

Statistische Eigenschaften zweidimensionaler Turbulenz

als Diplomarbeit vorgelegt von
Susanne Zeglin

Oktober 2005



institut für
theoretische physik

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Die Beschreibung von Turbulenz	3
1.1	Was ist Turbulenz?	3
1.1.1	Eine Charakterisierung des turbulenten Zustands	3
1.1.2	Zweidimensionale Turbulenz	4
1.2	Wie lässt sich Turbulenz physikalisch beschreiben?	5
1.2.1	Die Navier-Stokes Gleichung	5
1.2.2	Die Wirbeltransportgleichung	10
1.2.3	Die Formulierung für zweidimensionale Turbulenz	11
1.3	Welche Eigenschaften hat Turbulenz?	13
1.3.1	Die Notwendigkeit einer statistischen Beschreibung	13
1.3.2	Die statistischen Beschreibungsgrößen	14
1.4	Welche theoretischen Modelle gibt es zur Beschreibung der Turbulenz? 19	
1.4.1	Die Energiekaskade	19
1.4.2	Kolmogorov 1941	21
1.4.3	Das Modell für die zweidimensionale Turbulenz	23
1.4.4	Zusätzliche Modellierungsannahmen	25
1.4.5	Das Lagrange-Bild	26
2	Das Numerische Verfahren	28
2.1	Die Diskretisierung der Wirbeltransportgleichung	29
2.2	Ein Testlauf für die Numerik:Die Zwei-Wirbel Simulation	36
2.3	Die Parametereinstellung	47
3	Die inverse Energiekaskade	50
4	Die Strukturfunktionen	54
5	Zusammenfassung und Ausblick	62
A	C - Code zur numerischen Lösung der Wirbeltransportgleichung	66

Einleitung

Turbulenz ist ein allgegenwärtiges Phänomen das gerade weil es im alltäglichen Leben so häufig beobachtet wird die Naturforscher und Physiker seit Jahrhunderten beschäftigt. Turbulente Strömungen verhalten sich chaotisch, sie verfügen als regelrechtes Beispielsystem der Theorie komplexer Systeme über die ganze Bandbreite der typischen Merkmale:

es zeigen sich Instabilitäten und Bifurkationen, es kommt zu spontaner Strukturbildung und es besteht die typische sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Vom Standpunkt der Grundlagenforschung motiviert schon dieses Verhalten das eingehende Studium der Turbulenz. Zudem reizt besonders die Tatsache, dass obwohl mit der Navier-Stokes-Gleichung die Grundgleichung zur Beschreibung der Turbulenz schon über 150 Jahre bekannt ist, es bisher noch nicht gelungen ist, die Eigenschaften der Turbulenz auf dieser Basis herzuleiten. Die Eigenschaften von Interesse sind dabei stets statistischer Natur – es wird nicht erwartet, die mikroskopische Dynamik in turbulenten Strömungen genau bestimmen zu können.

Man interessiert sich für Erwartungswerte, Verteilungsfunktionen, Momente und andere statistische Beschreibungsgrößen. Gelingt es eines Tages, diese aus der Navier-Stokes-Gleichung quantitativ bestimmen zu können, so ist das Problem der Turbulenz geklärt. Die andere Begründung für das besondere Interesse an der Turbulenzforschung besteht darin, dass in den Ingenieurs- und Geowissenschaften ein Verständnis dieses Phänomens einen deutlichen Fortschritt in den technischen Anwendungen und speziellen Fragestellungen nach sich ziehen würde.

In der aktuellen Turbulenzforschung haben sich in den letzten Jahren neben den klassischen analytischen Ansätzen auch numerische Methoden zur Lösung der beschreibenden Differentialgleichungen etabliert. Diese neuen Verfahren gewinnen zunehmend an Bedeutung da die rasante Entwicklung im Computersektor dazu geführt hat, dass die notwendige Rechenleistung für solche Berechnungen und Simulationen schon von einfachen Desktop-Rechnern zur Verfügung gestellt wird.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Untersuchung zweidimensionaler Turbulenz mit numerischen Methoden durchgeführt. Die zweidimensionale Turbulenz ist ein interessantes Teilgebiet der Turbulenzforschung. Eine eingehendere Motivation der Beschäftigung mit diesem Thema wird im ersten Kapitel dieser Arbeit gegeben. Dort werden die grundlegende Theorie der Turbulenz im Allgemeinen, die Eigenschaften und Besonderheiten der zweidimensionalen Turbulenz im Speziellen angeführt. Es wurde versucht eine Darstellung zu finden, in der die elementaren Fragestellungen bei der ersten Begegnung mit dem Thema

der Turbulenz behandelt werden.

Im zweiten Kapitel erfolgt die Beschreibung des numerischen Verfahrens. Dieses wird ausführlichen Stabilitäts-Tests unterzogen deren Ergebnisse dort ausgewertet werden. Es wird näher auf die schrittweise Entwicklung des Integrationsverfahrens eingegangen und ein Stabilitätskriterium vorgestellt.

Die nächsten beiden Kapitel enthalten die statistische Auswertung der Turbulenzdaten die aus der Simulation gewonnen wurden.

Das dritte Kapitel beschreibt die Untersuchungen des Energiespektrums. Hier ist die Überprüfung einer der wichtigen theoretischen Vorhersagen – des Skalierungsverhaltens im Inertialbereich – Thema.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den Strukturfunktionen im Euler- und im Lagrange- Bild.

Das fünfte Kapitel besteht schließlich in der Zusammenfassung und dem Ausblick. Hier werden die Ergebnisse zusammengetragen und interpretiert.

Im Anhang findet sich zur vollständigen Dokumentation der Programm-Code, der für die der Turbulenzsimulation verwendet wurde.

1 Die Beschreibung von Turbulenz

1.1 Was ist Turbulenz?

1.1.1 Eine Charakterisierung des turbulenten Zustands

Jedem wachen Beobachter seiner Umwelt ist *Turbulenz* ein Begriff. Man trifft darauf, wenn man sich morgens Sahne in den Kaffee gießt; der aufsteigende Rauch von Zigaretten oder Fabrikschornsteinen zeigt die typischen Verwirbelungen und jeder Wasserlauf vermittelt einen Eindruck von Turbulenz.



So eindrucksvoll anschaulich dieser Zustand auch sein mag, bei der Suche nach einer Beschreibung von Turbulenz im Sinne einer wissenschaftlichen Definition tut man sich schwer. Üblicherweise nähert man sich der Frage *Was ist Turbulenz?* in Experimenten, indem man erst einmal die Randbedingungen festlegt, unter denen sich ein solcher Zustand einstellt. Wie man beobachtet, entsteht Turbulenz in allen Fluiden (also Gasen und Flüssigkeiten), sobald gewisse Parameter, die die Strömung charakterisieren, einen Schwellwert überschreiten. Diese Parameter sind eine typische Längenausdehnung l , die mittlere Geschwindigkeit u und die Viskosität ν des Fluids. Als dimensionslose Charakterisierungsgröße der Strömung, setzt man aus diesen Parametern die Reynoldszahl $Re = \frac{ul}{\nu}$ zusammen. Die Beobachtung zeigt, dass man unabhängig von der Wahl des Experiments (z.B. Rohrströmungen, Strömungen hinter einem Gitter, Strömungen in rotierenden Tanks, ...) ab einer Reynoldszahl von $Re \sim 1000$ voll entwickelte Turbulenz vorfindet.

Dieser Zustand kann gut charakterisiert werden, wenn man die Geschwindigkeit der Strömung an jedem Punkt im Gesamtvolumen (also das Geschwindigkeitsfeld der Strömung) untersucht.

Im Falle ausgebildeter Turbulenz:

- fluktuiert die Geschwindigkeit zufällig in der Zeit.
- ist die räumliche Anordnung des Geschwindigkeitsfeldes in hohem Maße ungeordnet und chaotisch. Man erkennt allerdings zusammenhängende Strukturen - die Wirbel; diese sind zufällig verteilt und treten in vielen Längenausdehnungen (Skalen) auf.
- ist die Bewegung von Volumenbereichen des Fluids oder Wirbeln nicht vorhersagbar.
- ist die Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängig. In zwei Durchläufen eines Turbulenz - Experiments ist bei auch noch so sorgfältiger Präparation gleicher Anfangsbedingungen, das resultierende Geschwindigkeitsfeld einige Sekunden nach Beginn des Experiments vollständig unterschiedlich. Diese Eigenschaft ist typisch für chaotische Systeme.
- weist das Fluid eine beschleunigte Durchmischungsfähigkeit auf. D.h. in das Fluid eingebrachte Substanzen (wie z.B. Farbstoff in Flüssigkeiten oder Rauch in der Luft) verteilen sich viel schneller über das Gesamtvolumen, als im Falle einer turbulenzfreien Strömung.

(Vgl. einführende Kapitel in Davidson [1], Lesieur [2], Pope [3])

Diese Beschreibung enthält die wesentlichen Merkmale turbulenter Strömungen. Für ein Verständnis ist es noch erforderlich, den Begriff *Wirbel* genauer zu erläutern. Diesbezüglich findet sich in der Literatur zum Thema wenig Genau-

es. Davidson (Kapitel 2.4 [1]) versucht eine Definition und bezeichnet als Wirbel lokalisierte *Blobs* (gemeint: zusammenhängende Volumenbereiche) von Wirbelstärke im Geschwindigkeitsfeld. Diese können in Form von Wirbelschläuchen (vortex tubes) oder Wirbelschichten (vortex sheets) auftreten. Wirbelschläuche mit ihrem zugehörigen zirkularen Geschwindigkeitsfeld kommen dabei der üblichen Vorstellung von *Strudeln* am nächsten.

1.1.2 Zweidimensionale Turbulenz

Das Thema dieser Arbeit ist zweidimensionale Turbulenz. Natürlich stellt sich die Frage nach dem Sinn einer Beschäftigung mit dieser speziellen *unnatürlichen* Variante von Turbulenz. Reale Turbulenz ist immer dreidimensional.

Allerdings gibt es einige Situationen, in denen die Betrachtung in nur zwei Dimensionen als Näherung gerechtfertigt ist:

- **Die Atmosphäre von Himmelskörpern**
Das Verhältnis von horizontaler zu vertikaler Längenausdehnung bei Planeten (z.B. 1000 km : 10 km) macht eine 2D-Näherung sinnvoll.
- **Spezielle Experimente**
In einigen Experimenten wird ein Freiheitsgrad der Bewegung eingeschränkt.

Z.B. bei Versuchen mit rotierenden Tanks wird die Bewegung von Fluidpartikeln in Richtung der Drehachse unterdrückt. Ein anderes Beispiel liefert die Plasmaphysik: Dort sorgen starke Magnetfelder dafür, dass die turbulente Bewegung der Teilchen auf eine Ebene gebannt wird.

- **Wissenschaftliche Modellbildung**

Nicht zuletzt stellt die 2D-Turbulenz auch ein theoretisches *Experimentierfeld* dar, anhand dessen Modellbildung und Verifikation von Theorien betrieben werden können. Wie im Weiteren ausgeführt wird, besitzen zwei- und dreidimensionale Turbulenz viele gemeinsame Eigenschaften; allerdings zeigen sich auch eklatante Unterschiede. Gerade diese Unterschiede machen eine Beschäftigung mit dem 2D-Phänomen interessant.

1.2 Wie lässt sich Turbulenz physikalisch beschreiben?

Der Ausgangspunkt der physikalischen Beschreibung von Turbulenz ist die Annahme der Kontinuitätshypothese:

Die Größenordnung der charakteristischen turbulenten Längen- und Zeitskala (Größe der kleinsten Wirbel sowie deren Umdrehungszeit) ist sehr viel größer, als die der molekularen Abmessungen und Zeitskalen des Fluids (mittlere freie Weglänge und Zeit zwischen zwei Stößen). Damit ist gewährleistet, dass die Prozesse der turbulenten Dynamik, wie die viskose Dissipation, als kontinuierlich angenommen werden können. Die Kontinuitätseigenschaften sind nicht von der betrachteten Längen- oder Zeitskala abhängig.

Das Fluid wird hier als kontinuierliches Medium mit einer Dichte ρ betrachtet und die Gleichungen zur Beschreibung seiner Dynamik lassen sich als Feldgleichungen formulieren.

1.2.1 Die Navier-Stokes Gleichung

Die Grundgleichung der Fluidmechanik ermittelt man direkt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für ein Volumenelement des Fluids.

Die Beschleunigung eines solchen Volumenelements wird durch eine Netto-Druckkraft auf seine Oberfläche und durch noch genauer zu spezifizierende Viskositätskräfte verursacht.

$$\rho \delta V \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{Netto-Druckkraft} + \text{Viskositätskräfte}$$

Die Netto-Druckkraft resultiert aus dem Druck auf jeden Punkt der Oberfläche des Volumenelements. Differenzen in den Beträgen des Drucks auf jeweils gegenüberliegenden Flächen sorgen für eine Netto-Kraft in dieser Richtung. Integration und die Anwendung des Gaußschen Satzes liefert folgenden Ausdruck für den Term der Netto-Druckkraft:

$$\mathbf{F}_p = \oint_S (-p) dS = \int_{\delta V} (-\nabla p) dV = -(\nabla p) \delta V$$

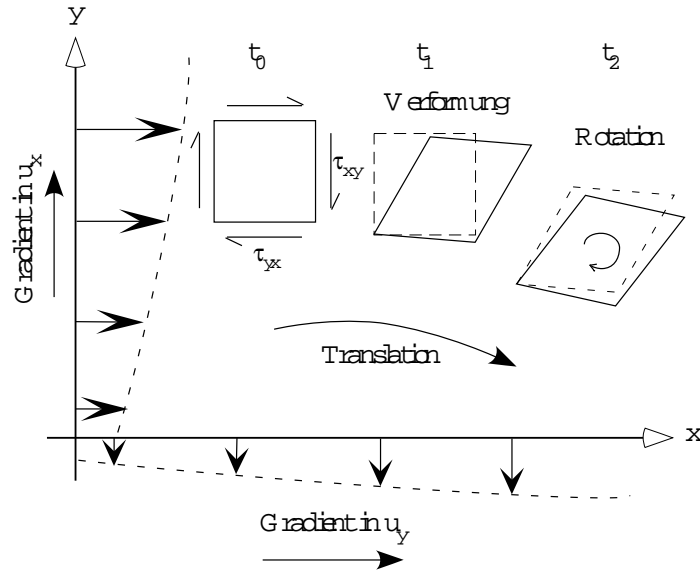


Abbildung 1.1: Die Wirkung viskoser Kräfte auf das Volumenelement

Der Druckterm führt zu einer linearen Änderung der Bewegung des Volumenelements.

Viskositätskräfte werden durch viskose Spannungen τ_{ij} im Volumenelement hervorgerufen. τ_{ij} wird als Spannungstensor bezeichnet und seine Einträge sind folgendermaßen aufzufassen:

Die Spannung τ_{xy} ist ein Maß für einen Gradienten in der y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, der in x-Richtung durch das Volumenelement verläuft. Der Viskositätsterm kann zu einer Translation, Rotation bzw. Verformung des Volumenelements führen.

Analog zum Druck bewirkt ein Unterschied der Spannung τ_{ij} auf entgegengesetzten Seiten des Volumens eine Kraftkomponente auf das Volumenelement. Diese wirkt in i-Richtung und greift derart an, dass die ij-Seitenfläche des Volumens verzerrt wird. Eine anschauliche Erklärung der resultierenden Bewegung findet sich in Abb. 1.1. Alle Beiträge zur Kraft in i-Richtung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$f_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta V \quad i, j \in 1, 2, 3$$

(Man beachte hier und im Weiteren Einsteinsche Summenkonvention!)

Damit nimmt die Newtonsche Bewegungsgleichung des Volumenelements für jede Komponente des Geschwindigkeitsfeldes folgende Form an:

$$\rho \delta V \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \delta V + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \delta V \quad (1.1)$$

Zwei Annahmen gehen nun in die weiteren Betrachtungen ein:

Die erste Annahme besteht in der *Erhaltung der Masse in inkompressiblen Fluiden*. Da Masse weder spontan entsteht, noch einfach verschwindet, muss jeder Zustrom von Materie in das Volumenelement mit einem gleichzeitigen Abfluss von Materie verbunden sein. Die Kontinuitätsgleichung beinhaltet diese Aussage; zusätzlich lässt sie im Allgemeinen als Konsequenz des Zustroms auch eine Dichteänderung im Volumen zu.

$$\nabla(\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Eine Dichteänderung ist für die betrachteten Fluide aber ausgeschlossen, denn es wird Inkompressibilität vorausgesetzt. Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich daher auf die Form:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Die Erhaltung der Masse bedingt also die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes.

Die zweite Annahme ist die *Gültigkeit des Newtonschen Viskositätsgesetzes* für die betrachteten Fluide. (Fluide, die diese Annahme erfüllen, werden als Newtonsche Fluide bezeichnet.)

Dieses Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen den Spannungen auf ein Volumenelement und der Verformung desselben her. Folgende Vorstellung erlaubt die Einsicht in diesen Zusammenhang: Unterschiede in den Strömungsgeschwindigkeiten längs einer Richtung durch das Volumenelement führen zu einer Staffelung der Geschwindigkeiten in den senkrecht zu dieser Richtung angeordneten Fluidschichten. Ein zu einem Zeitpunkt gewähltes rechtwinkliges Volumenelement wird nach einiger Zeit eine Verkipfung gegenüber seiner ursprünglichen Form aufweisen. Der Grund liegt darin, dass die Flüssigkeitsschichten durch ihre unterschiedlichen Geschwindigkeiten gewissermaßen übereinander hinweggleiten (vgl. Abb. 1.1).

Newtons Gesetz der Viskosität formuliert die Proportionalität zwischen der Spannung auf ein Volumenelement und dessen Verformung durch die Gradienten in den entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten.

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \propto \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Die Proportionalitätskonstante wird definiert, als die absolute Viskosität des Fluids $\mu = \rho \cdot \nu$ (ν bezeichnet man als kinematische Viskosität.).

Man erhält eine Kurzform des Newtonschen Viskositätsgesetzes mit dem *Dehnungstensor*:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$$

Es gilt:

$$\tau_{ij} = 2\rho\nu S_{ij}$$

Mit diesem Viskositätsgesetz schreibt sich Gleichung (1.1) nun wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{Du_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial}{\partial x_j}S_{ij} \\ &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\right)\end{aligned}$$

Hier geht mit $(\nabla \cdot \mathbf{u})|_i = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ die Erhaltung der Masse ein. Somit gilt für eine Komponente:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

und vektoriell:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \quad (1.2)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von (1.2) wird als Dissipationsterm bezeichnet. Sein Einfluss auf die Dynamik des Volumenelements besteht, wie oben erwähnt, in einer Translation, Rotation oder Verformung. Zudem zeigen einige kurze Überlegungen, dass dieser Term auch für die Dissipation von Energie im turbulenten Fluid verantwortlich ist. Man sieht direkt, dass durch den Laplace-Operator Unterschiede in den Geschwindigkeiten benachbarter Volumenelemente geglättet werden. Den exakten Zusammenhang zwischen der Dissipation und dem aus diesem Grunde so benannten Dissipationsterm stellt eine Energiebilanzgleichung her. Aus Gleichung (1.2) ergibt sich durch skalare Multiplikation mit \mathbf{u} :

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \nabla\left(\frac{u^2}{2}\mathbf{u}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla(p\mathbf{u}) + \nu\mathbf{u}\Delta\mathbf{u} \quad (1.3)$$

Der Term $\nu\mathbf{u}\Delta\mathbf{u}$ kann wie folgt umformuliert werden:

$$\nu\mathbf{u}\Delta\mathbf{u} = \nabla\{\nu\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\} - \nu(\nabla \times \mathbf{u})^2$$

Damit schreibt sich nun die Gleichung (1.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -\nabla\left\{\frac{u^2}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}(p\mathbf{u}) + \nu(\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))\right\} - \nu(\nabla \times \mathbf{u})^2 \quad (1.4)$$

Durch Integration über ein Volumen δV und Anwendung des Gaußschen Satzes ergibt sich eine Bilanzgleichung der kinetischen Energie in δV in der Form:

$$\frac{d}{dt}\int_{\delta V}\left(\frac{u^2}{2}\right)dV = \oint_S\left\{\frac{u^2}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla(p\mathbf{u}) + \nu\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})\right\}\mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\delta V}\nu(\nabla \times \mathbf{u})^2 dV \quad (1.5)$$

Die Interpretation der Gleichung liegt nun auf der Hand:

Die beiden Terme auf der rechten Seite ergeben in der Summe die momentane Änderungsrate der kinetischen Energie im Volumen δV . Dabei stehen im Oberflächenintegral diejenigen Anteile an der Änderungsrate, die auf konservative Kräfte zurückgeführt werden können und daher nur eine Umverteilung der kinetischen Energie im Gesamtvolumen bewirken. Der Reihe nach sind diese Anteile:

- die Rate mit der kinetische Energie konvektiv über die Berandung von δV transportiert wird
- die Rate mit der die Netto-Druckkraft Arbeit an der Berandung des Volumens verrichtet
- die Rate mit der die viskosen Kräfte Arbeit an der Berandung des Volumens verrichten

Das Volumenintegral enthält dann notwendigerweise, da die Gesamtenergie erhalten ist, die Rate mit der kinetische Energie durch Dissipation dem Volumen entzogen wird. Dieser letzte Term beschreibt also den Verlust an kinetischer Energie durch deren Umwandlung in Wärme.

Für ein geschlossenes Volumen, bei dem kein Transport über die Berandung stattfindet und auch keine Arbeit an diesem Rand verrichtet wird, vereinfacht sich (1.5) noch auf:

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) dV = -\nu \int (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV$$

Im Weiteren wird die Änderungsrate der kinetischen Energie aufgrund der Dissipation mit dem Symbol ϵ gekennzeichnet. Drückt man nun noch den Term $(\nabla \times \mathbf{u})$ durch den Dehnungstensor S_{ij} aus, so erhält man den im Folgenden noch wichtigen Zusammenhang:

$$\int \epsilon dV = \nu \int (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV = 2\nu \int S_{ij} S_{ij} dV \quad (1.6)$$

Zuletzt bedarf es noch einer genaueren Betrachtung der Beschleunigung $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ in Gleichung (1.2). Da sich das betrachtete Volumenelement im Fluid mitbewegt, nehmen zugleich die momentane Änderung sowie die räumliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes Einfluss auf seine Beschleunigung. Die Änderung seiner Geschwindigkeit entspricht der so genannten konvektiven bzw. materiellen Ableitung der Geschwindigkeit.

