Als nächstes gilt es, dreidimensionale Positionsangaben der Teilchen zu gewinnen. Dazu werden die von jeder Kamera erhaltenen zweidimensionalen Koordinaten der Teilchenmittelpunkte miteinander korreliert. Eine angenehme Begleiterscheinung dieses Schrittes ist, dass fälschlich erkannte Partikel verworfen werden, weil solche sich nicht mit den Bildern der anderen Kameras vereinen lassen. Zuletzt müssen die dreidimensionalen Koordinaten der Teilchen zeitlich verfolgt werden, um Teilchenbahnen zu erzeugen. Zum Teilchentracken werden unterschiedliche Algorithmen verwendet, auf die an dieser Stelle aber nicht näher eingegangen wird. Das optische Tracken erlegt der turbulenten Strömung jedoch eine Begrenzung auf. Es können nur niedrig turbulente Strömungen kleiner Reynoldszahlen untersucht werden, weil die Teilchenbewegungen in Zeiten vergleichbar zu den kleinsten Zeitskalen des Systems, etwa der Kolmogorovskala τ_η , aufgelöst werden müssen. Mit Hilfe der Gleichungen (2.4) und (2.5) lässt sich erkennen, dass große Reynoldszahlen kleine Kolmogorovzeiten zur Folge haben. Die Auflösungszeit und damit auch

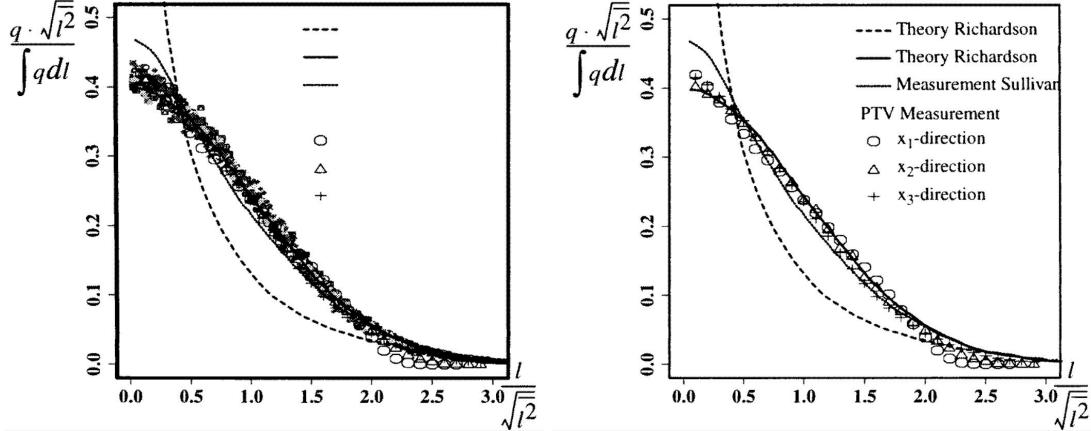


Abbildung 4.3: Ergebnisse von Virant und Dracos mit $R_\lambda = 101$. Bei den Abbildungen entspricht $l = r$. Links: Distance Neighbour Function q zu verschiedenen Zeitpunkten. Rechts: Mittlere Distance Neighbour Function q verglichen mit Richardsons und Batchelors Theorie. Falsch bezeichnet ist in der Legende die zweite Linie. Richtigerweise stellt diese die Theorie Batchelors dar. Entnommen aus [VD97].

die Bildwiederholraten der Kameras spielen hier somit eine entscheidende Rolle.

Resultate experimenteller Untersuchungen

Die ersten aus einem Versuchsaufbau gewonnenen Resultate zur relativen Dispersion von Teilchenpaaren wurden 1997 von Virant und Dracos präsentiert [VD97]. Verwendet wurde eine offene Kanalströmung, in deren Mittellinie eine Teilchenwolke injiziert wurde. Das Tracken der Teilchen ergab, dass die gemessene Distance Neighbour Function $q(r,t)$ gut mit Batchelors Vorhersage $q_B(r,t)$ übereinstimmte (siehe Abbildung (4.3)). Das Experiment wurde mit $R_\lambda = 101$, $\tau_\eta = 0,160$ s, einem Messvolumen von ungefähr $120L$ und Kameras mit einer Bildwiederholrate von 25 Hz durchgeführt. L ist hierbei nach wie vor die integrale Länge. Daten von $\langle r(t)^2 \rangle$ bzw. $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \rangle$ und somit Angaben zu einem möglichen Skalierungsverhalten dieser Größen wurden von den Autoren nicht gezeigt.

Im Jahre 2000 veröffentlichten Ott und Mann Ergebnisse zur relativen Dispersion von Teilchenpaaren [OM00]. Zur Versuchsdurchführung wurde durch ein mit der Frequenz F oszillierendes Gitterpaar Turbulenz mit $R_\lambda \approx 100$ in einem Wassertank erzeugt. Das Messvolumen betrug $7L$. Es wurde keine Teilchenwolke freigesetzt, sondern das Wasser im Tank komplett mit Teilchen durchmischt. Getrackt wurden ausgewählte Teilchenpaare mit einem anfänglichen relativen Abstand von $r_0 = 10\eta$. Die Größe $\langle r(t)^2 \rangle$ weist anfänglich ein nicht Richardson-Obukhov-ähnliches Skalierungsverhalten auf, welchem die Autoren eine t^2 -Abhängigkeit in Übereinstimmung mit dem Batchelorregime beimaßen. Im weiteren Verlauf ist die Tendenz zu einer t^3 -Skalierung erkennbar. Um eine

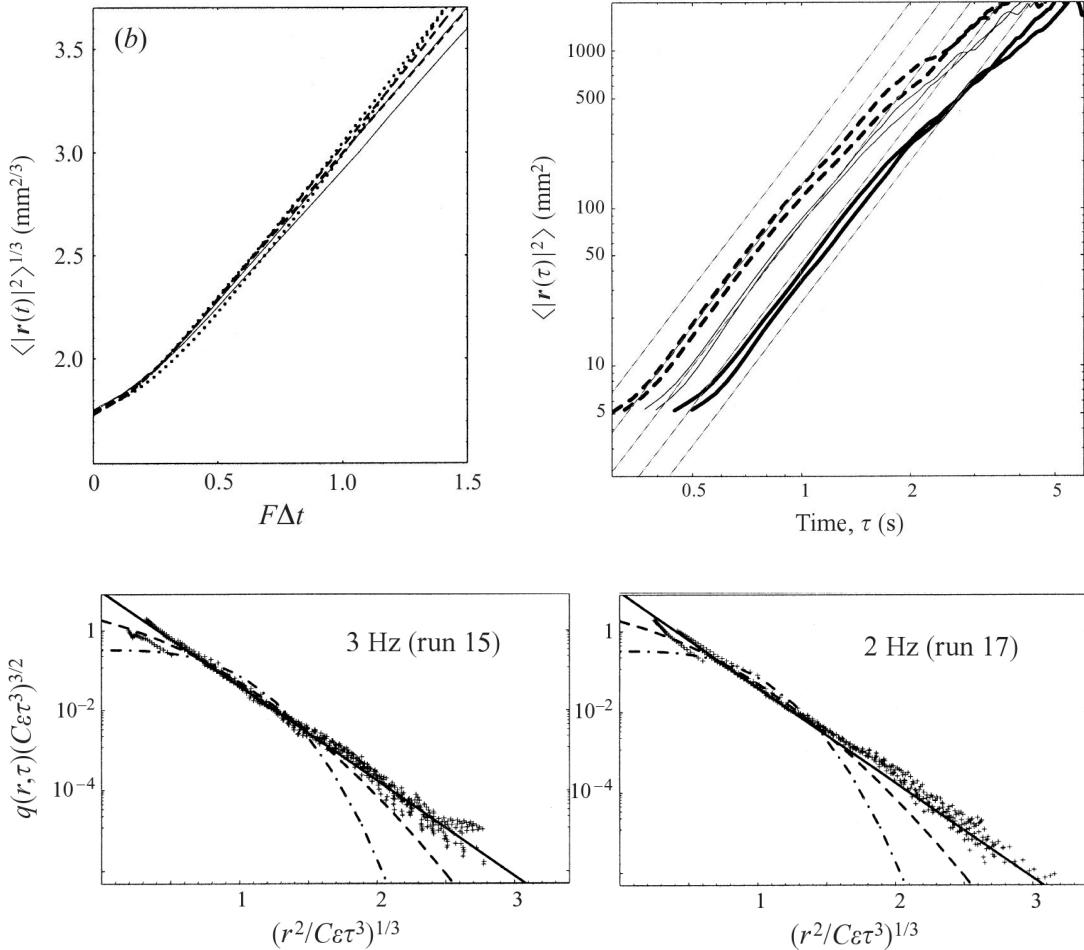


Abbildung 4.4: Resultate von Ott und Mann mit $R_\lambda \approx 100$. Oben links: Die dritte Wurzel der Varianz des relativen Abstandes im Inertialbereich aufgetragen gegen das Produkt aus Frequenz F und Zeit Δt . Oben rechts: Doppeltlogarithmische Darstellung der Varianz der um t' verschobenen Zeit $\tau = t - t'$ aufgetragen gegen τ . Die dünnen Geraden sind $\propto \tau^3$. Unten: Die Distance Neighbour Functions mit $0,25 \text{ s} < \Delta t < 1,25 \text{ s}$ im Vergleich zur Theorie Richardsons (durchgezogene Linie) und Batchelors (punktiertgestrichelte Linie). Entnommen aus [OM00].

mögliche Richardson-Obukhov-Skalierung besser sichtbar zu machen, führten die Autoren eine Zeitverschiebung $\tau = t - t'$ durch, wobei t' die Nullstelle eines linearen Fits von $\langle r(t)^2 \rangle^{1/3}$ im Inertialbereich ist. Durch das Umformulieren des Richardson-Obukhov-Gesetzes zu $\langle r(\tau)^2 \rangle = g\epsilon\tau^3$ ist nun ein Regime von etwa $10\tau_\eta$ auffindbar, das mit τ^3 skaliert (siehe Abbildung 4.4 oben). Die mittels der Zeitverschiebung ausgewertete Distance Neighbour Function $q(r,\tau)$ ist aus Autorensicht in exzellerter Übereinstimmung mit der Richardsons $q_R(r,t)$ (siehe Abbildung 4.4 unten). Um den anfänglichen Bereich von $\langle r(t)^2 \rangle$ sicher als Batchelorregime identifizieren zu können, hätte jedoch die anfängliche Separation subtrahiert werden müssen. Darauf hinaus wurde die Methode der Zeitverschiebung von Oulette kritisiert, der zeigte, dass dieses Verfahren für ein gegebenes Exponentialgesetz t^m einen Bereich $\propto t^\gamma$ für jedes γ ergeben kann (siehe [SC09]). Ein weiteres Problem ist, dass keine Klarheit über die Wahl eines angemessenen Bereichs herrscht, in dem der oben erwähnte Fit durchgeführt wird. Dies hat eine Unsicherheit in der Bestimmung des Offsets t' zur Folge.

Bourgoin et al. [BOX⁺06] und Oulette et al. [OXBB06] gelang es 2006 durch Verwendung extrem schneller Kameras, die Limitierung auf kleine Taylor-Reynolds-Zahlen zu überwinden. Ihre Publikation wird an dieser Stelle ein wenig ausführlicher dargestellt, weil im späteren Verlauf der Arbeit insbesondere auf ihre Ergebnisse noch einmal Bezug genommen wird. In einem zylindrischen Wassertank erzeugten gegenläufig drehende strukturierte Platten Turbulenz mit $R_\lambda = 815$ (Aufbau siehe Abbildung 4.2 rechts). Die gemessenen Daten skalieren fast mit t^2 und für verschiedene Anfangsseparationen r_0 liegen diese bei Skalierung mit $r_0^{2/3}$ übereinander (siehe Abbildung 4.5). Sie stellen einen Beweis für ein Batchelorregime über zwei Zehnerstellen von t/t_B dar. Bei $t/t_B \approx 0,07$ weichen die Kurven von der Batchelorvorhersage ab. Im darauf folgenden Verlauf liegt ein Übergang zu einem Regime t^γ mit $\gamma < 2$ vor. Die in Batchelors Originalartikel behandelte Größe $\langle \mathbf{r}(t)^2 \rangle - \mathbf{r}_0^2$ wird ebenfalls gezeigt (Abbildung 4.5). Dabei geht aber das vorher konstatierte gute, universelle Skalierungsverhalten verloren. Dies legt nahe, dass der Term $\langle \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}(t) \rangle$ entgegen Batchelors Annahme ungleich Null ist und daher, wie bereits in Abschnitt 3.2.2 erwähnt, in die Untersuchungen weiter mit einbezogen werden sollte.

Bei der Auswertung der Distance Neighbour Function führten die Autoren eine Variablentransformation durch, um die gemessenen Daten mit den Theorien Richardsons und Batchelors vergleichen zu können. Schließlich gelten die beiden Gleichungen für die PDF $q_R(r,t)$ und $q_B(r,t)$ (Gleichungen (3.8) und (3.15)) nur für Punktquellen mit $r_0 = 0$, wohingegen die Partikel in dem Experiment ein endliches r_0 aufweisen. Um die Situation der Punktquelle zu approximieren, definieren sie die neue Größe $\Delta r(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|$ und bestimmen damit die sphärische gemittelte PDF $q(\Delta r,t)$. Untersuchungen dieser zeigen das Auftreten der Selbstähnlichkeit (Abbildung 4.6). Für kleine Anfangsabstände ($r_0 < 40\eta$) ist die gemessene PDF $q(\Delta r,t)$ ähnlich zu Richardsons Vorhersage $q_R(r,t)$, während für große Anfangsabstände ($r_0 > 1100\eta$) die Daten annähernd mit Batchelors Form $q_B(r,t)$ übereinstimmen. Die PDF erlebt mit wachsendem Anfangsabstand zweier Teilchen einen Wandel von Richardsons hin zu Batchelors Form.

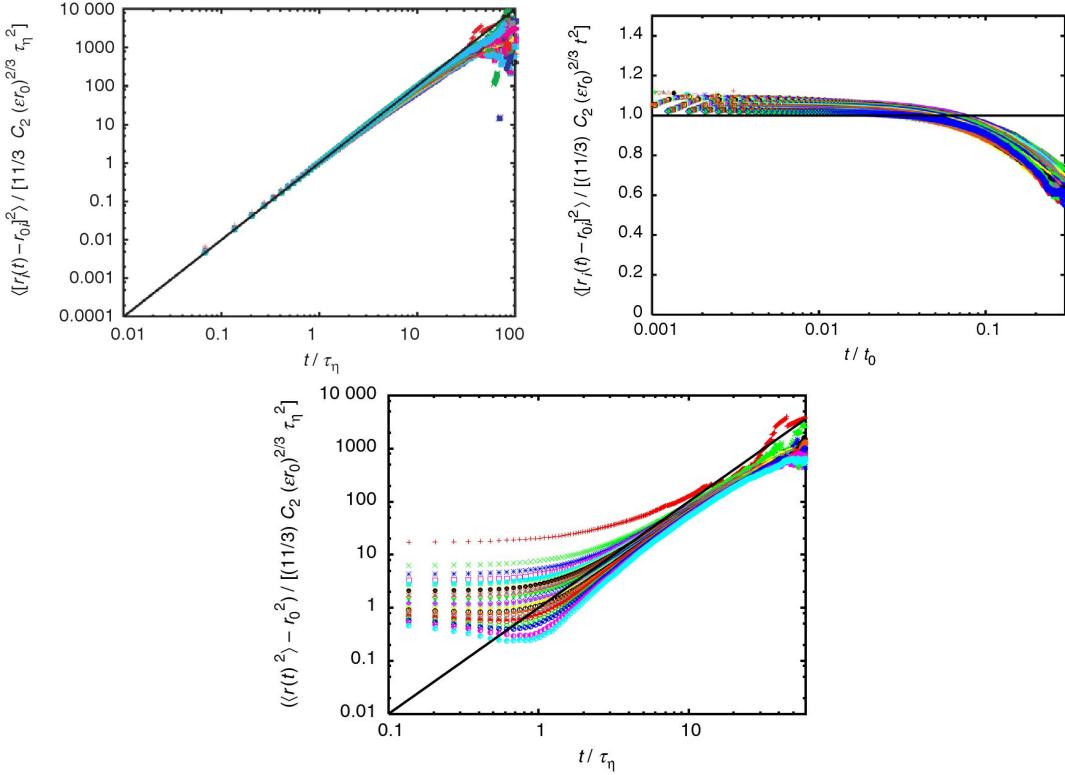


Abbildung 4.5: Resultate von Bourgoin et al. und Oulette et al. mit $R_\lambda \approx 815$. Oben links: Mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}\tau_\eta^2$ skalierte relative Dispersion $\langle|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2\rangle$ für 50 verschiedene kleine Wertebereiche, sogenannte Bins, des Anfangsabstandes der Teilchen mit $r_0 \in [0 \text{ mm}, 1 \text{ mm}]$ ($\approx [0\eta, 43\eta]$) bis $r_0 \in [49 \text{ mm}, 50 \text{ mm}]$ ($\approx [2107\eta, 2150\eta]$). Die durchgezogene Linie ist die Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$. Durch die $r_0^{2/3}$ -Skalierung liegen die Daten sehr gut auf dieser Geraden übereinander. Oben rechts: Kompensierter mittlerer quadratischer Teilchenabstand. Bei dieser Skalierung fallen die Daten in Raum und Zeit zusammen. Unten: Die in Batchelors Artikel behandelte Größe $\langle|\mathbf{r}(t)|^2\rangle - \mathbf{r}_0^2$ skaliert mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}\tau_\eta^2$. Es ist kein universelles Verhalten für verschiedene Anfangsabstände vorhanden. Das gute Übereinanderliegen der Kurven ist verloren gegangen. Entnommen aus [OXBB06].

Im Widerspruch zu dem theoretisch auf das Batchelorregime folgende Richardson-Obukhov-Regime steht das im vorangehenden Absatz angesprochene Regime t^γ mit $\gamma < 2$. Der Übergang könnte der normalen Diffusion zugeschrieben werden, die auftritt, wenn Teilchenpaare sich oberhalb der integralen Skala separieren. Ein Einwirken des endlichen Messvolumens ist auch nicht auszuschließen. Dieses ist recht klein mit einem Verhältnis der Volumenlänge L_{vol} zur typischen Längenskala L_0 des Systems von $L_{vol}/L_0 \approx 0,7$. Diese Einschränkung des Experimentes kann nach Einschätzung von Berg et al. [BLMO06] ein Grund dafür sein, dass es den Autoren nicht gelingt, eine Richardson-Obukhov-Skalierung nachzuweisen. Nach Auffassung von Berg et al. wird zudem eine

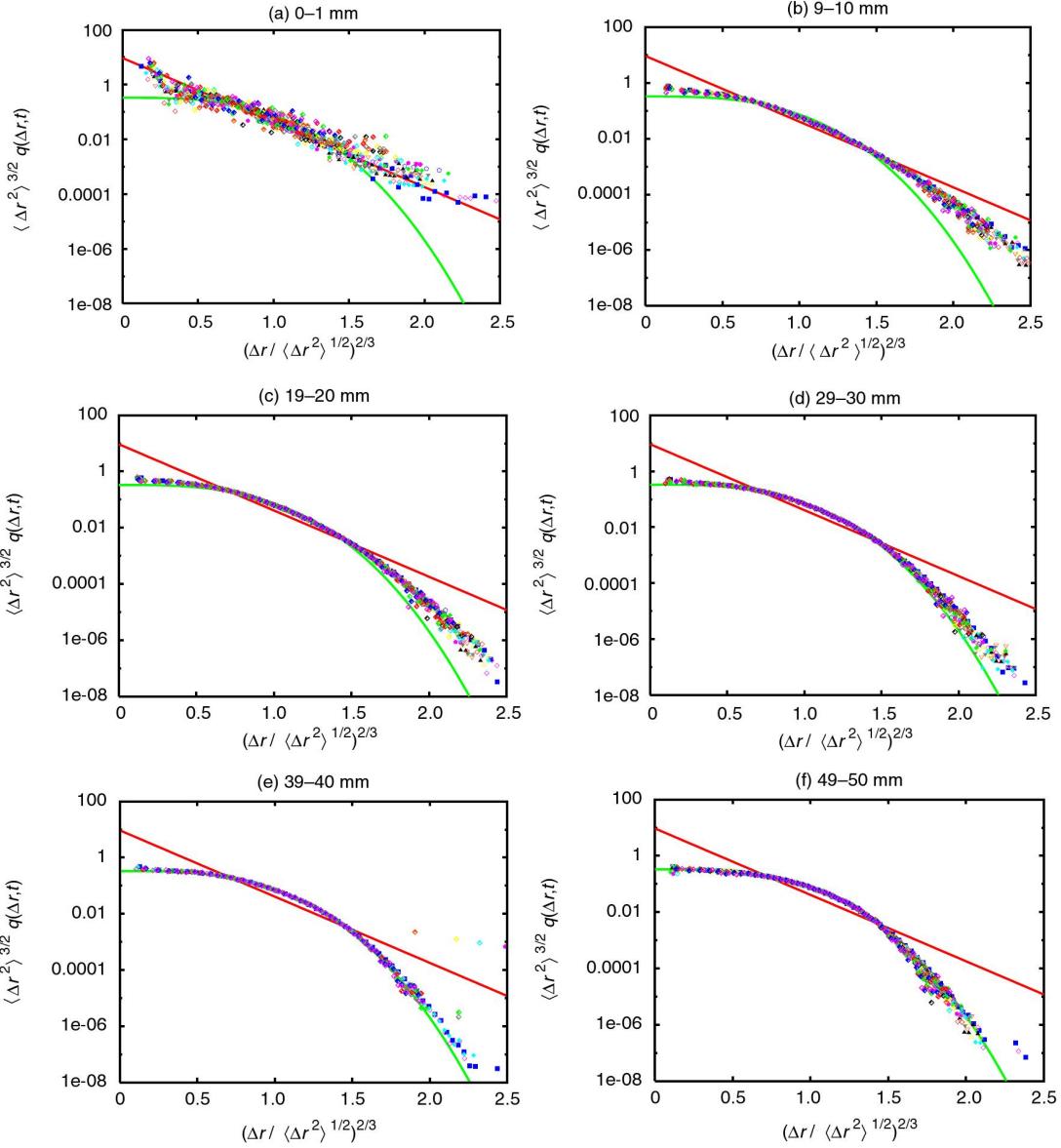


Abbildung 4.6: Ergebnisse von Oulette et al. Gezeigt wird die Distance Neighbour Function für unterschiedliche Anfangsabstände zweier Teilchen. Die rote gerade Linie ist Richardsons vorhergesagte PDF, die grüne gekrümmte Linie ist Batchelors. Die Symbole stellen die experimentellen Messergebnisse dar. Jeder Plot zeigt einen anderen relativen Anfangsabstand. Für jeden dieser Anfangsabstände werden PDFs von 20 Zeitpunkten gezeigt, von τ_η bis $20\tau_\eta$ reichend. $R_\lambda \approx 815$, $\Delta r(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|$ und $1 \text{ mm} \approx 43\eta$. Entnommen aus [OXBB06].

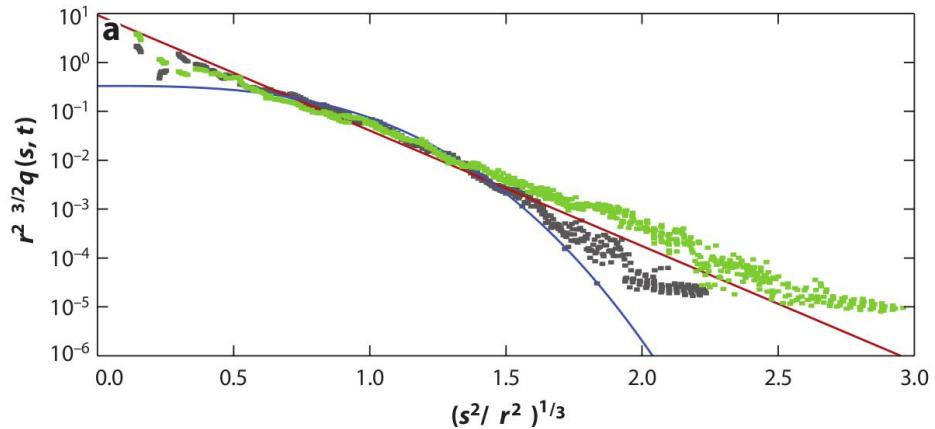


Abbildung 4.7: Von Berg et al. gemessene Distance Neighbour Function für Vorwärts- (graue Punkte) Rückwärtsdispersion (rote Punkte) für Paare mit $r_0 \in [12\eta, 16\eta]$. Die rote gerade Linie ist Richardsons Vorhersage, die blaue gekrümmte ist Batchelors. In diesem Plot entspricht $s^2 = r(t)^2$ und $r^2 = \langle r(t) \rangle$. Entnommen aus [BLMO06].

noch turbulentere Strömung für einen Nachweis benötigt. Weiterhin sei darauf hingewiesen, dass die Strömung dieses Experiments nicht homogen und nicht statistisch isotrop war. Allerdings ist dieses das einzige der hier vorgestellten Experimente, das auf Grund seines Wertes $R_\lambda = 815$ eine Anforderung von Yeung erfüllt. Basierend auf Anhaltspunkten von direkten numerischen Simulationen setzt dieser R_λ von mindestens 600 bis 700 voraus, um im Inertialbereich echtes Skalierungsverhalten Lagrangescher Größen wie die relative Dispersion zu sehen [Yeu02].