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} u_i(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot u_j \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}) u_i \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \end{aligned}$$

In vektorieller Form gilt:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite wird als Konvektionsterm bezeichnet. Durch das umgebende Geschwindigkeitsfeld wird das Volumenelement konvektiv transportiert.

Die ausführliche Formulierung von Gleichung (1.2) lautet schließlich:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.7)$$

Damit hat man die Navier-Stokes Gleichung, die Grundgleichung der Fluidmechanik, in ihrer üblichen Form hergeleitet.

Die Besonderheit dieser Gleichung, der Grund für die vielfältigen Erscheinungsformen der Dynamik des Geschwindigkeitsfeldes, wird erst in dieser Formulierung deutlich. Diese Besonderheit liegt im Auftreten der Nichtlinearität in \mathbf{u} , dem Konvektionsterm $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. Die in diesem Term enthaltene Kopplung der Änderung des Geschwindigkeitsfeldes mit dem Geschwindigkeitsfeld selbst führt zu interessanten komplexen Phänomenen und zur Turbulenz.

Diese Navier-Stokes Gleichung ist nun geeignet, Fluide zu beschreiben, die ein unbegrenztes Volumen einnehmen. Für die Betrachtung spezieller Situationen mit z.B. festen Berandungen müssten noch zusätzliche Randbedingungen festgelegt werden.

1.2.2 Die Wirbeltransportgleichung

Die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes führt zu einer Kopplung zwischen diesem und dem Druckfeld (vgl. Davidson Kapitel 2.2 [1]). Als Konsequenz daraus, zieht eine Änderung des Geschwindigkeitsfeldes sogleich eine Änderung des Druckes nach sich. Aufgrund der Inkompressibilität des Fluids ist eine Druckänderung instantan überall im Volumen „bekannt“. Dieser Druck, ändert dann wiederum das Geschwindigkeitsfeld.

Geschwindigkeit ist also niemals im Raum lokalisiert. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll für die Beschreibung von Turbulenz von der Navier-Stokes Gleichung abzugehen und zu einer Beschreibung mit lokalisierbaren Größen zu wechseln. Eine Größe die sich an dieser Stelle anbietet, ist die Rotation der Geschwindigkeit, die so genannte Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Im Gegensatz zur Geschwindigkeit bleibt die Wirbelstärke (zu einem Zeitpunkt lokalisiert im Raum) zumindest eine Zeit lang lokalisierbar.

Eine Gleichung für die Zeitentwicklung der Wirbelstärke in einem Fluid erhält man aus der Navier-Stokes Gleichung. Zunächst schreibt man den nichtlinearen Term in (1.7) mit Hilfe der Vektoridentität $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla u^2 - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}$ um:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \underbrace{\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\omega}} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Anwendung der Rotation auf (1.8) führt auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \times \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) - \underbrace{\nabla \times \left(\nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right\} \right)}_{=0} + \nu \Delta \underbrace{(\nabla \times \mathbf{u})}_{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

Der nichtlineare Term vereinfacht sich noch einmal mittels der Vektoridentität $\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} - (\nabla \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}$. Und so ergibt sich schließlich, da sowohl \mathbf{u} als auch $\boldsymbol{\omega}$ divergenzfrei sind:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}$$

bzw.

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = - \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega}}_{1.)} + \underbrace{\nu \Delta \boldsymbol{\omega}}_{2.)}$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung der Wirbelstärke in einem Volumenelement. An dieser Stelle sollte man sich Davidsons Vorstellung eines Wirbels als *Blob* von Wirbelstärke ins Gedächtnis rufen (vgl. Abschnitt 1.1.1). Die Wirbelstärke in einem typischen Turbulenzfeld ist so verteilt, dass zusammenhängende Bereiche mit ähnlicher Wirbelstärke (also lokalisierte Wirbelstrukturen) auftreten. Für eine anschauliche Vorstellung der Wirkung der einzelnen Terme in der Wirbeltransportgleichung wählt man am Besten ein sphärisches Volumenlelement. Die Änderung der Wirbelstärke in einem solchen Volumenelement wird nun durch 1.) Wirbelstreckung und 2.) ein viskoses Drehmoment auf das Volumenelement bewirkt (Erläuterungen zu dieser Interpretation der Terme finden sich u.A. in [1],[2]). Bei der Wirbelstreckung führt eine Verjüngung und Verlängerung des Volumenelements zu einer Änderung des Trägheitsmomentes und somit zu einer Vergrößerung der Wirbelstärke. Viskose Spannungen im Geschwindigkeitsfeld bedeuten im Bild der Wirbelstärke viskose Drehmomente und diese führen je nach Richtung zu einer Verstärkung oder Abschwächung der Wirbelstärke. Für unbegrenzte Volumenbereiche lässt sich der Zusammenhang $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes invertieren:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{x}' \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \quad (1.9)$$

Hieraus folgt noch eine weitere Interpretation der Dynamik des Feldes der Wirbelstärke. Die Wirbel erzeugen quasi von sich aus das Geschwindigkeitsfeld in dem sie selbst transportiert werden; dabei ändert sich die Wirbelstärke im Feld – dies generiert ein neues Geschwindigkeitsfeld und so weiter.

1.2.3 Die Formulierung für zweidimensionale Turbulenz

Nach dieser Einführung in die Dynamik der dreidimensionalen Turbulenz gelingt leicht die Übertragung auf den zweidimensionalen Fall:

Die Bewegung wird einfach auf eine Ebene beschränkt; das Geschwindigkeitsfeld verliert seine z-Komponente und Volumenelemente werden zu Flächenelementen. Die Vereinfachung der Dynamik durch Reduktion des einen Freiheitsgrades spiegelt sich dann auch in einer Vereinfachung der beschreibenden Gleichungen. Die Navier-Stokes Gleichung behält prinzipiell ihre Form, nur ist der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u} als

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufzufassen. Dann gilt weiterhin:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \quad (1.10)$$

Die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ reduziert sich auf einen Quasiskalar ω , mit nur einer von Null verschiedenen Komponenten in z-Richtung:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \omega_z \cdot \mathbf{e}_z$$

So vereinfacht sich die Wirbeltransportgleichung in zwei Dimensionen. Hier verschwindet der Wirbelstreckungsterm $(\boldsymbol{\omega}\nabla)\mathbf{u}$. Die Dynamik des ω -Feldes unterliegt nur noch einer reinen Drift und Diffusion:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu\Delta\omega \quad (1.11)$$

In zwei Dimensionen ist die Navier-Stokes Gleichung invariant unter Rotationen um die z-Achse. Manchmal ist es sinnvoll diese Eigenschaft auszunutzen, um das Geschwindigkeitsfeld als Rotation einer skalaren Funktion Ψ in der z-Richtung anzusetzen.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \times (\Psi(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_z)$$

So erhält man den Zusammenhang:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -(\nabla\Psi(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{e}_z) \quad (1.12)$$

und schließlich eine Beziehung zur Wirbelstärke in Form der Poisson-Gleichung:

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \Delta\Psi(\mathbf{x}, t) \quad (1.13)$$

$\Psi(\mathbf{x}, t)$ wird als Stromfunktion bezeichnet. Gelingt die Invertierung von Gleichung (1.13), so lässt sich aus dem Feld der Wirbelstärke ähnlich wie über das Biot-Savartsche Gesetz (1.9) direkt das Geschwindigkeitsfeld bestimmen.

1.3 Welche Eigenschaften hat Turbulenz?

1.3.1 Die Notwendigkeit einer statistischen Beschreibung

Die charakteristischen Eigenschaften des turbulenten Zustandes sind im Abschnitt 1.1.1 bereits aufgelistet worden. Als wesentliches Merkmal von Turbulenz wurde dort die sensible Abhängigkeit des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes von den Anfangsbedingungen betont.

Obwohl die Entwicklungsgleichungen für die Felder $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ und $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ (aus Abschnitt 1.2) streng deterministisch sind, und daher für jeden beliebigen Zeitpunkt $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ und $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ an jedem Raumpunkt \mathbf{x} ermittelt werden können, bleibt die exakte Vorhersage des Geschwindigkeits- oder Wirbelstärkefeldes einer turbulenten Strömung doch Utopie. Es ist nicht möglich, die Anfangs- und Randbedingungen der realen Strömung so genau zu bestimmen, dass mittels Navier-Stokes- oder Wirbeltransportgleichung genau diese Strömungsfelder integriert werden könnten.

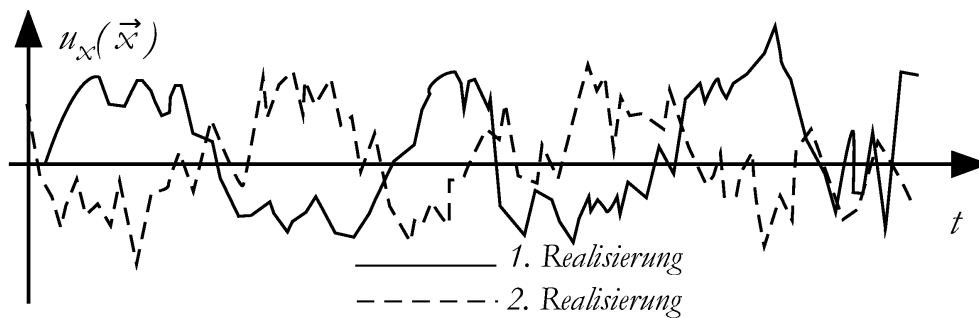


Abbildung 1.2: Fingierte Messungen der Geschwindigkeitskomponente u_x in einer turbulenten Strömung

Abbildung 1.2 zeigt zwei fingierte aber durchaus realistische Messreihen der x-Komponente der Geschwindigkeit an einer festen Stelle \mathbf{x} in einem turbulenten Fluid. Jede Messung (Realisierung) sei unter möglichst gleichen Anfangs- und Randbedingungen aufgenommen; im Vergleich findet man allerdings völlig unterschiedliche Verläufe der Geschwindigkeit mit der Zeit. Die Mittelung der Geschwindigkeitskomponenten über die Zeit ergibt dann aber für jede der beiden Realisierungen einen Wert von Null. Tatsächlich stellt man fest, dass die statistischen Eigenschaften des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes (trotz der gravierenden Unterschiede in jeder einzelnen Realisierung) sich bei prinzipiell ähnlichen Anfangs- und Randbedingungen reproduzieren lassen.

In der Theorie der Turbulenz interessiert man sich für qualitative Aussagen über die Eigenschaften der Turbulenz. Solche Aussagen sind mit den statistischen Größen der turbulenten Felder möglich. Daher beruht jedes theoretische Modell zur Beschreibung der Turbulenz auf einer Darstellung durch statistische Charakterisierungsgrößen.

1.3.2 Die statistischen Beschreibungsgrößen

Alle statistischen Größen werden über einen Mittelungsprozess gewonnen. Man kann aus drei verschiedenen Methoden zur Bestimmung des Mittelwertes wählen. Hier bezeichne $X(\mathbf{x}, t)$ eine Zufallsvariable am Ort \mathbf{x} zum Zeitpunkt t .

- **Zeitmittelung**

Dabei erfolgt die Mittelung an einem festen Ort \mathbf{x}' über eine Zeit T in der Form:

$$\langle X(\mathbf{x}', t) \rangle_Z = \frac{1}{T} \int_0^T X(\mathbf{x}', t) dt$$

Zeitmittel sind nur für statistisch stationäre Prozesse möglich.

- **Ensemblemittelung**

Dabei erfolgt die Mittelung über eine Vielzahl N von Realisierungen des Zufallsprozesses, der dann die Zufallsvariablen $X_1(\mathbf{x}', t'), \dots, X_N(\mathbf{x}', t')$ liefert:

$$\langle X(\mathbf{x}', t') \rangle_E = \frac{1}{N} \sum_N X_n(\mathbf{x}', t')$$

- **Raummittelung**

Dabei erfolgt die Mittelung über ein Ensemble von Zufallsvariablen, das nicht durch viele Realisierungen gewonnen wird, sondern aus einer Einzelnen. Hier sind die Ensemblemitglieder die Zufallsvariablen $X^1(\mathbf{x}^1, t'), \dots, X^M(\mathbf{x}^M, t')$, die im Zufallsprozess an verschiedenen Orten bestimmt wurden:

$$\langle X(\mathbf{x}, t') \rangle_R = \frac{1}{M} \sum_M X_m(\mathbf{x}^m, t')$$

Raummittel sind nur unter der Bedingung statistisch homogener Zufallsprozesse möglich.

Es besteht eine Äquivalenz der Mittelungsprozesse unter folgenden Bedingungen:

Bei Gültigkeit der Ergodenhypothese und unter der Bedingung statistischer Stationarität gilt

$$\langle X \rangle_Z = \langle X \rangle_E$$

und für den Fall statistischer Homogenität darf

$$\langle X \rangle_E = \langle X \rangle_R$$

angenommen werden.

Es gibt verschiedene statistische Größen die aus dem turbulenten Geschwindigkeitsfeld gewonnen werden können. Diese Größen vermitteln jeweils unterschiedliche Aussagen über die Struktur dieses Feldes.

An einem Punkt im Geschwindigkeitsfeld kann man die PDFs (Probability

Density Functions) also die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f(u_i)$ einzelner Geschwindigkeitskomponenten u_i bestimmen. In turbulenten Strömungen sind diese typischerweise *Gauß*-verteilt (Abb. 1.3). *Gauß*-Verteilungen haben allgemein folgende Eigenschaften:

Ihr Mittelwert ist Null:

$$M = \langle u_i \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i f(u_i) du_i = 0$$

Die Varianz σ ergibt sich für $M = 0$ als:

$$\sigma^2 = \langle u_i^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^2 f(u_i) du_i$$

Die *Skewness* (oder Schiefheit) der Verteilungen ist Null:

$$S = \langle u_i^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^3 f(u_i) du_i = 0$$

Ihre *Flatness* (oder Flachheit) hat einem Wert von ~ 3 :

$$\delta = \langle u_i^4 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^4 f(u_i) du_i \sim 3$$

Allgemein wird $\langle u_i^n \rangle$ auch als n-tes Moment der u_i -Verteilung bezeichnet. Abbildung 1.3 zeigt in a) die typische Gauß-Verteilung. In den beiden anderen Skizzen erkennt man den Einfluss einer Variation der Skewness (in b)) bzw. der Flatness (in c)) auf die Form der Verteilung.

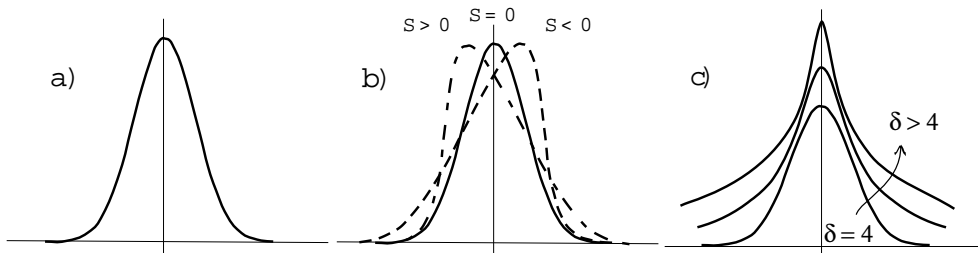


Abbildung 1.3: Die Gaußverteilung und der Einfluss des dritten und vierten Moments auf die Verteilungsform

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f(u_i)$ an einzelnen Punkten im Geschwindigkeitsfeld sind für Untersuchungen der Feldstruktur allerdings nicht sehr aussagekräftig, da sie nur lokale, punktuelle Aussagen machen.

Interessanter sind Verbundwahrscheinlichkeiten die mehrere Punkte im Geschwindigkeitsfeld miteinbeziehen und daher räumliche Korrelationen aufzeigen können. Zudem kann auch die zeitliche Feldentwicklung in die Statistik mit eingehen, wenn Verbundwahrscheinlichkeiten aus Geschwindigkeitskomponenten zu verschiedenen Zeitpunkten gebildet werden.

Eine Möglichkeit für eine solche räumliche und zeitliche Untersuchung bieten die Geschwindigkeitskorrelationen. Diese sind allesamt zusammengefasst im Geschwindigkeitskorrelationstensor Q_{ij} :

$$Q_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = \langle u_i(\mathbf{x}_1, t_1) u_j(\mathbf{x}_2, t_2) \rangle$$

Hier werden die Informationen über Aufbau und Struktur des Feldes aus den Produkten zweier Geschwindigkeitskomponenten an verschiedenen Positionen \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 im Feld zu verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 gewonnen. Mit Hilfe der Geschwindigkeitskorrelationen erkennt man bereits einige Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes und damit der turbulenten Strömung:

- **Statistische Stationarität**

Ist Q_{ij} unabhängig von der Zeit, so ist das Geschwindigkeitsfeld statistisch stationär:

$$Q_{ij} = Q_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

- **Statistische Homogenität**

Ist Q_{ij} invariant unter Translationen, so ist das Geschwindigkeitsfeld statistisch homogen, wobei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ der Abstandsvektor ist:

$$Q_{ij} = Q_{ij}(\mathbf{x}, t_1, t_2)$$

- **Statistische Isotropie**

Ist Q_{ij} invariant unter Rotationen, so ist das Geschwindigkeitsfeld statistisch isotrop:

$$Q_{ij} = Q_{ij}(|\mathbf{x}|, t_1, t_2)$$

In dieser Arbeit wird statistisch stationäre, homogene, isotrope Turbulenz behandelt.

Eine andere Möglichkeit für eine statistische Untersuchung der Struktur des Geschwindigkeitsfeldes ist mit den Strukturfunktionen D_{ij} gegeben:

$$D_{ij} = \langle [u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_i(\mathbf{x}, t)] [u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - u_j(\mathbf{x}, t)] \rangle$$

In die Strukturfunktionen D_{ij} gehen nicht die Geschwindigkeitskomponenten selbst, sondern Komponenten der Geschwindigkeitsinkremente, also Komponenten der Geschwindigkeitsdifferenzen zwischen zwei Punkten \mathbf{x} und $\mathbf{x} + \mathbf{r}$, ein. Es ist anschaulich klar, dass die Statistik der Geschwindigkeitsinkremente gerade im Falle turbulenter Geschwindigkeitsfelder eine ausgeprägte räumliche Information beinhaltet. Betrachtet man Feldpunkte mit relativ geringem

Abstand, so sollte die Existenz von Wirbeln eine messbare Korrelation der Geschwindigkeiten bewirken. Mit wachsendem Abstand erwartet man eher eine Abnahme dieses räumlichen Zusammenhangs, die Komponenten der Geschwindigkeit an solchen entfernten Punkten sollten keine Korrelation mehr aufweisen.

In den weiteren theoretischen Betrachtungen und im Auswertungsteil dieser Arbeit wird allerdings nicht mit der allgemeinen Definition der Strukturfunktionen gearbeitet, sondern mit einer einfacheren Variante. Es kommen longitudinale Strukturfunktionen S_n zum Einsatz. In dieser Definition werden die Geschwindigkeitsinkremente auf den Verbindungsvektor zwischen den beiden betrachteten Punkten projiziert:

$$\delta v = \left\{ \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{r}}{r} \right\} \quad (1.14)$$

Damit lassen sich longitudinale Strukturfunktionen in beliebiger Ordnung n definieren:

$$S_n(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \langle (\delta v)^n \rangle \quad (1.15)$$

Diese Darstellung macht deutlich, dass die longitudinalen Strukturfunktionen als Momente der δv -Verteilungen aufgefasst werden können.

$$\langle (\delta v)^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta v)^n f((\delta v)) d(\delta v) \quad (1.16)$$

Gerade die longitudinalen Strukturfunktionen spielen in der statistischen Theorie der Turbulenz eine große Rolle, da sie zentrales Element der Kolmogorovschen Theorie *K41* von 1941 sind. Im Abschnitt 1.4.2 wird gezeigt, wie Kolmogorov anhand einiger Annahmen theoretische Vorhersagen für das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen ableitet und damit auch Aussagen über die räumliche Struktur der turbulenten Geschwindigkeitsfelder gewinnt.

In der statistischen Theorie der Turbulenz wird neben den Geschwindigkeitskorrelationen und den Strukturfunktionen, die Aussagen über die Struktur der Geschwindigkeitsfelder im Ortsraum machen, auch eine Beschreibungsgröße im Fourierraum eingeführt. Im Fourierraum arbeitet man mit Funktionen der Wellenzahl \mathbf{k} und hat somit direkt eine Beschreibungsform, die die unterschiedlichen Längenskalen der Strukturen im Geschwindigkeitsfeld differenziert. Die hier verwendete statistische Beschreibungsgröße im Fourierraum ist das Energiespektrum $E(k)$. Im Fall statistischer Isotropie, die für alle weiteren Betrachtungen impliziert wird, lässt sich das Energiespektrum über folgendes Transformationspaar definieren:

$$E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(r) k r \sin(kr) dr$$

und

$$R(r) = \int_0^{\infty} E(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk$$

mit

$$R(r) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Es kann gezeigt werden, dass $E(k) \geq 0$ stets erfüllt ist und betrachtet man den Fall $r \rightarrow \infty$, so ergibt sich die übliche Interpretation für das Energiespektrum:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \int_0^\infty E(k) dk$$

Der Ausdruck $E(k)dk$ wird hier als Energiebeitrag der Wirbel einer Größenordnung im Bereich $[k, k + dk]$ zur gesamten kinetischen Energie im System $\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle$ verstanden. Man hat mit dem Energiespektrum also ein direktes Maß für die Verteilung der Energie über die verschiedenen Längenskalen. Zwischen dem Energiespektrum und den Strukturfunktionen 2. Ordnung besteht folgender nützlicher Zusammenhang:

$$\langle (\partial v(r))^2 \rangle \propto \int_{\frac{\pi}{r}}^\infty E(k) dk \quad (1.17)$$

wie in (Davidson Kapitel 5.2 [1]) gezeigt wird. Aufgrund dieser Relation resultieren aus den im Rahmen der K41 Theorie formulierten theoretischen Vorhersagen für die Strukturfunktionen auch sofort bestimmte Forderungen an das Energiespektrum. Darauf wird im Abschnitt 1.4.2 näher eingegangen.