2006 maßen Berg et al. die relative Dispersion in einem Wassertank, in dem Turbulenz mit $R_\lambda \approx 172$ durch acht in den Ecken platzierten Propellern erzeugt wurde (Aufbau siehe Abbildung 4.2 links). Durch Anwendung einer Zeitverschiebung ähnlich der von Ott und Mann [OM00] fanden sie einen Bereich, der in Übereinstimmung mit dem Richardson-Obukhov-Gesetz skaliert. Jedoch sagen sie ausdrücklich, dass sie keinen Anspruch darauf erheben, wahre Richardson-Obukhov-Skalierung gefunden zu haben. Die weiterhin berechnete Distance Neighbour Function steht in guter Übereinstimmung mit der von Richardson (siehe Abbildung 4.7). Im Vergleich zu Bourgoin et al. und Oulette et al. erzielten Berg et al. in ihrem Experiment ein besseres Verhältnis von L_{vol} zu L_0 und zwar $L_{vol}/L_0 \approx 2,5$. Mit diesem Wert haben sie ihrer Ansicht nach ein genügend großes Messvolumen zum Nachweis einer Richardson-Obukhov-Skalierung, was in ihren Augen bei Bourgoin et al. und Oulette et al. nicht erfüllt war (s. o.). Jedoch erreichten sie nicht den von Yeung geforderten Wert R_λ von 600 bis 700, welcher zum Nachweis echten Skalierungsverhaltens nötig sein soll.

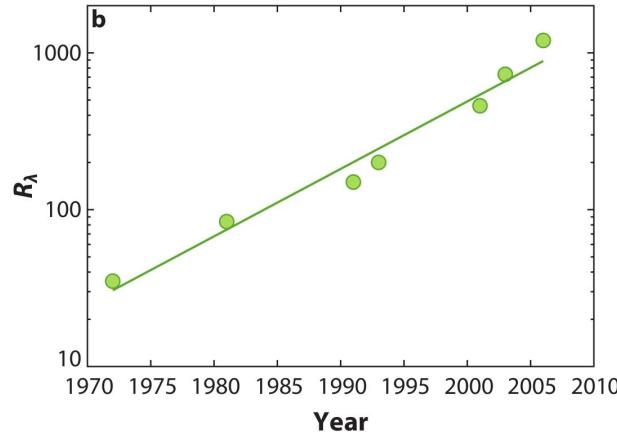


Abbildung 4.8: Entwicklung bei DNS erreichter Werte von R_λ gegen die Jahreszahl, jeweils für zu dem Zeitpunkt auf dem neusten Stand der Technik beruhenden Simulationen. Entnommen aus [TB09].

4.2 Direkte numerische Simulationen

Bei rechnerunterstützten Untersuchungen Lagrangescher Eigenschaften der Turbulenz wird die Navier-Stokes-Gleichung (2.1) oder die Wirbeltransportgleichung (2.3) numerisch gelöst und das Eulersche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ zur Berechnung der Trajektorien $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ von Lagrangeteilchen genutzt. Diese DNS beinhalten meistens ein Pseudospektralverfahren mit Dealiasing für das Eulersche Geschwindigkeitsfeld oder für das Vortizitätsfeld. Zur Gewährleistung einer adäquaten Auflösung aller Skalen ist eine ausreichende numerische Auflösung wichtig. Ähnlich wie bei den Experimenten liegen bei der DNS auch Limitierungen bezüglich des Erzielens hoher Reynolds-Zahlen vor. Für DNS mit periodischen Boxlängen zeigt Abbildung 4.8 das Anwachsen der maximalen erreichten Werte von $R_\lambda \approx 50$ bis $R_\lambda \approx 1000$ in dem Zeitraum von 1970 bis 2007. Auch wenn die heutzutage verwendeten numerischen Methoden gründlich getestet sind, ist ein Vergleich mit experimentell gewonnenen Daten zwingend erforderlich. Schließlich liegt fast allen numerischen Untersuchungen eine Modellierung der Teilchen zu Grunde, da bei ihnen punktartige, passive Partikel verwendet werden. Zwar gibt es Simulationen träger Partikel mit endlicher Größe, z. B. feste Partikel oder Luftblasen in Wasser, jedoch ist wegen der dafür benötigten hohen Rechnerkapazitäten gegenwärtig nur das Tracken weniger Partikel möglich.

Resultate der DNS

Die ersten numerischen Ergebnisse zur relativen Dispersion von Teilchenpaaren in getriebener, homogener und isotroper Turbulenz wurden 1994 von Yeung präsentiert [Yeu94]. Er verwendete eine Auflösung von 128^3 Gitterpunkten, eine Taylor-Reynolds-Zahl

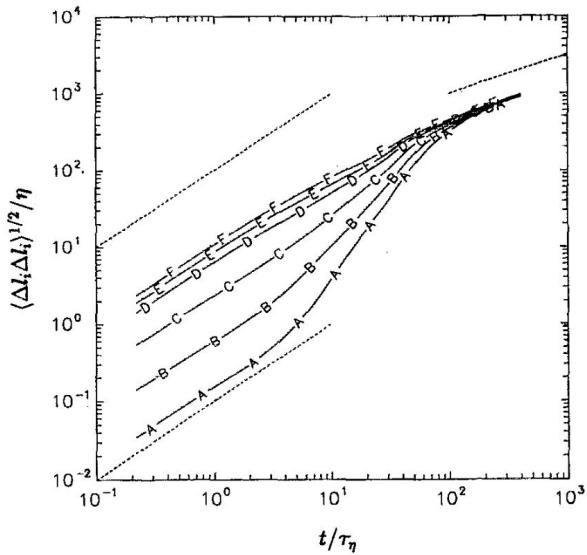


Abbildung 4.9: Resultate von Yeung 1994. Varianz der relativen Separation aufgetragen gegen die Zeit, normiert mit η und τ_η . Hierbei ist $\Delta l_i = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$. Jede Kurve A bis F entspricht einem relativen Anfangsabstand aus $r_0/\eta = \frac{1}{4}, 1, 4, 16, 32, 64$. Die gestrichelten Linien sind $\propto t^2$, bzw. $\propto t$. Entnommen aus [Yeu94].

$R_\lambda = 91$ und die Anfangsabstände $r_0/\eta = \frac{1}{4}, 1, 4, 16, 32, 64$, wobei $r_0/\eta = 64$ nicht mehr im Inertialbereich lag. Den Daten ist ein Skalierungsverhalten $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \rangle \propto t^2$ entsprechend dem Batchelorregime zu entnehmen (siehe Abbildung 4.9). Einen mit $r_0^{2/3}$ skalierten Plot dieser Größe, in dem die Kurven für unterschiedliche r_0 übereinander liegen sollten, bot der Autor jedoch nicht dar, so dass eine tatsächliche Batchelorskalierung nicht nachgewiesen wurde. Ein klarer Bereich $\propto t^3$, was einem Richardson-Obukhov-Regime entspräche, ist nicht vorhanden. Jedoch stellt sich nach einiger Zeit ein Wachstum annähernd $\propto t$ ein. Dies könnte dem Eintreten normaler Diffusion außerhalb des Inertialbereichs zuzuschreiben sein.

Der erste Nachweis der Gültigkeit von Richardsons PDF mittels DNS gelang 2002 Bofetta und Sokolov [BS02]. In ihrer 256^3 -Simulation mit $R_\lambda = 200$ und einer Boxlänge $L_{Box} = 2\pi$ studierten sie das Verhalten von $3 \cdot 10^5$ Teilchenpaaren mit einem relativen Anfangsabstand $r_0/\eta \approx 1,8$. Die erhaltenen PDFs entsprechen nahezu dem von Richardson vorhergesagten Verlauf. Jedoch gelingt es nicht, die vorhergesagte Selbstähnlichkeit exakt nachzuweisen (siehe Abbildung 4.10). Die Auswertung der relativen Separation $\langle r(t)^2 \rangle$ zeigt ein schwach erkennbares Richardson-Obukhov-Regime (siehe Abbildung 4.10). Um dieses Regime deutlicher darzustellen, werteten die Autoren die Daten über die mittlere Exit-Time aus. Bei dieser Festen-Skalen-Statistik wird die Zeit gemessen, die ein Teilchenpaar benötigt, um seinen relativen Abstand um einen vorher festgelegten Faktor zu erhöhen, etwa zu verdoppeln. Durch Anwendung dieser Exit-Time-Statistik, auch Doubling-Time-Statistik genannt, fanden die Autoren ein größeres

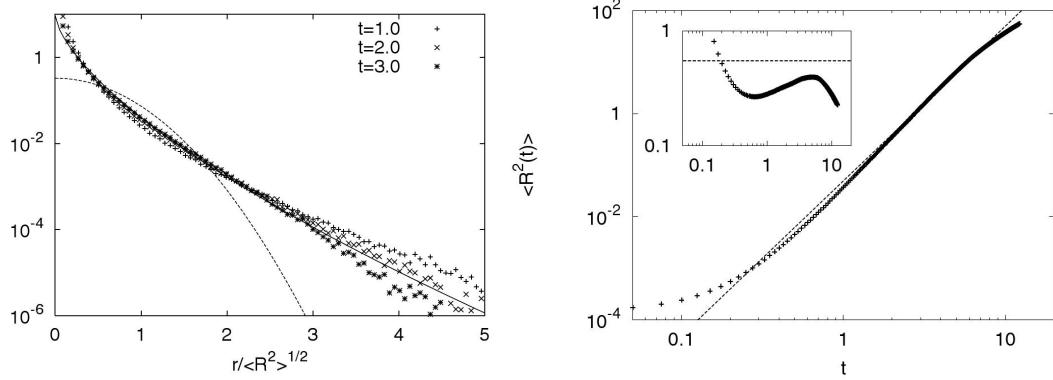


Abbildung 4.10: Resultate von Boffetta und Sokolov 2002. Links: PDF der relativen Dispersion zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Die durchgezogene Linie entspricht Richardsons Vorhersage, die gestrichelte Batchelors. Rechts: Die relative Dispersion $\langle r(t)^2 \rangle$ aufgetragen gegen die Zeit. Die gestrichelte Linie ist $\propto t^3$. Der eingelassene Plot zeigt dieselben Daten, skaliert mit ϵt^3 . Entnommen aus [BS02].

Richardson-Obukhov-Regime als bei der traditionellen Messung des mittleren quadratischen Abstandes zweier Teilchen. Anzumerken ist, dass bei der Untersuchung der PDF der sehr kleine relative Anfangsabstand r_0 vernachlässigt wurde. Zum Vergleich mit Richardsons Theorie wäre eine Transformation $\Delta r = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|$, wie von Oulette et al. vollzogen, sicherlich sinnvoll gewesen, da Richardsons PDF für eine Punktquelle mit $r_0 = 0$ entwickelt wurde. Die Tatsache, dass die PDF für kleine r_0 der Vorhersage Richardsons ähnelt, steht nicht im direkten Widerspruch zu den Ergebnissen von Oulette et al. Interessant wäre zu wissen, ob ähnlich zu deren Ergebnissen bei der Simulation von Boffetta und Sokolov für größere r_0 ebenfalls ein Übergang hin zu Batchelors PDF zu erkennen wäre. Diese Situation wurde von den Autoren jedoch nicht untersucht.

Ishihara und Kaneda verwendeten 2002 eine Methode ähnlich der von Ott und Mann, indem sie $\langle r(t)^2 \rangle^{1/3}$ gegen $t - t_B$ plotteten. Durch Anwenden dieses Verfahrens auf ihre 1024^3 -Simulation mit $R_\lambda \approx 283$ und mit $O(10^5)$ Teilchen fanden die Autoren eine Skalierung nahe der von Richardson-Obukhov.

Basierend auf früheren Arbeiten (unter anderem [Yeu94]) fanden Yeung und Borgas 2004 einen Bereich, der annähernd mit dem Richardson-Obukhov-Skalierungsverhalten übereinstimmt [YB04]. Sie verwendeten eine 512^3 -Simulation mit $R_\lambda \approx 230$ und $r_0/\eta \approx 16$. Die Untersuchung des mittleren quadratischen Abstandes eines Teilchenpaares lieferte sehr ähnliche Werte zu den in Abbildung 4.9 gezeigten Ergebnissen aus [Yeu94]. Es zeigt sich zunächst eine bei kleinen Zeiten unabhängig von relativen Anfangsabstand r_0 auftretende Skalierung $\propto t^2$, wohingegen für große Zeiten die normale Diffusion die Zunahme des Abstandes eines Teilchenpaares mit $\propto t$ vorantreibt (siehe Abbildung 4.11). Des Weiteren zeigten die Autoren einen Plot $(\langle r(t)^2 \rangle/\eta^2)^{1/3}$ gegen t , was erneut ähnlich der Methode von Ott und Mann ist. Rechts in Abbildung 4.11 ist der so gewonnene

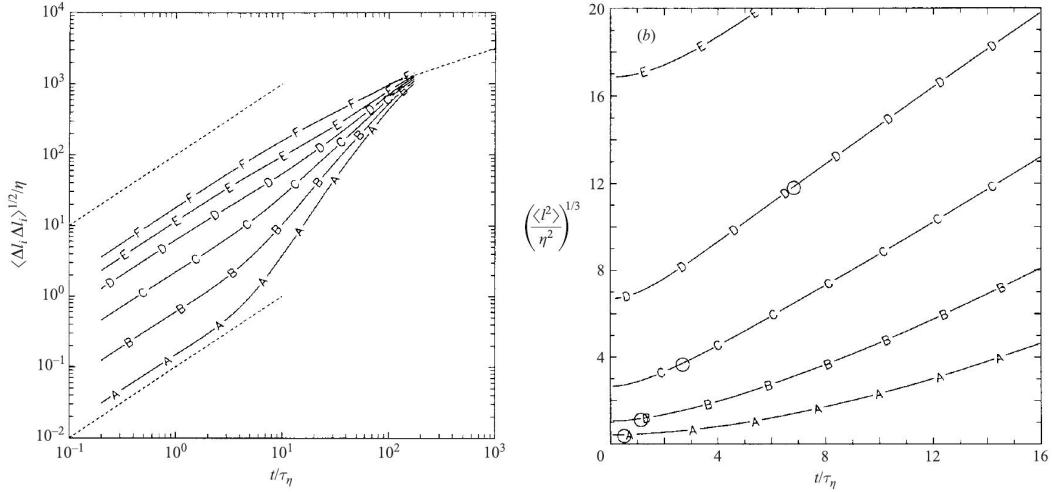


Abbildung 4.11: Resultate von Yeung und Borgas 2004. Links: Die Varianz der relativen Separation aufgetragen gegen die Zeit, normiert mit η und τ_η . Hierbei ist $\Delta l_i = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$. Jede Kurve A bis F entspricht einem relativen Anfangsabstand aus $r_0/\eta = \frac{1}{4}, 1, 4, 16, 64, 256$. Die gestrichelten Linien sind $\propto t^2$, bzw. $\propto t$. Rechts: $(\langle r(t)^2 \rangle / \eta^2)^{1/3}$ gegen t/τ_η für die ersten $16\tau_\eta$. A bis E entsprechen denselben Anfangsabständen wie links. Die Kreise in jeder Kurve stellen die jeweilige Batchelorzeit t_B dar. Entnommen aus [YB04].

Plot zu sehen. In diesem Diagramm ist der relative Anfangsabstand C den Autoren zufolge der einzige, der im Inertialbereich liegt. Der zugehörigen Kurve attestieren sie einen annähernd linearen Verlauf. Demnach haben sie einen Bereich mit Richardson-Obukhov-Skalierung gefunden.

Biferale et al. präsentierte 2005 Ergebnisse zur Untersuchung der relativen Dispersion [BBC⁺05a]. Verwendet wurde unter anderem auch die Methode der mittleren Exit-Time, wie schon zuvor von Boffetta und Sokolov. In der Simulation mit einer Auflösung von 1024^3 und mit $R_\lambda = 284$ wurden $1,92 \cdot 10^6$ Teilchen mit vier Anfangsabständen $r_0/\eta < 20$ getrackt. Hierbei fanden die Autoren kein traditionelles Richardson-Obukhov-Regime. Abbildung 4.12 weist kein Skalierungsverhalten $\propto t^3$ auf sowie keine Deckung der Kurven unterschiedlicher Anfangsabstände. Die PDF der Separation wurde für den kleinsten Abstand $r_0 = 1,2\eta$ eines Teilchenpaares zu unterschiedlichen Zeitpunkten gezeigt. Die Autoren fanden nur für Zeiten zwischen $40\tau_\eta$ und $70\tau_\eta$ einen ähnlichen Verlauf zu Richardsons Vorhersage (siehe Abbildung 4.12). Wie bei Boffetta und Sokolov wurden auch hier keine PDFs für größere Anfangsabstände gezeigt, woraus ersichtlich wäre, ob die PDF bei dieser Simulation ähnlich wie bei dem Experiment von Oulette et al. eine Veränderung hin zu Batchelors PDF unterläuft. Durch Verwendung der mittleren Exit-Time zur Auswertung erkannten die Autoren nun einen Bereich als einen solchen an, der der Richardson-Obukhov-Skalierung genügt. Die PDF passt mit der an die mittels der Exit-Time angepassten Richardson-PDF grob überein.

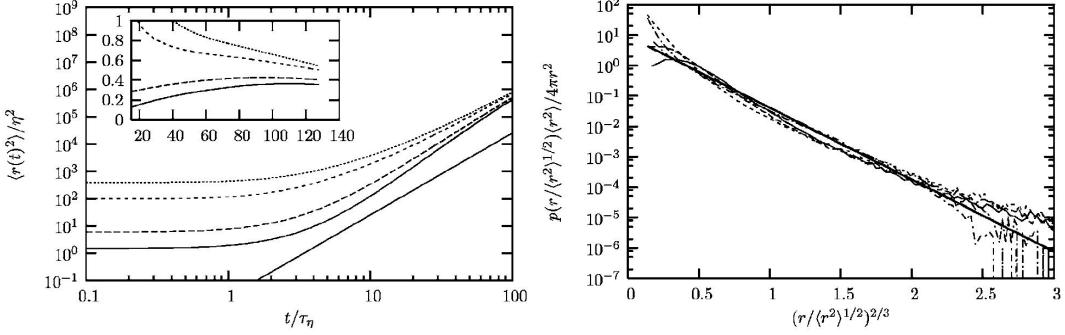


Abbildung 4.12: Resultat von Biferale et al. 2005. Links: $\langle r(t)^2 \rangle / \eta^2$ gegen t/τ_η für $r_0/\eta = 1,2; 2,5; 9,8; 19,6$. Die gerade Linie ist $\propto t^3$. Der eingelassene Plot zeigt dieselben Daten, kompensiert mit ϵt^3 , ab etwa $\tau/\tau_\eta \approx 15$. Rechts: PDF der relativen Separation für $r_0 = 1,2\eta$ bei $\tau = 5,2\tau_\eta$ (durchgezogene Linie), $\tau = 7\tau_\eta$ (langgestrichelte Linie), $\tau = 14\tau_\eta$ (kurzgestrichelte Linie), $\tau = 42\tau_\eta$ (gepunktete Linie), und $\tau = 70\tau_\eta$ (gepunktetgestrichelte Linie). Die dicke durchgezogene Linie ist Richardsons PDF. Entnommen aus [BBC^{05a}].

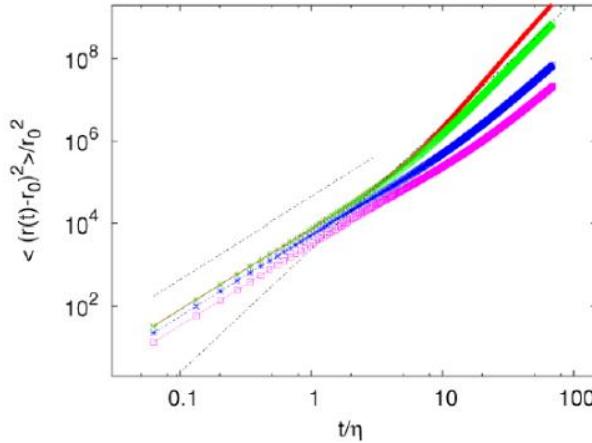


Abbildung 4.13: Resultat von Biferale et al. 2006. Gezeigt wird die zeitliche Entwicklung von $\langle (r(t) - r_0)^2 \rangle / r_0^2$ für verschiedene Anfangsabstände $r_0/\eta = 1,2; 2,4; 8,8; 17,6$ (von oben nach unten). Die beiden Geraden entsprechen t^2 , bzw. t^3 . Entnommen aus [BBC⁰⁶].

2006 veröffentlichten Biferale et al. neue Ergebnisse [BBC⁰⁶]. Erneut verwendeten sie eine 1024^3 -Simulation mit $R_\lambda = 284$ und $1,92 \cdot 10^6$ Teilchen. Diesmal wurden fünf Anfangsabstände $r_0/\eta < 10$ ausgewertet. Neu hierbei war ein Diagramm der Größe $\langle (r(t) - r_0)^2 \rangle$, an dem ein eventuell vorhandenes Batchelorregime auszumachen wäre. Abbildung 4.13 zeigt die Entwicklung dieser Größe. Für kleine Zeiten verlaufen die Kurven etwa $\propto t^2$, für größere Zeiten hingegen $\propto t^\gamma$ mit $\gamma > 2$. Es könnte also eine Batchelorskalierung vorliegen. Mit Sicherheit lässt sich dies jedoch nicht sagen, weil die Autoren eine Skalierung mit $r_0^{2/3}$ nicht durchführten. Dies hätte im Falle der Batchelorskalierung ein Übereinanderliegen der Kurven unterschiedlicher Anfangsabstände zur

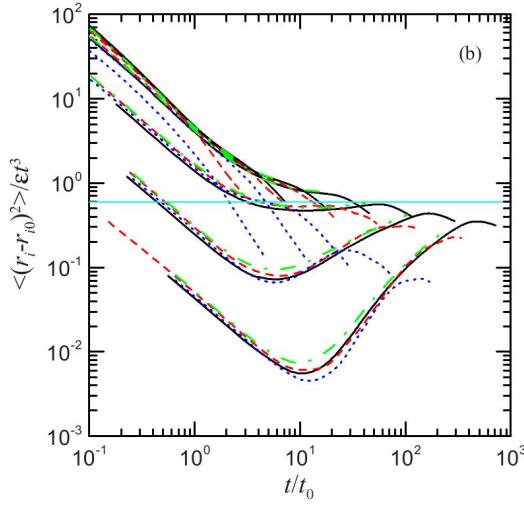


Abbildung 4.14: Resultate von Sawford et al. Gezeigt wird $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle/\epsilon t^3$ gegen t/t_0 im Inertialbereich. t_0 entspricht hier t_B . Die Anfangsabstände sind $r_0/\eta = \frac{1}{4}, 1, 4, 16, 64$ (von oben nach unten) und $R_\lambda = 38$ (blaue gepunktete Kurve), $R_\lambda = 240$ (rote gestrichelte Kurve), $R_\lambda = 650$ (grüne gestrichelte Linie) und $R_\lambda = 650$ (schwarze durchgezogene Linie). Entnommen aus [SYH08].

Folge haben müssen.