1.4 Welche theoretischen Modelle gibt es zur Beschreibung der Turbulenz?

Alle Modellansätze, die hier vorgestellt werden, beziehen sich auf isotrope Turbulenz mit einer hohen Reynoldszahl Re . Zunächst wird das Modell für dreidimensionale Turbulenz eingeführt und anschließend auf den zweidimensionalen Fall übertragen.

1.4.1 Die Energiekaskade

Das Konzept, auf dem die weitere Modellbildung basiert, ist Richardsons Energiekaskade von 1922 [?]. Nach Richardson weisen turbulente Strömungen eine Hierarchie von Wirbeln auf. Die größten Wirbel entstehen im Erzeugungsprozess der Turbulenz. Diese erfahren eine Folge von Instabilitäten und zerfallen dabei sukzessive in kleinere Wirbel, bis die Größenordnung (man spricht auch von typischer Längenskala) der Wirbel so klein ist, dass sie durch viskose Dissipation vernichtet werden. Im Zerfallsprozess übertragen dabei die größeren Wirbel ihre Energie auf die Kleineren; so stellt sich ein kontinuierlicher Energietransport über eine Abfolge von immer kleineren Längenskalen hinweg ein. Da der Energieverlust durch die Dissipation erst bei den kleinsten Wirbeln eine Rolle spielt, definiert die Rate Π , mit der die Energie von den größten Wirbeln auf die nächst Kleineren übertragen wird, letztendlich die Dissipationsrate ϵ .

Dieses Bild der Energiekaskade lässt sich mit ein paar zusätzlichen Überlegungen qualitativ fassen:

Die typische Längenskala und Geschwindigkeit der großen Wirbel seien l und u respektive. Genauso wählt man η und v als typische Längenskala und Geschwindigkeit der kleinsten Wirbel. Die Energie der großen Wirbel ist von der Größenordnung u^2 . Mit u und l lässt sich für diese Wirbel auch eine typische Zeitskala τ einführen. Die Umlaufzeit eines Wirbels (oder aus dem Englischen auch *eddy-turn-over-time*) ergibt sich einfach als $\tau = \frac{l}{u}$. Die Rate des Energietransports aus den größten Wirbeln beträgt somit:

$$\Pi = \frac{\Delta E}{\Delta t} \propto \frac{u^2}{\tau} = \frac{u^3}{l} \quad (1.18)$$

Dies ist laut Richardson auch die Rate mit der Energie in den kleinsten Wirbeln dissipiert wird, also $\Pi \propto \epsilon$. Eine solche Unabhängigkeit der Dissipationsrate ϵ von der Viskosität des Fluids ν ist zunächst erstaunlich. Eine Erklärung findet sich durch eine genauere Betrachtung der Energiegleichung (1.4) aus Abschnitt 1.2.

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\rho} (p\mathbf{u}) + \nu (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \right\} - \nu \boldsymbol{\omega}^2$$

Zusätzlich stellt man noch eine Gleichung für die zeitliche Entwicklung des Quadrates der Wirbelstärke, der so genannten *Enstrophie* $\boldsymbol{\omega}^2$, auf:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 \right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \nu (\nabla \times \boldsymbol{\omega})^2 + \nabla \cdot \{ \nu \boldsymbol{\omega} \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \}$$

Der Term $(\nabla \times \boldsymbol{\omega})$ wird als *Palinstrophie* bezeichnet. Beide Gleichungen lassen sich durch Mittelung in Bilanzgleichungen für die Energie und Enstrophie im Volumenelement überführen. Aufgrund der angenommenen statistischen Homogenität integrieren alle Divergenzen zu Null.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle \right) = -\nu \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle \quad (1.19)$$

und

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle \right) = \langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle - \nu \langle (\nabla \times \boldsymbol{\omega})^2 \rangle \quad (1.20)$$

Im Grenzwert verschwindender Viskosität führt Gleichung (1.19) auf vermeintliche Erhaltung der Energie im Volumenelement. Allerdings enthält Gleichung (1.20) den Term $\langle \omega_i \omega_j S_{ij} \rangle$, der aus Wirbelstreckung resultiert und eine konstante Dissipationsrate aufrecht erhält. Für den Fall sehr kleiner Viskosität (und entsprechend hoher Reynoldszahl Re) spielt sich in dreidimensionaler Turbulenz nämlich folgendes ab:

Die Wirbelstreckung bewirkt eine Verstärkung der Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega}$ und damit der Enstrophie $\boldsymbol{\omega}^2$. Diese Verstärkung geschieht in einem Ausmaß, dass das Produkt $\nu \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle$, und damit die Energietransferrate, konstant bleibt. So garantiert die Wirbelstreckung den beständigen Energietransfer durch die Energiekaskade unabhängig von der Viskosität.

Für ϵ wurde in (1.6) folgender Zusammenhang gefunden:

$$\epsilon \propto \nu S_{ij} S_{ij}$$

Der Dehnungstensor S_{ij} verhält sich proportional dem Quotienten aus v und η . Man hat also:

$$\epsilon \propto \nu \left(\frac{v}{\eta} \right)^2$$

Durch die Kombination mit (1.18) folgt:

$$\nu \left(\frac{v}{\eta} \right)^2 \propto \frac{u^3}{l} \quad (1.21)$$

Im Zerfallsprozess der Kaskade nimmt die typische Geschwindigkeit der Wirbel mit der typischen Längenskala immer weiter ab. Schließlich entspricht im Fall der kleinsten Wirbel das Produkt $u \cdot l$ in etwa dem Wert der Viskosität ν ; die Reynoldszahl $Re = \frac{ul}{\nu}$ ist von der Größenordnung 1. Mit der Annahme $Re = 1$ und (1.21) gewinnt man einen Zusammenhang zwischen den typischen Skalen der größten und kleinsten Wirbel in der turbulenten Strömung.

$$\eta \propto Re^{-\frac{3}{4}} l \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.22)$$

$$v \propto Re^{-\frac{1}{4}} u \propto (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}$$

$$\tau_\eta \propto Re^{-\frac{1}{2}} \tau \propto \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Die Skalen η, ν und τ_η der kleinsten Wirbel werden als *Kolmogorov-Skalen* bezeichnet. Wie man sieht, nimmt deren Größenordnung mit zunehmender Reynoldszahl immer weiter ab. Strömungen mit hoher Reynoldszahl weisen also sehr feine Wirbelstrukturen mit einer vergleichsweise geringen typischen Geschwindigkeit und einer sehr kurzen Umlaufzeit auf.

1.4.2 Kolmogorov 1941

In seiner 1941 erschienenen Veröffentlichung [5] formuliert Kolmogorov drei weiterführende Hypothesen, die auf der Idee der Wirbelkaskade aufbauen und dieses Modell um einige Annahmen ergänzen.

Bei der Erzeugung der größten Wirbel kann diesen eine Richtungsauszeichnung aufgeprägt werden; im Allgemeinen sind die statistischen Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes auf großer Längenskala daher anisotrop. Solche Vorzugsrichtungen gehen nach Kolmogorovs Vorstellung beim Aufbrechen in kleinere Wirbel verloren. Für Wirbel in einem Bereich der Längenskalen, der um einiges unter dem der größten Längenskala l liegt (also für Längenskalen $r \ll l$), kann man folglich statistische Isotropie annehmen. Zugleich zeigt ein Vergleich der typischen Umlaufzeiten großer Wirbel mit denen von Wirbeln auf mittlerer Längenskala, dass die kleineren Wirbel viel schneller zerfallen, als ihre größeren Vorläufer. Mögliche Schwankungen in der Energietransportrate Π haben eine typische Zeitskala τ . Der Zerfallsprozess der kleineren Wirbel findet erheblich schneller statt. Für die Lebensdauer der kleinen Wirbel (angenommen wird ihre typische Umlaufzeit) bleibt der Energietransport quasi stationär. Nach Kolmogorov befinden sie sich im statistischen Gleichgewicht. Beide Annahmen formulierte Kolmogorov in seiner

Hypothese der lokalen Isotropie

Bei hoher Reynoldszahl Re sind die kleinskaligen turbulenten Bewegungen statistisch isotrop und befinden sich im statistischen Gleichgewicht.

Die Verwendung des Begriffs *lokal* betont hier die reine Gültigkeit für Wirbel auf Längenskalen $r \ll l$. Der Bereich der in der turbulenten Strömung vertretenen Längenskalen $r \ll l$ wird als Folge dieser Hypothese auch *universeller Gleichgewichtsbereich* genannt.

Die beiden weiteren Hypothesen beziehen sich auf die Eigenschaften aller statistischen Beschreibungsgrößen turbulenter Strömungen im universellen Gleichgewichtsbereich. Kolmogorov wählte in seiner Veröffentlichung longitudinale Strukturfunktionen 2. Ordnung S_2 als Beispiel. Analoge Überlegungen treffen allerdings für beliebige Strukturfunktionen zu. Hier werden die Ergebnisse daher direkt für die gesamten Strukturfunktionen S_i angegeben.

Kolmogorov argumentiert, dass die einzigen Parameter, die im Bereich $r \ll l$ Einfluss auf die Form der Strukturfunktionen haben können, neben der betrachteten Längenskala r nur die Energieverlustrate Π der großen Wirbel und die Stärke der Viskosität ν des Fluids sind. Die Verallgemeinerung auf alle statistischen Größen ist Inhalt der nächsten Hypothese:

Erste Ähnlichkeitshypothese

Bei hoher Reynoldszahl Re und im Bereich der Längenskalen $r \ll l$ haben die statistischen Beschreibungsgrößen eine universelle Form, die nur von ϵ , r und ν abhängt.

Mit $\Pi \propto \epsilon$ aus Richardsons Modell hat man also für die Strukturfunktionen S_n :

$$S_n = S_n(r, \epsilon, \nu)$$

Eine Dimensionsanalyse ermöglicht eine für den ganzen Gleichgewichtsbereich gültige Darstellung mit Hilfe einer universellen Funktion f. r , ϵ und ν bilden in der Form:

$$\frac{\epsilon^{\frac{1}{4}} r}{\nu^{\frac{3}{4}}}$$

einen dimensionslosen Parameter. Die Einheit der Strukturfunktionen ist $\left(\frac{m}{s}\right)^n$, dies wird in einem Faktor $(\epsilon r)^{\frac{n}{3}}$ berücksichtigt. Die universelle Form der Strukturfunktionen S_n lautet dann:

$$S_n = (\epsilon r)^{\frac{n}{3}} f\left(\frac{\epsilon^{\frac{1}{4}} r}{\nu^{\frac{3}{4}}}\right)$$

Die letzte Hypothese Kolmogorovs macht eine Aussage über die statistischen Eigenschaften im Bereich der Längenskalen mittelgroßer Wirbel, also für $l \gg r \gg \eta$. Diese Wirbel bleiben von der Dissipation unberührt. Nach Kolmogorovs Auffassung erfahren solche Wirbel einen Energiezustrom aus den größeren Wirbeln und zugleich findet ein entsprechender Energieübertrag auf die nächst kleineren Wirbel statt. Für die Statistik in diesem Bereich der Längenskalen ist also der Wert der Energietransferrate nicht entscheidend. Und so stellt er für diesen Bereich eine einschränkendere Ähnlichkeitshypothese auf:

Zweite Ähnlichkeitshypothese

Bei hoher Reynoldszahl Re und in einem Bereich der Längenskalen $l \gg r \gg \eta$ haben die statistischen Beschreibungsgrößen eine universelle Form, die ausschließlich von ϵ und r abhängt und unabhängig ist von der Viskosität ν .

Der Bereich der Längenskalen $l \gg r \gg \eta$ heißt *Inertialbereich*, womit darauf hingewiesen wird, dass die Existenz der Energiekaskade hier nur auf inertielle Kräfte zurückzuführen ist und nicht durch Viskositätskräfte motiviert werden kann.

Im Inertialbereich müssen sich die Strukturfunktionen S_n nach der letzten Hypothese in reiner Abhängigkeit von ϵ und r darstellen lassen:

$$S_n = S_n(r, \epsilon)$$

Da kein dimensionsloser Parameter aus r und ϵ zusammengesetzt werden kann, ist die einzige Möglichkeit einer universellen Funktion einfach eine Konstante. Die universelle Form der Strukturfunktionen im Inertialbereich ergibt sich so zu:

$$S_n = C_n (\epsilon r)^{\frac{n}{3}} \quad (1.23)$$

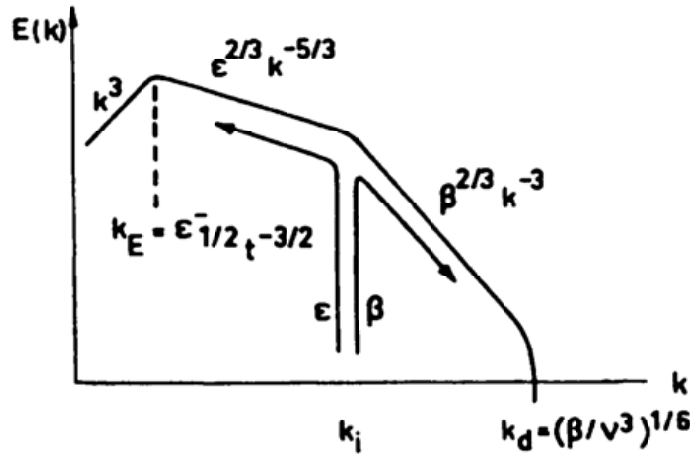


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung des Energiespektrums nach dem Modell von Kraichnan. Die Wellenzahl k_i wird im Text mit k_A bezeichnet. (Abbildung aus [2])

Die Konstante C_n nennt man Kolmogorov-Konstante.

Wie lässt sich dieses Ergebnis für die Form der Strukturfunktionen im Inertialbereich nun interpretieren?

Gleichung (1.23) ist so zu verstehen, dass das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen im Inertialbereich auf jeder Längenskala identisch ist. Die Momente der Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente skalieren mit $\frac{n}{3}$. Dies definiert die Selbstähnlichkeit der Inkrementsverteilungsfunktionen. Anschaulich bedeutet das also, dass unabhängig von der Größenordnung des Bezugsrahmens in dem man ein turbulentes Strömungsfeld betrachtet, die Feldstruktur stets ähnlich aussieht. Egal auf welcher Längenskala ein Bild der Turbulenz aufgenommen wird, die Größenverteilung der Wirbel und ihre räumliche und zeitliche Anordnung sollten statistisch identisch ausfallen.

Mit der Beziehung (1.10) aus Abschnitt 1.3.2 lässt sich aus dem Ergebnis für die zweite Strukturfunktion auch direkt das Skalierungsverhalten für das Energiespektrum ableiten:

$$E(k) = C \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \quad (1.24)$$

Dieser Zusammenhang wird nach dem Skalierungsexponenten der k -Moden als *Kolmogorov'sches $\frac{5}{3}$ -Gesetz* bezeichnet.

1.4.3 Das Modell für die zweidimensionale Turbulenz

Die Übertragung der Modellvorstellung aus drei Dimensionen auf die zweidimensionale Turbulenz gelingt leider nicht ganz so problemlos, wie im Falle der deterministischen Gleichungen. Die Reduktion um einen Freiheitsgrad bedingt einige bemerkenswerte Unterschiede, die Kraichnan [6] 1967 als erster herausstellte. Zweidimensionale Turbulenz besitzt die Eigenschaft, dass sich die Wirbel, die durch den Erzeugungsprozess eine bestimmte typische Längenskala r_i

aufweisen, im Laufe der Zeit vereinigen. So findet man in fortwährend angetriebener Turbulenz mit der Zeit immer größere Wirbelstrukturen. Prinzipiell begrenzen nur die Randbedingungen des Fluids ein Wachstum der größten Wirbel. Kraichnan prognostizierte für die zweidimensionale Turbulenz die simultane Existenz zweier Kaskaden. Zum einen erwartete er eine direkte Enstrophiekaskade, die Enstrophie aus Wirbeln der Antriebslängenskala r_i in Richtung kleinerer Längenskalen transportiert und zum anderen eine inverse Energiekaskade, die Energie aus Wirbeln der Antriebslängenskala auf die größeren Wirbel überträgt (Die Bezeichnungen *direkt* und *invers* bezieht sich hier auf die Richtung der Energiekaskade in drei Dimensionen.). Batchelor [8] vermittelt in seiner Veröffentlichung aus dem Jahre 1969 dazu einige recht anschauliche Überlegungen, ähnlich denen zur Energiekaskade in 3D. Batchelors Ansätze beziehen sich auf frei zerfallende Turbulenz, die also nach der Erzeugung nicht weiter angetrieben wird. Trotzdem kann man seine Ergebnisse hier für die Anschauung heranziehen.

Aus der Navier-Stokes Gleichung (1.10) und der Wirbelgleichung (1.11) in zwei Dimensionen ergeben sich durch einfache Umformungen folgende Gleichungen für Energie, Enstrophie und Palinstrophie in einem Flächenelement:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\rho} (p\mathbf{u}) + \nu (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \right\} - \nu \boldsymbol{\omega}^2$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) = -\nu ((\nabla \omega)^2 - \nabla(\omega \nabla \omega))$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} (\nabla \omega)^2 \right) = -S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j - \nu ((\Delta \omega)^2 - \nabla((\Delta \omega) \nabla \omega))$$

In zwei Dimensionen vereinfacht sich der Ausdruck für die Palinstrophie $(\nabla \times \boldsymbol{\omega})$ auf das Quadrat des Gradienten in der Wirbelstärke $(\nabla \omega)^2$. Ebenso gemittelt wie im Fall dreidimensionaler Turbulenz ergeben sich die Bilanzgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) = -\nu \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle \quad (1.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \omega^2 \right) = -\nu \langle (\nabla \omega)^2 \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\nabla \omega)^2 \right) = -\langle S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j \rangle - \nu \langle (\Delta \omega)^2 \rangle \quad (1.26)$$

Batchelors Argumentation lässt sich nun so zusammenfassen:

Im Grenzwert verschwindender Viskosität (also im Fall einer hohen Reynoldszahl Re) sind Energie, Wirbelstärke und scheinbar auch die Enstrophie in den betrachteten Volumenelementen der turbulenten Strömung Erhaltungsgrößen. Man spricht auch von materiellen Erhaltungsgrößen, da die Flächenelemente wie Fluidpartikel in der Strömung mittransportiert werden. Im Gegensatz zur dreidimensionalen Turbulenz kann in 2D die Wirbelstärke in einem Flächenelement nicht durch Wirbelstreckung zunehmen. Die Flächenelemente tendieren

hier aber dazu, in sehr feine Filamente zu zerfließen, so genannte Materielinien zu bilden (Festzumachen ist diese Filamentierung am ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (1.26)). Anschaulich kann man sich hier gut das Bild vor Augen führen, wie Sahne auf der Oberfläche von Kaffee sehr feine Linienstrukturen ausbildet. Dabei nehmen die Gradienten der Wirbelstärke im Bereich der Grenzen des Flächenelements sehr stark zu. Die Filamentierung wird schließlich gestoppt, wenn die Materielinien so fein sind, dass im Dissipationsprozess die Enstrophie zerstört und die Wirbelstärke gedämpft wird. In 2D-Turbulenz gleicht also die Verstärkung von Gradienten der Wirbelstärke im Quadrat $(\nabla\omega)^2$ eine Verringerung der Viskosität ν aus. Hier bleibt das Produkt $\nu \langle (\nabla\omega)^2 \rangle$ konstant - damit wird ähnlich wie im dreidimensionalen Fall eine konstante Enstrophietransportrate aufrechterhalten. Es handelt sich um eine direkte Kaskade, da man den immer feineren Filamenten auch eine immer kleinere Längenskala zuordnen kann. Daraus folgt, dass die Enstrophie ω^2 im Flächenelement einen endlichen Wert hat, der sich im Laufe der Zeit nur verringern kann. Nach (1.25) kann die Energie für $\nu \rightarrow 0$ demnach nicht auf kleiner Längenskala dissipiert werden. So kann die Energie nur in die größeren Längenskalen ausweichen und damit liegt die Vermutung der Existenz einer inversen Energiekaskade nahe. [8]

Nach Kraichnan [] zeigen sich die inverse Energiekaskade und die direkte Enstrophiekaskade in zwei unterschiedlichen Skalierungsbereichen im Energiespektrum (vgl. Abb. 1.4). Notwendige Bedingung für das Auftreten beider Kaskaden, ist der bereits erwähnte Antrieb, ein konstanter Energieeintrag in das System auf kleiner Längenskala. Ist dies gewährleistet, so prägt sich eine inverse Energiekaskade mit einem konstanten Energiefluss aus den größeren in die kleineren Wirbel aus. In der fouriertransformierten Darstellung im Energiespektrum findet der Energieeintrag im Bereich der entsprechenden Antriebswellenzahl k_A statt. Der Skalierungsbereich der inversen Energiekaskade, der genau wie in der Terminologie der dreidimensionalen Turbulenz auch als *Inertialbereich* bezeichnet wird, findet sich im Bereich der Wellenzahlen unterhalb der Antriebsmode k_A . Wie in der dreidimensionalen Turbulenz ist dieser durch das Skalierungsverhalten

$$E(k) \propto \epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}$$

gekennzeichnet. Die Enstrophiekaskade wird dagegen im Energiespektrum durch einen Skalierungsbereich oberhalb der Antriebswellenzahl k_A repräsentiert. Hier findet man einen Skalierungsbereich der sich $\propto k^{-3}$ ausbildet. In der vorliegenden Arbeit wird allerdings ausschließlich die inverse Energiekaskade untersucht. Neben dem Kolmogorovschen $\frac{5}{3}$ -Gesetz für die inverse Energiekaskade behalten auch die Erkenntnisse Kolmogorovs bezüglich der universellen Formulierung der Strukturfunktionen in 2D ihre Gültigkeit. Es gilt hier weiterhin:

$$S_n = C_n(\epsilon r)^{\frac{n}{3}}$$

1.4.4 Zusätzliche Modellierungsannahmen

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, liegt der Fokus dieser Arbeit auf der Untersuchung der inversen Energiekaskade sowie weiterer Auswertungen der Sta-

tistik im Inertialbereich der turbulenten Strömung. Für eine Modellierung dieses Phänomens der zweidimensionalen Turbulenz muss die Wirbeltransportgleichung 1.11 um einige Modellannahmen erweitert werden. Der gewählte Ansatz ist:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \omega \quad \underbrace{-\gamma \omega}_{\text{zusätzl. Reibungsterm}} \quad + \quad \underbrace{F}_{\text{Antriebskraft}} \quad (1.27)$$

Wie von Kraichnan gefordert, findet auf kleiner Längenskala ein Energieeintrag in das System statt, der in der Wirbeltransportgleichung durch den Kraftansatz F realisiert wird. Die kleinskalige Beschränkung der Wirkung dieser Kraft lässt sich gewährleisten, indem man die Kraft im Fourierraum definiert in einem eingeschränkten Bereich von Antriebsmoden \mathbf{k}_A ansetzt. Diese Antriebsmoden \mathbf{k}_A werden so gewählt, dass durch Fouriertransformation im Ortsraum ein Kraftfeld mit kurzreichweitiger räumlicher Korrelation resultiert.