Sawford et al. stellten 2008 Ergebnisse zur relativen Dispersion bei Reynoldszahlen bis zu $R_\lambda = 650$ in einer 2048^3 -Simulation vor. Die mittlere quadratische Separation mit ϵt^3 kompensiert, zum einfacheren Nachweis einer Richardson-Obukhov-Skalierung, ist in Abbildung 4.14 zu sehen. Gezeigt wird der Verlauf für verschiedene Anfangsabstände und für verschiedene Taylor-Reynolds-Zahlen. Bei kleinen Zeiten liegen für gleiche Anfangsabstände die Kurven verschiedener Taylor-Reynolds-Zahlen übereinander. In dem Bereich kleiner Zeiten liegt ein ballistisches Regime, der Batchelorskalierung entsprechend, vor. Den Autoren nach zeigen die Plots eine klare Konvergenz und sind Beweis für ein Richardsonregime. Salazar und Collins zufolge stellt dieser Datensatz den besten vorhandenen Nachweis eines Richardson-Obukhov-Regimes dar [SC09].

4.3 Zusammenfassender Überblick

Nach den im Vorangegangenen vorgestellten experimentell und numerisch erzielten Ergebnissen lässt sich folgendes festhalten: Ein tatsächliches Batchelorregime wurde im Labor von Oulette et al. und Bourgoin et al. nahezu nachgewiesen. Die relative Separation $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle$ skalierte in etwa mit t^2 und weist eine der Batchelortheorie entsprechende Abhängigkeit des relativen Anfangsabstandes auf, welche durch Reskalierung mit $r_0^{2/3}$ nachgewiesen werden kann. Zusätzlich wurde für größere Anfangsabstände

eines Teilchenpaares eine adäquate Deckung der PDF der relativen Separation mit der entsprechenden Vorhersage Batchelors gefunden. Lediglich Boffetta und Sokolov, Biferale et al. und Sawford et al. ist es gelungen, für die relative Dispersion eine Entwicklung $\propto t^\gamma$ mit $\gamma > 2$ nachzuweisen, wobei die Ergebnisse von Boffetta und Sokolov einer t^3 -Skalierung am dichtesten lagen. Sowohl ein Teil dieser Autoren als auch andere in diesem Kapitel aufgeführte versuchten auf Grund nicht hinreichend guter Resultate, ein Richardson-Obukhov-Regime auf anderem Wege zu finden. Statt das traditionelle Regime über die Entwicklung von $\langle r(t)^2 \rangle$ nachzuweisen, zogen sie Methoden wie die Zeitverschiebung oder die Analyse der mittleren Exit-Time heran, wovon gerade erstere die beiden oben genannten Schwachstellen hat. Bei letzterer werden von den jeweiligen Autoren bestimmte Bereiche als eindeutige Plateaus deklariert, wodurch ihnen der gewünschte Nachweis gelingt. Teilweise werden so Richardson-Obukhov-Regimes nachgewiesen, wo ein klassisches Richardson-Obukhov-Regime in den Daten nicht zu erkennen ist. Die im folgenden Kapitel dargebotenen Auswertungen von Datensätzen zur relativen Dispersion von Teilchenpaaren beschäftigen sich mit dem Nachweis eines Richardson-Obukhov- oder Batchelorregimes anhand der traditionellen Größe $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine ausführlichere Darstellung der Ergebnisse, die durch Anwendung von Zeitverschiebung oder Analyse mittlerer Exit-Time generiert wurden, bewusst verzichtet.

5 Numerische Untersuchung der Zweiteilchendispersion

Die in dieser Arbeit in Bezug auf die Zweiteilchendispersion untersuchten Daten wurden mittels numerischer Simulation generiert. Um die Abhängigkeit der Ergebnisse von verschiedenen Simulationsmerkmalen zu untersuchen, wie z. B. der Simulationsauflösung, der Taylor-Reynolds-Zahl oder dem verwendeten Treiber, wurden drei Datensätze zur Auswertung genutzt. Die Turbulenz aller drei Simulationen ist getrieben, homogen, isotrop und stationär.

Zunächst wird in diesem Kapitel in groben Zügen das den Simulationen zu Grunde liegende numerische Verfahren erläutert. Darauf folgend wird die zeitliche Reichweite des Einflusses untersucht, den der Anfangsabstand von Teilchenpaaren auf ihre weitere Separation hat. Hieran schließt sich die Analyse der Zweiteilchenseparation auf Skalierungsverhalten, wie etwa der Richardson-Obukhov-Skalierung oder der Batchelorskalierung, an. Ebenfalls erfolgt eine Untersuchung der Distance Neighbour Function der Daten. Anschließend wird die Auswertung hinsichtlich des Skalierungsverhaltens noch einmal angewendet. Hierbei werden Größen betrachtet, die die anfängliche Geschwindigkeitsdifferenz, der ballistische Charakter einer Teilchenpaarbewegung, in der zeitlichen Entwicklung der Paarseparation berücksichtigen. Zum Abschluss dieses Kapitels wird für eine solche Größe die zugehörige modifizierte Distance Neighbour Function analysiert.

Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die Begriffe Separation, (relativer) Abstand, (relativer) Anfangsabstand, relative Geschwindigkeit, Geschwindigkeitsdifferenz, anfängliche relative Geschwindigkeit und anfängliche Geschwindigkeitsdifferenz im weiteren Verlauf auf Teilchenpaare.

5.1 Verwendetes numerisches Verfahren

Die verwendeten Daten sind Ergebnisse direkter numerischer Simulationen der Wirbeltransportgleichung (2.3). Der dazu verwendete Programmcode wurde gemeinsam von Michael Wilczek im Rahmen seiner Doktorarbeit und von Anton Daitche im Rahmen seiner Diplomarbeit entwickelt. Auf seine numerischen Grundlagen wird an dieser Stelle nur kurz eingegangen. Detailliertere Informationen sind [Dai09a] zu entnehmen. Mit diesem Programmcode wird eine Strömung mit in ihr injizierten Teilchen in einer kubischen, periodischen Box der Länge $L_{Box} = 2\pi$ simuliert. Dazu wird die Wirbeltransportgleichung mit einem parallelisierten Pseudospektralcode mit Dealiasing gelöst. Die Felder

werden entlang der Teilchentrajektorien trikubisch interpoliert. Die zeitliche Integration erfolgt mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens dritter Ordnung. Zur Teilchenintegration wird ein Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren verwendet. Zur Gewährleistung der Stationarität wird die Turbulenz angetrieben. Um eine Abhängigkeit von dem Treiber in den später dargebotenen Resultaten auszuschließen, wurden Simulationen mit zwei verschiedenen Treibern getestet. Bei dem ersten Treiber T1 werden die Beträge der Moden in einem Band des Fourierraums festgehalten. Der zweite Treiber T2 ist ein energieerhaltender Treiber, welcher erfahrungsgemäß für gute Isotropie und Homogenität der Turbulenz sorgt [Dai09a].

Es wurden drei Simulationen ausgewertet. Deren Namensgebung erfolgte hierbei in Abhängigkeit der Auflösung und des verwendeten Treibers. Die Simulation **Sim1024-1** hat eine Auflösung von 1024^3 Gitterpunkten, verwendet Treiber T1 und hat $5 \cdot 10^6$ injizierte Teilchen. In der Simulation **Sim512-2** wird der Treiber T2 bei einer Auflösung von 512^3 Gitterpunkten verwendet. Diese Simulation beinhaltet $1 \cdot 10^6$ Lagrangeteilchen. Die Simulation **Sim1024-2** nutzt bei einer Auflösung von 1024^3 Gitterpunkten den Treiber T2 und verfügt über $5 \cdot 10^6$ injizierte Teilchen. Durch einen Vergleich der beiden 1024er-Simulationen, die in etwa eine gleichgroße Taylor-Reynolds-Zahl haben, lassen sich deswegen Auswirkungen der verschiedenen Treiber erkennen bzw. ausschließen. Des Weiteren ermöglichen die drei Simulationen die Resultate der Paardispersion auf Abhängigkeiten von der Taylor-Reynolds-Zahl und der Auflösung zu untersuchen. Die den Simulationen zugehörigen Parameter sind in Tabelle 5.1 angegeben. u_{rms} ist die Standardabweichung einer Komponente der mittleren Geschwindigkeit des Geschwindigkeitsfeldes. Auf Grund der Isotropie der Turbulenz ist sie für alle Komponenten gleich und berechnet sich als

$$u_{rms} = \sqrt{\frac{1}{3} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x},t)^2 \rangle}.$$

Die Anzahl der Lagrangeteilchen wird durch n_p angegeben. Die Teilchen werden in der Box mit den Grenzen 0 und 2π in jeder Komponente im ersten Zeitschritt der Simulation injiziert. Dabei sind sie zufällig verteilt. Durch Paarung der Teilchen erhält man unterschiedlich große Anfangsabstände mit $0 < r < \sqrt{3} \cdot 2\pi \approx 10,9$. Die obere Grenze entspricht hierbei der Raumdiagonalen des Würfels der Kantenlänge 2π . Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, die Abhängigkeit von verschiedenen Anfangsabständen zu untersuchen.

5.2 Zeitliche Relevanz des relativen Anfangsabstandes

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Wirkung des anfänglichen Abstandes auf die weitere Entwicklung der Separation. Die Frage ist hierbei, wie lange das System Informationen über den Anfangsabstand in sich trägt bzw. ob es eine zeitliche Grenze gibt,

Simulation	Treiber	N	R_λ	u_{rms}	n_p	ν	
Sim1024-1	T1	1024	246	0,20	$5 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^{-4}$	
Sim512-2	T2	512	112	0,54	$1 \cdot 10^6$	$10 \cdot 10^{-4}$	
Sim1024-2	T2	1024	225	0,81	$5 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^{-4}$	
Simulation	η	L	τ_η	T_L	T_0	N_{T_0}	T_0/τ_η
Sim1024-1	0,0040	2,00	0,156	2,80	9,92	3	63,6
Sim512-2	0,0099	1,55	0,099	1,09	2,86	5	28,9
Sim1024-2	0,0038	1,68	0,036	0,72	2,07	6	57,5

Tabelle 5.1: Die in der Auswertung verwendeten Simulationen mit den zugehörigen Parametern. N gibt die Anzahl der Gitterpunkte einer Dimension an, u_{rms} entspricht der Standardabweichung einer Komponente der mittleren Geschwindigkeit des Geschwindigkeitsfeldes, n_p ist die Anzahl der injizierten Lagrangeteilchen. L , T_L und T_0 sind die integrale Skala, die integrale Zeit und die Lagre Eddy Turnover Time. N_{T_0} gibt die Simulationslänge als Vielfaches von T_0 an.

nach der das weitere Separieren unabhängig von dem Anfangsabstand r_0 wird. Um eine mögliche statistische Abhängigkeit zwischen r und r_0 zu erkennen, betrachten wir die auf r_0 bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(r|r_0)$ von r . Hierfür werden zunächst die notwendigen Grundlagen eingeführt. Im Folgenden bezeichnen $f(a)$ und $f(b)$ Wahrscheinlichkeitsdichten (PDF) der Zufallsvariablen a und b . $f(a, b)$ steht für die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte dieser Größen, auf englisch „joint probability density function“, und wird im Weiteren mit JPDF abgekürzt. Die auf b bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(a|b)$ von a heißt im Englischen „conditional probability density function“ und wird im weiteren Verlauf mit CPDF abgekürzt. Sie berechnet sich als

$$p(a|b) = \frac{f(a, b)}{f(b)}. \quad (5.1)$$

Sie ist nur für den Fall $f(b) > 0$ definiert.

Im Folgenden werden aus Platzgründen nur die Daten von den Simulationen **Sim1024-1** und **Sim512-2** gezeigt. Sie ermöglichen eine Untersuchung auf eine eventuelle Treiberabhängigkeit und bieten Aufschluss über das Verhalten bei unterschiedlichen Taylor-Reynolds-Zahlen. Die Simulation **Sim1024-2** liefert für die Auswertung in diesem Abschnitt keine zusätzlichen Erkenntnisse, weshalb auf die Darbietung der zugehörigen Daten an dieser Stelle verzichtet wird.

In Abbildung 5.1 ist die CPDF $p(r|r_0)$ zu jeweils drei verschiedenen Zeitpunkten der beiden Simulationen **Sim1024-1** und **Sim512-2** mit je 100 Bins für r_0 und $r(t)$ zu sehen. Ein Bin ist hierbei ein kleiner Wertebereich der entsprechenden Achse, wie bereits zuvor in Abbildung 4.5 erwähnt. Die dargestellten Konturlinien geben die Wahrscheinlichkeit an, ein mit einem Anfangsabstand r_0 gestartetes Teilchenpaar zum Zeitpunkt t mit einem gewissen Abstand $r(t)$ vorzufinden. In einem Plot desselben Zeitpunktes beider

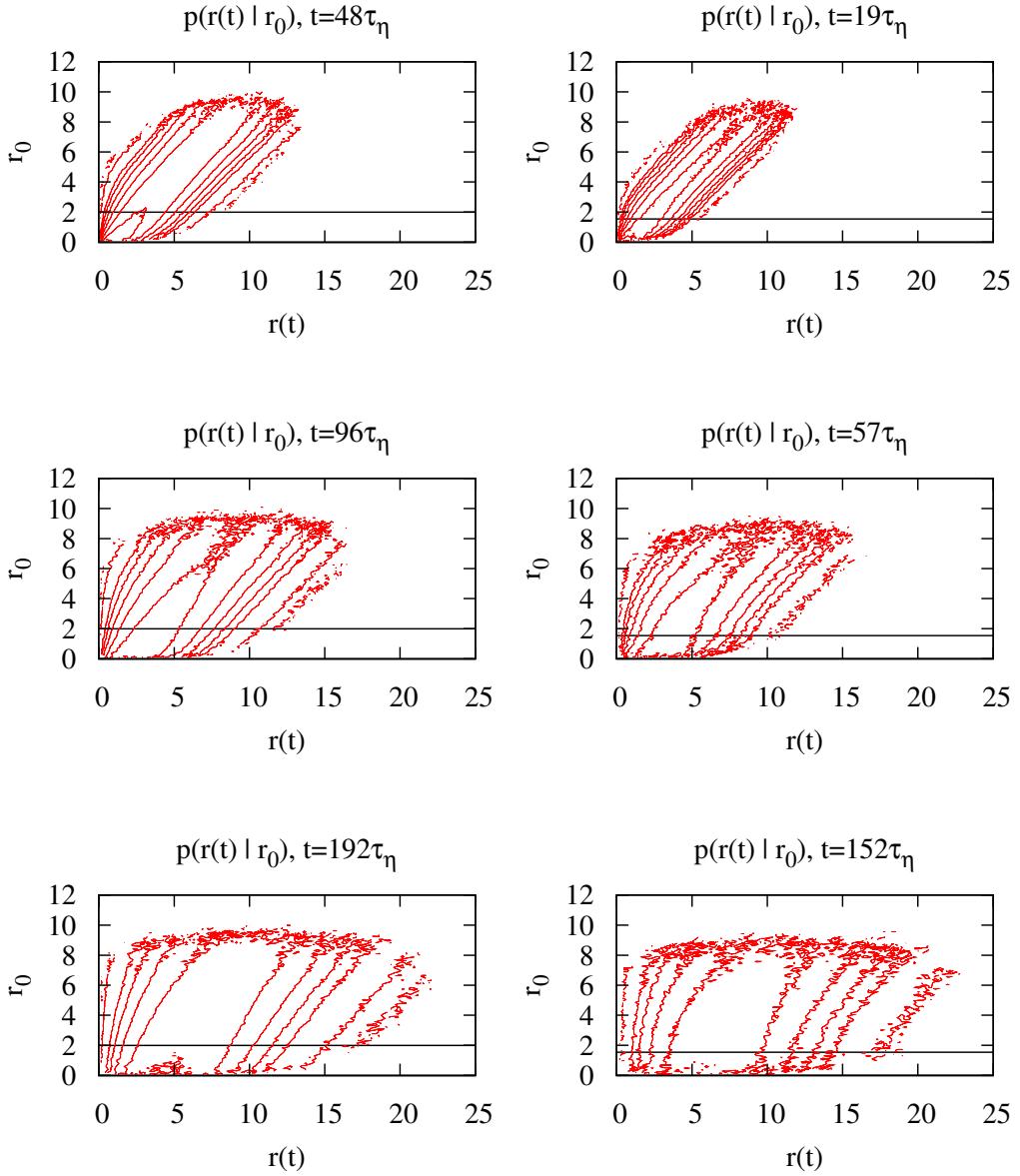


Abbildung 5.1: Die auf den Anfangsabstand bedingte PDF $p(r|r_0)$ des Abstandes zu verschiedenen Zeitpunkten. Die linken drei Abbildungen stellen die Daten der Simulation **Sim1024-1**, die rechten drei die Daten der Simulation **Sim512-2** dar. Die schwarze waagerechte Linie in allen Plots kennzeichnet die integrale Länge. Beide Achsen sind jeweils gleich skaliert um einer Verzerrung bei der Darstellung vorzubeugen. Selbst bei dem jeweils spätesten gezeigten Zeitpunkt ist noch eine signifikante statistische Abhängigkeit vorhanden.

Größen, also etwa $p(r_0|r_0)$, würde nur eine Konturlinie diagonal vom Ursprung nach schräg rechts oben verlaufen, entsprechend einer CPDF mit verschwindender Varianz. Schließlich hätten alle möglichen Abstandskombinationen eine Wahrscheinlichkeitsdichte von Null, außer denjenigen, die dieselben Werte auf beiden Achsen haben. Ein solch diagonaler Verlauf symbolisiert eine perfekte statistische Abhängigkeit der zwei Größen. Bei einem senkrechten Verlauf hingegen tritt ein gewähltes $r(t)$ für alle r_0 auf, ist also unabhängig von diesem. Es liegt somit keine statistische Abhängigkeit vor. Um nun die Relevanz des Anfangsabstandes für die weitere Entwicklung des Abstandes nachzuweisen, wird der Verlauf der Konturlinien studiert. Die statistische Abhängigkeit zwischen $r(t)$ und r_0 wäre ab dem Zeitpunkt aufgehoben, nach dessen Überschreitung sämtliche Konturlinien senkrecht verließen.

Bei der Betrachtung von Abbildung 5.1 fällt zunächst auf, dass die Konturlinien niemals eine der beiden Achsen schneiden. Das heißt die Wahrscheinlichkeitsdichte $r(t) = 0$ vorzufinden ist bei allen dargestellten Zeitpunkten gleich Null. Dies ist korrekt, da sich Teilchen eines Paars auf Grund der Inkompressibilität zu keinem Zeitpunkt am selben Ortspunkt befinden können und deshalb nicht den Abstand Null aufweisen können. In Anbetracht des oben angesprochenen Verlaufs der Konturlinien lässt sich folgendes feststellen: Von einem bei kleinen Zeiten zunächst noch diagonalen Verlauf werden die Linien mit zunehmender Zeit zu einem senkrechten Verlauf hin gedreht und dabei verzerrt. Die Verzerrung äußert sich durch das Anwachsen der Varianz, erkennbar an der Aufweitung des Diagramms. Der fluktuierende zickzackförmige Verlauf der Konturlinien bei den späteren Zeiten wird erzeugt durch ein statistisches Rauschen, das durch eine zu geringe Datenmenge bedingt ist. Die mittleren Diagramme zeigen die CPDF der jeweiligen Simulation zu einem Zeitpunkt von mehr als $1,5T_0$. Die statistische Abhängigkeit ist immer noch sehr stark vorhanden, erkennbar an dem diagonalen Verlauf. Für noch größere Zeiten nimmt diese Abhängigkeit zwar weiter ab, bleibt aber weiterhin bestehen. In der Simulation **Sim512-2** ist sie selbst zum Zeitpunkt $t = 152\tau_\eta \approx 5,3T_0$ noch signifikant vorhanden.

Die statistische Abhängigkeit zwischen r_0 und $r(t)$ ist demzufolge langreichweitig in der Zeit. Der Anfangsabstand spielt auf Grund dessen eine wichtige Rolle in der weiteren zeitlichen Entwicklung des Abstandes. Diese Erkenntnis zeigt deutlich, dass Richardsons Theorie einer Punktquelle nicht ohne weiteres auf ein System mit endlichem Anfangsteilchenabstand anwendbar ist. Zugleich liegt auch ein Widerspruch zu Batchelors Theorie vor. Diese besagt, dass die Teilchenseparation nach dem Verstreichen einiger Zeit unabhängig von r_0 wird. Speziell für die Varianz des kompensierten Abstandes soll dies für Zeiten $t \ll t_B \ll T_L$ bereits unabhängig vom Anfangsabstand gelten. Die Betrachtung erfolgt an dieser Stelle in Abhängigkeit von T_0 , welches die gleiche Größenordnung wie T_L hat (siehe Abschnitt 2.5). Tabelle 5.1 ist zu entnehmen, dass bei allen drei Simulationen T_L kleiner als T_0 ist. Deswegen müsste Batchelors Vorhersage auch für $t \ll t_B \ll T_0$ gelten. Mit einem Wert von $T_0 = 63,6\tau_\eta$ in Simulation **Sim1024-1** und $T_0 = 28,9\tau_\eta$ in Simulation **Sim512-2** dürfte daher in Abbildung 5.1 nur für die beiden oberen Diagramme eine statistische Abhängigkeit zwischen r_0 und $r(t)$ auftreten. Schließlich sind diese

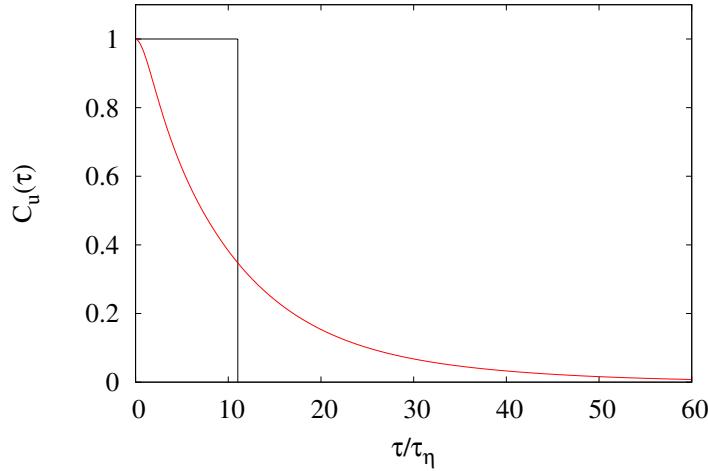


Abbildung 5.2: Darstellung der Geschwindigkeitsautokorrelation $C_u(\tau)$ für die Simulation **Sim512-2**. Die schwarze senkrechte Linie markiert die integrale Zeitskala. Auch bei Zeiten größer als diese ist immer noch eine signifikante Korrelation vorhanden.

beiden Diagramme jeweils die einzigen der zugehörigen Simulationen, bei denen eine Zeit kleiner als T_0 betrachtet wird. Doch selbst bei den mittleren Plots, welche jeweils einer Zeit deutlich größer als T_0 entsprechen, ist noch eine solche Abhängigkeit zwischen den Größen sichtbar. Diese wird zwar mit zunehmender Zeit schwächer, doch selbst in der Simulation **Sim1024-1** ist sie zum Zeitpunkt $t = 114\tau_\eta \approx 1,8T_0$ noch immer präsent. Hingegen ist bei der Simulation **Sim512-2** zum Zeitpunkt $t = 152\tau_\eta \approx 5,3T_0$ nur noch eine wesentlich schwächere statistische Abhängigkeit vorhanden. Diese ist wohl nicht der Verwendung des anderen Treibers T2 zuzuschreiben, sondern vielmehr der weitaus größeren verstrichenen Zeitspanne.

Verwunderlich ist der Widerspruch zu Batchelors Theorie jedoch nicht. Schließlich orientiert man sich hier an der integralen Zeitskala. Mit ihrer in Abschnitt 2.5 eingeführten Definition ist sie ein adäquates Maß zur Beschreibung der Simulation. An ihr lässt sich jedoch nicht ausmachen, dass Größen nach Ablauf der integralen Zeitskala statistisch unabhängig werden. Mit einem Blick auf die zeitabhängige Lagrangesche Autokorrelation der Geschwindigkeit \mathbf{u} wird dies klar. Diese ist definiert als:

$$C_u(\tau) = \frac{\langle \mathbf{u}(t)\mathbf{u}(t+\tau) \rangle - \langle \mathbf{u}(t) \rangle^2}{\langle \mathbf{u}(t)^2 \rangle}.$$

Diese Autokorrelation wird in Abbildung 5.2 für die Simulation **Sim512-2** gezeigt. Bei Zeiten von mehreren T_L schmiegt sich die Autokorrelation zwar dem Nullwert an, ist aber immer noch ungleich Null. In Bezug auf die in Abbildung 5.1 dargestellte CPDF wird die statistische Abhängigkeit von $r(t)$ und r_0 streng mathematisch also immer vorhanden sein. Numerisch wird sie in dem Fall einer ausreichend langen Simulation jedoch nicht

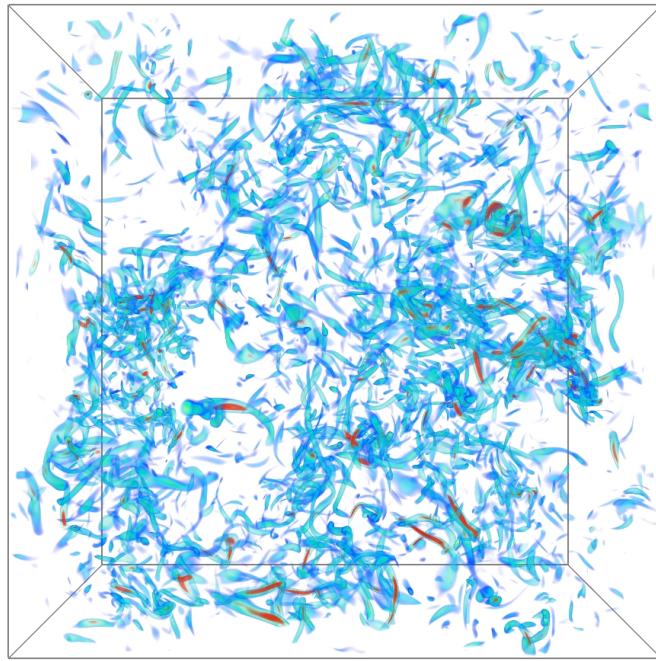


Abbildung 5.3: Visualisierung des Vortizitätsfeldes einer direkten numerischen Simulation mit einer Auflösung von 512^3 Gitterpunkten. Farblich codiert ist die Wirbelstärke des Feldes. Entgegen der Theorie der Richardsonkaskade treten in dem Vortizitätsfeld nicht Wirbelstrukturen aller Größenordnungen auf. Entnommen aus [WDF].

mehr nachweisbar sein. Denn eine sehr geringe statistische Abhängigkeit hätte einen nur minimal gekippten, vom senkrechten abweichenden Verlauf der Konturlinien zur Folge. Dieser wäre auf Grund des statistischen Rauschens nicht mehr auszumachen. Des Weiteren basiert Batchelors Theorie auf dem Modell der Richardsonenergiekaskade (Abschnitt 2.3). Dass die dieser Kaskade zu Grunde liegende Vorstellung des Wirbelzerfalls nicht ganz korrekt ist, zeigt sich Anhand von numerischen Simulationen. In Abbildung 5.3 wird die Visualisierung eines Vortizitätsfeldes einer direkten numerischen Simulation dargeboten. Bei dem Betrachten dieses Bildes und der zugehörigen Animation sind keine Wirbelstrukturen in allen Größenordnungen zu erkennen. Auch ist kein Aufbrechen aller Wirbel in kleinere zu sehen. Diese Beobachtung steht im Widerspruch zu der Theorie der Richardsonkaskade. Weil die Batchelortheorie auf diese aufbaut, könnte diese von der Theorie abweichende Wirbeldynamik zu einer längeren statistischen Abhängigkeit zwischen dem Abstand und dem Anfangsabstand beitragen, als sie von der Batchelortheorie angegeben wird. Somit bleibt als abschließende Erkenntnis dieses Abschnittes festzuhalten, dass die Turbulenz, relativ zu der Large Eddy Turnover Time T_0 und der Kolmogorovzeit τ_η , ein sehr langes Gedächtnis hat.

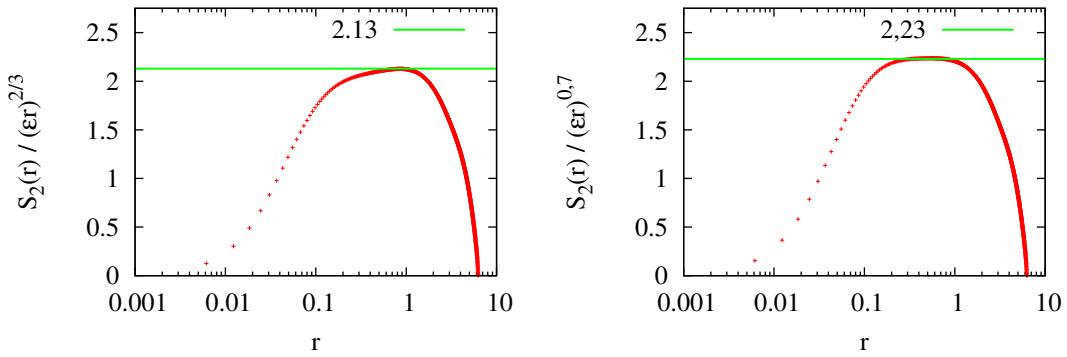


Abbildung 5.4: Links: $S_2(r)$ der Simulation **Sim1024-2** skaliert mit $(\epsilon r)^{2/3}$ entsprechend der Kolmogorovtheorie mit logarithmischer r -Achse. Rechts: Gleicher Plot, lediglich mit $(\epsilon r)^{0,7}$ skaliert. Ein besseres Plateau tritt bei dieser Skalierung auf. Die grünen Geraden repräsentieren den jeweils erhaltenen Wert für C_2 .

5.3 Relative Dispersion: Batchelor vs. Richardson

In diesem Abschnitt geht es um die zeitliche Entwicklung des mittleren quadratischen kompensierten Teilchenabstandes. Im Mittelpunkt hierbei steht die Überprüfung der in Abschnitt (3.2) präsentierten Theorien Richardsons und Batchelors anhand der drei Simulationen **Sim1024-1**, **Sim512-2** und **Sim1024-2**. Richardsons Theorie wurde für Punktquellen mit $r_0 = 0$ entwickelt, bei den verwendeten Simulationen liegen jedoch r_0 mit endlichen Werten vor. Es wird versucht, die Bedingung der Punktquelle zu nähern, indem vom Abstand $\mathbf{r}(t)$ der Anfangsabstand \mathbf{r}_0 abgezogen wird. Dadurch erhält man den mittleren quadratischen kompensierten Teilchenabstand mit der Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$. Eben diese Größe wird auch in Batchelors Theorie behandelt. Das Auftragen dieser Größe gegen die Zeit t bietet deshalb die Möglichkeit, sowohl für Richardsons als auch für Batchelors Theorie aus ein und demselben Diagramm Anhaltspunkte entnehmen zu können. Im Folgendem wird ausschließlich der Suche nach einem traditionellen Richardson-Obukhov- bzw. Batchelorregime nachgegangen. Methoden wie ein Timeshift oder die Analyse der mittleren Exit-Time werden nicht angewandt.

Bestimmung der Kolmogorovkonstante C_2

Nach Gleichung (3.14) sagt die Theorie Batchelors voraus, dass die Größe $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ in der Zeit mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}t^2$ für $t \ll t_B$ anwächst. Um die Gültigkeit dieser Relation zu überprüfen, werden die Größen ϵ und C_2 benötigt. Erstere wird während der DNS direkt mitberechnet, letztere hingegen wurde aus den Ausgabedaten der Simulation **Sim1024-2** bestimmt. Abbildung 5.4 zeigt die longitudinale zweite Strukturfunktion der Geschwindigkeit $S_2(r)$. Entsprechend Gleichung (2.6) wurde diese mit $(\epsilon r)^{2/3}$ skaliert, so dass bei logarithmischer Darstellung der r -Achse ein Plateau gerade der Kolmogorovkonstanten

C_2 entspricht. Wie in Abschnitt 2.4 bereits erwähnt, tritt Intermittenz auf, also Abweichungen von Gleichung (2.6). Tatsächlich ist bei der Skalierung mit $(\epsilon r)^{2/3}$ kein klares Plateau zu erkennen. Bei der modifizierten Skalierung $(\epsilon r)^{0,7}$ tritt ein deutlicheres Plateau auf (siehe Abbildung 5.4). Dieser Exponent ist in Übereinstimmung mit dem von Gotha et al. bestimmten [GFN02]. Zur Bestimmung von C_2 wird deshalb das rechte der beiden Diagramme verwendet. Anhand des darin auftretenden Plateaus ergibt sich für C_2 ein Wert von 2,23. Der so gefundene Wert stimmt im Rahmen der Messungenauigkeit mit Angaben in der Literatur überein. Frisch gibt den Wert $C_2 = 2,0 \pm 0,4$ an [Fri95], Oulette et al. [OXBB06] verwenden für ihre Auswertung unter Bezug auf Sreenivasan [Sre95] den Wert $C_2 = 2,13 \pm 0,22$.

Existenz des Batchelorregimes

Im Folgenden soll das Hauptaugenmerk auf ein etwaiges Skalierungsverhalten der Größe $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ gelegt werden. Um eine Anhäufung von Diagrammen an dieser Stelle zu vermeiden, werden nur Ergebnisse für die Simulation **Sim1024-2** dargeboten. Im Anhang befinden sich alle hier aufgeführten Plots auch für die anderen beiden Simulationen (**Sim1024-1** und **Sim512-2**). Dies ermöglicht dem Leser, die am Ende dieses Abschnittes getroffene Behauptung bezüglich Abhängigkeit der Resultate von Simulationsmerkmalen überprüfen zu können. Die Gründe, aus denen die Daten dieser Simulation dargestellt werden, sind die Größe der Taylor-Reynolds-Zahl, die Höhe der Auflösung, das größte Verhältnis von Simulationslänge zu T_0 sowie die Verwendung des Treibers, welcher für bessere Isotropie und Homogenität der Turbulenz sorgt.

Abbildung 5.5 zeigt die Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ der relativen Separation, aufgetragen gegen die mit τ_η skalierte Zeit. Zu sehen sind 50 Kurven entsprechend 50 verschiedenen Bins des Anfangsabstandes im Inertialbereich. Sie repräsentieren Werte von ungefähr $r_0 \in [0\eta, 9\eta]$ bis $r_0 \in [433\eta, 442\eta]$. Die zusätzlich eingezeichnete Gerade ist kein Fit, sondern die Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$. Der Inset zeigt $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ skaliert mit η^2 . Hierbei ist deutlich zu sehen, dass die verschiedenen Kurven einen Offset aufweisen. Die zeitliche Entwicklung von $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ ist deshalb abhängig von r_0 . Das große Diagramm zeigt dieselben Daten skaliert mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}\tau_\eta^2$. Dies hat zur Folge, dass die unterschiedlichen Kurven bis zum Zeitpunkt von etwa $20\tau_\eta$ gut übereinander liegen. Der Verlauf der Kurven ist dem der Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$ sehr nahe. Jedoch ist bei dem Vergleich des Kurvenverlaufs mit der Funktion eine leichte Krümmung zu erkennen. Der Verlauf der Kurven entspricht also nicht exakt Batchelors Vorhersage. Zu sehen ist auch, dass die Daten jedes Anfangsabstandes zu einem anderen Zeitpunkt beginnen, stärker von dieser Vorhersage abzuweichen. Kurven mit kleinerem Anfangsabstand weichen dabei früher ab. Wenn die Zeit an Stelle von τ_η mit t_B skaliert wird, sollten nach Batchelors Theorie alle Kurven auch in der Zeit übereinander liegen. Dies wird in Abbildung 5.6 gezeigt, in der die Daten jetzt mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}t^2$ kompensiert sind. In dieser Weise aufgetragen, wird noch deutlicher, dass der mittlere quadratische Abstand nicht exakt mit t^2 zunimmt. Des Weiteren liegen auch die Kurven der verschiedenen Anfangsabstände

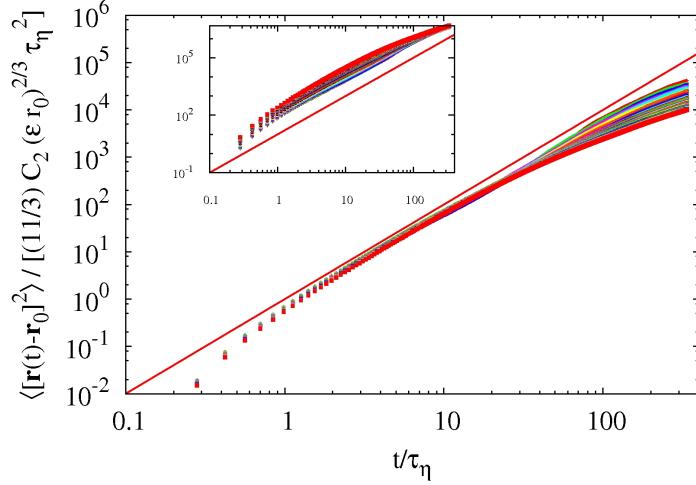


Abbildung 5.5: Die Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ der relativen Separation skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des Anfangsabstandes im Inertialbereich von $r_0 \in [0\eta, 9\eta]$ bis $r_0 \in [433\eta, 442\eta]$. Die gerade rote Linie ist die Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$ und kein Fit. Die Kurven liegen bis etwa $20\tau_\eta$ gut übereinander und nahe dem Verlauf dieser Funktion. Der Inset zeigt dieselben Daten, jedoch mit η^2 skaliert, also $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle / \eta^2$. Zu erkennen ist ein Offset zwischen den Kurven verschiedener Anfangsabstände.

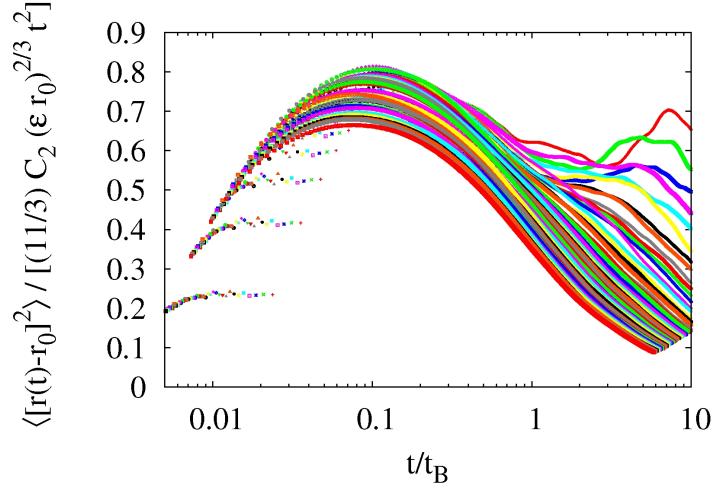


Abbildung 5.6: Kompensierter mittlerer quadratischer Abstand skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} t^2$, aufgetragen gegen die mit t_B skalierte Zeit. Gezeigt werden 50 verschiedene Bins des Anfangsabstandes im Inertialbereich. Das im Bereich $0.05 < t/t_B < 0.3$ liegende Plateau zeigt das Wachstum von $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle \propto t^2$ in diesem Regime auf.

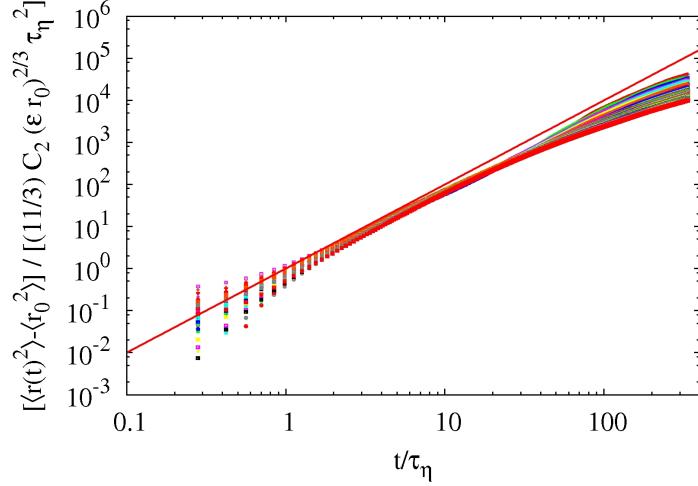


Abbildung 5.7: Die nach Batchelor zu betrachtende Größe der relativen Dispersion $\langle r(t)^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des Anfangsabstandes. Für Zeiten bis $t/\tau_\eta \approx 6$ geht das vorher vorhandene gute universelle Skalierungsverhalten verloren.

nicht exakt übereinander. Ein Vergleich, ob alle Kurven zum gleichen Zeitpunkt t/t_B abknicken, ist deshalb schwierig. Es lässt sich jedoch feststellen, dass alle Kurven für $t/t_B < 1$ abknicken. Wird der Bereich um $0,05 < t/t_B < 0,3$ als Plateau angesehen, ist dieser Bereich ein Batchelorregime und die Batchelorzeit stellt deswegen eine gute obere Grenze des Batchelorregimes dar. Anzumerken ist jedoch, dass für Zeiten $t/t_B > 1$ ein Regime mit $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle \propto t^\gamma$ mit $\gamma < 2$ vorliegt, was im Widerspruch zur Batchelors Theorie steht. Diese sagt für solche Zeiten ein Regime mit $\gamma = 3$ voraus.

Betrachten wir jetzt die in Batchelors Originalartikel behandelte Größe. Batchelor zu folge genügt es, die Größe $\langle r(t)^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ an Stelle von $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ zu betrachten (siehe Abschnitt 3.2.2). Der Unterschied der beiden Größen ist die Korrelation zwischen dem Anfangsabstand und der relativen Geschwindigkeit, welche Batchelor als vernachlässigbar annahm. Dies ist jedoch nicht gerechtfertigt. So ist in Abbildung 5.7 zu sehen, dass bei der Größe $\langle r(t)^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ das obige gute Zusammenfallen (Abbildung 5.5) der Kurven verschiedener Anfangsabstände im Inertialbereich für Zeiten bis $t/\tau_\eta \approx 6$ nicht vorhanden ist.

Ähnliche wie die hier besprochenen Resultate wurden von Yeung, Yeung und Borgas, Bourgoin et al. und Oulette et al. erzielt ([Yeu94, YB04, BOX⁺06, OXBB06], siehe auch Abschnitt 4.1). Bei beiden Datensätzen, die unter Mitwirken von Yeung entstanden, zeigt sich für die Größe $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ zunächst ebenfalls ein Skalierungsverhalten $\propto t^2$ (siehe Abbildungen (4.9) und (4.11)). Des Weiteren liegt eine Abhängigkeit vom Anfangsabstand vor. Ob diese der Batchelortheorie entspricht, lassen die Autoren jedoch offen. Bourgoin et al. und Oulette et al. fanden in ihren experimentell gewonnenen

Daten ein sehr ähnliches Verhalten, wie das in Abbildung 5.5 gezeigte (vgl. Abbildung 4.5). Ihre Daten skalierten jedoch noch besser mit t^2 . Auch ist in Abbildung 4.5 ein Abbildung 5.6 entsprechender Plot zu sehen, wobei das zeitliche Zusammenfallen der Kurven bei Darstellung mit t/t_B unter anderem durch das bessere Skalierungsverhalten prägnanter ist.

Rückblickend lässt sich somit festhalten, dass die Daten dieser Simulationen ein an näherndes Skalierungsverhalten nach Batchelor aufweisen. Dabei liegen jedoch keine Anzeichen für die Existenz eines Richardson-Obukhov-Regimes bei diesen Daten vor. Die Abhängigkeit der Resultate von den Simulationsmerkmalen Taylor-Reynolds-Zahl, Simulationsauflösung und verwendetem Treiber ergab folgendes Ergebnis: lediglich bei der Simulation **Sim512-2** ist ein minimal schlechteres Übereinanderliegen der mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}\tau_\eta^2$ skalierten Daten vorhanden. Dieses Phänomen ist der kleineren Taylor-Reynoldszahl und nicht der niedrigeren Simulationsauflösung zuzuschreiben. Bei dem Vergleich der Resultate der Simulationen **Sim1024-1** und **Sim1024-2** ist eine Abhängigkeit von dem Treiber nicht festzustellen.

5.4 Distance Neighbour Function

Die sphärisch gemittelte PDF der Paarseparation, die sogenannte Distance Neighbour Function, ist Gegenstand dieses Abschnittes. Überprüft werden die Daten auf Gültigkeit der Richardson-Obukhov-Vorhersage $q_R(r,t)$ (Gleichung (3.8)) und auf die der Batchelorvorhersage $q_B(r,t)$ (Gleichung (3.15)). Diese beiden Lösungen der jeweiligen Diffusionsgleichung setzen jedoch voraus, dass die Teilchenpaare zum Startzeitpunkt an dem selben Ort sind. Damit aber die Entwicklung der Separation auf Abhängigkeit vom Anfangsabstand untersucht werden kann, wurden die Simulationen mit endlichem Anfangsabstand durchgeführt. Um die Situation mit Anfangsabstand gleich Null zu nähern, wird zu jedem Zeitpunkt von dem Abstand der Anfangsabstand komponentenweise abgezogen. Dazu definieren wir

$$\Delta r(t) := |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|.$$

Nachfolgend wird die Distance Neighbour Function $q(\Delta r,t)$ betrachtet und zwar über die PDF der Norm des Vektors. Diese Vorgehensweise ist auf Grund der Isotropie der vorliegenden Turbulenz gerechtfertigt. Zu beachten ist dabei jedoch, dass eine PDF der Norm r eines Vektors \mathbf{r} nicht gleich der PDF dieses Vektors ist. Sei erstere mit $\tilde{f}(r)$ bezeichnet, letztere mit $f(\mathbf{r})$. Im Falle sphärischer Symmetrie ist die PDF des Vektors nur noch eine Funktion der Norm des Vektors, es gilt also $f(\mathbf{r}) = f(r)$. Wird diese entsprechend der Richardson-Obukhov- und der Batchelortheorie sphärisch gemittelt, gilt für beide PDFs die Relation:

$$\tilde{f}(r) = \int r^2 f(r) d\Omega = 4\pi r^2 f(r),$$

wobei $d\Omega$ die Integration über den Raumwinkel darstellt. Die mittels der Norm des Vektors ausgewertete PDF lässt sich somit nach Multiplikation mit $4\pi\Delta r^2$ in eine Form $q(\Delta r, t)$ bringen, die mit den beiden analytischen Formen und damit auch mit den Resultaten der in Kapitel 4 gezeigten Ergebnisse anderen Forschungsgruppen vergleichbar ist.

Abbildung 5.8 zeigt für sechs unterschiedliche Anfangsabstände jeweils ein Diagramm von $q(\Delta r, t)$. In jedem Diagramm wird die Distance Neighbour Function an 20 Zeitpunkten von τ_η bis $20\tau_\eta$ gezeigt. Um die Ergebnisse leichter mit $q_R(r, t)$ und $q_B(r, t)$ vergleichen zu können, wurde eine Variablentransformation durchgeführt:

$$\left(\frac{\Delta r^2}{\langle \Delta r^2 \rangle} \right)^{1/3} \rightarrow x.$$

Dadurch lassen sich Gleichungen (3.8) und (3.15) darstellen als

$$\langle \Delta r^2 \rangle^{3/2} q_R(\Delta r, t) = \frac{429}{70} \sqrt{\frac{143}{2}} \left[\frac{1}{\pi} \right]^{3/2} \exp \left[- \left(\frac{1287}{8} x \right)^{1/3} \right] \quad \text{und} \quad (5.2)$$

$$\langle \Delta r^2 \rangle^{3/2} q_B(\Delta r, t) = \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{3}{2} x \right]. \quad (5.3)$$

Die Richardson-Obukhov-Vorhersage ist als durchgezogene gerade Linie eingezeichnet, Batchelors als gestrichelte gekrümmte Linie. Zu beiden analytischen Lösungen liegen Übereinstimmungen vor. Zunächst bestätigt sich die Selbstähnlichkeit in der Zeit durch das Übereinanderliegen der Kurven verschiedener Zeitpunkte. Ferner ist für kleine Anfangsabstände die PDF nicht gaußsch, sondern ähnlich zu der Richardson-Obukhov-Vorhersage. Von nur leicht größeren Anfangsabständen ($r_0 \in [115\eta, 170\eta]$) bis hin zu den größten gezeigten Anfangsabständen sind die PDFs hingegen in etwa gaußsch und der Verlauf ist nahezu gleich dem der Batchelortheorie. Anzumerken ist jedoch auch, dass die Untersuchung der Größe $\Delta r(t)$ den Nebeneffekt in sich birgt, dass alle Teilchenpaare gleich behandelt werden, unabhängig davon, ob sie sich voneinander separieren oder sich näher kommen. Weil einige Paare sich vor dem Separieren zunächst aufeinanderzubewegen, wird bei dieser Betrachtung nicht die gesamte Physik der Paarseparation erfasst.