Die zweite Ergänzung in der Wirbeltransportgleichung besteht in dem linearen Reibungsterm $-\gamma \omega$. Für die Modellierung der inversen Energiekaskade ist prinzipiell nur der Kraftansatz erforderlich. Die Vorstellung eines unbegrenzten Wachstums der Wirbelstrukturen ist theoretisch möglich, in physikalisch realisierter Quasi-2D-Turbulenz wird allerdings immer eine Reibung mit den Grenzflächen auftreten, die schließlich zur Bildung stabiler großer Wirbel führt, die nicht weiter anwachsen. Diese Art der Reibung mit Grenzflächen wird zweckmäßig durch den linearen Ansatz modelliert. Neben dem Viskositätsterm, der für die Energiedissipation im Bereich kleinskaliger Strukturen sorgt, gewährleistet der zusätzliche Reibungsterm eine Dämpfung der kinetischen Energie auf großer Längenskala.

1.4.5 Das Lagrange-Bild

Als letzter Punkt in der theoretischen Einführung bleibt nun noch zu erwähnen, dass sich in der Betrachtung turbulenter Strömungsfelder zwei unterschiedliche Blickwinkel etabliert haben.

Man unterscheidet eine Beschreibung der Turbulenz im Euler-Bild von derjenigen im Lagrange-Bild. Die Theorie der Turbulenz mit ihren vielfältigen Eigenschaften wurde bis hierher im Euler-Bild vorgestellt. Der Beobachter eines Turbulenzfeldes bezieht dabei Position in einem äußeren Bezugssystem. Die betrachteten Geschwindigkeits- oder Wirbelfelder werden mit einem definierten Koordinatengitter versehen, so dass sich im Feld feste Positionen mit Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ definieren lassen. Die Änderungen der Felder mit der Zeit werden als Änderungen der Geschwindigkeits- oder Wirbelstärkekomponenten an der jeweiligen (x_1, x_2) -Positionen beschrieben.

Dieser Blickwinkel ist typisch in der Physik – eine andere Betrachtungsweise erschließt sich dagegen im Lagrange-Bild:

Hier werden keine raumfesten Positionen im Feld betrachtet, vielmehr verfolgt der Beobachter Fluid-Partikel, die sich im Laufe der Zeit in der Strömung bewegen. Zu einem Zeitpunkt t_0 wird ein solcher Fluid-Partikel ausgewählt, der in diesem Moment am festen Raumpunkt $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ positioniert ist. Dieses

Teilchen bewegt sich mit der Zeit immer entsprechend der lokalen Geschwindigkeit im Strömungsfeld und beschreibt somit die Trajektorie $\mathbf{X}(t, \mathbf{Y})$. Aus diesem Blickwinkel betrachtet reduziert sich die Beschreibung der Dynamik dieser Fluid-Partikel auf die beiden Gleichungen:

$$\mathbf{X}(t_0, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(t, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t, \mathbf{Y}), t).$$

Die Wirbeltransportgleichung hat im Lagrange-Bild die Form

$$\frac{D}{Dt} \omega_p = \nu \Delta \omega_p,$$

die schon aus der Euler-Darstellung bekannt ist. Hier steht die konvektive Ableitung $\frac{D}{Dt}$ aber einfach für die zeitliche Änderung der Wirbelstärke entlang der Trajektorie. Die Betrachtung der Wirbelstärke auf den Partikelbahnen wird durch den Index p gekennzeichnet.

Für die statistische Beschreibung der Turbulenz im Lagrange-Bild haben ebenso wie im Euler-Bild die Strukturfunktionen besondere Bedeutung. Ihre Definition weicht etwas von der Eulerschen Variante (1.14) ab, da hier bei der Einführung der Inkremente anstelle des räumlichen Abstandsparameters \mathbf{r} ein zeitliches Abstandsmaß τ zum Einsatz kommt.

$$\partial v(\tau) = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t + \tau, \mathbf{Y}), t + \tau) - \mathbf{U}(\mathbf{X}(t, \mathbf{Y}), t) \quad (1.28)$$

τ bezeichnet die Zeitdifferenz zwischen den beiden Teilchenpositionen $\mathbf{X}(t + \tau, \mathbf{Y})$ und $\mathbf{X}(t, \mathbf{Y})$ auf der Trajektorie. Ansonsten haben die Lagrangeschen Strukturfunktionen die im Wesentlichen die gleiche Form, wie diejenigen im Euler-Bild:

$$S_n = \langle |\partial v(\tau)|^n \rangle \quad (1.29)$$

Betreibt man in Analogie zur K41-Theorie eine Dimensionsanalyse für die Lagrangeschen Strukturfunktionen, so findet man ein leicht modifiziertes Skalierungsverhalten im Inertialbereich. Für die Lagrangeschen Strukturfunktionen gilt nämlich:

$$S_n \propto (\epsilon \tau)^{\frac{n}{2}} \quad (1.30)$$

man erwartet also einen Skalierungsexponenten von $\frac{n}{2}$.

2 Das Numerische Verfahren

Thema dieses Kapitels ist das Verfahren zur numerischen Lösung der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung. Der physikalische Teil der Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit besteht in der statistischen Auswertung von Turbulenzdaten, die aus der numerischen Simulation gewonnen werden sollen. Für die Verwendung numerischer Verfahren in der Turbulenzforschung sprechen im Wesentlichen zwei Gründe:

Mit der numerischen Integration der Differentialgleichungen der Turbulenz – wie z.B. der Wirbeltransportgleichung – besitzt man ein Werkzeug für die Lösung vieler spezieller Problemstellungen bei verschiedensten Randbedingungen, für die andererseits keine analytischen Lösungen bekannt sind. Hier kann die Numerik dazu dienen, Informationen über das Lösungsverhalten der Differentialgleichungen zu vermitteln. Aus dem Vergleich der Ergebnisse aus numerischen Untersuchungen und realen physikalischen Experimenten lässt sich zudem überprüfen, inwieweit diese Differentialgleichungen tatsächlich die Natur der Turbulenz beschreiben.

Als Erweiterung der experimentellen Methoden in der Turbulenzforschung bieten numerische *Experimente* zudem die Möglichkeit, turbulente Strömungen unter ganz bestimmten Anfangs- und Randbedingungen zu simulieren. Es lassen sich alle Systemparameter (innerhalb der Grenzen von Speicherplatz und Rechenzeit) beliebig variieren – so können auch Untersuchungen des turbulenten Verhaltens außerhalb experimentell zugänglicher Parameterbereiche durchgeführt werden.

So ist hier der numerische Ansatz und damit auch die Verwendung numerisch ermittelter Datensätze durchaus zu vertreten. Im ersten Teil des Kapitels wird recht ausführlich auf die numerische Methode eingegangen. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass die maßgebliche Herausforderung im Rahmen dieser Arbeit darin bestand, ein numerisch stabiles Integrationsverfahren zu entwickeln.

Der ursprüngliche Fokus dieser Arbeit auf die statistische Auswertung im Lagrange-Bild wurde daher eher in Richtung auf eine profunde Ausarbeitung des numerischen Verfahrens verschoben.

Im Weiteren wird deshalb Wert auf eine detaillierte Dokumentation des Integrationsverfahrens gelegt. Im Anhang dieser Arbeit findet sich aus diesem Grunde auch eine gedruckte Version des entwickelten Programm-Codes.

Im zweiten Teil des Kapitels wird dann mit den 2-Wirbel-Simulationen ein Testverfahren für die Numerik vorgestellt. Anhand der Ergebnisse dieses Tests

kann die Verbesserung der numerischen Stabilität in den verschiedenen Entwicklungsphasen des Integrationsverfahrens nachvollzogen werden.

2.1 Die Diskretisierung der Wirbeltransportgleichung

Es ist das Ziel der numerischen Simulation, aus einem gegebenen Anfangsfeld der Wirbelstärke $\omega(\mathbf{x}, t)$ für jeden späteren Zeitpunkt (bzw. eingeschränkter für jeden späteren Zeitschritt $t_m = m \cdot dt$) $\omega(\mathbf{x}, t_m)$ bestimmen zu können. Diese Berechnung ist mittels der Wirbeltransportgleichung (1.11), dem Geschwindigkeitsansatz (1.12) und der Poisson-Gleichung (1.13) aus Kapitel (1.1) geschlossen möglich.

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t) - \gamma \omega(\mathbf{x}, t) + F \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -(\nabla \Psi(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial y} \Psi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} \Psi(\mathbf{x}, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \Delta \Psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.3)$$

Numerisch lassen sich natürlich keine kontinuierlichen Felder realisieren. Die Berechnungen finden daher auf einem quadratischen Gitter mit $N \times N$ Stützstellen statt, wobei die Diskretisierung als $N = 2^n$ gewählt wird. Die Kantenlänge des Feldes wird auf 2π gesetzt und jeder Gitterpunkt lässt sich als Vektor

$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi i}{N} \\ \frac{2\pi j}{N} \end{pmatrix} \quad \text{mit } i, j = 0, \dots, N-1$$

beschreiben.

Die Modellannahmen aus Kapitel 1.4.4 werden in der Wirbeltransportgleichung durch den zusätzlichen Reibungs- und Kraftterm berücksichtigt. Die Wahl des Kraftansatzes wird unten im Absatz *Der Kraftansatz* genauer erläutert. Schreibt man den nichtlinearen Term in Gleichung (2.1) direkt in einen Ausdruck der Stromfunktion $\Psi = \Psi(\mathbf{x}_{ij}, t_m)$ und $\omega = \omega(\mathbf{x}_{ij}, t_m)$ um, so reduziert sich das System der zu lösenden Gleichungen auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega = -\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \nu \Delta \omega - \gamma \omega + F \quad (2.4)$$

$$\omega = \Delta \Psi \quad (2.5)$$

Das Pseudospektralverfahren

Die Integration der so umformulierten Wirbeltransportgleichung wird numerisch als *Pseudospektralverfahren* realisiert. Eine Fouriertransformation der Gleichung ermöglicht eine genaue Berechnung des Laplace-Operators im Dissipations-term. Allerdings überführt diese Transformation den nichtlinearen Term in

eine rechenzeitaufwändige Faltung. Dieser Aufwand an Rechenzeit rechtfertigt eine mehrfache Fouriertransformation, so dass die Nichtlinearität im Ortsraum ermittelt wird, die weitere Berechnung aber im Fourierraum stattfindet. Das Berechnungsschema nimmt damit die folgende, in diesem Sinne *pseudospektrale* Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = \left[- \left\{ -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} \right\}_k - \nu k^2\omega_k - \gamma\omega_k + F_k \right]_x \quad (2.6)$$

Hier bezeichnen die Indizes k und x die Fouriertransformation in den Fourierraum bzw. in den Ortsraum respektive.

Für die Berechnung der Fouriertransformationen wird auf den diskreten FFT-Algorithmus zurückgegriffen. Im Speziellen wird hier die frei verfügbare Bibliotheksroutine *fftw 3.0.1* verwendet, deren problemlose Implementierung und besondere Schnelligkeit bei den Berechnungen eine besondere Erwähnung verdienen.

Der Kraftansatz

Für den Kraftansatz in der Wirbeltransportgleichung liefert die Theorie nur insofern eine Einschränkung, als der Antrieb auf kleiner Längenskala erfolgen soll. Da im Zuge des Pseudospektralverfahrens sowieso ständig zwischen Fourier- und Ortsraum gewechselt wird, ist eine Definition der Kraft im Fourierraum zweckmäßig. Hier lässt sich die Beschränkung auf kleine Längenskalen realisieren, indem man den Antrieb auf entsprechende Wellenzahlen beschränkt. Das folgende Kraftmodell ist in der Literatur (vgl. z.B. [9] oder [10]) häufig vertreten und soll auch hier Verwendung finden:

$$f_{\mathbf{k}}(t + dt) = r f_{\mathbf{k}}(t) + A\sqrt{1 - r^2}e^{i\Theta} \quad (2.7)$$

Der Index \mathbf{k} symbolisiert die Definition im Fourierraum. Der dimensionslose Korrelationskoeffizient r kann Werte im Bereich $[0, 1]$ annehmen, und A bezeichnet die Amplitude. Die Phase Θ ist zufällig gewählt aus dem Intervall $[0, 2\pi]$. Diese Realisierung des Kraftansatzes entspricht einem Markov-Prozess: Der Kraftterm zum Zeitpunkt $t + dt$ ergibt sich aus dem Kraftterm zum früheren Zeitpunkt t und einem zufälligen Fluktuationsterm. Die Kraft besitzt damit ein Ein-Schritt-Gedächtnis. Ein solcher Ansatz ist physikalisch durchaus sinnvoll, da auch reale Kräfte eine zeitliche Korrelation aufweisen und ihre Beträge nicht von einem Moment zum nächsten völlig variieren.

Oft wird dieses Kraftmodell für einen ganz schmalen Bereich von Antriebsmoden $k_A \pm 2$ definiert. (Mit der Wahl der Feldlänge $L = 2\pi$ ergeben sich die diskreten Fouriermoden einfach als $k_i = i \cdot dk$ mit $dk = \frac{2\pi}{L} = 1$.)

In der hier beschriebenen Numerik wird der Antriebsbereich allerdings etwas ausgeweitet. Dazu wird die Amplitude A einfach gegen eine um k_A gepeakte Gauß-Verteilung der Höhe R ausgetauscht:

$$A \rightarrow R \cdot e^{-\left(\frac{k-k_A}{\sigma}\right)^2}$$

Diese Variation von (2.7) lässt den Kraftansatz etwas natürlicher erscheinen. Jeder physikalisch realisierbare Antrieb wird nämlich für die Anregung einer gewissen Bandbreite von Fouriermoden sorgen.

Das Adams-Bashforth-Verfahren

Die Zeitintegration erfolgt nach einem *Adams-Bashforth-Verfahren* 4. Ordnung [11]. Diese auf den ersten Blick etwas aufwändige Methode (im Vergleich mit der zunächst plausibelsten Möglichkeit eines Euler-Zeitschrittverfahrens) wurde aus Gründen der numerischen Stabilität gewählt. Die Vorteile dieses Verfahrens gegenüber der Euler-Methode werden im Abschnitt(2.2) deutlich herausgestellt. Für eine kurze Erläuterung des *Adams-Bashforth-Verfahrens* betrachtet man die rechte Seite von Gleichung (2.6) allgemein als Funktion $f(\omega(t), t)$. Die exakte Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = f(\omega(t), t)$$

ergibt sich für den Zeitpunkt t_m durch Integration über das Intervall $[t_m, t_{m+1}]$ als:

$$\omega(t_{m+1}) = \omega(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(\omega(t), t) dt \quad (2.8)$$

Da der Integrand in (2.8) von $\omega(t)$ abhängt, dieser Zusammenhang aber im Intervall $[t_m, t_{m+1}]$ unbekannt ist, muss eine Approximation für $f(\omega(t), t)$ gefunden werden. In dem verwendeten expliziten Adams-Bashforth-Verfahren wird nun mit Hilfe der Lagrange Interpolation aus k bekannten Stützstellen

$$f(\omega(t_{m-k+n}), t_{m-k+n}) = f_{m-k+n} \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, k$$

der Funktionsverlauf $f(\omega(t), t)$ interpoliert. Das Interpolationspolynom sei hier bezeichnet als $p(t)$:

$$p(t) = \sum_{n=1}^k f_{m-k+n} \cdot l_{m,n}(t) \quad \text{mit} \quad l_{m,n}(t) = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^k \frac{t - t_{m-k+\nu}}{t_{m-k+n} - t_{m-k+\nu}}$$

Ersetzt man $f(\omega(t), t)$ im Integral in (2.8) gegen $p(t)$, so folgt:

$$\omega(t_{m+1}) = \omega(t_m) + dt_m \sum_{n=1}^k \beta_{m,n} f_{m-k+n}$$

mit den Koeffizienten

$$\beta_{m,n} := \frac{1}{dt_m} \int_{t_m}^{t_{m+1}} l_{m,n}(t) dt.$$

Wie unten noch genauer erläutert, liegen die Stützstellen äquidistant, d.h. $t_m = m \cdot dt$. Jeder Zeitpunkt t lässt sich dann schreiben als:

$$t = m \cdot dt + s \cdot dt \quad \text{mit} \quad s \in [0, 1]$$

In diesem Fall sind die Koeffizienten $\beta_{m,n}$ unabhängig von m . Man bezeichnet sie als β_{n-1} mit $n = 1, \dots, k$ und erhält

$$\beta_{n-1} := \frac{1}{dt_m} \int_0^1 \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^k \frac{s+k-\nu}{n-\nu} ds.$$

Damit lässt sich das Adams-Bashforth-Verfahren für äquidistante Zeitschritte dt allgemein schreiben als

$$\omega(t_{m+1}) = \omega(t_m) + dt(\beta_0 f_{m-k+1} + \dots + \beta_{k-1} f_m).$$

In der Numerik zur Integration der Wirbeltransportgleichung wird ein Verfahren 4. Ordnung eingesetzt. Für diesen Fall, also $k = 4$, ergibt sich folgende Verfahrensvorschrift:

$$\omega(t_{m+1}) = \omega(t_m) + \frac{dt}{24} (-9 \cdot f_{m-3} + 37 \cdot f_{m-2} - 59 \cdot f_{m-1} + 55 \cdot f_m) \quad (2.9)$$

In die Berechnung des Feldes zum neuen Zeitschritt t_{m+1} gehen damit die Felder der vier vorherigen Zeitschritte ein.

Die Lösung der Poisson-Gleichung (2.3) wird im Fourierraum ermittelt. Die Gleichung

$$\omega_k = -k^2 \Psi_k$$

lässt sich einfach umschreiben, so dass sich entsprechend

$$\Psi_k = -\frac{1}{k^2} \omega_k$$

das Feld der Stromfunktion sofort aus dem Feld der Wirbelstärke ergibt.

Die Courant-Friedrichs-Levi-Bedingungen

Aus Stabilitätsgründen muß der Zeitschritt dt die Courant-Friedrichs-Levi-Bedingungen erfüllen. Diese drei Kriterien lauten nach [12]:

$$\begin{aligned} dt &< \frac{dx^2}{4\nu} \\ dt &< \frac{dx}{|u_{max}|} \\ dt &< \frac{dy}{|u_{max}|} \end{aligned}$$

Das erste Kriterium verknüpft die Diskretisierung des Feldes $dx = \frac{2\pi}{N}$ mit der Viskosität ν und stellt damit eine für die gesamte Simulation gültige obere Grenzbedingung für den Zeitschritt dar. Die anderen beiden Kriterien enthalten dagegen die Maximalgeschwindigkeit $|u_{max}|$, die zum betrachteten Zeitpunkt im

Feld auftritt und sich natürlich mit der Zeit ändert. Dies führt auf die Notwendigkeit einer dynamischen Anpassung des Zeitschrittes in jeder Iteration – oder zu einer derartigen Wahl von dt , dass trotz Variation von $|u_{max}|$ mit der Zeit die Kriterien erfüllt bleiben. Da die Zeitintegration nach Adams-Bashforth bei konstantem Zeitschritt die vereinfachte Form (2.9) annimmt, wurde bei den Simulationen ein hinreichend kleiner konstanter Zeitschritt gewählt. Das zweite und dritte Kriterium formulieren den Umstand, daß kein Fluidpartikel in einem Zeitschritt mehr als einen Gitterabstand in x- oder y-Richtung zurücklegen darf.

Das Anti-Aliasing

Um die Stabilität der Numerik zu gewährleisten, muss bei der Verwendung diskreter Fouriertransformationen die Problematik des *Aliasing-Effektes* berücksichtigt werden. (Siehe dazu auch Kapitel 3.2.2 in [13].) Die Ursache dieses Effektes liegt in der Approximation der unendlichen Fourierentwicklung durch eine diskrete, endliche Fourierreihe.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} &\longrightarrow \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} u(\mathbf{x}_{ij}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_{ij}} \\ &\text{mit } \mathbf{x}_{ij} = \left(\frac{2\pi}{N}i, \frac{2\pi}{N}j \right) \quad i, j = 0, \dots, N-1 \\ &\text{und } -\frac{N}{2} \leq |\mathbf{k}| \leq \frac{N}{2} - 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analog gilt für die inverse Transformation:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \longrightarrow \mathbf{u}(x_{ij}) = \sum_{k_x=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k_y=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_{ij}}$$

Numerische Fehler, die schließlich die Instabilität der Simulation bewirken können, treten bei der Berechnung von Produkten fouriertransformierter Felder auf. Im vorliegenden Fall muß bei der Berechnung des nichtlinearen Terms im Ortsraum der *Aliasing-Effekt* verhindert werden. Im Folgenden wird dieser Effekt kurz skizziert und eine Methode zu seiner Vermeidung vorgestellt.

Der Einfachheit halber betrachte man hier eine eindimensionale Situation:

Die Felder \hat{u}_m und \hat{v}_n seien im Fourierraum definiert und werden durch eine inverse Fouriertransformation in den Ortsraum überführt.

$$u(x_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{u}_m e^{imx_j} \quad \text{mit } x_j = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

$$v(x_j) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{v}_n e^{inx_j} \quad \text{mit } x_j = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

Das Produkt aus beiden Feldern

$$w(x_j) = u(x_j)v(x_j)$$

werde nun wiederum fouriertransformiert:

$$\hat{w}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w(x_j) e^{-ikx_j} \quad \text{mit} \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1$$

Mit (2.11) und (2.12) erhält man:

$$\hat{w}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \hat{u}_m \hat{v}_n e^{i(m+n-k)x_j}$$

Für diskrete Fouriertransformationen gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-ipx_j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = Nm \text{ mit } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit folgt

$$\hat{w}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n. \quad (2.13)$$

Bildet man analog zur obigen Herleitung das Produkt $W(x) = u(x)v(x)$ mit den unendlichen Fourierreihenentwicklungen für $u(x)$ und $v(x)$, so erhält man das Ergebnis:

$$\hat{W}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n$$

Dieser Vergleich ermöglicht eine Interpretation des Ausdrucks (2.13):

$$\hat{w}_k = \underbrace{\hat{W}_k}_{\text{korrektes Ergebnis}} + \underbrace{\sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n}_{\text{Aliasing-Fehler}}$$

Nur beschränkt durch die Viskosität sorgt die Nichtlinearität in der Wirbeltransportgleichung für die Ausbildung immer feinerer Strukturen im Wirbelfeld. Diese kleinskaligen Wirbelstrukturen werden im Fourierraum durch höhere k -Moden repräsentiert. Die diskrete Fouriertransformation stellt nur endlich viele Wellenzahlen zur Verfügung, so dass sich eine Auflösungsgrenze für höhere k -Moden ergibt. Für kleinere Strukturen mit entsprechender Wellenzahl oberhalb der Auflösungsgrenze bedeutet dies aber nicht, dass sie keinen Beitrag zum Fourierspektrum liefern. Durch die Uneindeutigkeit in der diskreten Orthogonalitätsrelation werden sie auf kleinere, darstellbare Moden zurückgefaltet. Ihr Beitrag wird in den Grenzen der Diskretisierung fehlinterpretiert (daher auch Bezeichnung *Aliasing*) und einem Fourierkoeffizienten im darstellbaren Spektrum hinzugefügt. Genau dieser Beitrag ist der Aliasing-Fehler.

Hier muss also eine Möglichkeit gefunden werden, dass für die in der weiteren

Berechnung relevanten Koeffizienten \hat{w}_k der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet. Nach (2.10) sind diese relevanten Koeffizienten die

$$\hat{w}_k \quad \text{mit} \quad -\frac{N}{2} \leq k \leq \frac{N}{2} - 1.$$

Soll der Aliasing-Fehler für diese k verhindert werden, ergibt sich folgende Bedingung für die durch den Aliasing-Term definierte Wellenzahl $k' = m + n \mp N$:

$$\frac{N}{2} \leq |k'| \quad (2.14)$$

Diese Bedingung lässt sich erfüllen, wenn die Felder \hat{u}_m und \hat{v}_n in einem bestimmten Bereich der Wellenzahlen auf Null gesetzt werden. Unter der Annahme

$$\tilde{u}_m = \begin{cases} \hat{u}_m & \text{für } |m| \leq \frac{M}{2} \text{ mit } M < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} \hat{v}_n & \text{für } |n| \leq \frac{M}{2} \text{ mit } M < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

schreibt sich die Bedingung (2.14) für die maximalen m - und n -Werte:

$$\frac{M}{2} \leq |m_{max} + n_{max} \mp N| = |M \mp N|$$

Problematisch ist hier nur der Fall

$$\frac{M}{2} \leq |M - N| \quad \text{bzw.} \quad M - N \leq -\frac{M}{2}$$

der somit M festlegt:

$$M \leq \frac{2}{3}N$$

Überträgt man dieses Ergebnis auf den vorliegenden Fall in zwei Dimensionen, so verhindert man dort den Aliasing-Effekt durch entsprechendes Nullsetzen der Beiträge in den Feldern ω_k und Ψ_k vor der Transformation in den Ortsraum:

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \hat{\omega}_{\mathbf{k}} & \text{für } |\mathbf{k}| \leq \frac{M}{2} \leq \frac{N}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.15)$$

und

$$\tilde{\Psi}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \hat{\Psi}_{\mathbf{k}} & \text{für } |\mathbf{k}| \leq \frac{N}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.2 Ein Testlauf für die Numerik: Die Zwei-Wirbel Simulation

Vernachlässigt man in der Navier-Stokes-Gleichung (1.10) die Reibungsterme, so erhält man die Euler-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \Delta p \quad (2.16)$$

Diese Gleichung besitzt unter anderem zwei Lösungen, die in leicht modifizierter Form einen zuverlässigen Test für die korrekte Funktion des numerischen Verfahrens darstellen.

Wählt man als Anfangsbedingung ein Wirbelfeld mit nur zwei δ -förmigen Wirbeln in der Form

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \Gamma_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \Gamma_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$$

mit der Zirkulation Γ_i im Gebiet Ω_i :

$$\Gamma_i = \int_{\Omega_i} \omega(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \int_{\Omega_i} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \oint r u_\phi d\phi,$$

so erfahren diese entsprechend der Euler-Gleichung eine einfache Dynamik, die man auch als Ergebnis der numerischen Integration erwartet.

Je nach Orientierung der beiden Wirbel lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

Parallele Anordnung: $\Gamma_1 = \Gamma_2$

Der Anschauung ist eine Beschreibung der Wirbeldynamik in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten $(\mathbf{R}_s, \mathbf{r})$ zuträglich. Entsprechend formuliert lautet die Lösung der Euler-Gleichung für den Fall der parallelen Wirbel:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_s &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^2} \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt ist nicht an der Dynamik beteiligt; es findet ausschließlich eine Relativbewegung statt. Die Wirbel erfahren hier eine Beschleunigung in e_φ -Richtung und führen daher eine Rotationsbewegung um den Schwerpunkt aus.

Antiparallele Anordnung: $\Gamma_1 = -\Gamma_2$

Im Fall der antiparallelen Wirbel ergibt sich folgende Lösung der Euler-Gleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_s &= \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}}{r^2} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bei dieser Anordnung verhält sich die Relativkoordinate zeitlich konstant; der Abstand der Wirbel bleibt also unverändert. Hier ist die Dynamik eine reine Schwerpunktsdynamik in der Richtung senkrecht zu \mathbf{r} . Die Wirbel werden im Laufe der Zeit parallel verschoben.

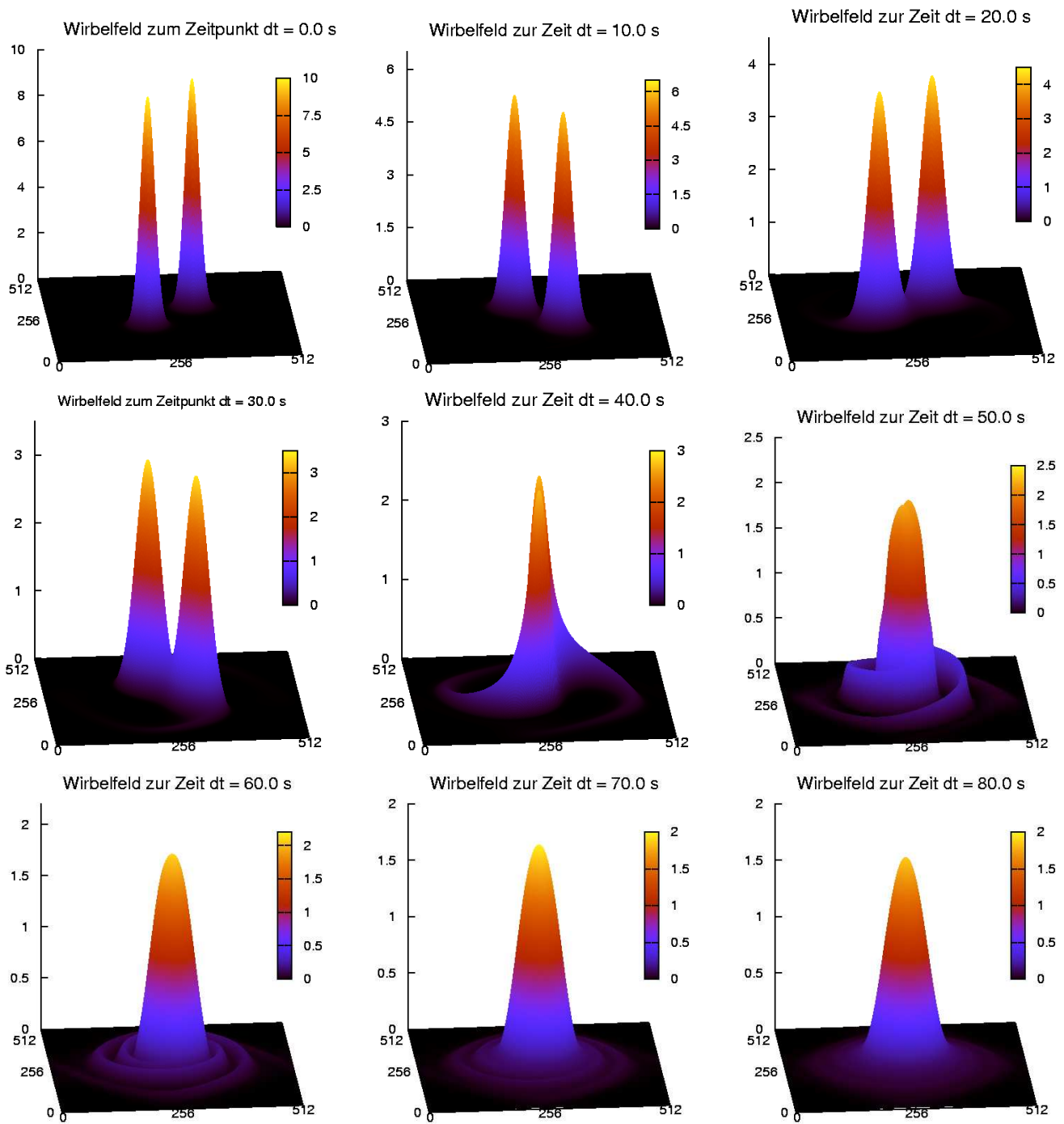


Abbildung 2.1: Parallele 2-Wirbel-Simulation

Der Testlauf

Für den Test der Numerik werden in der Wirbeltransportgleichung (2.3) die zusätzliche Reibung und der Antrieb abgeschaltet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega(\mathbf{x}, t) + \nu\Delta\omega(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

Der Viskositätsterm kann nicht vernachlässigt werden, da andernfalls die Numerik instabil wird. Anstelle der δ -Peaks werden hier relativ schmale gaußförmige Wirbel als Anfangsbedingung gewählt.

$$\omega(\mathbf{x}_{ij}) = H_1 \cdot e^{-\left\{\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y-y_1}{\sigma}\right)^2\right\}} + H_2 \cdot e^{-\left\{\left(\frac{x-x_2}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y-y_2}{\sigma}\right)^2\right\}}$$

mit

$$x = \frac{2\pi}{N}i \quad \text{und} \quad y = \frac{2\pi}{N}j \quad \text{für} \quad i, j = 0, \dots, N-1$$

Trotz dieser Modifikationen erwartet man eine prinzipiell ähnliche Dynamik wie die oben Beschriebene.

Allerdings bewirkt der Viskositätsterm eine Verkleinerung der Wirbel und ihre größere Ausdehnung bedingt langfristig ein Verschmelzen.

Die Abbildungen 2.1 zeigen das Ergebnis der Simulation für die parallele Wirbelanordnung. Bei der Simulation wurde mit folgenden Parametereinstellungen gerechnet:

$$\begin{aligned} N &= 512 \\ L &= 2\pi \\ dt &= 0.002 \\ \nu &= 0.001 \\ H_1 = H_2 &= 10 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{2\pi}{100}} \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei noch kurz eine Bemerkung bezüglich der Bezeichnung dimensionsbehafteter Größen in der weiteren Auswertung gemacht: In einer numerischen Simulation spielen die physikalische Einheiten natürlich keine Rolle. Wenn im Folgenden Dimensionsangaben gemacht werden, so sind diese stets als frei skalierbar aufzufassen und dienen nur der physikalischen Anschauung.

Wie von der Theorie gefordert, findet eine Rotation der Wirbel um ihren gemeinsamen Schwerpunkt statt. Die exakte Dynamik der beiden Wirbelmaxima entspricht einer Spiralbewegung auf den Schwerpunkt zu. Nach einer Beobachtungszeit von 80 s haben sich die Wirbel nach etlichen Umdrehungen schließlich vollständig vereinigt.

Die Numerik besteht somit den ersten 2-Wirbel-Test im Rahmen der Erwartungen.

Das Auftreten von Instabilitäten

Bei den Berechnungen zum zweiten Testfall, der antiparallelen Wirbelanordnung, ist es in der Entwicklungsphase des Integrationsverfahrens wiederholt zu Schwierigkeiten mit der Stabilität der Numerik gekommen.

In den Abbildungen 2.2 und 2.4 ist die typische Erscheinungsform der auftretenden Instabilitäten zu erkennen. Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits erwähnt, stellte die Weiterentwicklung des Programm-Codes mit dem Ziel der Verhinderung dieser Instabilitäten die besondere Herausforderung dieser Arbeit dar. Hier werden anhand der 2-Wirbel-Simulationen in antiparalleler Anordnung kurz die Veränderungen des Stabilitätsverhaltens in der schrittweise Entwicklung des numerischen Verfahrens beschrieben.

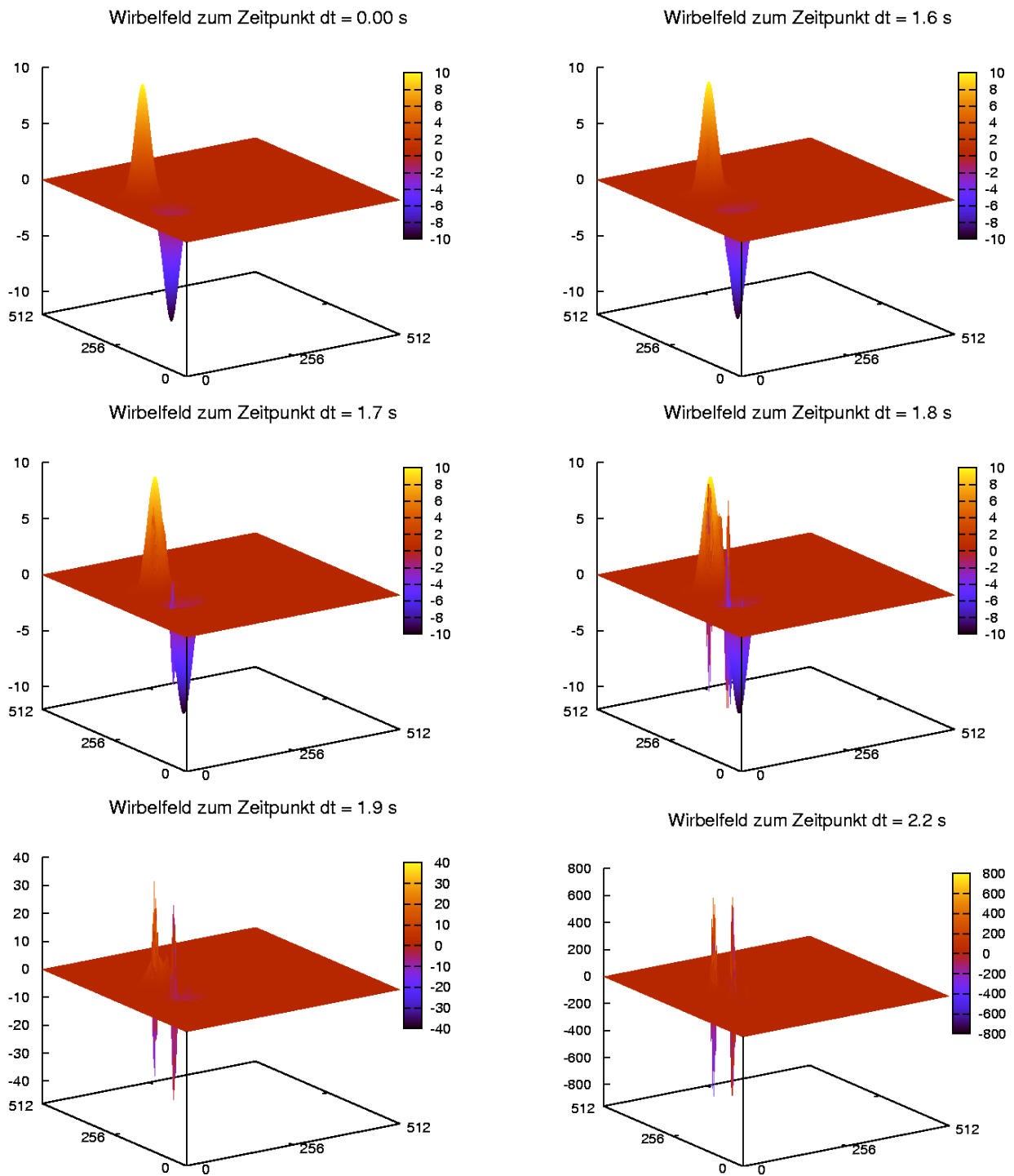


Abbildung 2.2: 1. Antiparallele 2-Wirbel-Simulation Programmversion mit einfachem Euler-Verfahren

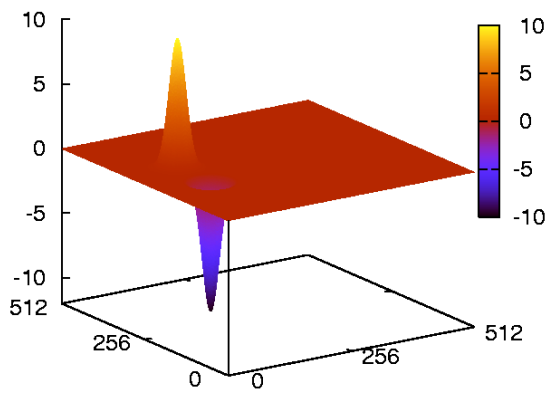
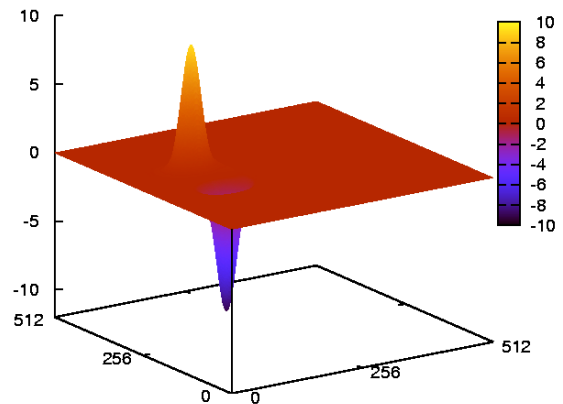
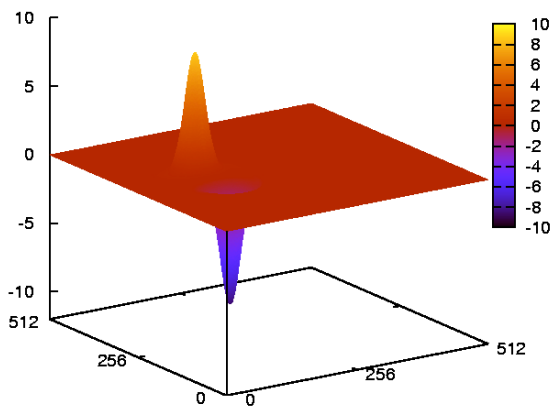
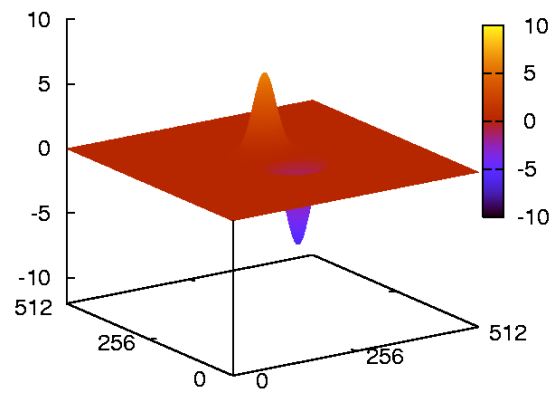
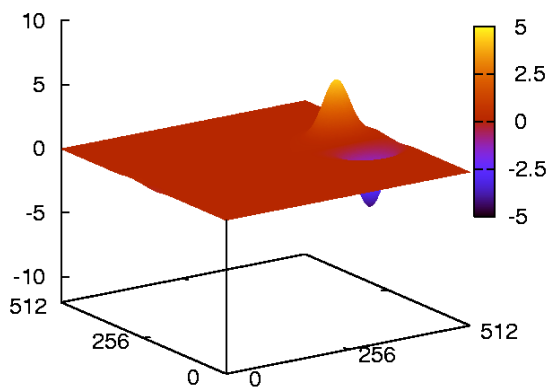
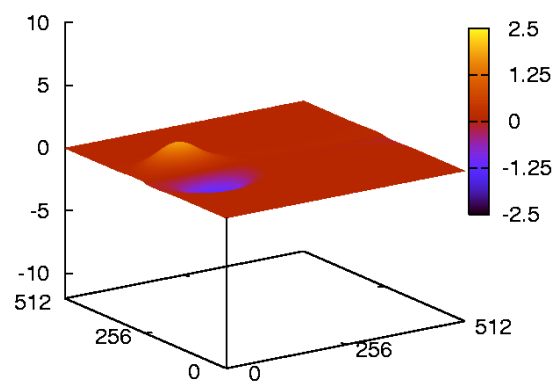
Wirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 0.0$ sWirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 1.5$ sWirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 2.5$ sWirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 10.0$ sWirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 20.0$ sWirbelfeld zum Zeitpunkt $dt = 70.0$ s

Abbildung 2.3: 2. Antiparallele 2-Wirbel-Simulation Programmversion mit Adams-Bashforth-Verfahren