Zusammenfassend lässt sich Folgendes sagen: Die aus den Simulationsdaten gewonnene Distance Neighbour Function ist selbstähnlich in der Zeit. Von der Form her vollzieht sie einen Wechsel in Abhängigkeit von dem Anfangsabstand. Für kleine Anfangsabstände ($r_0 \in [7\eta, 61\eta]$) ist sie der Richardson-Obukhov-Form ähnlich. Doch bei leicht größeren Anfangsabständen ($r_0 \in [332\eta, 386\eta]$) ist bereits die recht starke Ähnlichkeit zu der von Batchelor vorhergesagten Form deutlich zu erkennen. Dieser Wandel der PDF wurde auch von Oulette et al. in ihren Experimenten [OXBB06] gefunden (siehe Abbildung 4.6). Dass für kleine Anfangsabstände die PDF der von Richardson-Obukhov ähnelt,

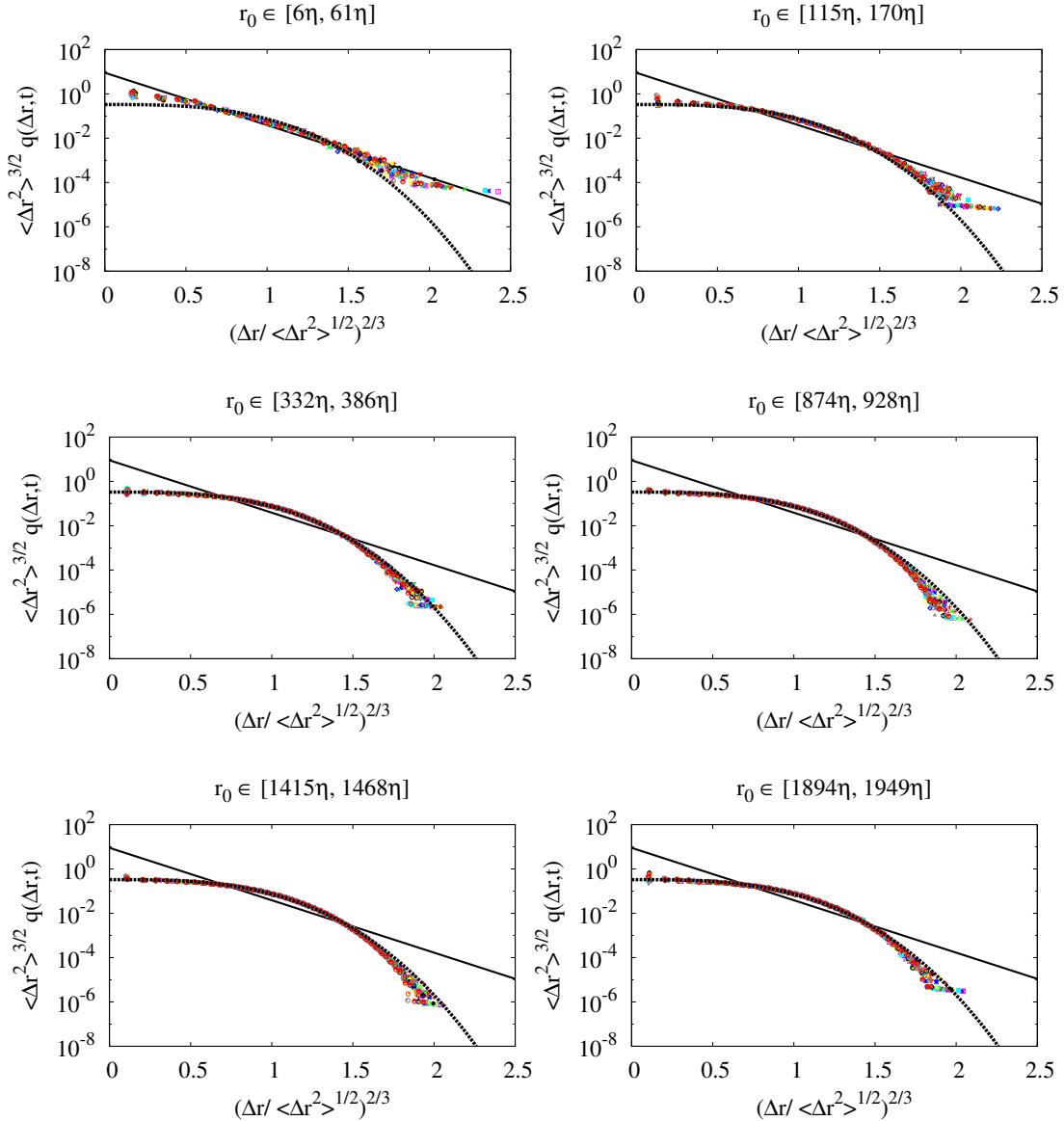


Abbildung 5.8: Die Distance Neighbour Function der Simulation `Sim1024-2` für sechs verschiedene Anfangsabstände. Die durchgezogene gerade Linie ist die Richardson-Obukhov-Vorhersage, die gestrichelte gekrümmte ist die Batchelors. Jeder Plot zeigt einen anderen Anfangsabstand. Zu jedem Anfangsabstand werden PDFs von 20 Zeitpunkten gezeigt, von τ_η bis $20\tau_\eta$. Bei der PDF ist von kleinen zu großen Anfangsabständen ein Wandel von der Richardson-Obukhov-Vorhersage zu der von Batchelor hin erkennbar.

wurde auch von Ott und Mann [OM00] ($r_0 = 10\eta$, Abbildung 4.4), Berg et al. [BLMO06] ($r_0 \in [12\eta, 16\eta]$, Abbildung 4.7), Boffetta und Sokolov [BS02] ($r_0 = 1,8\eta$, Abbildung 4.10) und Biferale et al. [BBC⁺05a] ($r_0 < 20\eta$, Abbildung 4.12) berichtet. Aussagen von ihnen über einen Wandel der Form der PDF hin zu Batchelors Vorhersage gibt es jedoch keine. Allerdings wurden von diesen Autoren auch keine größeren als die angegebenen anfänglichen Abstände untersucht.

5.5 Berücksichtigung des ballistischen Charakters als Alternativansatz

Bei der Suche nach traditionellen Skalierungsregimen in Abschnitt 5.3 offenbarte sich bei den dargestellten Daten annähernd ein Batchelorregime. Es stellt sich die Frage, ob ein Richardson-Obukhov-Regime oder wenigstens ein Anzeichen für dieses, gefunden werden kann, wenn wir die Suche nach traditionellen Regimen aufgeben. Dies impliziert aber nicht, dass die in Kapitel 4 erwähnten Methoden des Timeshifts und der Analyse der mittleren Exit-Time verwendet werden. Vielmehr wird die Möglichkeit genutzt, die zu untersuchende Größe anders zusammenzusetzen. Bisher wurde die relative Dispersion mittels der zeitlichen Entwicklung der Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle$ des kompensierten Abstandes analysiert. Der Abstand wurde hierbei durch den Anfangsabstand kompensiert.

Ein anderer Ansatz wäre folgender: Zum Startzeitpunkt t_0 hat das Teilchenpaar die relative Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 , entsprechend der Geschwindigkeitsdifferenz des Geschwindigkeitsfeldes an den beiden zugehörigen Ortspunkten. Ohne weiteres Einwirken würde sich das Paar allein durch eine ballistische Bewegung voneinander separieren. Zum Zeitpunkt t hätte es sich um $\mathbf{v}_0 t$ auseinander bewegt. Wird von dem Abstand $\mathbf{r}(t)$ diese Größe $\mathbf{v}_0 t$ subtrahiert, bleiben nur noch die Anteile der Separation übrig, die durch die weitere Entwicklung der turbulenten Strömung bewirkt werden. Genau diese Größe wird in diesem Abschnitt mit Hilfe ihrer Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ untersucht. Abbildung 5.9 zeigt deren zeitliche Entwicklung. Je nach Anfangsabstand ist für Zeiten bis etwa $3\tau_\eta$ bzw. bis etwa $20\tau_\eta$ ein konstanter Bereich zu erkennen. Im Anschluss an diesen beginnt ein Bereich, in dem alle Kurven etwa mit $(t/\tau_\eta)^2$ skalieren. Dieses Verhalten ist gut im rechten Teil von Abbildung 5.9 zu sehen. Dieser zeigt die mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{1/3}t^2$ kompensierte Varianz, welche für Zeiten größer als $70\tau_\eta$ einen annähernd konstanten Verlauf aufweist. Im Vergleich zu der nicht skalierten Varianz ist das Übereinanderliegen der Kurven der skalierten Varianz in diesem Bereich relativ gut. Die Skalierung mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^\beta\tau_\eta^2$ und $\beta = 1/3$ liefert das beste Ergebnis. Für $\beta = 2/3$, dies entspricht gerade der Batchelorskalierung für das traditionelle Batchelorregime, sind die jeweiligen Kurven in dem Inset des linken Diagramms zu sehen. Diese sind wesentlich weiter aufgefächert als für $\beta = 1/3$. Warum jedoch letztere Skalierung ein besseres Ergebnis erzielt, ist unklar.

Die unterschiedlichen Längen der anfänglich konstanten Bereiche des linken Diagramms aus Abbildung 5.9 sind abhängig vom Anfangsabstand. Die unteren Kurven entsprechen

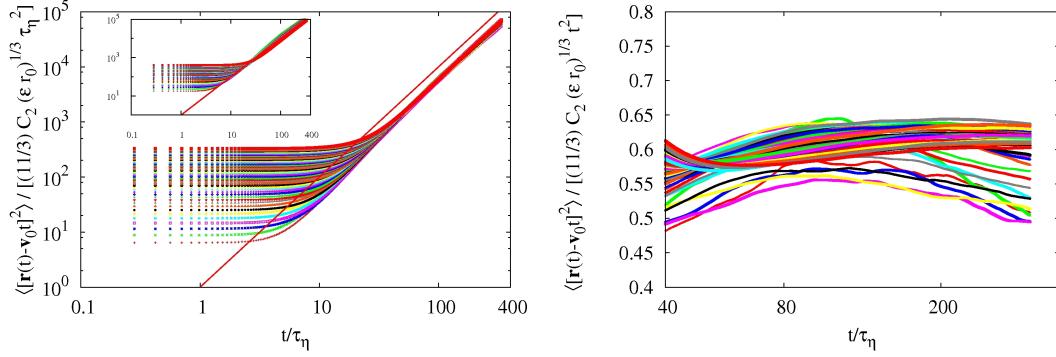


Abbildung 5.9: Die Varianz $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ für 50 verschiedene Bins des Anfangsabstandes aufgetragen im Inertialbereich gegen die mit τ_η skalierte Zeit. Links: Die Varianz skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/3} \tau_\eta^2$. Die Kurven in der Reihenfolge von unten nach oben entsprechen Anfangsabständen von klein ($r_0 \in [1\eta, 10\eta]$) zu groß ($r_0 \in [433\eta, 442\eta]$). Die rote Linie ist $\propto t^2$. Je nach Anfangsabstand ist der anfänglich konstante Bereich unterschiedlich groß. Der Inset zeigt dieselben Daten skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$. Das Übereinanderliegen der Kurven ist wesentlich schlechter als in der großen Abbildung. Rechts: Gezeigt wird die Varianz skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/3} t^2$. Für Zeiten ab etwa $70\tau_\eta$ liegen Plateaus vor.

den kleineren Anfangsabständen, die oberen den größeren. Der zeitlich kürzere konstante Anfangsbereich bei kleineren Anfangsabständen deutet darauf hin, dass sich der Einfluss der turbulenten Strömung auf die Separation solcher Anfangsabstände früher als bei größeren zeigt. Mit Hilfe von Richardsons Vorstellung zum Ablauf der turbulenten Teilchenseparation (siehe Abschnitt 3.2.1) lässt sich diesem Aspekt folgendes entnehmen: Teilchenpaare mit kleinerem Abstand werden schneller durch vorhandene Wirbelstrukturen separiert als Teilchenpaare mit größerem Abstand. Nach Richardsons Vorstellung tragen lediglich solche Wirbelstrukturen zur weiteren Separation bei, die dieselbe Größenordnung wie der Abstand haben. Demnach haben zu frühen Zeitpunkten kleinskalige Wirbelstrukturen eine stärkere Wirkung auf die Separation. Dies lässt vermuten, dass in einem Wirbelfeld mehr Strukturen mit kleinskaligen Bereichen vorhanden sind. Mit verantwortlich dafür könnte der Wirbelstreckungsterm der Wirbeltransportgleichung (2.3) sein, der unter anderem zu dem Entstehen langer, dünner, filamentartiger Strukturen beiträgt. Anzeichen zu Bestätigung dieser Vorstellung von der Wirbeldynamik liefert Abbildung (5.3).

Weiterhin wurde untersucht, ob die anfängliche relative Geschwindigkeit transversal oder longitudinal zum Anfangsabstand einen unterschiedlichen Einfluss auf die weitere Entwicklung der Separation hat. Abbildung 5.10 zeigt die entsprechenden Diagramme.

Im linken Diagramm ist die Varianz unter Verwendung des transversalen Anteils $\mathbf{v}_{0,t}$ zu sehen, im rechten unter Verwendung des longitudinalen Anteils $\mathbf{v}_{0,l}$. Beide stimmen in etwa im Verlauf mit dem in Abbildung 5.9 gezeigten Diagramm überein. Die transversale

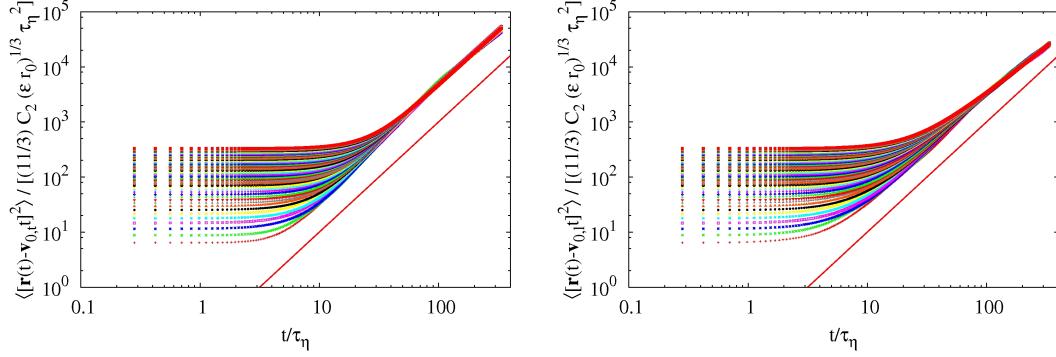


Abbildung 5.10: Gezeigt wird die Varianz des mit dem durch den ballistischen Charakter kompensierten Abstandes für 50 verschiedene Bins des Anfangsabstandes im Inertialbereich. Das linke Diagramm zeigt die Varianz, gebildet mit dem transversalen Anteil des ballistischen Charakters, das rechte die mit dem longitudinalen Anteil gebildete. Beide Diagramme sind mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/3} \tau_\eta^2$ skaliert. Kein merklicher Unterschied zu der mit demselben Faktor skalierten Größe $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ ist erkennbar.

Größe hat lediglich minimal länger anhaltende Plateaus im Bereich kleiner Zeiten und steigt im späteren Verlauf etwas schneller zu leicht höheren Werten an, als es die longitudinale Größe tut. Der Verlauf der Separation ist also nahezu unabhängig davon, ob der transversale oder der longitudinale Anteil der anfänglichen relativen Geschwindigkeit berücksichtigt wird.

Somit ist es nicht gelungen, mittels der in diesem Abschnitt durchgeführten Auswertung ein Richardson-Obukhov-Regime der Größe $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ nachzuweisen. Auf eine Darstellung der PDF $q(|\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t|, t)$, welche einer modifizierten Distance Neighbour Function dieser Größe entspricht, wird daher an dieser Stelle verzichtet. Vielmehr wird die Suche nach dem besagten Regime mit einer noch anders zusammengesetzten Größe im nächsten Abschnitt weiter vorangetrieben.

5.6 Abstandsentwicklung bei Berücksichtigung des Anfangsabstandes und des ballistischen Charakters

Die in diesem Abschnitt zu untersuchende Größe ist von der Idee her eine Kombination der Größen aus den Abschnitten 5.3 und 5.5. In dem Letzteren wurde die Abstandsentwicklung ohne den ballistischen Anteil des Vorgangs betrachtet. Um bei allen Teilchenpaaren die Zunahme des Abstandes besser miteinander vergleichen zu können, betrachten wir auch wirklich nur die Zunahme. Gegenstand der folgenden Untersuchung ist also die Größe $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$ und zwar ohne den ballistischen Anteil der Separation. Die zu analysierende Größe ist demzufolge $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$. Wie in den vorangehenden Kapiteln wird hierbei die Varianz $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ der Größe untersucht.

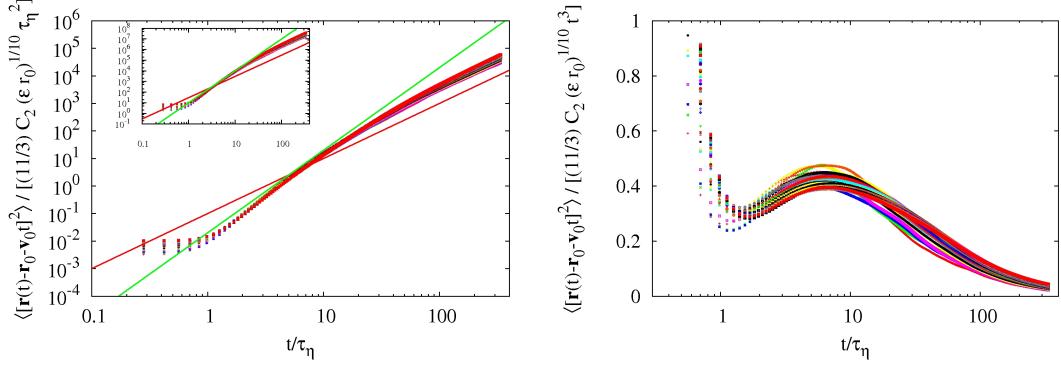


Abbildung 5.11: Links: Die Varianz $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/10} \tau_\eta^2$, aufgetragen gegen t/τ_η . Eingezeichnet sind 50 Kurven entsprechend 50 verschiedenen Bins des Anfangsabstandes im Inertialbereich. Die rote Gerade ist $\propto t^2$, die grüne $\propto t^3$. In dem Bereich $2 < t/\tau_\eta < 11$ wächst die Varianz etwa mit t^3 an. Der Inset zeigt die Varianz skaliert mit η^2 . Das im Fall der vorherigen Skalierung über längere Zeit vorhandene gute Übereinanderliegen der Kurven ist nur für Zeiten $2 < t/\tau_\eta < 5$ vorhanden. Rechts: Die Varianz skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/10} t^3$. Der vorhin angesprochene Bereich $2 < t/\tau_\eta < 11$, in dem die Varianz $\propto t^3$ annähernd ist, ist hier deutlicher zu erkennen.

Im linken Diagramm in Abbildung 5.11 ist die zeitliche Entwicklung dieser Varianz dargestellt. Zu sehen ist ein anfängliches Wachstum annähernd $\propto t^3$, der grünen Linie entsprechend. Der Inset des linken Diagramms zeigt die Varianz skaliert mit η^2 . Auffällig ist hierbei im Vergleich zu den bereits so skalierten vorher gezeigten anderen Varianzen, dass der Verlauf der einzelnen Kurven im geringeren Maße abhängig vom Anfangsabstand ist. Im Bereich $2 < t/\tau_\eta < 5$ liegen diese sogar übereinander, sind also dort unabhängig von r_0 . Es stellt sich heraus, dass das bestmögliche Übereinanderliegen der Kurven wird bei einer Skalierung mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/10} \tau_\eta^2$ erreicht. Anzumerken ist, dass der Exponent von (ϵr) nicht den zwei Dritteln der klassischen Batchelortheorie entspricht. Das rechte Diagramm in Abbildung 5.11 zeigt die Varianz, diesmal jedoch mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{1/10} t^3$ kompensiert. Im Bereich $2 < t/\tau_\eta < 11$ deutet sich ein Plateau an. In diesem nimmt die Varianz $\propto t^3$ zu.

Die Entwicklung des kompensierten Abstandes ohne dessen ballistischen Anteil ist demzufolge im Vergleich zu der Entwicklung des kompensierten Abstandes nur leicht vom Anfangsabstand abhängig. Die Teilchenseparation nimmt, ähnlich wie bei der Richardson-Obukhov-Vorhersage, mit t^3 zu. Nach Verstreichen weiterer Zeit folgt ein Übergang zu einem Wachstum, das ab ca. $70\tau_\eta$ ungefähr mit t^2 verläuft. Verantwortlich dafür wird die Dominanz des Terms $\langle v_0^2 \rangle t^2$ für große Zeiten sein.

Das Einwirken der relativen Geschwindigkeit in Kombination mit dem Abstand und Anfangsabstand

Im Folgenden wird untersucht, wodurch das Anwachsen $\propto t^3$ der Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ verursacht wird. Dazu wird die ausmultiplizierte Form der Varianz verwendet:

$$\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle = \langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle - 2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + 2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + \langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2. \quad (5.4)$$

Zunächst betrachten wir, welches die führende Ordnung in t ist, mit der jeder Term anwächst. Der erste Summand $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle$ wurde in Abschnitt 5.3 untersucht. Dieser Term wächst in etwa $\propto t^2$ (siehe Abbildungen 5.5 und 5.6). Der letzte Summand, $\langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$, ist eine Konstante multipliziert mit t^2 . Er nimmt demzufolge ebenfalls mit t^2 zu. Der dritte Term, $2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$, ist ein Produkt aus einem konstanten Wert und der ersten Potenz von t . Diese Größe ist somit linear in t . Der Verlauf des zweiten Terms, $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$, ist in dem linken unteren Diagramm in Abbildung 5.12 mit grünen Punkten eingezeichnet. Dieser Term skaliert nicht, hat ab einer Zeit von $0,6\tau_\eta$ aber auch zu keinem Zeitpunkt eine logarithmische Steigung größer als zwei. Die Zeit bis $0,6\tau_\eta$ ist von geringem Interesse, weil bis zu dieser Zeit bei der Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ noch kein Wachstum $\propto t^3$ vorliegt (siehe rote Punkte in derselben Abbildung). Ab diesem Zeitpunkt geht demnach keiner der vier Terme der Rechten-Hand-Seite von Gleichung 5.4 in t mit einer führenden Ordnung von mehr als zwei. Der t^3 -Verlauf der Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ muss somit aus dem Zusammenwirken der einzelnen Terme der Summe entstehen.

In dem oberen Plot und dem unteren rechten Diagramm in Abbildung 5.12 werden verschiedene Kombinationen einzelner Terme aus Gleichung 5.4 gezeigt. Wird der Term $2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ nicht zu den anderen drei Termen addiert, ist dennoch ein Anwachsen der gebildeten Summe mit t^3 vorhanden (oberes Diagramm, grüne Punkte). Allerdings ist dies für eine kürzere Zeitspanne als bei der Summe inklusive dieses Terms der Fall. Wird hingegen der Term $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ nicht subtrahiert (oberes Diagramm, blaue Punkte), liegt nur noch ein Verlauf $\propto t^2$ vor. Bei Weglassen des ersten Terms $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle$ oder des letzten Terms $\langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$ haben die beiden resultierenden Summen in dem relevanten Zeitraum weitestgehend eine negative Steigung (unteres Diagramm, grüne bzw. rote Punkte). Mit dem Ausdruck relevanter Zeitraum ist an dieser Stelle der Zeitraum gemeint, in dem die Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ annähernd mit t^3 skaliert.

Dieser Untersuchung zufolge ist die Korrelation zwischen \mathbf{r} und \mathbf{v}_0 ausschlaggebend für das Vorhandensein des t^3 -Regimes der Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$. Dies jedoch nur in Kombination mit Termen, die den Abstand, den Anfangsabstand und/oder die relative Anfangsgeschwindigkeit beinhalten. In dem unteren linken Diagramm der Abbildung 5.12 ist die Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle$ zusammen mit dem Term $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ eingezeichnet. Ein Zusammenhang zwischen den beiden Kurven in dem Bereich der t^3 -Skalierung ist erkennbar. In der Zeitspanne, in der die Werte des Terms $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ abfallen, ist der Übergang zu dem Bereich, in dem die Varianz $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2\rangle \propto t^2$ anwächst, in etwa abgeschlossen. Der Zeitpunkt, zu dem der Term $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ und damit auch die Korrelation zwischen den beiden Vektoren verschwindet, liegt bei ca. $71\tau_\eta$. Somit trägt die

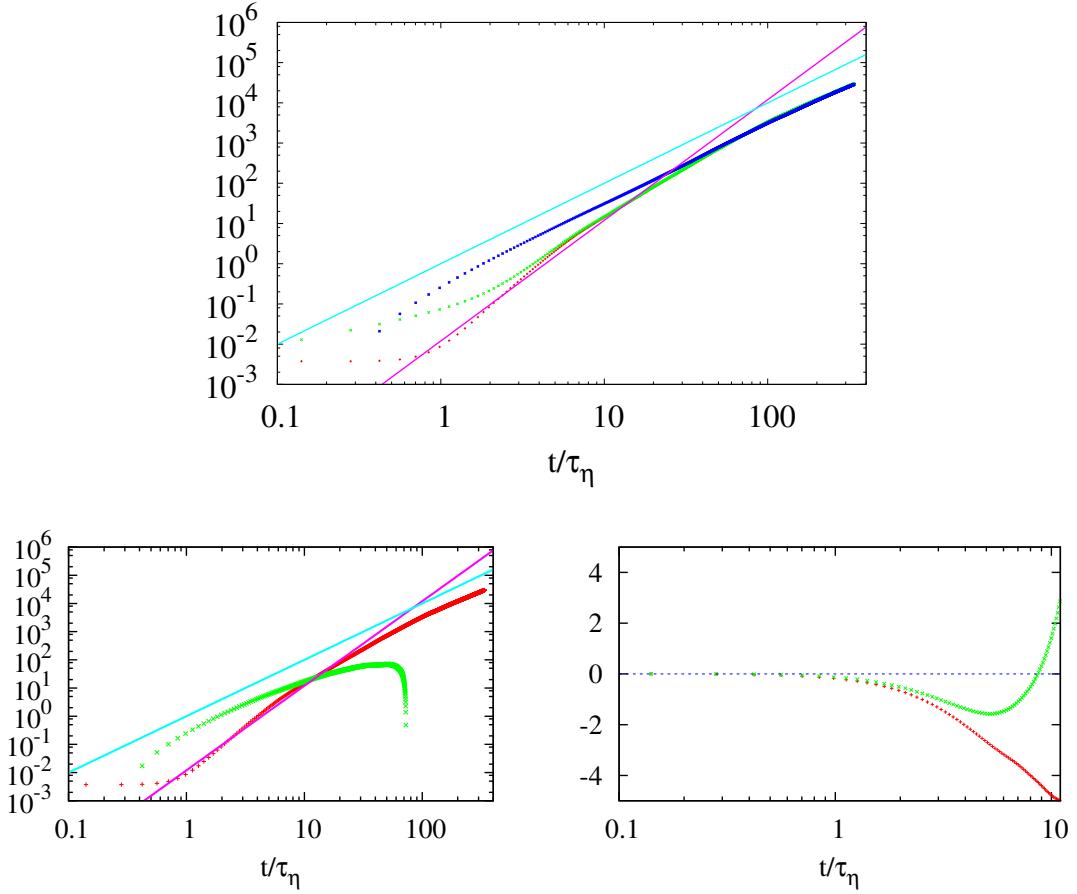


Abbildung 5.12: Oben: Die roten Punkte entsprechen dem vollständigen Term $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle - 2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + 2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + \langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$. Die grünen Punkte zeigen $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle - 2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + \langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$ und die dunkelblauen stellen $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle + 2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + \langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$ dar. Ohne das Subtrahieren des Terms $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ liegt kein Bereich $\propto t^3$ vor. Unten links: Die roten Punkte entsprechen denselben Daten wie zuvor. In grün eingezeichnet ist $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$. In etwa zeitgleich zu dem Abfall des Verlaufs von $2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$ ist der Übergang der in rot dargestellten Größe in ein Bereich mit einem Wachstum $\propto t^2$ abgeschlossen. In beiden Diagrammen ist die hellblaue Gerade $\propto t^2$ und die rosafarbene $\propto t^3$. Unten rechts: Die roten Punkte entsprechen $\langle(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2\rangle - 2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + 2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t$, die grünen $-2\langle\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + 2\langle\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0\rangle t + \langle\mathbf{v}_0^2\rangle t^2$. Beide Größen werden in dem Bereich bis $11\tau_\eta$ gezeigt, in dem die Summe aller Terme ungefähr mit t^3 skaliert. Fast über den kompletten Zeitraum haben beide Größen eine negative Steigung. Alle Daten der drei Diagramme sind für den Verlauf von $r_0 \in [55\eta, 64\eta]$ und sind jeweils mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{1/10}\tau_\eta^2$ skaliert.

Korrelation zwischen der anfänglichen Geschwindigkeit und dem Anfangsabstand eines Teilchenpaares knapp nach Ablauf der Large Eddy Turnover Time $T_0 = 57\tau_\eta$ nicht mehr zu der weiteren Separation bei.

5.7 Modifizierte Distance Neighbour Function

Es folgt die Analyse der PDF, die zu der Größe $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$ aus dem vorangegangenen Abschnitt gehört. Analog zu Abschnitt 5.4 wird die PDF der Norm dieser Vektordifferenz betrachtet und für einen Vergleich mit der sphärisch gemittelten PDF des Vektors entsprechend umgeformt. Dazu wird die neue Größe $\Delta r'(r,t)$ definiert:

$$\Delta r'(r,t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t|.$$

Die betrachtete PDF $q(\Delta r',t)$ ist dabei nicht mehr die klassische Distance Neighbour Function. Schließlich wird hierbei nicht allein der mit dem Anfangsabstand kompensierte Abstand $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|$ betrachtet. Zusätzlich zum Anfangsabstand \mathbf{r}_0 wird der ballistische Anteil der Separation $\mathbf{v}_0 t$ subtrahiert. Darum wird an dieser Stelle von einer modifizierten Distance Neighbour Function gesprochen.

In Abbildung 5.13 ist die modifizierte Distance Neighbour Function von Simulation **Sim1024-2** zu sehen. Gezeigt wird die PDF $q(\Delta r',t)$ für sechs verschiedene Anfangsabstände jeweils an 20 Zeitpunkten, von τ_η bis $20\tau_\eta$. Wie bei der klassischen Distance Neighbour Function (siehe Abschnitt 5.4) liegen auch bei der modifizierten Ähnlichkeiten zu der Richardson-Obukhov- und der Batchelorvorhersage vor. Diese sind auch hier abhängig von dem Anfangsabstand. Für kleine r_0 gleicht der Verlauf von $q(\Delta r',t)$ eher dem von $q_R(r,t)$. Von kleinen Anfangsabständen ausgehend und bei großen endend, ist ein Wandel von der Richardson-Obukhov-Vorhersage hin zu der von Batchelor zu sehen. Jedoch bleibt dabei die Ähnlichkeit zur Richardson-Obukhov-Lösung länger erhalten als bei der klassischen Distance Neighbour Function. So ist bei $q(\Delta r',t)$ für $r_0 \in [115\eta, 170\eta]$ und für $r_0 \in [332\eta, 386\eta]$ der Verlauf bei großen Werten der x -Achse nicht so stark gekrümmt und damit nicht so nahe an Batchelors gaußförmiger Lösung.

Die sphärisch gemittelte PDF der Größe $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$ hat damit starke Ähnlichkeit mit der sphärisch gemittelten PDF von $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$. Zu erwarten wäre durchaus ein anderer Verlauf. Schließlich unterscheidet sich die zeitliche Entwicklung der Varianz beider Größen deutlich. So wurde in Abschnitt 5.3 ein Bereich für die Varianz von $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0$ gefunden, in dem die zeitliche Entwicklung $\propto t^2$ verläuft. Hingegen wurde in Abschnitt 5.6 gezeigt, dass die Varianz von $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$ ein Regime aufweist, in dem sie annähernd $\propto t^3$ zunimmt. Jedoch spiegelt sich dieses zur klassischen Richardson-Obukhov-Vorhersage ähnliche Anwachsen nicht direkt in der PDF der Größe $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t$ wider.

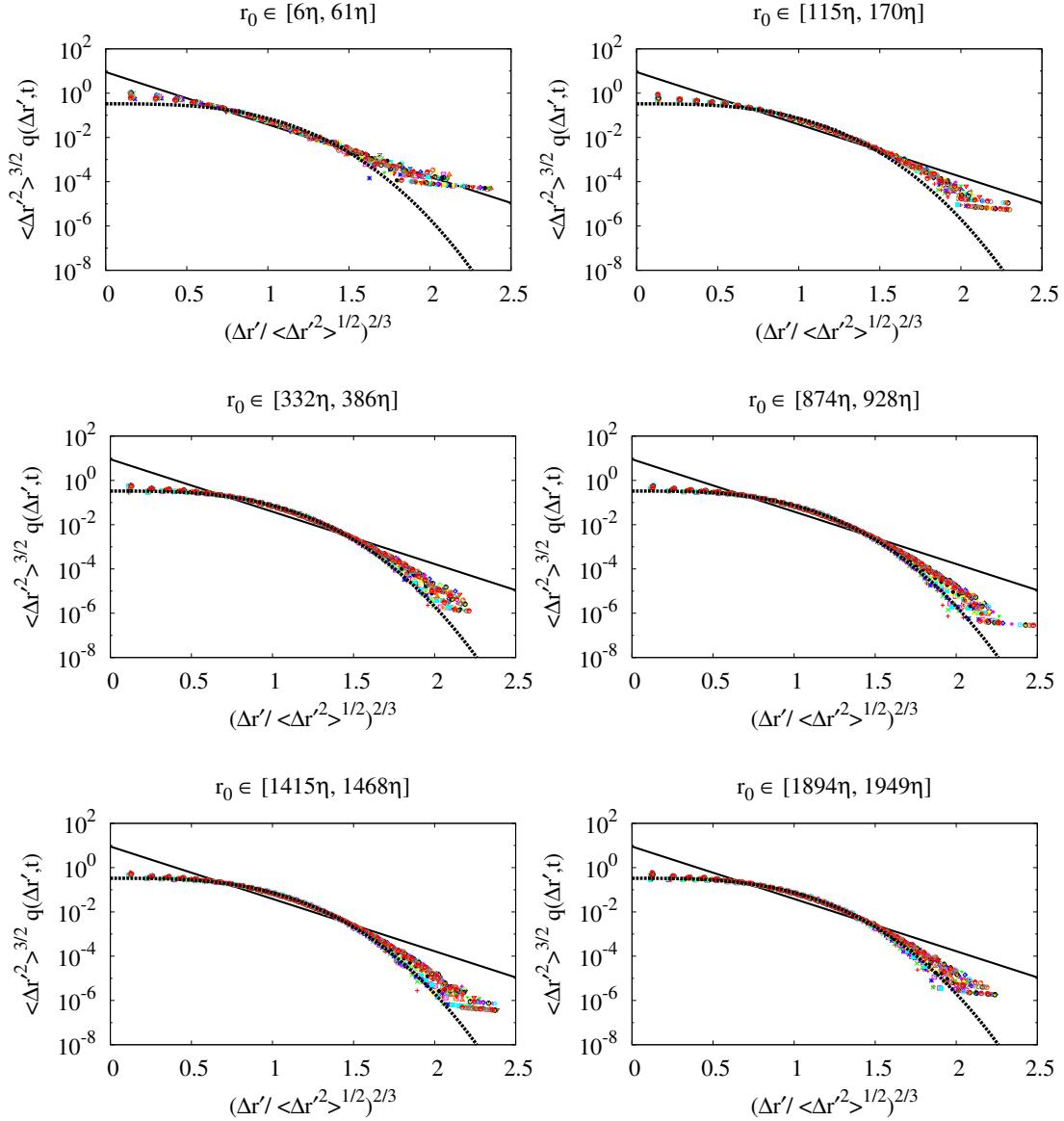


Abbildung 5.13: Die modifizierte Distance Neighbour Function der Simulation Sim1024-2 für sechs verschiedene Anfangsabstände. Die durchgezogene gerade Linie ist die Richardson-Obukhov-Vorhersage, die gestrichelte gekrümmte ist Batchelors Vorhersage. Jeder Plot zeigt einen anderen Anfangsabstand. Zu jedem Anfangsabstand werden PDFs von 20 Zeitpunkten gezeigt, von τ_η bis $20\tau_\eta$. Ebenso wie bei der klassischen Distance Neighbour Function unterliegt auch die PDF $q(\Delta r', t)$ von kleinen zu großen Anfangsabständen einen Wandel und zwar von der Richardson-Obukhov-Vorhersage hin zu der von Batchelor. $q(\Delta r', t)$ bleibt vom Verlauf her dabei aber näher an $q_R(r, t)$ als es bei $q(\Delta r, t)$ der Fall ist.

6 Detaillierte Bilanz in der Zweiteilchendispersion

6.1 Einführung

Nach dem sich der Hauptteil dieser Arbeit mit der zeitlichen Entwicklung der relativen Zweiteilchendispersion beschäftigt hat, folgt nun ein weiterer Teil über einem anderen Aspekt dieser Dispersion. In diesem Kapitel wird untersucht, ob sich ein System, das aus einer turbulenten Strömung mit in ihr injizierten Teilchen besteht, während des Prozesses der Zweiteilchendispersion im thermischen Gleichgewicht befindet. Dazu wird auf mikroskopischer Ebene überprüft, ob bei den Ausgabedaten zweier Simulationen das Prinzip der detaillierten Bilanz bei der Zweiteilchendispersion erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, liegt auf der makroskopischen Ebene kein thermisches Gleichgewicht vor. Zu erwarten ist, dass ein solches Gleichgewicht nicht vorhanden ist. Die Gründe dafür sind folgende: Bei dem betrachteten System handelt es sich um kein abgeschlossenes System. Die dem System zugehörige Strömung ist eine getriebene Strömung; ihr wird Energie auf großen Skalen zugeführt. Durch die Viskosität und die damit verbundene Dissipation wird zugleich Energie auf kleinen Skalen aus dem System herausgezogen. Somit liegt kein thermisches Gleichgewicht, sondern vielmehr ein Fließgleichgewicht vor.

In diesem Kapitel werden zunächst die theoretischen Grundlagen der detaillierten Bilanz besprochen. Im Anschluss folgt die diesbezügliche Auswertung der Simulationsdaten der DNS.

6.2 Theoretische Einführung

Das Prinzip der detaillierten Bilanz wird an dieser Stelle zunächst ganz allgemein erklärt. Seien a und b Zustände eines Systems und $F(a)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand a befindet. Entsprechend sei $F(b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand b befindet. Einem möglichen Wechsel von dem Zustand a in den Zustand b lässt sich eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Dies ist die sogenannte Übergangswahrscheinlichkeit W_{ab} . Sie gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass das System von dem Zustand a in den Zustand b übergeht. Ist ein Übergang von a nach b nicht möglich, ist W_{ab} gleich Null. Die Übergangswahrscheinlichkeit W_{ab} multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass das System sich überhaupt im Zustand a befindet, ergibt gerade den Fluss von dem Zustand a in den Zustand b . Ist der Fluss von a nach b genauso

groß wie der Fluss in die umgekehrte Richtung von b nach a , liegt detaillierte Bilanz vor. Also genau dann, wenn gilt [Hak90]:

$$W_{ab} F(a) = W_{ba} F(b). \quad (6.1)$$

Zur Anwendung auf die relative Paardispersion ist eine exakte Unterscheidung der Begriffe Zufallsvariable und Zustand nötig. Zufallsvariablen sind Größen, die bei unterschiedlichen Realisierungen unterschiedliche Werte annehmen können. Zustände hingegen sind konkrete Realisierungen. Als Beispiel sei das Würfeln genannt. Die Augenzahl ist eine Zufallsvariable. Diese kann Werte von 1 bis 6 annehmen. Wurde gewürfelt, liegt mit dem Wurf eine konkrete Realisierung vor und zwar einer der Zustände 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Seien nun α und β Zufallsvariablen, denen sich die konkreten Zustände a und b zuordnen lassen. Die oben angesprochene Übergangswahrscheinlichkeit W_{ab} ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(b|a)$. Schließlich muss sich das System zunächst im Zustand a befinden, um von diesem in den Zustand b übergehen zu können. Deswegen gilt also $W_{ab} = P(b|a) = P(\beta = b|\alpha = a)$. Analog folgt $W_{ba} = P(a|b) = P(\alpha = a|\beta = b)$. Werden diese beiden Ausdrücke in Gleichung (6.1) eingesetzt, lautet diese:

$$P(\beta = b|\alpha = a) F(\alpha = a) = P(\alpha = a|\beta = b) F(\beta = b). \quad (6.2)$$

Auf jeder Seite dieser Gleichung steht eine auf einen Zustand einer Größe bedingte Wahrscheinlichkeit, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit dieses Zustandes. Nach Gleichung (5.1) lässt sich dieses Produkt als Verbundwahrscheinlichkeit darstellen:

$$\begin{aligned} P(\beta = b|\alpha = a) F(\alpha = a) &= F(\beta = b, \alpha = a) \quad \text{und} \\ P(\alpha = a|\beta = b) F(\beta = b) &= F(\alpha = a, \beta = b). \end{aligned}$$

Daher nimmt Gleichung (6.2) die Form

$$F(\beta = b, \alpha = a) = F(\alpha = a, \beta = b) \quad (6.3)$$

an. Die Bedingung für die detaillierte Bilanz ist also auch durch Verbundwahrscheinlichkeiten darstellbar. Bisher wurden Fälle betrachtet, bei denen es möglich war, die Zustände jeweils exakt als einen Wert anzugeben. Es ist jedoch von größerem Interesse Aussagen darüber zu treffen, wie wahrscheinlich es ist, dass die Zustände a und b jeweils in einem bestimmten Intervall $[a_1, a_2]$, $a_1 < a_2$ bzw. $[b_1, b_2]$, $b_1 < b_2$ liegen. Um solche Angaben machen zu können, werden idealerweise Wahrscheinlichkeitsdichten betrachtet. Für diese gilt:

$$F(\alpha = a, \beta = b; a_1 \leq a \leq a_2, b_1 \leq b \leq b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Unter Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsdichten lässt sich Gleichung (6.3) derart umschreiben, dass die Bedingung für die detaillierte Bilanz nun

$$f(\beta, \alpha) = f(\alpha, \beta) \quad (6.4)$$

lautet.

6.3 Numerische Untersuchung der detaillierten Bilanz

Bei der Untersuchung der relativen Dispersion ist es von Interesse, Aussagen über den Zusammenhang zwischen anfänglichen Zuständen und Zuständen zu späteren Zeitpunkten treffen zu können. Anfängliche Zustände bezeichnen hier Zustände des Abstandes $r_0 = r(t_0)$ und der relativen Geschwindigkeit $v_0 = v(t_0)$ zum Startzeitpunkt $t = t_0$. Entsprechend charakterisieren Zuständen zu späteren Zeitpunkten t Zustände von $r(t)$ und $v(t)$ mit $t > t_0$. Interessant sind nun zwei Wahrscheinlichkeitsdichten. Die erste, w^1 , ist diejenige, mit der das System von einem bestimmten anfänglichen Zustand aus in einen konkreten Zustand am Zeitpunkt t übergeht. Das entspricht dem Ausdruck

$$w^1 = p(r(t), v(t) | r_0, v_0) f(r_0, v_0).$$

Die zweite Wahrscheinlichkeitsdichte, w^2 , ist die, mit der sich das System in einem bestimmten anfänglichen Zustand befindet, unter der Voraussetzung, dass es aus diesem in einen konkreten Zustand zum Zeitpunkt t übergegangen sein wird. Das entspricht

$$w^2 = p(r_0, v_0 | r(t), v(t)) f(r(t), v(t)).$$

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte w^1 gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte w^2 , so gilt:

$$\begin{aligned} w^1 &= w^2 \\ \Leftrightarrow p(r(t), v(t) | r_0, v_0) f(r_0, v_0) &= p(r_0, v_0 | r(t), v(t)) f(r(t), v(t)) \quad (6.5) \\ \Leftrightarrow f(r(t), v(t), r_0, v_0) &= f(r_0, v_0, r(t), v(t)). \end{aligned}$$

Bei Gültigkeit dieser Relation ist das Prinzip der detaillierten Bilanz erfüllt. Das Auswerten dieser PDF von vier Größen lässt sich durch das Ausnutzen der nachfolgenden Relation erheblich vereinfachen. Seien α und β nach wie vor Zufallsvariablen. Es lassen sich einzelne dieser Variablen aus der JPDF $f(\alpha, \beta)$ durch Integration eliminieren:

$$\int f(\alpha, \beta) d\alpha = f(\beta).$$

Wird Gleichung (6.5) über v_0 und $v(t)$ integriert, ergibt sich

$$f(r(t), r_0) = f(r_0, r(t)) \quad (6.6)$$

$$\Leftrightarrow f(r(t), r_0) - f(r_0, r(t)) = 0 \quad (6.7)$$

bzw. durch Integration nach r_0 und $r(t)$

$$f(v(t), v_0) = f(v_0, v(t)) \quad (6.8)$$

$$\Leftrightarrow f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t)) = 0. \quad (6.9)$$

Um die Gültigkeit der detaillierten Bilanz oder aber einen Bruch derselben nachzuweisen, bietet es sich an, die Verteilungen $f(r(t), r_0)$ und $f(v(t), v_0)$ auf Symmetrie zu

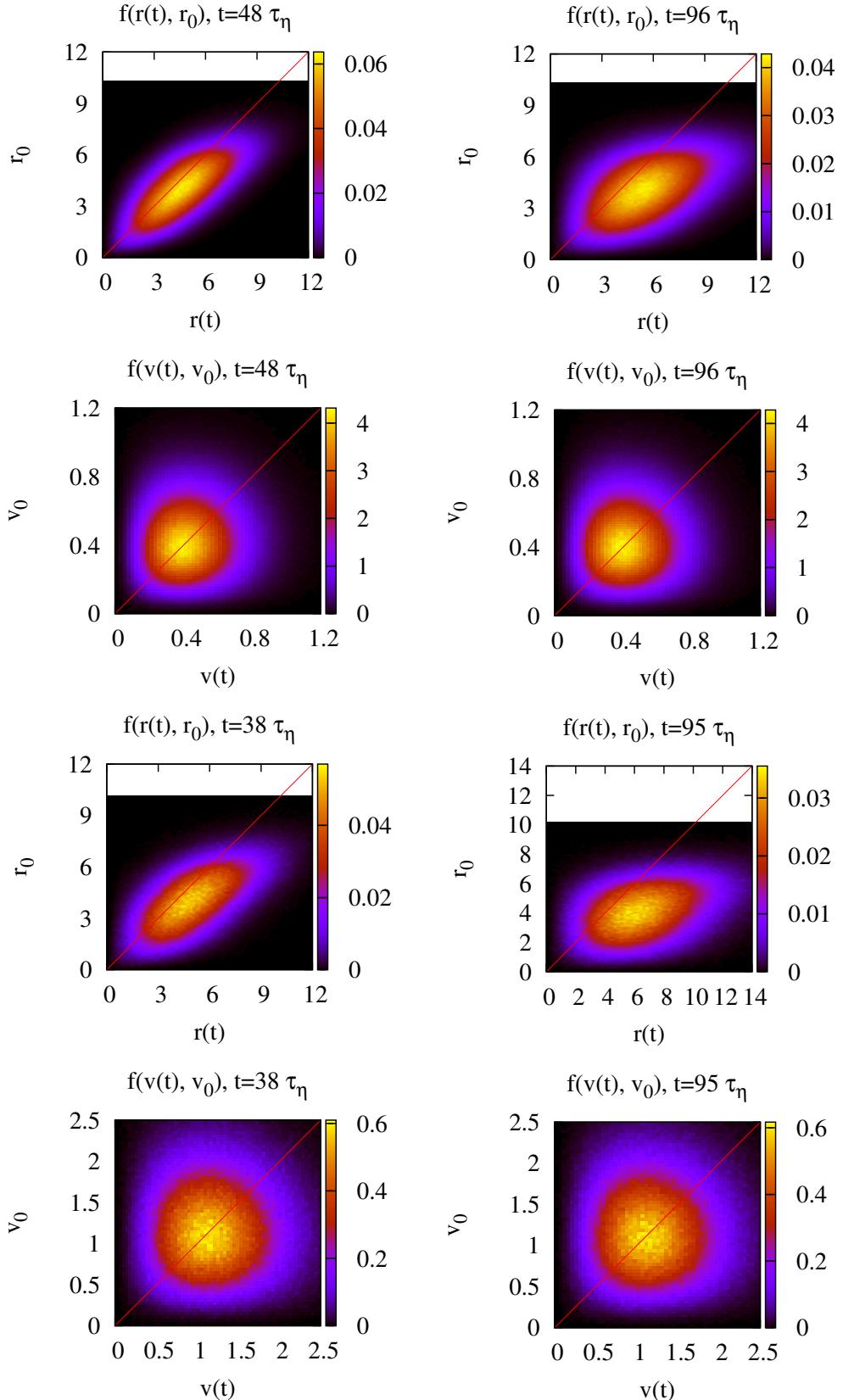


Abbildung 6.1: Die oberen vier Abbildungen zeigen $f(r(t), r_0)$ und $f(v(t), v_0)$ der Simulation **Sim1024-1** zu den Zeitpunkten $t = 48\tau_\eta$ und $t = 96\tau_\eta$. Die unteren vier Abbildungen zeigen diese Größen der Simulation **Sim512-2** zu den Zeitpunkten $t = 38\tau_\eta$ und $t = 95\tau_\eta$. Die Winkelhalbierende des ersten Quadranten des Achsenkreuzes wurde bei allen Diagrammen als rote Gerade eingezeichnet. Eine Asymmetrie bei $f(r(t), r_0)$ lässt sich dadurch leicht feststellen. Bei $f(v(t), v_0)$ ist eine solche nicht erkennbar.

untersuchen. Sind beide symmetrisch, gelten Gleichungen (6.6) und (6.8), woraus folgt, dass das Prinzip der detaillierten Bilanz erfüllt ist. Ist nur eine der beiden Verteilungen asymmetrisch, gilt also eine dieser Gleichungen nicht, so ist das Prinzip der detaillierten Bilanz gebrochen.