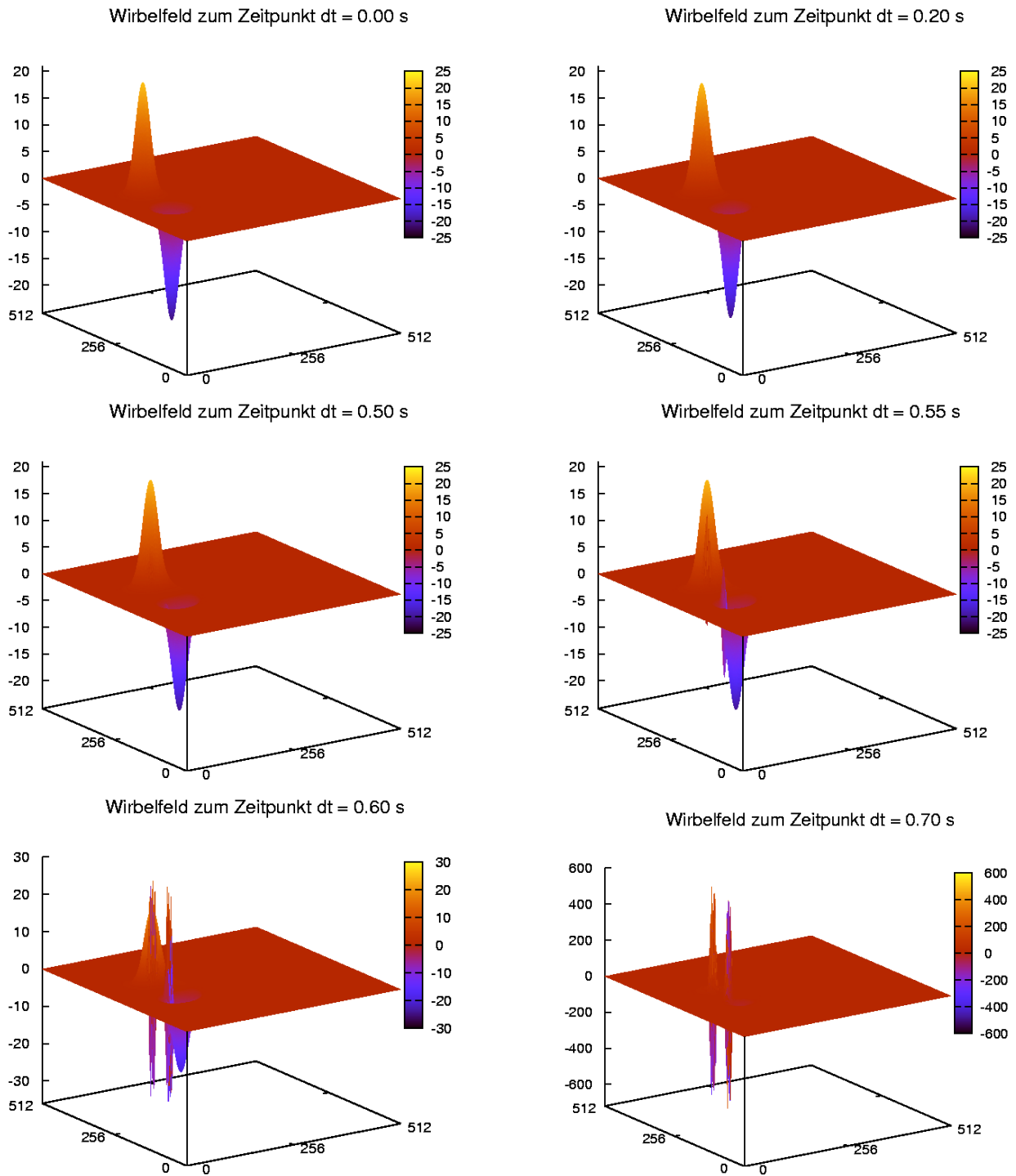


Abbildung 2.4: 3. Antiparallele 2-Wirbel-Simulation Programmversion mit Adams-Bashforth-Verfahren hier bei höherer Amplitude H_1

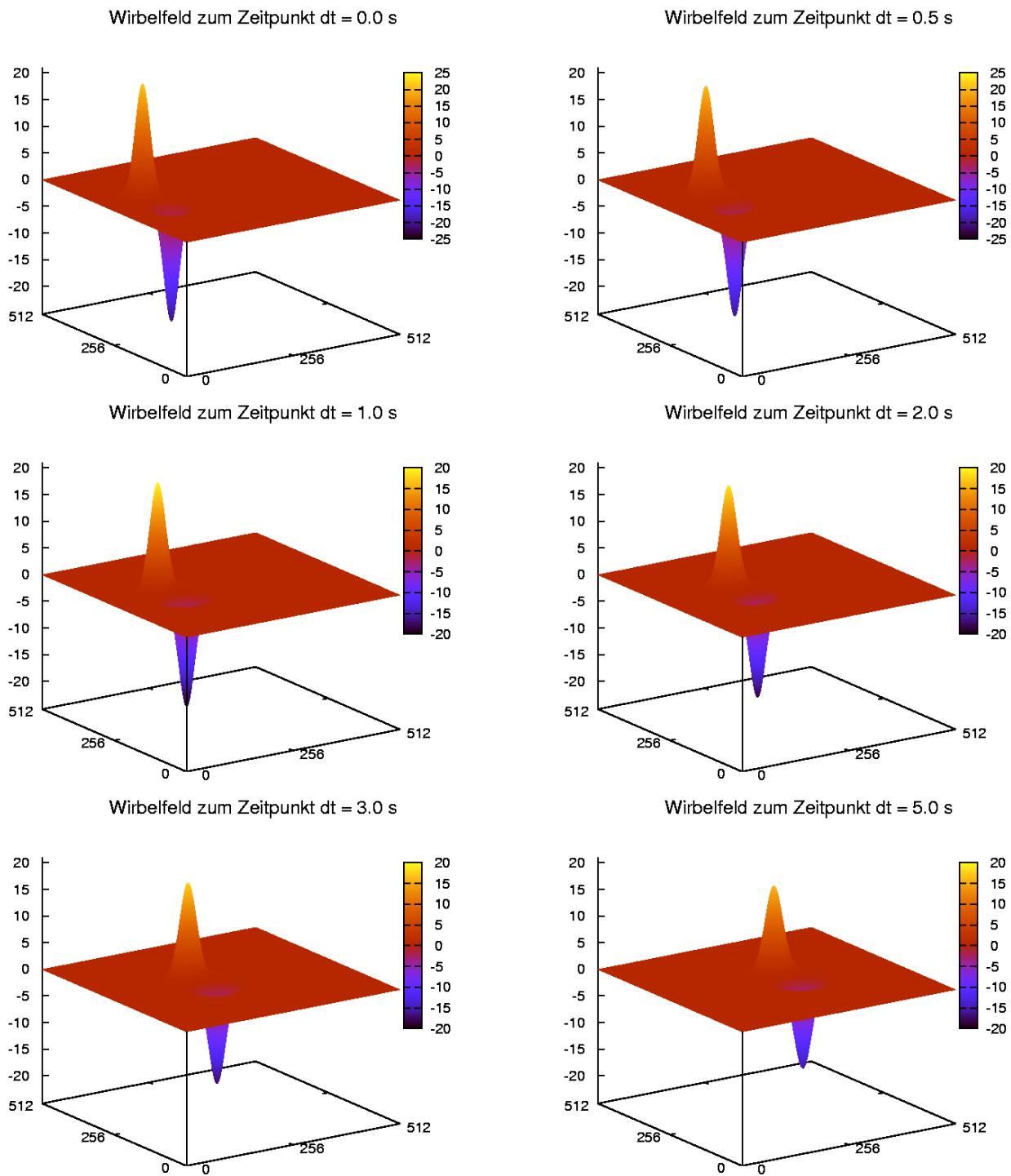


Abbildung 2.5: 4. Antiparallele 2-Wirbel-Simulation Programmversion mit zusätzlichem Anti-Aliasing

In der Ursprungsversion der Numerik wurde die Diskretisierung der Wirbeltransportgleichung (2.3) als explizites Euler-Verfahren erster Ordnung realisiert:

$$\frac{\omega(t + \delta t) - \omega(t)}{\delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega(t) = \nu \Delta \omega(t + \delta t) - \gamma \omega(t + \delta t) + F$$

Die Zeitableitung wurde dabei durch den Differenzenquotienten approximiert und die Reibungsterme waren zur Stabilisierung dem Zeitschritt $t + \delta t$ zugeschrieben. Für die Berechnung der Nichtlinearität wurde ebenso wie in der aktuellen Version ein Pseudospektralverfahren angewandt.

Die Abbildungen 2.2 zeigen die Simulation der antiparallelen Wirbel, die mit diesem numerischen Verfahren berechnet wurde. Die Parametereinstellungen waren dabei:

$$\begin{aligned} N &= 512 \\ L &= 2\pi \\ dt &= 0.002 \\ \nu &= 0.001 \\ H_1 = -H_2 &= 10 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{2\pi}{100}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ab einer Berechnungszeit von 1,9s erkennt man deutlich die Ausprägung spitzer Fehl-Strukturen, die schnell an Höhe zunehmen und den Rahmen der Darstellbarkeit überschreiten.

Solche Instabilitäten lassen sich nur vermeiden, wenn die Höhe der Wirbel (also die Wirbelstärke ω im Wirbelmaximum) drastisch reduziert wird.

Die Wirbelstärke ω ist allerdings über die Geschwindigkeit ($\omega = \nabla \times \mathbf{u}$) mit der Reynoldszahl Re verknüpft. Numerisch lässt sich diese als

$$Re = \frac{\langle |\mathbf{u}| \rangle \cdot L}{\nu}$$

ermitteln, wobei die Kantenlänge des Feldes $L = 2\pi$ mit eingeht.

In den eigentlichen Turbulenzsimulationen ist eine möglichst hohe Reynoldszahl wünschenswert. Die Numerik sollte daher auch bei großer Wirbelstärke stabil bleiben.

Somit bedeutet das Auftreten der Instabilitäten in diesem Testlauf die Notwendigkeit einer Veränderung des numerischen Verfahrens.

Als erste Änderung wurde die Zeitintegration nach Adams-Bashforth (2.9) eingeführt.

Die Simulation, deren Ergebnisse in Abb 2.3 zu sehen sind, wurde mit demselben Parametersatz(2.18) durchgeführt. Auch nach einer Zeit von 70s bleibt die Berechnung stabil. Diese Änderung trägt maßgeblich zur Stabilisierung der Numerik bei. Man kann die Wirbelstärke im Wirbelmaximum, also die Höhe der Gauß-Peaks, auf $H_1 = -H_2 = 20$ steigern. Dann überwiegen allerdings wiederum (s. Abb 2.4) die Instabilitäten.

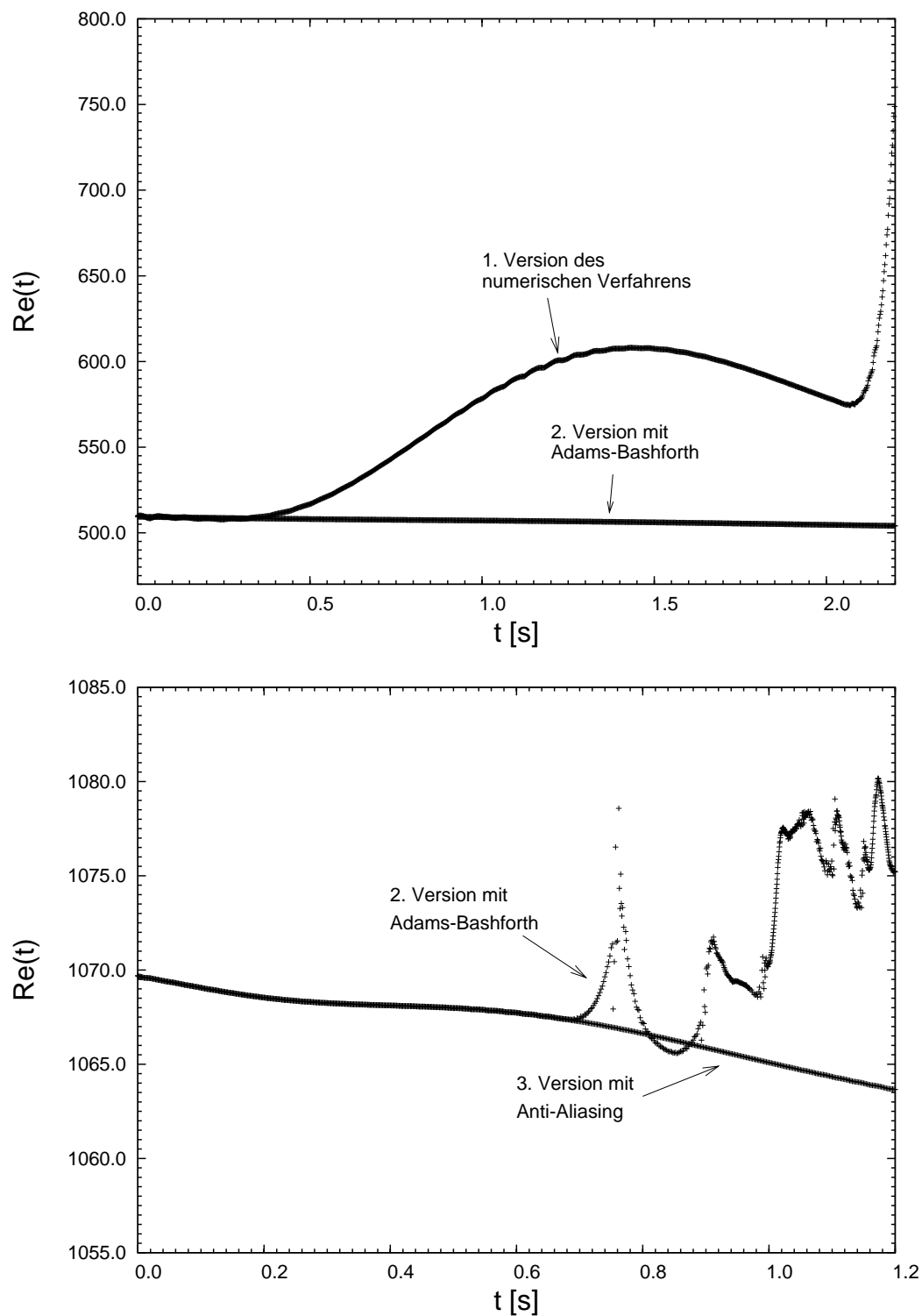


Abbildung 2.6: Vergleich der Zeitentwicklung der Reynoldszahlen *oben*: 1. mit 2. *unten*: 3. mit 4. 2-Wirbel-Simulation

Hier zeigt sich nun (vgl. Abbildungen 2.5) der Einfluss des Anti-Aliasing. Die Verhinderung des Aliasing-Effektes durch das Abschneiden der Beiträge hoher \mathbf{k} -Moden (2.15) führt wiederum zu einer Verbesserung des Stabilitätsverhaltens. Allerdings ist dieser Anteil an der Verbesserung nicht so erheblich, wie der durch das Einführen des Adams-Bashforth-Verfahrens. Bei einer weiteren Steigerung der Wirbelstärke bzw. der Peakhöhe auf $H_1 = -H_2 = 23$ treten auch bei dieser Variante die Instabilitäten auf. Die endgültige Version der Numerik zeichnet sich aber dadurch aus, dass erheblich höhere Reynoldszahlen zu erzielen sind.

Die Abbildungen 2.3 und 2.5 zeigen, dass die Numerik auch den zweiten Zwei-Wirbel-Test besteht. Die beiden antiparallel angeordneten Wirbel werden, wie erwartet, parallel über das Feld geschoben und verlieren durch die viskose Dämpfung immer mehr an Höhe.

Ein wichtiges Mittel zur Beurteilung der Stabilität einer Simulation ist durch die Reynoldszahl gegeben. Die Abbildungen 2.6 zeigen die zeitliche Entwicklung der Reynoldszahl für die vier Versionen der antiparallelen 2-Wirbel-Berechnungen. Da in der Wirbeldynamik nach Gleichung (2.17) durch den Viskositätsterm die Wirbelstärke an jedem Feldpunkt nur kleiner werden kann, ist für die Reynoldszahl als Funktion der Zeit nur ein monoton fallender Verlauf denkbar.

Die beiden Kurven der Reynoldszahl für die instabilen Simulationen (obere Kurven in 2.6) zeigen dagegen einen deutlichen Anstieg.

$Re(t)$ ist daher ein effektiver Indikator für das Stabilitätsverhalten der Numerik.

2.3 Die Parametereinstellung

Nach dem erfolgreichen Test der Numerik in den 2-Wirbel-Simulationen kann die eigentliche Turbulenzsimulation in Angriff genommen werden. Wie im letzten Abschnitt erläutert, ist es auch dabei sinnvoll, parallel zur Simulation vom Programm stets die Reynoldszahl als Funktion der Zeit ausgeben zu lassen. Der Verlauf von $Re(t)$ erweist sich auch im Zusammenhang mit der Parametersuche für die Einstellung des turbulenten Zustandes als nützliches Hilfsmittel.

Um in der Simulation den Zustand voll entwickelter Turbulenz zu erreichen, müssen die Parameter in den Reibungstermen und dem Antriebskraftterm richtig ausbalanciert werden. Zudem sollte, wie im vorherigen Abschnitt bereits erwähnt, eine möglichst hohe Reynoldszahl erzielt werden.

Für den Maximalwert der Reynoldszahl bei einer gegebenen Felddiskretisierung N lassen sich aus der Theorie quantitative Aussagen gewinnen. Zur Erinnerung: Die Kolmogorovschen Definition (1.22)

$$\eta = Re^{-\frac{3}{4}} l \quad (2.19)$$

verknüpft die Größenordnung der kleinsten Längenskala im System η mit der Reynoldszahl und der maximalen Längenskala l . In der numerischen Simulation sind durch die Festlegung der Kantenlänge des Feldes L und die Wahl einer definierten Felddiskretisierung N die maximalen und minimalen Längenskalen vorgegeben.

In allen Simulationen wird $L = 2\pi$ angenommen und entspricht somit der maximalen Längenskala

$$l \hat{=} 2\pi.$$

Der Gitterabstand der Diskretisierung $dx = \frac{2\pi}{N}$ definiert die Größenordnung der Kolmogorov-Längenskala,

$$\eta \hat{=} \frac{2\pi}{N};$$

da so sichergestellt ist, dass auch die kleinsten Wirbelstrukturen aufgelöst werden können.

So lässt sich aus (2.19) für jede Diskretisierung N ein Maximalwert der Reynoldszahl ableiten. Für die typischen Feldgrößen, die üblicherweise Verwendung finden, ergibt sich:

$N = \frac{l}{\eta}$	Re_{max}
256	≈ 1625
512	≈ 4096
1024	≈ 10321

Für eine effiziente Simulation sollte also ein solcher Parametersatz verwendet werden, dass die Reynoldszahl in den Bereich der maximal Möglichen kommt. Entsprechend der Modellannahmen für die inverse Energiekaskade (vgl. Abschnitt 1.4.4) soll sich im Wirbelfeld nach einer transienten Phase der Zustand voll entwickelter Turbulenz einstellen, der sich durch einen stationären Energiefluss aus den Antriebsmoden in die kleineren Moden auszeichnet. Dies erfordert

eine feine Abstimmung der Antriebs- und Reibungsbeiträge durch die Antriebsparameter r, R, σ sowie die Reibungsparameter ν und γ .

Ein gutes Erkennungszeichen für die treffende Wahl der Parameterkonstellation liefert wiederum $Re(t)$.

Nach der transienten Phase, die mit einer starken Steigung im Kurvenverlauf $Re(t)$ korreliert ist, zeigt sich das Erreichen der turbulenten Zustandes nämlich durch den Übergang der Kurve in die Sättigung. Hat sich die voll entwickelte Turbulenz schließlich etabliert, so bleibt die Reynoldszahl für den weiteren Verlauf der Simulation bis auf einige Schwankungen, bedingt durch die Fluktuationen im Antriebsterm, konstant.

Abbildung 2.7 zeigt den Verlauf der Reynoldszahl für die Turbulenzsimulation, aus der die Daten für die weitere Auswertung gewonnen wurden. In der Berechnung wurde mit diesen Parametereinstellungen gearbeitet:

$$\begin{aligned} N &= 512 \\ L &= 2\pi \\ dt &= 0.002 \end{aligned}$$

Parameter im Kraftansatz

$$\begin{aligned} k &= 100 \\ r &= 0.9 \\ R &= 100000 \\ \sigma &= \sqrt{2000} \\ k_A &= 100 \end{aligned}$$

Reibungsparameter

$$\begin{aligned} \nu &= 0.0001 \\ \gamma &= 0.005 \end{aligned}$$

Wie der Graph der Reynoldszahl zeigt, ist die Beschränkung auf $Re \leq 4096$ erfüllt; die Kurve saturiert wie gewünscht, und anhand der weiteren Auswertung kann begründet werden, dass nach einer transienten Phase von $\Delta T \sim 50s$ der Zustand voll entwickelter Turbulenz erreicht wird. Man verfügt nun über ein stabiles numerisches Verfahren mit dem die Simulation der zweidimensionalen Turbulenz auch für hohe Reynoldszahlen realisiert werden kann.