An dieser Stelle werden nur Daten der Simulationen **Sim1024-1** und **Sim512-2** gezeigt. Der Grund für die Wahl dieser Simulationen beruhte in der dadurch gegebenen Möglichkeit, die Resultate auf eine etwaige Abhängigkeit von der Taylor-Reynolds-Zahl, der Simulationsauflösung, den jeweiligen Zeitskalen und dem verwendeten Treiber untersuchen zu können. Weil sich aus der Darstellung der Daten der Simulation **Sim1024-2** keine zusätzlichen Erkenntnisse in Bezug auf das Prinzip der detaillierten Bilanz ergeben, wird deshalb an dieser Stelle aus platztechnischen Gründen auf die Darbietung dieser Daten verzichtet. In Abbildung 6.1 sind die JPDFs $f(r(t), r_0)$ und $f(v(t), v_0)$ der Simulationen **Sim1024-1** und **Sim512-2** dargestellt. Zu sehen sind diese jeweils zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Um die Verteilungen leichter auf eine eventuell vorhandene Asymmetrie untersuchen zu können, wurde eine Gerade als Hilfe eingezeichnet. Diese ist die Winkelhalbierende des ersten Quadranten des Achsenkreuzes. Wären die Verteilungen symmetrisch, müssten sie sich jeweils entlang der Winkelhalbierenden spiegeln lassen. Betrachten wir zunächst die Verteilungen $f(r(t), r_0)$. Bei beiden Simulationen ist bereits zu dem früheren Zeitpunkt deutlich zu erkennen, dass die Verteilungen nicht achsensymmetrisch zu der roten Geraden sind. Beide Verteilungen sind nach rechts verlagert und daher asymmetrisch. Zu dem jeweils späteren Zeitpunkt sind die Verteilungen weiter nach rechts hinüber gekippt. Die Asymmetrie ist dort noch deutlicher zu erkennen. Deswegen steht fest, dass Gleichung (6.6) nicht gültig ist.

Sehen wir uns nun die Verteilungen $f(v(t), v_0)$ an. An beiden Zeitpunkten der zwei Simulationen lässt sich mit dem bloßen Auge nicht ausmachen, ob die Verteilungen achsensymmetrisch zu der Winkelhalbierenden sind oder nicht. Über die Gültigkeit von Gleichung (6.8) lässt sich somit keine Aussage treffen. Darum wird an dieser Stelle das Vorhandensein der detaillierten Bilanz mit Hilfe von Gleichung (6.9) überprüft. In Abbildung 6.2 ist die Differenz $f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t))$ der JPDFs zu sehen. Zur Vollständigkeit wird auch die Differenz $f(r(t), r_0) - f(r_0, r(t))$ gezeigt. Die weiter oben attestierte Asymmetrie der Verteilung $f(r(t), r_0)$ sollte sich auch in dieser Differenz widerspiegeln. Wären die Gleichungen (6.7) und (6.9) gültig, müssten die obigen Differenzen an allen Stellen gleich Null sein. Zu sehen ist, dass dies für die Größe $f(r(t), r_0) - f(r_0, r(t))$ eindeutig nicht der Fall ist. Damit ist auch die Gültigkeit von Gleichung (6.7) widerlegt. Folglich ist die Hypothese der Asymmetrie im vorangehenden Absatz bestätigt. Bei Betrachtung der Größe $f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t))$ zeigt sich, dass diese an mehreren Stellen ebenfalls ungleich Null ist. Jedoch lässt sich auf Grund dessen keine klare Aussage treffen. Denn bei der Simulation **Sim1024-1** nimmt die Differenz $f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t))$ der JPDFs mit einem maximalen Wert 0,2 etwa 5% des maximalen Wertes der JPDF $f(v(t), v_0)$ an, welcher bei etwas mehr als 4 liegt. Im Falle der Simulation **Sim512-2** liegt das Maximum der Differenz $f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t))$ bei 0,6. Dies entspricht etwa 10% des Maximums der JPDF $f(v(t), v_0)$, welches knapp über 6 liegt. Werte dieser Größenordnung können

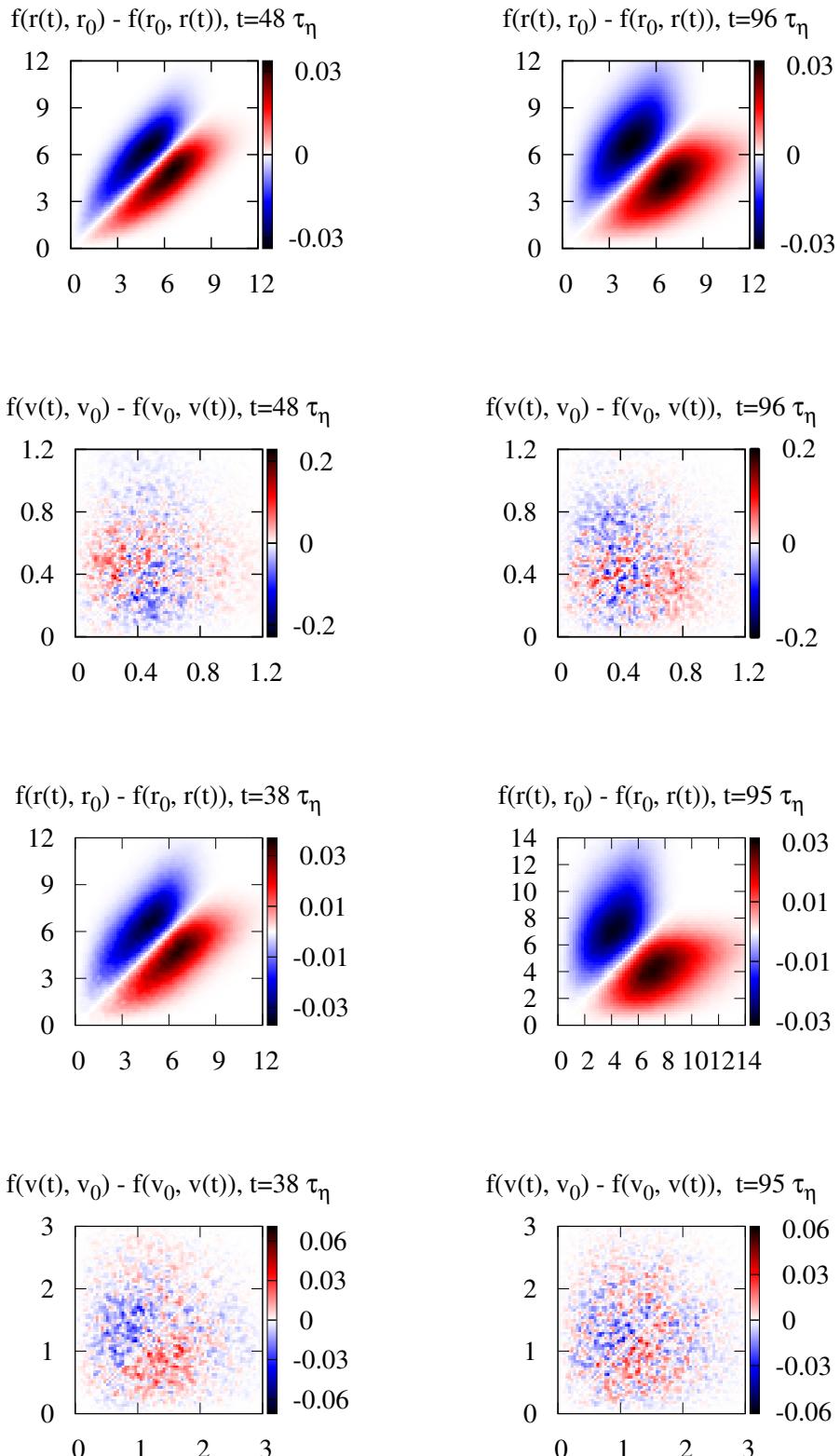


Abbildung 6.2: Die oberen vier Abbildungen zeigen $f(r(t), r_0) - f(r_0, r(t))$ und $f(v(t), v_0) - f(v_0, v(t))$ der Simulation **Sim1024-1** zu den Zeitpunkten $t = 48\tau_\eta$ und $t = 96\tau_\eta$. Die unteren vier Abbildungen zeigen diese Größen der Simulation **Sim512-2** zu den Zeitpunkten $t = 38\tau_\eta$ und $t = 95\tau_\eta$. Die Differenz $f(r(t), r_0) - f(r_0, r(t))$ ist auf dem gesamten Gebiet definitiv ungleich Null.

durchaus Resultat statistischen Rauschens sein. Gestützt wird diese Hypothese durch die Form der Verteilung der Differenz. Bei den Größen $r(t)$ und r_0 scheint diese systematisch zu sein. Auf einer Seite der Winkelhalbierenden liegen positive Werte, auf der anderen negative. Bei den Größen $v(t)$ und v_0 ist dies anders. Die Verteilung der Differenz hat auf beiden Seiten positive und negative Werte, wohl durch statistische Fluktuationen begründet. Daher wird hier geschlossen, dass Gleichung (6.9) gültig ist.

Für das Vorhandensein von detaillierter Bilanz, müssen die Gleichungen (6.6) und (6.8) bzw. (6.7) und (6.9) zugleich erfüllt sein. Es wurde jedoch in diesem Abschnitt gezeigt, dass die Gleichungen (6.6) und (6.7) nicht gültig sind. Damit ist belegt, dass das Prinzip der detaillierten Bilanz in der Teilchenpaardispersion für die hier betrachteten Größen nicht erfüllt ist. Dies gilt unabhängig von der Taylor-Reynoldszahl, der Auflösung und dem verwendeten Treiber. Somit ist die zu Beginn dieses Kapitels aufgestellte Hypothese verifiziert: in einem System bestehend aus einer Strömung mit vielen injizierten Teilchen liegt kein thermisches Gleichgewicht vor.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptziel dieser Arbeit war eine systematische Untersuchung der zeitlichen Entwicklung der relativen Separation passiver Partikel. Durch direkte numerische Simulationen unterstützt, wurde dieser Aspekt für dreidimensionale turbulente Strömungen überprüft.

In Kapitel 2 wurden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung der Turbulenz eingeführt. Neben den Grundgleichungen sind dies die Richardsonkaskade, die Kolmogorovtheorie und charakteristische Skalen einer Strömung. Letztere sowie die der K-41 Theorie entstammenden Größen wurden im Verlauf der Arbeit immer wieder benötigt.

Kapitel 3 beschäftigte sich mit der Einführung in das Thema der Dispersion. Zunächst wurde das Prinzip der Diffusion und die zugehörige Diffusionsgleichung erläutert. Letztere liegt den beiden nachfolgend dargestellten Theorien zur Zweiteilchenseparation zu Grunde; sie wurden bei der Auswertung mit einbezogen. Diese Theorien sind die Richardson-Obukhov-Theorie und die Batchelortheorie, welche eine modifizierte Weiterentwicklung der ersten ist. Bei beiden wurden sowohl die Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Varianz des relativen Abstandes bzw. des kompensierten relativen Abstandes zweier Teilchen besprochen als auch die Vorhersagen für die sphärisch gemittelte PDF der Separation für Punktquellen.

Kapitel 4 gab einen Überblick über die aktuellen Forschungsergebnisse anderer Forschungsgruppen zum Thema Zweiteilchendispersion. Zunächst wurden die Resultate der Experimentatoren vorgestellt. Hierauf folgten die Ergebnisse direkter numerischer Simulationen. Um diese mit den im Zuge dieser Arbeit gewonnenen Resultaten vergleichen zu können, wurden entsprechende Diagramme dieser Publikationen dargeboten.

Die Untersuchung der Zweiteilchendispersion erfolgte in Kapitel 5. Hierfür wurden drei Simulationsszenarien ausgewählt. Sie unterschieden sich hauptsächlich in der Taylor-Reynolds-Zahl, der Simulationsauflösung, den jeweiligen Zeitskalen und dem verwendeten Treiber, welcher Stationarität gewährleisten sollte. Der Grund für die Wahl dieser Simulationen beruhte in der dadurch gegebenen Möglichkeit, die Resultate auf eine etwaige Abhängigkeit von einem oder mehreren dieser Simulationsmerkmale untersuchen zu können. Es war von großem Interesse, ein besseres Verständnis für den Einfluss des anfänglichen Teilchenpaarabstandes auf die weitere Entwicklung der Separation zu erlangen. Damit die Simulationen in Abhängigkeit von dem Anfangsabstand zweier Teilchen ausgewertet werden konnten, wurden die Tracer zum Startzeitpunkt der Simulationen zufällig angeordnet. Dadurch ergaben sich verschiedenste Abstandswerte der Teilchenpaare.

Zunächst wurde die zeitliche Relevanz des relativen Anfangsabstandes für den weiteren Verlauf der Separation untersucht. Batchelors Theorie zufolge ist dieser Anfangsabstand spätestens bei Überschreiten der integralen Zeit nicht mehr von Bedeutung. Es zeigte sich jedoch, dass der Einfluss über den gesamten Simulationszeitraum vorhanden blieb. Der Grund dafür liegt unter anderem in der Wahl der integralen Zeit als Grenze für den Einfluss. Die integrale Zeit ist zwar ein adäquates Maß zur Beschreibung der Simulation, jedoch lässt sich an ihr nicht ausmachen, ob Größen nach Ablauf der integralen Zeit statistisch unabhängig werden. Ein weiterer Grund sind die in der Strömung auftretenden Wirbelstrukturen. Entgegen der Vorstellung der Richardsonkaskade, die der Batchelortheorie zu Grunde liegt, brechen nicht alle Wirbel zu kleineren Strukturen auf. Des Weiteren liegen auch nicht Wirbelstrukturen aller Größenordnungen vor. Diese von der Theorie abweichende Wirbeldynamik könnte zu einer längeren statistischen Abhängigkeit zwischen dem Abstand und dem Anfangsabstand beitragen, als sie von der Batchelortheorie angegeben wird.

In dem darauf folgenden Abschnitt erfolgte die Untersuchung bezüglich eines traditionellen Skalierungsregimes. Dazu wurde die Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ des mit dem relativen Anfangsabstand \mathbf{r}_0 kompensierten Abstandes $\mathbf{r}(t)$ zweier Teilchen analysiert. Es zeigte sich bei dieser Größe eine gute Übereinstimmung mit der Theorie Batchelors. Die Varianz wuchs zunächst mit t^2 an und wies eine bestimmte, durch entsprechende Skalierung nachweisbare, Abhängigkeit von dem relativen Anfangsabstand auf. Ein nach dieser Theorie darauf folgendes Regime $\propto t^3$ war bei den Daten allerdings nicht vorhanden. Das heißt zugleich, dass es bei diesen keine Anzeichen für die Existenz eines Richardson-Obukhov-Regimes gab. Die Untersuchung der Distance Neighbour Function anhand der Ausgabedaten der Simulationen lieferte ein anderes Resultat. Ihre Form stimmte sowohl mit der Richardson-Obukhov- als auch der Batchelortheorie in etwa überein. Mit welcher war abhängig von dem betrachteten relativen Anfangsabstand. Für kleinere glich die Form der der ersten Theorie, bei größeren der der letzteren. Insgesamt war zu sehen, dass die PDF einem Wandel von dem Verlauf Richardson-Obukhovs hin zu Batchelors unterlag.

Anhand der Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ wurde darüber hinaus die oben angesprochene Untersuchung auf Abhängigkeiten der Resultate von folgenden Simulationsmerkmalen durchgeführt: der Taylor-Reynolds-Zahl, der Simulationsauflösung und dem verwendeten Treiber. Es zeigte sich lediglich ein leicht anderes Verhalten, das bei gleichzeitig veränderter Taylor-Reynolds-Zahl und Auflösung auftrat. Hierbei war die Taylor-Reynoldszahl als ausschlaggebender Faktor anzusehen.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich stets auf Daten, in denen ausschließlich die Position der Teilchen analysiert wurde. In den Abschnitten 5.5 und 5.6 wurde erstmals die relative Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 der Teilchenpaare mit in die Untersuchung einbezogen. Wird der ballistische Charakter der Separation von dem Abstand zweier Teilchen abgezogen, bleiben nur noch die Anteile der Separation übrig, die durch die weitere Entwicklung der turbulenten Strömung bewirkt werden. Betrachtete man die Varianz $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ dieser Größe, zeigte sich, dass auch sie keine Richardson-Obukhov-

Skalierung aufwies. Vielmehr enthielt sie ein Regime, welches $\propto t^2$ verlief und daher eher der Batchelortheorie entsprochen hätte. Um die Abstandsentwicklung für Paare unterschiedlichen Anfangsabstandes besser vergleichen zu können, wurde die Entwicklung des reinen relativen Abstandes ohne ihren ballistischen Charakter betrachtet. Dazu wurde zusätzlich der Anfangsabstand von dem Abstand eines Teilchenpaares abgezogen. Die Varianz $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_0 t)^2 \rangle$ dieser Größe zeigte ein anderes zeitliches Verhalten. Bei ihr war ein Regime zu sehen, welches mit t^3 anwächst. Das heißt, dass die Entwicklung des reinen relativen Abstandes ohne ihren ballistischen Charakter ein Regime ähnlich der Richardson-Obukhov-Theorie aufwies. Es wurde gezeigt, dass die ausmultiplizierte Form dieser Varianz keinen Term enthält, der in t die führende Ordnung drei hat. Zustande kommt dieses Skalierungsverhalten durch das Zusammenspiel der verschiedenen Terme in der Summe. Eine wichtige Rolle spielt hierbei die Korrelation zwischen dem relativen Abstand und der relativen Anfangsgeschwindigkeit. So lange diese vorhanden war, lag in etwa ein Wachstum $\propto t^3$ vor. War sie dies nicht mehr, war das Wachstum nur noch $\propto t^2$. Der Zeitpunkt, zu dem die Korrelation zwischen den beiden Größen verschwand, lag kurz nach Ablauf der Large Eddy Turnover Time. Die Ähnlichkeit zwischen dem Wachstum $\propto t^3$ und der Richardson-Obukhov-Theorie spiegelte sich in der darauf folgenden Analyse der modifizierten Distance Neighbour Function jedoch nicht wieder. Diese wies nur minimal mehr Ähnlichkeit zur analytischen Richardson-Obukhov-Lösung auf, als es die klassische Distance Neighbour Function tat. Ansonsten waren sich die modifizierte und die klassische Variante vom Verlauf her sehr ähnlich.

In Kapitel 6 wurde die Zweiteilchendispersion nicht mehr auf ein etwaiges Skalierungsverhalten bei ihrer Entwicklung untersucht. Ein anderer Aspekt stand im Mittelpunkt der Untersuchung: befindet sich eine Strömung mit in sie injizierten Teilchen im thermischen Gleichgewicht? Dazu wurde das Prinzip der detaillierten Bilanz verwendet. Nach einer theoretischen Einführung dieser wurde überprüft, ob das Prinzip der detaillierten Bilanz bei der relativen Separation zweier Teilchen erfüllt ist. Anhand der Ausgabedaten einer direkten numerischen Simulation wurde gezeigt, dass dieses Prinzip bei der Zweiteilchendispersion gebrochen ist, und deswegen kein thermisches Gleichgewicht vorliegt. Dieses Resultat ist unabhängig von der Taylor-Reynolds-Zahl, der Auflösung und dem verwendeten Treiber.

Die in dieser Arbeit erzielten Resultate sowie die in Kapitel 4 gezeigten Ergebnisse anderer Forschungsgruppen lassen den Verdacht aufkommen, dass die der Richardson-Obukhov- und die der Batchelortheorie zu Grunde liegenden Anschauungen dem Phänomen der Zweiteilchendispersion nicht gerecht werden. Vielmehr zeichnet sich ab, dass dieses Phänomen erheblich komplizierter ist als angenommen wurde. Richardson, Obukhov und Batchelor hatten bei dem Aufstellen ihrer Theorien vor über einem halben Jahrhundert nicht die Möglichkeiten, die es heutzutage gibt, einen so weitgehenden Einblick in den Ablauf und die Entwicklung von turbulenten Strömungen zu gewinnen. Dies wurde erst durch die Experimente und die direkten numerischen Simulationen der letzten Jahrzehnte möglich. So zeigt sich z. B., dass die Geschwindigkeit in einer turbulenten Strömung nicht δ -korreliert ist (siehe Abbildung 5.2). Das Vorhandensein dieser

δ -Korrelation ist jedoch die Voraussetzung zur Anwendbarkeit der Diffusionsgleichung in Bezug auf die Zweiteilchendispersion (siehe Abschnitt 3.2.1). Es stellt sich also die Frage, ob die Verwendung dieser Gleichung in der Richardson-Obukhov- und in der Batchelortheorie überhaupt gerechtfertigt ist. Ebenfalls weicht die Wirbeldynamik von der Vorstellung bei der den beiden Theorien zu Grunde liegenden Richardsonkaskade ab.

Dennoch sollten die Untersuchungen der Zweiteilchendispersion weiter vorangetrieben werden, denn die Resultate dieser Arbeit weisen Übereinstimmungen mit der Batchelortheorie auf. Dadurch wird zugleich deutlich, dass die Separation zweier Partikel durch deren anfänglichen Abstand beeinflusst wird. Des Weiteren wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass die relative Anfangsgeschwindigkeit eines Teilchenpaares entscheidenden Einfluss auf deren weitere Separation hat. Weitere Untersuchungen der Zweiteilchendispersion sollten somit unter Berücksichtigung dieser beiden Größen erfolgen. Von Interesse könnte dabei auch sein, eine andere als die in dieser Arbeit verwendete anfängliche Positionierung der Teilchen in der Strömung zu verwenden. Anstatt also die Teilchen zufällig in der periodisch simulierten Box anzusiedeln, wäre eine Anordnung als kleine Teilchenwolke denkbar, in der alle Partikel dicht beieinander injiziert werden. Eine Untersuchung einer solchen Punktquelle, ließe Rückschlüsse auf Inhomogenitäten in der Partikelkonzentration zu. Eine Möglichkeit dabei wäre eine Analyse der zeitlichen Entwicklung der fraktalen Dimension von dieser Teilchenanordnung. Bei der Injizierung in eine Strömung hat die Punktquelle die fraktale Dimension Null. Wenn nach Ablauf einer längeren Zeitspanne die Partikelverteilung homogen geworden ist, beträgt die fraktale Dimension drei. Hat diese Dimension zu einem früheren Zeitpunkt einen Wert kleiner als drei angenommen, ist die Partikelverteilung somit noch nicht homogen, vielmehr liegen in ihr noch „Löcher“ vor. Von Interesse wären hierbei durchaus auch die fraktalen Dimensionen zu charakteristischen Zeitpunkten der Strömung z. B. zur integralen Zeit oder zur Lagre Eddy Turnover Time. Eine Analyse mehrerer Punktquellen würde zudem eine Untersuchung hinsichtlich des unterschiedlichen Verhaltens der zeitlichen Entwicklung der jeweiligen fraktalen Dimension ermöglichen.