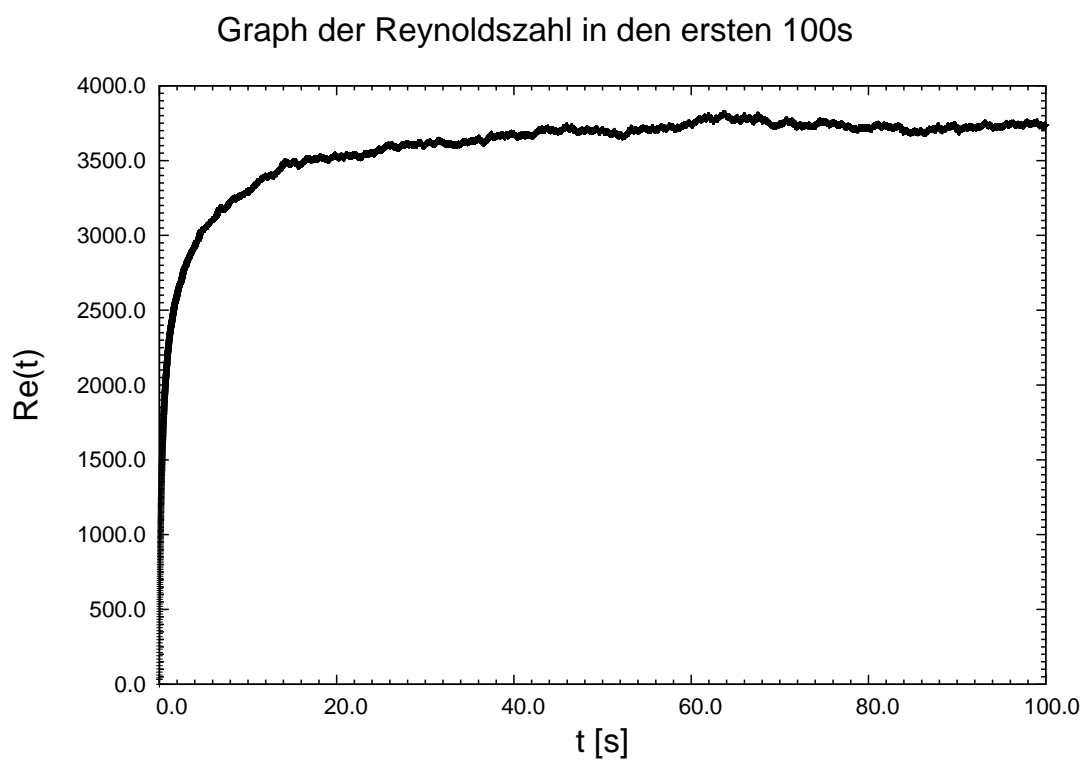


Abbildung 2.7: Zeitentwicklung der Reynoldszahl in der Turbulenzsimulation

3 Die inverse Energiekaskade

In diesem Kapitel werden die ersten Ergebnisse der numerischen Simulation der zweidimensionalen Turbulenz vorgestellt. Nach den ausführlichen Tests der numerischen Stabilität des Programms im letzten Kapitel steht nun der physikalische Gehalt der aus der Simulation gewonnenen Turbulenzfelder auf dem Prüfstand. Dazu werden im weiteren Untersuchungen des Energiespektrums durchgeführt mit dem Ziel, die folgenden Fragen zu beantworten:

- Zeigt sich die von Kraichnan vorhergesagte inverse Energiekaskade?
- Gibt es im Energiespektrum einen Inertialbereich?
- Zeigt dieser das Kolmogorov'sche Skalierungsverhalten?

Man ermittelt das Energiespektrum $E(k)$, also die Verteilung der Energie in den verschiedenen Längenskalen aus dem fouriertransformierten Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u}_k . Die Gesamtenergie im Bereich der Moden $k - \kappa/2 \leq |\mathbf{k}| \leq k + \kappa/2$ erhält man, indem alle Beiträge der kinetischen Energie \mathbf{u}_k^2 in dem so definierten Ring im k-Raum aufsummiert werden. (siehe dazu auch Frisch Kapitel 2.4 [15])

$$E(k) = \sum_k \mathbf{u}_k^2$$

Die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen die auf diese Weise ermittelten Energiespektren zu den verschiedenen Zeitpunkten nach Beginn der Simulation. Im ersten Diagramm in Abb. 3.1 ist das transiente Energiespektrum zum Zeitpunkt $t=0.01s$ nach nur 5 Iterationsschritten abgebildet. Die Verteilung der Energie spiegelt die Charakteristik des Antriebs. Man erkennt die logarithmisch verzerrte Gaußverteilung mit der Maximalamplitude bei der Antriebswellenzahl $k_A = 100 \frac{1}{m}$. In der Folge der nächsten drei Abbildungen wächst die Energie zunächst in allen Moden etwa gleichmäßig an. Die Auftragung der Daten erfolgt doppellogarithmisch, da so der Skalierungsbereich linear erscheint und deshalb deutlicher zu erkennen ist. Ab einer Berechnungszeit von etwa 1s stagniert das Wachstum in der Antriebsmode, während nun (vgl. Abb. 3.2) sukzessive ein Energiezuwachs in den benachbarten kleineren Moden festzustellen ist. Im Überblick der Abbildungen 3.1 bis 3.2 kann die erste Frage damit bereits beantwortet werden:

Diese Simulation der zweidimensionalen Turbulenz bestätigt die Existenz der inversen Energiekaskade. Bei hohen Moden in das System eingebracht, fließt die Energie beständig in die kleineren Moden. Diese Übereinstimmung mit der Theorie stellt bereits eine erste physikalische Rechtfertigung des numerischen

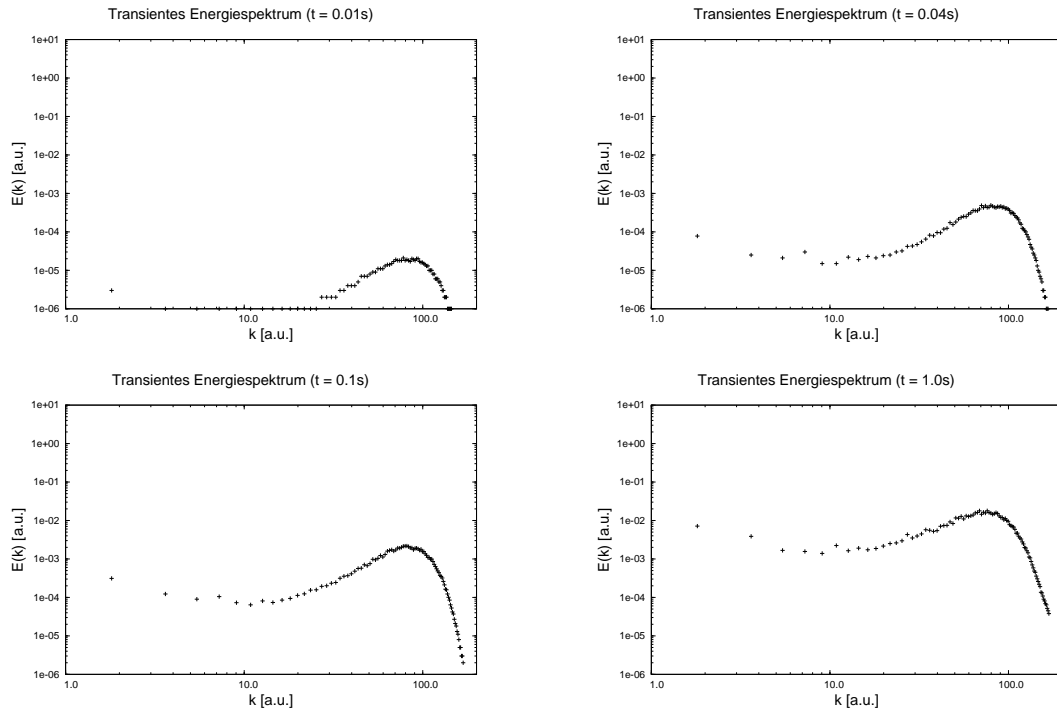


Abbildung 3.1: Entwicklung des Energiespektrums für $t = 0.01s$ bis $t = 1.00s$

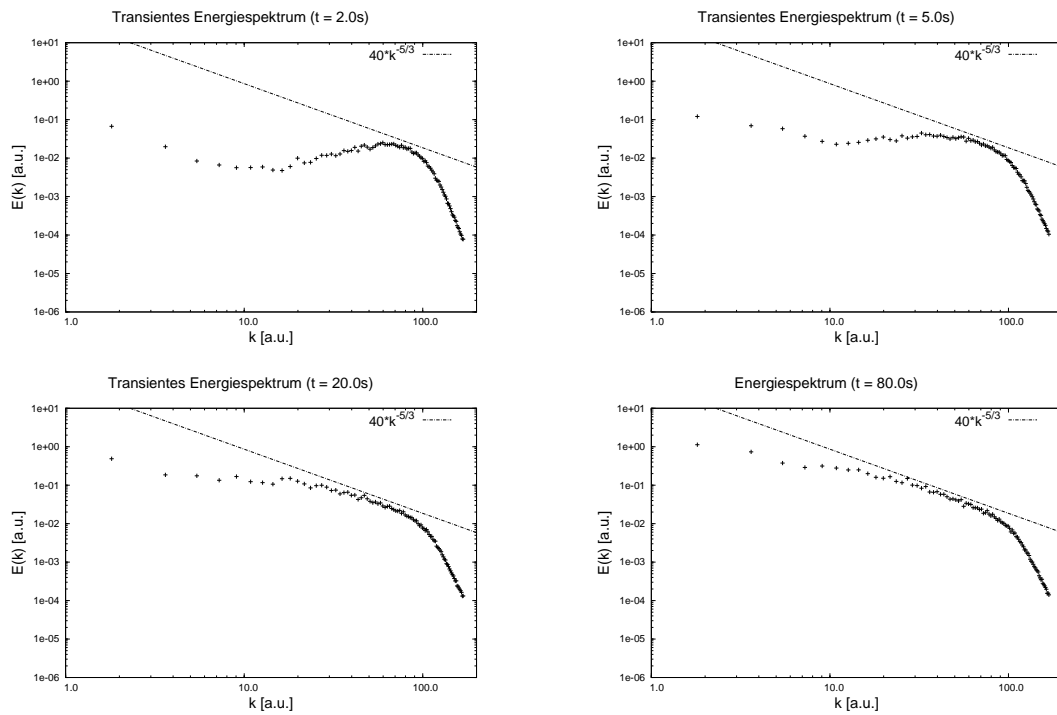


Abbildung 3.2: Entwicklung des Energiespektrums für $t = 2.00s$ bis $t = 80.00s$

Verfahrens dar. Verfolgt man nun in der Abb. 3.1 die weitere zeitliche Entwicklung der Energiespektren, so finden sich auch die beiden anderen Fragen positiv bestätigt. In diesen Abbildungen ist zusätzlich zum Verlauf des Energiespektrums $E(k)$ auch eine Kurve mit dem erwarteten Inertialbereich aufgetragen. Nach 5s zeigt sich im Ansatz, was nach 20s und schließlich nach 80s eindeutig zu erkennen ist: Es existiert ein Inertialbereich, der mit $r^{-5/3}$ skaliert. Die theoretischen Vorhersagen für das Energiespektrum haben sich somit erfüllt. Interessant ist an dieser Stelle der Vergleich mit experimentell gewonnenen Ergebnissen. Paret und Tabeling [14] konnten in einem Experiment zur 2D-Turbulenz die in der Abb. 3.3 gezeigte Entwicklung der Energiespektren mit der Zeit feststellen. Die auffallende Ähnlichkeit mit den Ergebnissen der numerischen Simulation kann noch einmal als Garant der physikalischen Relevanz solcher numerischen Berechnungen gewertet werden.

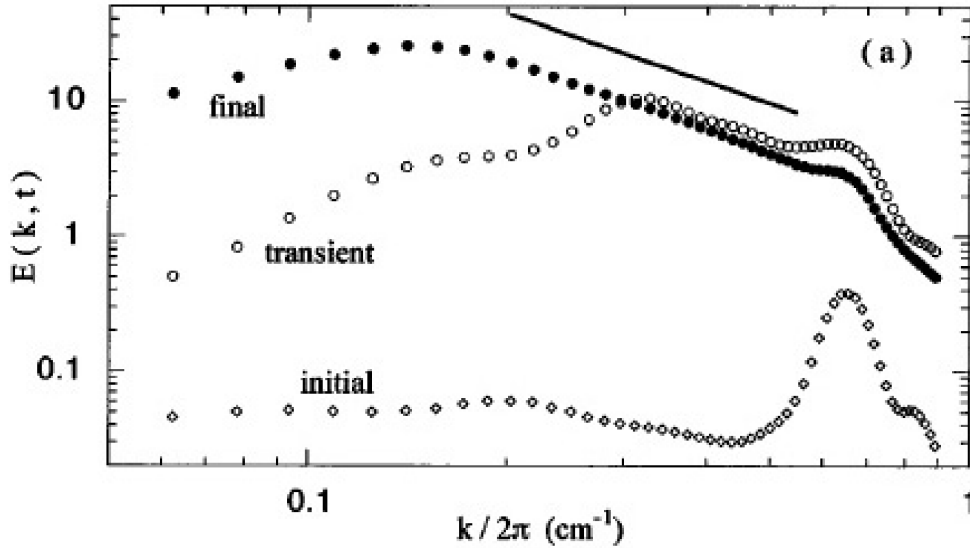


Abbildung 3.3: Experimentelle Ergebnisse von Paret und Tabeling (Abbildung aus [14])

Nach etwa 50s Berechnungszeit befindet sich das System im statistisch stationären Zustand. Die Turbulenz ist voll entwickelt, und der Energiezufluss und die Energiedissipation sind im Mittel zeitlich konstant. In dieser Situation ist es sinnvoll, statt der momentanen Energiespektren, die zum Teil starken Fluktuationen ausgesetzt sind, kumulative Energiespektren zu betrachten.

Abb. 3.4 zeigt das kumulative Energiespektrum ermittelt über eine Mittelungszeit von $\Delta t = 50s$. Hier ist der Inertialbereich sehr klar zu erkennen. Er nimmt

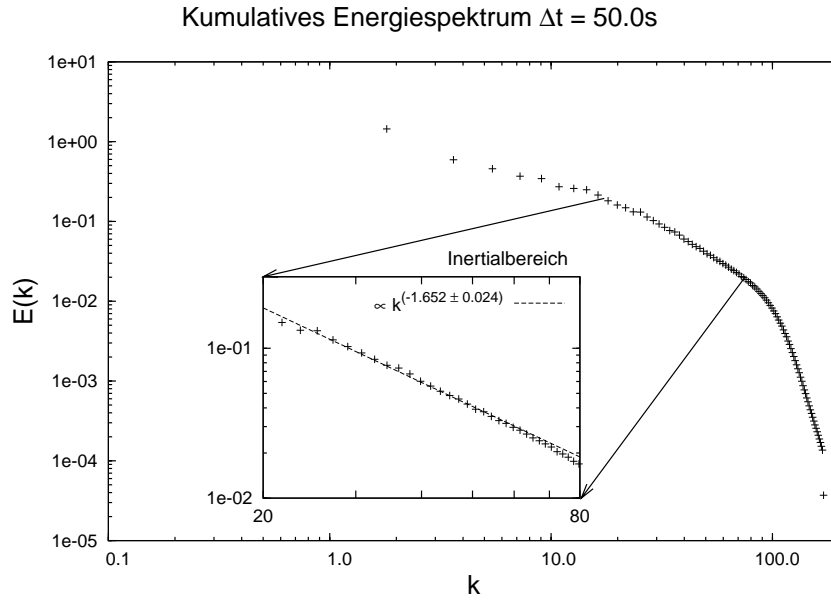


Abbildung 3.4: Lineare Regression des Inertialbereiches

ungefähr den Bereich der Wellenzahlen zwischen $k = 20 \frac{1}{m}$ und $k = 80 \frac{1}{m}$ ein. Die Detailabbildung zeigt eine Ansicht des Inertialbereiches, in der zusätzlich die Lineare Regression der Datenpunkte aufgetragen wurde. So ermittelt kann die Bestätigung der Theorie auch quantitativ gefasst werden: das erwartete Skalierungsverhalten mit den Skalenexponenten $-5/3$ ist gegeben.

4 Die Strukturfunktionen

In diesem Kapitel wird die Statistik der Geschwindigkeitsinkremente untersucht, um das theoretisch vorgegebene Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen zu überprüfen. Die Erkenntnis der Selbstähnlichkeit der Strukturfunktionen im Inertialbereich ist eines der wenigen exakten Ergebnisse der Turbulenztheorie. Gerade unter diesem Gesichtspunkt ist im Rahmen dieser Auswertung eine Berechnung der Strukturfunktionen auf Basis der numerischen Datensätze angezeigt.

Die K41-Theorie macht klare Vorhersagen für den Funktionsverlauf der Strukturfunktionen im Inertialbereich. Wie schon im Theorieteil dieser Arbeit ausführlich dargestellt, erwartet man im Euler-Bild ein anderes Skalierungsverhalten als im Lagrange-Bild.

Beim Euler-Bild sollte ein äußerer, raumfester Beobachter eine funktionale Abhängigkeit der Strukturfunktionen vom räumlichen Abstandsparameter r sowie der Energietransferrate ϵ mit dem typischen Skalenexponenten $\frac{n}{3}$ registrieren:

$$S^n \propto (\epsilon r)^{\frac{n}{3}}$$

Für den mitbewegten Beobachter des Lagrange-Bildes ist nicht der räumliche Abstand r zwischen zwei Positionen entscheidend, sondern die Laufzeit τ auf der Trajektorie, die diese Positionen verbindet. Die entsprechende Formulierung für die Strukturfunktionen im Lagrange-Bild ist mit

$$S^n \propto (\epsilon \tau)^{\frac{n}{2}}$$

gegeben.

Die Strukturfunktionen S^n werden numerisch aus den Datensätzen entsprechend der Definitionen

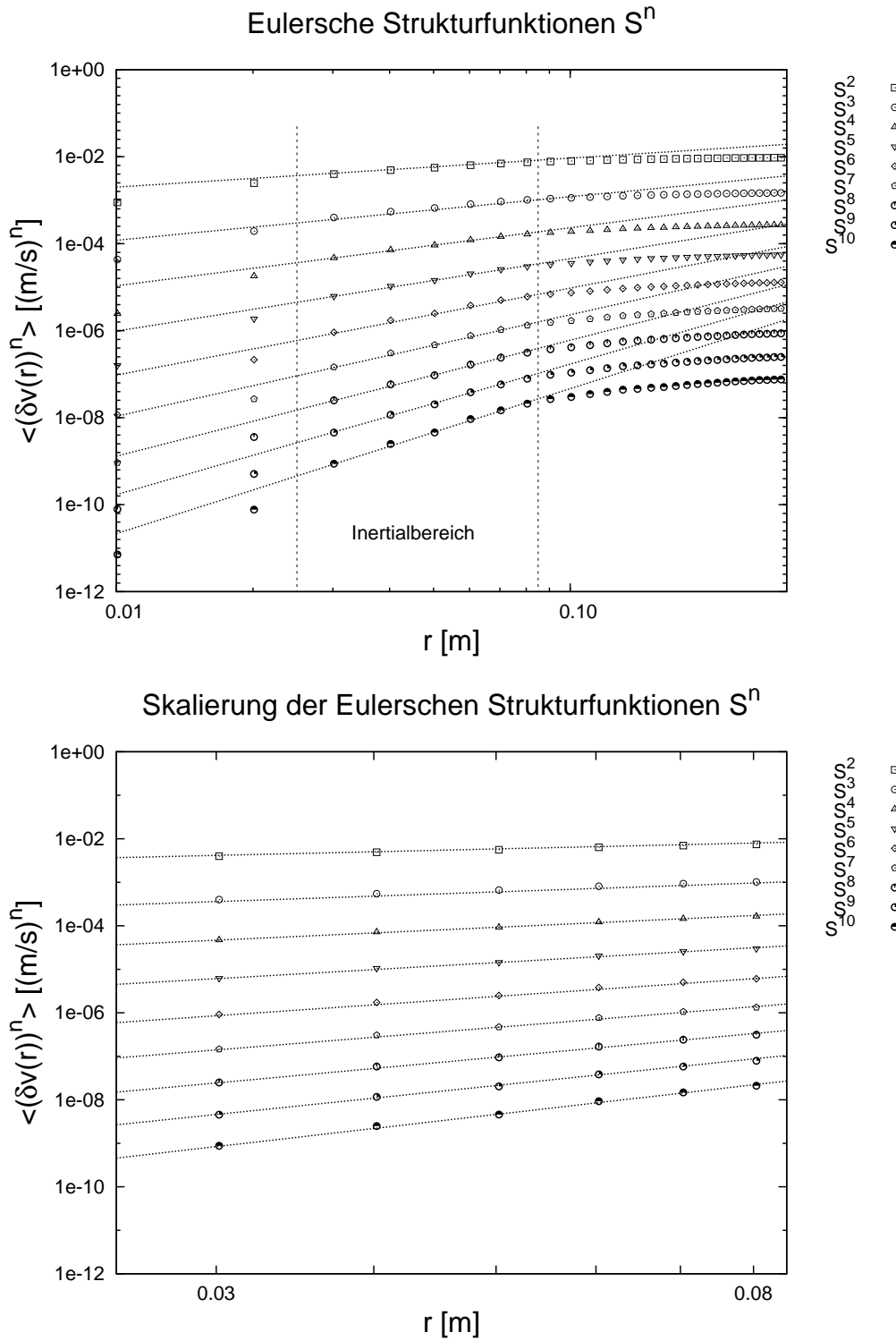
$$S^n(r) = \langle |\partial v(r)|^n \rangle$$

bzw.

$$S^n(\tau) = \langle |\partial v(\tau)|^n \rangle$$

ermittelt. Dafür werden aus den Geschwindigkeitsdaten die jeweiligen Inkremente $\partial v(r)$ bzw. $\partial v(\tau)$ berechnet. Diese werden anschließend sowohl über die Zeit als auch im Raum (im Lagrange-Fall über die Trajektorien) gemittelt. Die Turbulenzdaten zeigen die notwendige statistische Stationarität und Isotropie, die derartige Mittelungsprozesse rechtfertigen. Die zeitliche Mittelung erfolgt über einen Zeitraum von $\Delta t = 10s$. Wie die Ergebnisse zeigen, ist für den Abstandsparameter r eine Variation im Bereich $0m < r < 0.2m$ für τ eine Variation im Bereich $0s < \tau < 2s$ für die Darstellung des Inertialbereiches ausreichend.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 enthalten die Ergebnisse der numerischen Auswertung im Euler- und Lagrange-Bild. In beiden Fällen sind die Strukturfunktionen S^n für $n = 2, \dots, 10$ im Überblick aufgetragen. Bei den Graphiken handelt es sich um doppellogarithmische Darstellungen, in denen der Inertialbereich linear erscheint. Die Geraden in den Abbildungen haben die theoretisch zu erwartenden Steigungen im Inertialbereich. Diese betragen für die Eulerschen Strukturfunktionen jeweils $\frac{n}{3}$, für die Lagrangeschen Strukturfunktionen dagegen $\frac{n}{2}$. Der Bereich der Übereinstimmung der Geraden mit den Kurvenverläufen kann als Inertialbereich identifiziert werden. Die unteren Abbildungen zeigen jeweils eine Detailaufnahme des Inertialbereiches.