Generell birgt die Betrachtung der Dispersion mittels der in dieser Arbeit verwendeten Form der Zweiteilchendispersion folgendes Problem in sich: der Untersuchung liegt die sphärische Mittelung und dadurch eine Ringintegration zu Grunde. Das heißt, die räumliche Partikelverteilung ist nur von dem Radius abhängig und deswegen auf Kugeloberflächen stets gleich. Es werden neben Informationen über den Abstand nur bedingt Informationen über auftretende Strukturen aufgelöst. Es ist jedoch von Interesse Inhomogenitäten in der Teilchenkonzentration nicht nur in Abhängigkeit des Abstandes sondern auch ortsabhängig angeben zu können. Für den zweidimensionalen Fall war dies erst kürzlich der Fall. Der Ausbruch eines Vulkans auf dem isländischen Eyjafjallajökull-Gletscher setzte eine Aschewolke frei. Diese breitete sich keineswegs ringförmig aus, sondern zog sich unter anderem auch als dünner „Finger“ von Südeuropa aus in Richtung West- und Mitteleuropa. Ein weiterer aktueller Fall liegt in dem Golf von Mexiko vor: seit der Explosion der Bohrinsel Deepwater Horizon am 22. April 2010 werden riesige Mengen Öl durch die Meeresströmungen und durch den Wind verteilt. Das Öl breitete

sich ab der dritten Woche nach der Explosion hauptsächlich in südöstliche Richtung aus und damit ebenfalls nicht ringförmig. Ein besseres Verständnis der Inhomogenitäten in der Ölkonzentration würde eine effektivere Vorhersage bezüglich der Dispersion des Öls ermöglichen. Um solche Inhomogenitäten erforschen zu können, sollte eine statistische Mehrpunktuntersuchung hilfreich sein. Somit ist es sicherlich ein lohnender Schritt, an Stelle der Zweiteilchendispersion in Zukunft die Drei-, oder Vierteilchendispersion zu betrachten.

8 Anhang

In Abschnitt 5.3 wird die Richardson-Obukhov- und die Batchelortheorie anhand der Ausgabedaten der Simulationen besprochen. Ziel ist es unter anderem, die Resultate auf Abhängigkeit von bestimmten Simulationsmerkmalen zu untersuchen. Wie in dem Abschnitt erwähnt, werden dort aus platztechnischen Gründen lediglich die Daten der Simulation **Sim1024-2** dargestellt. Diejenigen der Simulationen **Sim1024-1** und **Sim512-2** werden an dieser Stelle gezeigt.

Simulation **Sim1024-1**

Zunächst werden die Daten der Simulation **Sim1024-1** dargeboten.

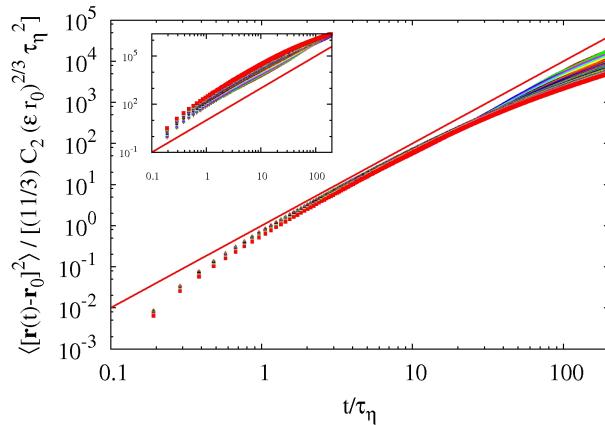


Abbildung 8.1: Die Varianz $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ der relativen Separation skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes im Inertialbereich von ungefehr $r_0 \in [0\eta, 10\eta]$ bis $r_0 \in [490\eta, 500\eta]$. Die gerade rote Linie ist die Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$ und kein Fit. Die Kurven liegen bis etwa $20\tau_\eta$ gut übereinander und nahe dem Verlauf dieser Funktion. Der Inset zeigt dieselben Daten, jedoch mit η^2 skaliert. Zu erkennen ist ein unterschiedlicher Verlauf für jeden Anfangsabstand. Beide Diagramme weisen vom Verlauf her keine Unterschiede zur Simulation **Sim1024-2** auf.

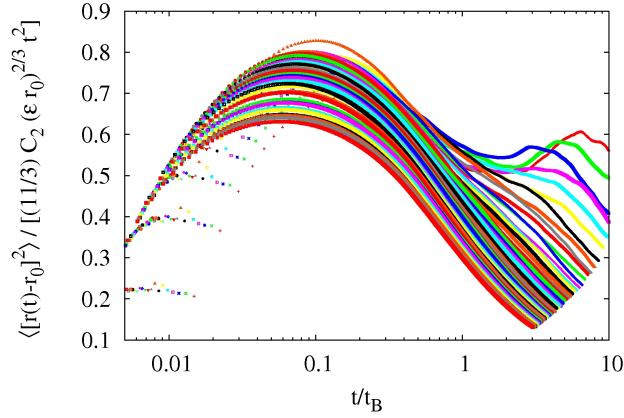


Abbildung 8.2: Kompensierter mittlerer quadratischer Abstand zweier Teilchen skaliert mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}t^2$, aufgetragen gegen die mit t_B skalierte Zeit. Gezeigt werden 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes im Inertialbereich. Das Plateau, welches das Wachstum von $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle \propto t^2$ aufzeigt, liegt wie bei Simulation **Sim1024-2** im Bereich $0,03 < t/t_B < 0,3$.

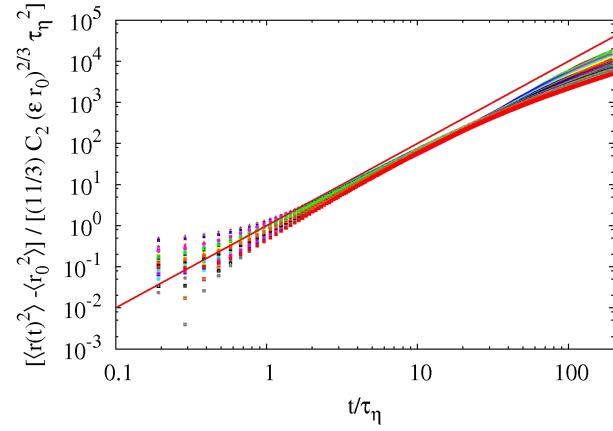


Abbildung 8.3: Die nach Batchelor zu betrachtende Größe der relativen Dispersion $\langle r(t)^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ skaliert mit $\frac{11}{3}C_2(\epsilon r_0)^{2/3}\tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes. Für Zeiten bis $t/\tau_\eta \approx 6$ geht das vorher vorhandene gute universelle Skalierungsverhalten verloren.

Simulation Sim512-2

Es folgen die entsprechenden Daten der Simulation **Sim512-2**.

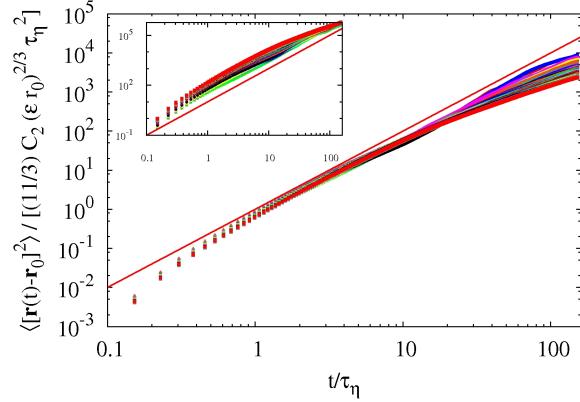


Abbildung 8.4: Die relative Dispersion $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle$ skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes im Inertialbereich von ungefähr $r_0 \in [0\eta, 3\eta]$ bis $r_0 \in [154\eta, 157\eta]$. Die gerade rote Linie ist die Funktion $f(t/\tau_\eta) = (t/\tau_\eta)^2$ und kein Fit. Die Kurven liegen bis etwa $20\tau_\eta$ gut übereinander und nahe dem Verlauf dieser Funktion. Der Inset zeigt dieselben Daten, jedoch mit η^2 skaliert. Zu erkennen ist ein unterschiedlicher Verlauf für jeden Anfangsabstand. Beide Diagramme weisen vom Verlauf her keine Unterschiede zu den Simulationen **Sim1024-2** und **Sim1024-1** auf. Im Vergleich zu diesen beiden Simulationen liegen die skalierten Daten der Simulation **Sim512-2** nicht so gut übereinander.

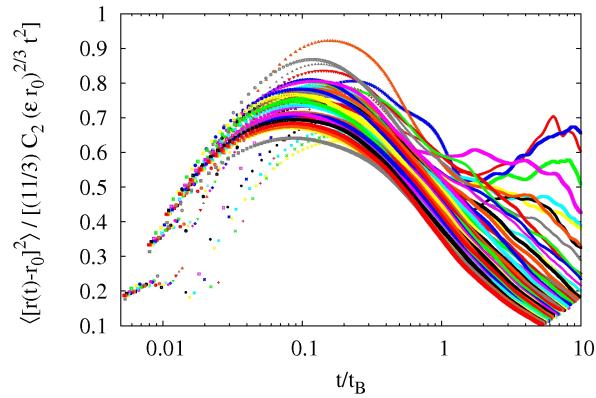


Abbildung 8.5: Kompensierter mittlerer quadratischer Abstand zweier Teilchen skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} t^2$, aufgetragen gegen die mit t_B skalierte Zeit. Gezeigt werden 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes im Inertialbereich. Das Plateau, welches das Wachstum von $\langle |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0|^2 \rangle \propto t^2$ aufzeigt, liegt im Bereich $0,04 < t/t_B < 0,3$ und somit in etwa gleich zu den Plateaus der anderen beiden Simulationen.

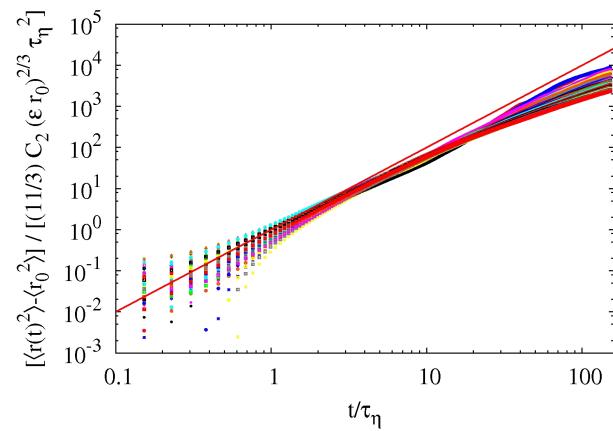


Abbildung 8.6: Die nach Batchelor zu betrachtende Größe der relativen Dispersion $\langle r(t)^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle$ skaliert mit $\frac{11}{3} C_2 (\epsilon r_0)^{2/3} \tau_\eta^2$ für 50 verschiedene Bins des relativen Anfangsabstandes. Für Zeiten bis $t/\tau_\eta \approx 2$ geht das vorher vorhandene gute universelle Skalierungsverhalten verloren.

Literaturverzeichnis

- [AFHF10] ARGYRIS, J. ; FAUST, G. ; HAASE, M. ; FRIEDRICH, R.: *Die Erforschung des Chaos. Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme*. Springer, 2010. – ISBN 9783540710714
- [Bak08] BAKUNIN, O. G.: *Turbulence and Diffusion - Scaling Versus Equations*. Springer, 2008. – ISBN 9783540682219
- [Bat50] BATCHELOR, G. K.: The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 76 (1950), Nr. 328, 133–146. <http://dx.doi.org/10.1002/qj.49707632804>
- [BBC⁺05a] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; DEVENISH, B. J. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence. In: *Physics of Fluids* 17 (2005), Nr. 11, 115101. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2130742>
- [BBC⁺05b] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; DEVENISH, B. J. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Multiparticle dispersion in fully developed turbulence. In: *Physics of Fluids* 17 (2005), Nr. 11, 111701. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2130751>
- [BBC⁺06] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Lagrangian statistics in fully developed turbulence. In: *Journal of Turbulence* 7 (2006), Nr. 6. <http://dx.doi.org/10.1080/14685240500460832>
- [BLMO06] BERG, J. ; LÜTHI, B. ; MANN, J. ; OTT, S.: Backwards and forwards relative dispersion in turbulent flow: An experimental investigation. In: *Phys. Rev. E* 74 (2006), Jul, Nr. 1, 016304. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.74.016304>
- [BOX⁺06] BOURGOIN, M. ; OUELLETTE, N. T. ; XU, H. ; BERG, J. ; BODENSCHATZ, E.: The Role of Pair Dispersion in Turbulent Flow. In: *Science* 311 (2006), Nr. 5762, 835–838. <http://dx.doi.org/10.1126/science.1121726>
- [Bra] Chronik: Der Gruninger-Brand im Rückblick. In: *Badische Zeitung*, 05. Dezember 2008. <http://www.badische-zeitung.de/freiburg/chronik-der-gruninger-brand-im-rueckblick--8788251.html>
- [BS02] BOFFETTA, G. ; SOKOLOV, I. M.: Relative Dispersion in Fully Developed Turbulence: The Richardson's Law and Intermittency Corrections. In: *Phys.*

- Rev. Lett.* 88 (2002), Feb, Nr. 9, 094501. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.094501>
- [CPS99] CHERTKOV, M. ; PUMIR, A. ; SHRAIMAN, B. I.: Lagrangian tetrad dynamics and the phenomenology of turbulence. In: *Physics of Fluids* 11 (1999), Nr. 8, 2394–2410. <http://dx.doi.org/10.1063/1.870101>
- [Dai09a] DAITCHE, A.: *Statistische und geometrische Eigenschaften turbulenter Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2009
- [Dai09b] DAITCHE, A.: *Visualisierung des Vortizitätsfades mit Teilchendispersion einer numerischen Simulation der Navier-Stokes-Gleichung in drei Dimensionen mit einer Auflösung von 256³ Gitterpunkten*. 2009
- [Ele05] ELENBAAS, T.: *Writing lines in turbulent air using Air Photolysis and Recombination Tracking*, Tech. Univ. Eindhoven, Diss., 2005
- [Fir] FIR0002/FLAGSTAFFOTOS: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bee_smoker02.jpg. – Erlaubnis zum Kopieren, Veröffentlichen oder Verändern ist gemäß den Bedingungen der GNU Free Documentation License, Version 1.2, oder jeder später durch die Free Software Foundation veröffentlichte Version gegeben. Die Lizenzbestimmung kann eingesehen werden unter: http://commons.wikimedia.org/wiki/Commons:GNU_Free_Documentation_License,_version_1.2
- [Fri95] FRISCH, U.: *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995. – ISBN 9780521457132
- [GAW04] GYLFASON, A. ; AYYALASOMAYAULA, S. ; WARHAFT, Z.: Intermittency, pressure and acceleration statistics from hot-wire measurements in wind-tunnel turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 501 (2004), Nr. -1, 213–229. <http://dx.doi.org/10.1017/S002211200300747X>
- [GFN02] GOTOH, T. ; FUKAYAMA, D. ; NAKANO, T.: Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation. In: *Physics of Fluids* 14 (2002), Nr. 3, 1065–1081. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1448296>
- [GKK⁺07] GULITSKI, G. ; KHOLOMYANSKY, M. ; KINZELBACH, W. ; LÜTHI, B. ; TSINOBER, A. ; YORISH, S.: Velocity and temperature derivatives in high-Reynolds-number turbulent flows in the atmospheric surface layer. Part 2. Accelerations and related matters. In: *Journal of Fluid Mechanics* 589 (2007), Nr. -1, 83–102. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112007007501>
- [GSG⁺07] GASTEUIL, Y. ; SHEW, W. L. ; GIBERT, M. ; CHILLÁ, F. ; CASTAING, B. ; PINTON, J.-F.: Lagrangian Temperature, Velocity, and Local Heat Flux Measurement in Rayleigh-Bénard Convection. In: *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007), Dec, Nr. 23, 234302. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.234302>

- [Hak90] HAKEN, H.: *Synergetik: Eine Einführung. Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie (German Edition)*. 3., erw. Aufl. Springer, 1990. – ISBN 9783540516927. – Übersetzer: A. Wunderlin
- [HW95] HILL, R. J. ; WILCZAK, J. M.: Pressure structure functions and spectra for locally isotropic turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive* 296 (1995), Nr. -1, 247–269. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112095002126>
- [IK02] ISHIHARA, T. ; KANEDA, Y.: Relative diffusion of a pair of fluid particles in the inertial subrange of turbulence. In: *Physics of Fluids* 14 (2002), Nr. 11, L69–L72. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1508443>
- [Kam09] KAMPS, O.: *Lagrangische Statistik in turbulenten Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diss., 2009
- [Kol41a] KOLMOGOROV, A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 30 (1941), Nr. 4, S. 299–303
- [Kol41b] KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 32 (1941), Nr. 1, S. 16–18
- [Kol91a] KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)* 434 (1991), July, Nr. 1890, 15–17. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1991.0075>. – ISSN 09628444
- [Kol91b] KOLMOGOROV, A. N.: The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. In: *Proceedings of the Royal Society: Mathematical and Physical Sciences (1990–1995)* 434 (1991), Juli, Nr. 1890, 9–13. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1991.0075>
- [LOBM07] LÜTHI, B. ; OTT, S. ; BERG, J. ; MANN, J.: Lagrangian multi-particle statistics. In: *Journal of Turbulence* 8 (2007), Nr. 8. <http://dx.doi.org/10.1080/14685240701522927>
- [LVC⁺01] LA PORTA, A. ; VOTH, G. A. ; CRAWFORD, A.M. ; ALEXANDER, J. ; BODENSCHATZ, E.: Fluid particle accelerations in fully developed turbulence. In: *Nature* 409 (2001), 1017–1019. <http://dx.doi.org/10.1038/35059027>
- [MDL⁺02] MORDANT, N. ; DELOUR, J. ; LÉVEQUE, E. ; ARNÉODO, A. ; PINTON, J.-F.: Long Time Correlations in Lagrangian Dynamics: A Key to Intermittency in Turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), Dec, Nr. 25, 254502. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.89.254502>
- [MK07] MOIN, P. ; KIM, J.: Tackling Turbulence With Supercomputers. In: *Scientific American* (2007). <http://turb.seas.ucla.edu/~jkim/sciam/turbulence.html>

- [MLP04] MORDANT, N. ; LÉVEQUE, E. ; PINTON, J.-F.: Experimental and numerical study of the Lagrangian dynamics of high Reynolds turbulence. In: *New Journal of Physics* 6 (2004), Nr. 1, 116. <http://stacks.iop.org/1367-2630/6/i=1/a=116>
- [MLZ91] MILES, R. ; LEMPERT, W. ; ZHANG, B.: Turbulent structure measurements by RELIEF flow tagging. In: *Fluid Dynamics Research* 8 (1991), Nr. 1-4, 9 - 17. [http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983\(91\)90027-G](http://dx.doi.org/10.1016/0169-5983(91)90027-G). – ISSN 0169-5983
- [MMMP01] MORDANT, N. ; METZ, P. ; MICHEL, O. ; PINTON, J.-F.: Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), Nov, Nr. 21, 214501. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.214501>
- [MW98] MYDLARSKI, L. ; WARHAFT, Z.: Passive scalar statistics in high-Péclet-number grid turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 358 (1998), Nr. -1, 135–175. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112097008161>
- [MY75] MONIN, A. S. ; YAGLOM, A. M.: *STATISTICAL FLUID MECHANICS: Mechanics of Turbulence*. Bd. 2. The MIT Press, 1975
- [Obu41] OBUKHOV, A M.: Spectral energy distribution in turbulent flow. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. GEOFIZ.* 5 (1941), S. 453–466
- [OM00] OTT, S. ; MANN, J.: An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 422 (2000), Nr. -1, 207–223. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112000001658>
- [OXB06] OUELLETTE, N. T. ; XU, H. ; BOURGOIN, M. ; BODENSCHATZ, E.: An experimental study of turbulent relative dispersion models. In: *New Journal of Physics* 8 (2006), Nr. 6, 109. <http://stacks.iop.org/1367-2630/8/109>
- [Pop00] POPE, Stephen B.: *Turbulent Flows*. 1st. Cambridge University Press, 2000. – ISBN 9780521598866
- [QBB⁺07] QURESHI, N. M. ; BOURGOIN, M. ; BAUDET, C. ; CARTELLIER, A. ; GAGNE, Y.: Turbulent Transport of Material Particles: An Experimental Study of Finite Size Effects. In: *Phys. Rev. Lett.* 99 (2007), Oct, Nr. 18, 184502. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.184502>
- [Ric22] RICHARDSON, L. F.: *Weather prediction by numerical process*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1922. – 236 S. – ISBN 9780521680448
- [Ric26] RICHARDSON, L. F.: Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 110 (1926), Nr. 756, 709–737. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1926.0043>

- [SC09] SALAZAR, J. P. L. C. ; COLLINS, L. R.: Two-Particle Dispersion in Isotropic Turbulent Flows. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 41 (2009), Nr. 1, 405–432. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.40.111406.102224>
- [SGG⁺07] SHEW, W. L. ; GASTEUIL, Y. ; GIBERT, M. ; METZ, P. ; PINTON, J.-F.: Instrumented tracer for Lagrangian measurements in Rayleigh-Bénard convection. In: *Review of Scientific Instruments* 78 (2007), Nr. 6, 065105. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2745717>
- [Sre95] SREENIVASAN, K. R.: On the universality of the Kolmogorov constant. In: *Physics of Fluids* 7 (1995), Nr. 11, 2778–2784. <http://dx.doi.org/10.1063/1.868656>
- [SYH08] SAWFORD, B. L. ; YEUNG, P. K. ; HACKL, J. F.: Reynolds number dependence of relative dispersion statistics in isotropic turbulence. In: *Physics of Fluids* 20:065111 (2008). <http://dx.doi.org/10.1063/1.2946442>
- [TB09] TOSCHI, F. ; BODENSCHATZ, E.: Lagrangian Properties of Particles in Turbulence. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 41 (2009), Nr. 1, 375–404. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165210>
- [TZB⁺96] TABELING, P. ; ZOCCHI, G. ; BELIN, F. ; MAURER, J. ; WILLAIME, H.: Probability density functions, skewness, and flatness in large Reynolds number turbulence. In: *Phys. Rev. E* 53 (1996), Feb, Nr. 2, 1613–1621. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.53.1613>
- [VD97] VIRANT, M. ; DRACOS, T.: 3D PTV and its application on Lagrangian motion. In: *Measurement Science and Technology* 8 (1997), Nr. 12, 1539. <http://stacks.iop.org/0957-0233/8/i=12/a=017>
- [VLPC⁺02] VOTH, G.A. ; LA PORTA, A. ; CRAWFORD, A.M. ; ALEXANDER, J. ; BODENSCHATZ, E.: Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 469 (2002), Nr. -1, 121–160. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112002001842>
- [WDF] WILCZEK, M. ; DAITCHE, A. ; FRIEDRICH, R.: *On the Velocity Distribution in Homogeneous Isotropic Turbulence: Correlations and Deviations from Gaussianity*. – 2010 eingereicht bei Journal of Fluid Mechanics
- [XOB08] XU, H. ; OUELLETTE, N. T. ; BODENSCHATZ, E.: Evolution of geometric structures in intense turbulence. In: *New Journal of Physics* 10 (2008), Nr. 1, 013012. <http://stacks.iop.org/1367-2630/10/i=1/a=013012>
- [YB04] YEUNG, P. K. ; BORGAS, M. S.: Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 1. Direct numerical simulations and Reynolds-number dependence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 503 (2004), Nr. -1, 93–124. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112003007584>

- [Yeu94] YEUNG, P. K.: Direct numerical simulation of two-particle relative diffusion in isotropic turbulence. In: *Physics of Fluids* (1994). <http://dx.doi.org/10.1063/1.868399>
- [Yeu02] YEUNG, P. K.: LAGRANGIAN INVESTIGATIONS OF TURBULENCE. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 34 (2002), Nr. 1, 115–142. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.34.082101.170725>

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich danke ich für die interessante Aufgabenstellung und die stets freundliche und hilfsbereite Betreuung meiner Arbeit. Die mir dabei zugleich gelassene Freiheit zur Entwicklung eigener Ideen, ermöglichte mir das eigenständige wissenschaftliche Arbeiten zu erlernen.

Für das Zurverfügungstellen der Simulationsdaten danke ich Michael Wilczek und Anton Daitche. Ihnen sowie Oliver Kamps und Michel Voßkuhle gebührt zu dem ein Dank für die stets hilfreichen fachlichen Diskussionen.

Ferner möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die diese Arbeit zur Korrektur gelesen haben. Dies gilt sowohl für die sorgfältige Durchsicht als auch für ihre guten Ratschläge.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mich immer von Herzen unterstützt und mir das Studium ermöglicht haben.

Eidesstattliche Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 23. Juni 2010