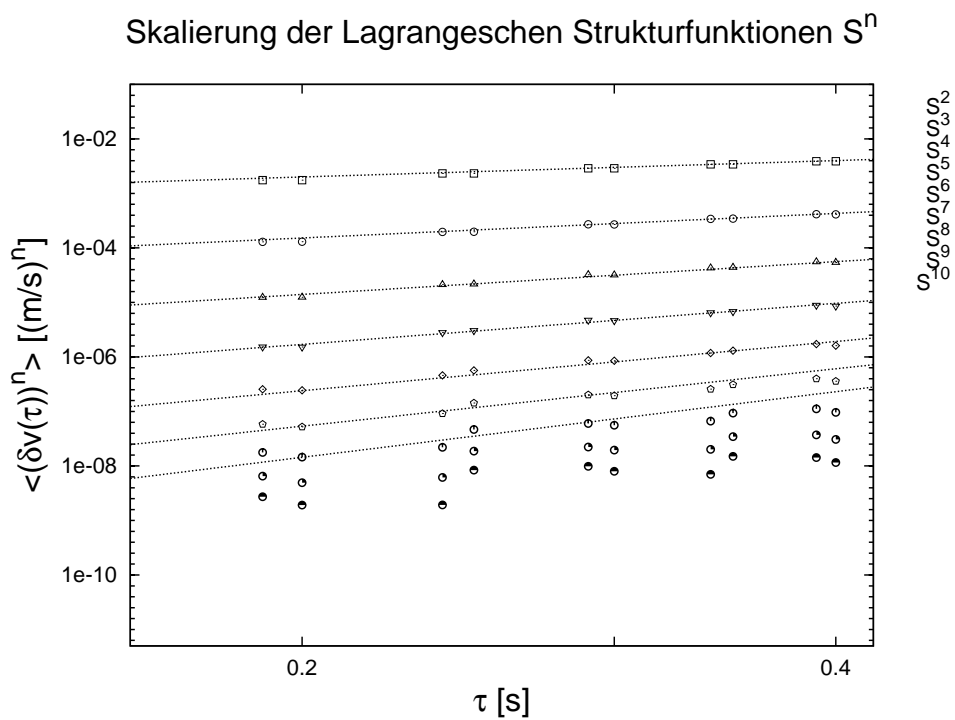
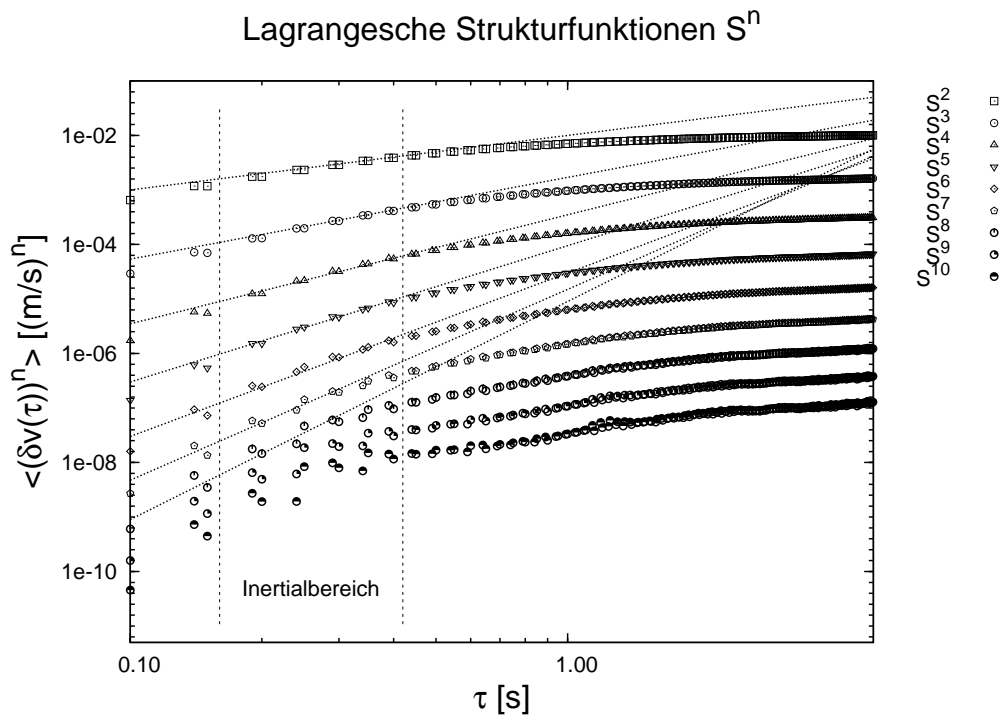


Abbildung 4.2: Skalierungsverhalten der Lagrangeschen Strukturfunktionen

Die Eulerschen Strukturfunktionen

Die beiden Diagramme in Abb 4.1 zeigen, dass das Skalierungsverhalten aller betrachteten Eulerschen Strukturfunktionen erstaunlich präzise mit den theoretischen Erwartungen übereinstimmt. Der Inertialbereich liegt hier zwischen $r = 0.025m$ und $r = 0.085m$. Dieser Abstand entspricht etwa der 6-fachen Diskretisierungslänge $dx = \frac{2\pi}{512}$ des Feldgitters. Die Basis für verlässliche Aussagen wird durch einen derart kleinen Inertialbereich nicht geliefert. Nach Frisch (siehe Kapitel 5 in [15]) ist dieses Ergebnis nicht verwunderlich: Auch bei einem relativ ausgeprägten Inertialbereich im Energiespektrum fällt der Skalierungsbereich der Strukturfunktionen oft viel kleiner aus. Die viel versprechenden Ergebnisse im Bezug auf das Skalierungsverhalten fordern weitergehende Untersuchungen in Simulationen mit höherer Diskretisierung, die allerdings mit einem beträchtlich höheren Aufwand an Rechenzeit einhergehen.

Die Lagrangeschen Strukturfunktionen

Auch im Falle der Lagrangeschen Strukturfunktionen geben die ersten 6 Ordnungen in einem Inertialbereich zwischen $\tau = 0.16s$ und $\tau = 0.41s$ das gewünschte Skalierungsverhalten recht gut wieder (vgl. Abb 4.2). Mit höheren Ordnungen ergeben sich allerdings zunehmend starke Abweichungen, so dass im Falle der 9. und 10. Strukturfunktion auch auf den Vergleich mit den theoretischen Vorhersagen verzichtet wurde. Es findet sich eine mögliche Erklärung für die größer werdenden Abweichungen von der theoretisch geforderten Linearität, wenn man die Interpretation der Strukturfunktionen als Momente der Inkrementsverteilungen bedenkt. Die höheren Ordnungen der Strukturfunktionen korrespondieren mit den höheren Momenten der Verteilung der Inkremente. Da diese die seltenen Ereignisse in der Verteilung charakterisieren, benötigt man für eine Darstellung der höheren Strukturfunktionen eine größere Datenmenge um verlässliche Aussagen zu machen. Auch hier kann man diesem Problem nur mit einer Vergrößerung der Felddiskretisierung begegnen.

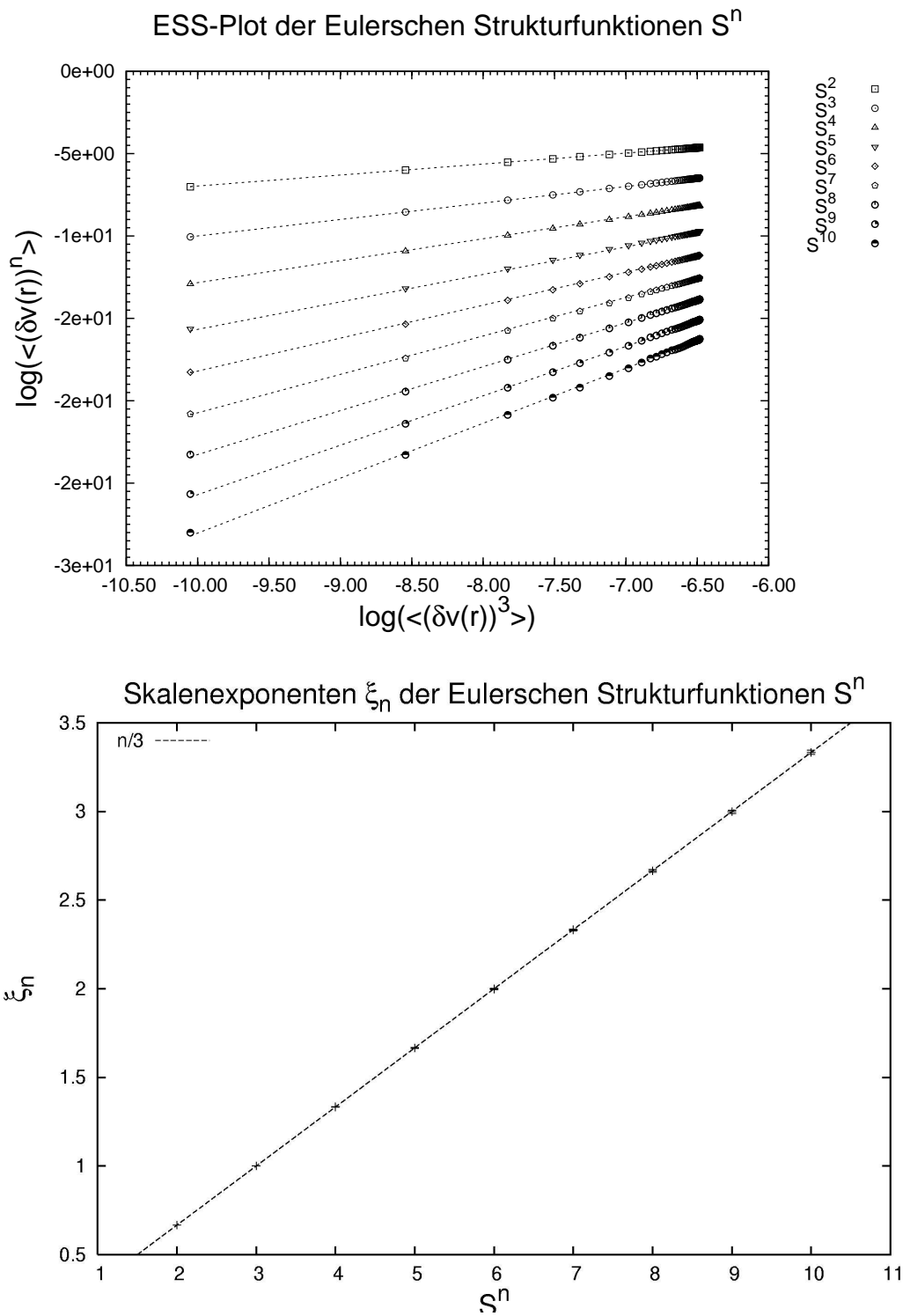


Abbildung 4.3: ESS-Analyse der Eulerschen Strukturfunktionen

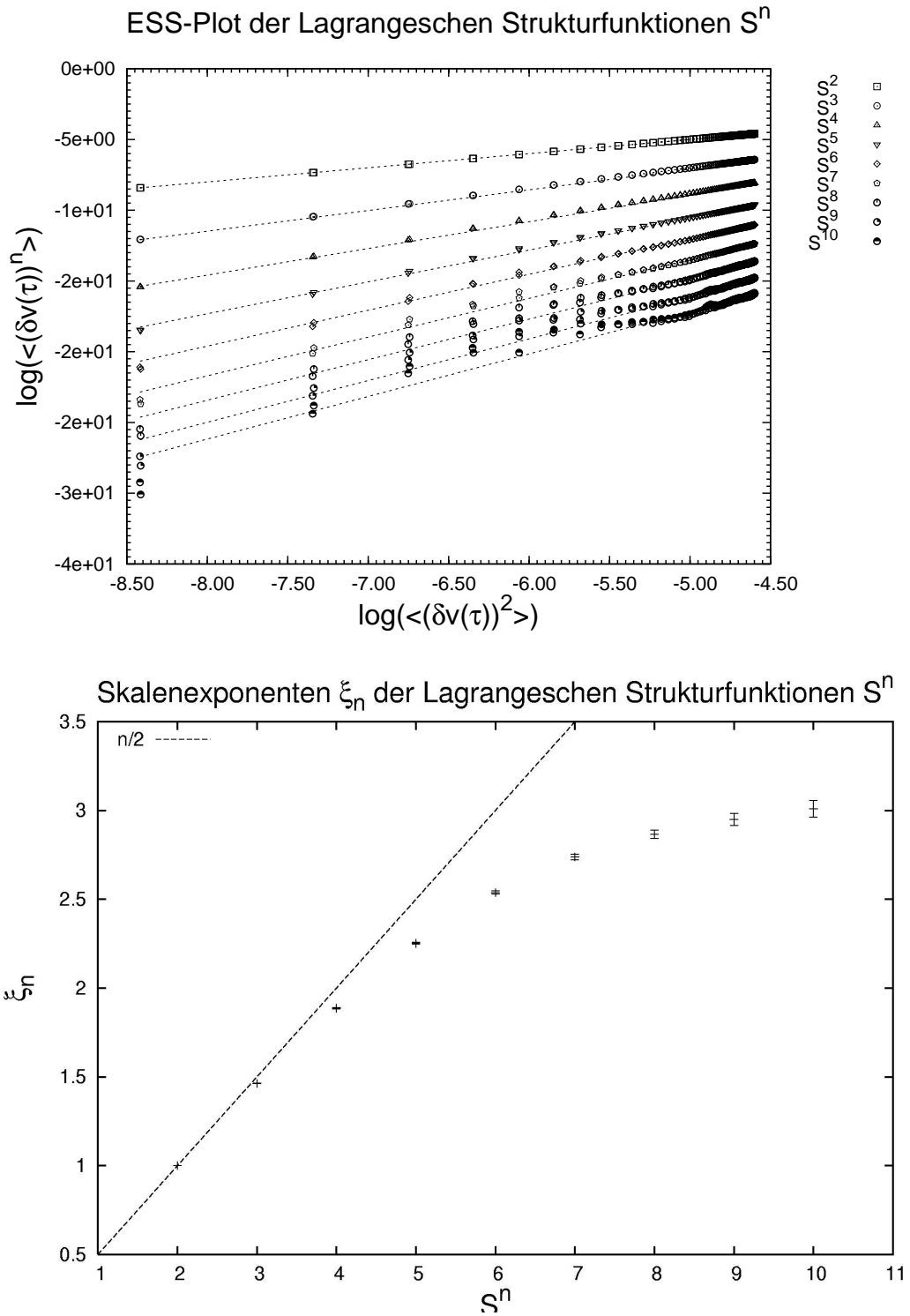


Abbildung 4.4: ESS-Analyse der Lagrangeschen Strukturfunktionen

Extended Self Similarity

Einen interessanten Ansatz für die Auswertung der gewonnenen Daten liefert aber die Methode der Extended Self Similarity (ESS) von Benzi et al [16]. Grundlage dieses Verfahrens ist die spezielle Vorhersage der K41-Theorie für das dritte Moment.

$$S^3 \propto r^{\frac{3}{3}} \rightarrow \langle |\partial v(r)|^3 \rangle \propto r$$

So lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den verschiedenen Momenten in den allgemeinen Skalierungsgesetzen herstellen. Wird im Ansatz

$$S^n \propto r^{\frac{n}{3}}$$

r gegen $\langle |\partial v(r)|^3 \rangle$ ausgetauscht, so gewinnt man die Abhängigkeit

$$\langle |\partial v(r)|^n \rangle \propto \langle |\partial v(r)|^3 \rangle^\xi$$

mit dem Skalierungsexponenten $\xi = \frac{n}{3}$. In logarithmischer Darstellung erhält man dann einfach den linearen Zusammenhang:

$$\log(\langle |\partial v(r)|^n \rangle) \propto \xi \log(\langle |\partial v(r)|^3 \rangle)$$

Für die Lagrangesche Variante folgt analog:

$$\log(\langle |\partial v(r)|^n \rangle) \propto \xi \log(\langle |\partial v(r)|^2 \rangle)$$

Die Abbildungen 4.3 und 4.4 zeigen, dass in einer graphischen Darstellung mit doppellogarithmischer Auftragung der lineare Bereich nun über den Inertialbereich hinaus erweitert ist. Die Ergebnisse der ESS-Analyse liefern für die Eulerschen Strukturfunktionen keine neuen Erkenntnisse. Im oberen Diagramm von Abb.4.3 wurde mittels linearer Regression die Steigungen der Geraden bestimmt. Die Steigungswerte sind im unteren Diagramm gegenüber der Ordnung aufgetragen. So gewinnt man den Verlauf der Skalenexponenten als Funktion der Ordnung n . Die theoretische Vorhersage für die Entwicklung der Skalenexponenten ist eindeutig erfüllt, da diese allesamt mit der vorgegebenen Geraden übereinstimmen.

Für die Lagrangeschen Stukturfunktionen fällt die ESS-Analyse anders aus: Bei höheren Ordnungen zeigt sich im entsprechend ermittelten Verlauf der Skalenexponenten eine deutliche Abweichung von theoretischen Erwartungswert (vgl. Abb.4.4). Hier besteht Klärungsbedarf, ob diese Abweichungen mit der schlechteren Statistik der höheren Momente erklärt werden kann, oder ob diese systematisch auftritt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein numerisch stabiles Verfahren entwickelt, das die Wirbeltransportgleichung der zweidimensionalen Turbulenz integriert. Mit diesem Programm lassen sich Datensätze turbulenter Wirbelstärke- oder Geschwindigkeitsfelder berechnen, die für eine statistische Auswertung herangezogen werden können. Die Entwicklung des Programm-Codes für die direkte numerische Simulation war mit einem beträchtlichen Aufwand verbunden, weshalb dieser Ausarbeitung im 2. Kapitel größerer Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Die Auswertung der 2-Wirbel-Simulationen zeigt, dass nach jedem Entwicklungsschritt die jeweilige Programm-Version eine erheblich geringere Anfälligkeit für das Ausbilden von Instabilitäten aufweist. Durch die Überprüfung der Stabilität in solchen 2-Wirbel-Tests besteht die Möglichkeit die Begrenzung des stabilen Arbeitsbereiches des numerischen Verfahrens zu ermitteln. Mit diesen Erkenntnissen steht einer Erhöhung der Diskretisierung N auf 1024 oder 2048 nichts mehr im Wege. Festzuhalten ist auch die Tatsache, dass man mit der Reynoldszahl aufgetragen gegen die Berechnungszeit ein ausgezeichnetes Werkzeug zur Kontrolle des Stabilitätsverhaltens besitzt.

Im 3. Kapitel wurde die Statistik des Energiespektrums ausgewertet. Hier zeigte sich eine erfolgreiche Bestätigung der theoretischen Vorhersagen. Der Überblick über die Zeitentwicklung des Energiespektrums belegt die Existenz der inversen Energiekaskade – dem besonderen Charakteristikum der zweidimensionalen Turbulenz. Zudem besitzt das Energiespektrum nach der transienten Phase einen Inertialbereich, der die Erwartungen aus Kolmogorovs $-\frac{5}{3}$ -Gesetz exakt bestätigt. Der Vergleich mit Ergebnissen physikalischer Experimente ist viel versprechend. Es zeigt sich, dass im numerischen Verfahren die Natur der zweidimensionalen Turbulenz erstaunlich gut simuliert wird.

Inhalt des 4. Kapitels waren die Eulerschen und Lagrangeschen Strukturfunktionen. In beiden Fällen muss angemerkt werden, dass der kleine Inertialbereich eine allzu optimistische Interpretation der zweifelsfrei interessanten Ergebnisse einschränkt.

Gerade im Euler-Bild erfüllen die Momente der Inkrementsverteilung die theoretischen Vorhersagen präzise. Wird hier eine ESS-Analyse unternommen, so lassen sich exakt die Skalenexponenten bestimmen, die entsprechend der $K41$ -Theorie vorgesehen sind.

Im Fall der Lagrangeschen Strukturfunktionen ist die Vorhersage für die Skalierung der niedrigeren Momente ebenfalls gut erfüllt. Bei den höheren Momenten treten Abweichungen von der theoretischen Erwartung auf. Die Skalenexponenten der ESS-Untersuchung entsprechen sogar nur für das erste und zweite Moment in etwa der Vorhersage. Diese Verletzung der Prognose der Selbstähnlichkeit, die man hier im Lagrange-Bild evtl. beobachtet, ist Bestandteil der aktuellen Forschung in der Turbulenztheorie. Man ist sich heute sicher, dass

die Kolmogorovsche $K41$ -Theorie nicht uneingeschränkte Gültigkeit hat. Dieser Aspekt der Theorie wurde hier nicht in den Vordergrund gerückt, da die schmalen Inertialbereiche generell keine definitiven Aussagen erlauben. Die genauere Überprüfung dieser Beobachtung ist als eine der vorrangigen Aufgaben für künftige Untersuchungen zu nennen.

Wie die Ergebnisse zeigen, sollte für die Zukunft zunächst das Ziel ins Auge gefasst werden, die Diskretisierung für weitere Berechnungen zu erhöhen. Die Erweiterung von N auf 1024 oder 2049 sollte eine deutliche Vergrößerung der Inertialbereiche im Energiespektrum und auch bei den Strukturfunktionen bewirken. Dann besteht die Möglichkeit einer verlässlichen, quantitativen Auswertung des Skalierungsverhaltens z.B. mit der ESS-Analyse. Abschließend kann gesagt werden, dass mit dem numerisch stabilen Integrationsverfahren die Basis für diese eingehenderen Untersuchungen der Eigenschaften zweidimensionaler Turbulenz geschaffen wurde.

Literaturverzeichnis

- [1] P.A.Davidson. Turbulence. *Oxford University Press, New York, 2004*
- [2] M.Lesieur. Turbulence in Fluids. *Kluwer Academic Publishers, 1990*
- [3] S.B.Pope. Turbulent Flows. *Cambridge University Press, Cambridge, 2000*
- [2] L.F.Richardson. Weather Predictions by Numerical Process. *Cambridge University Press, Cambridge, 1922*
- [5] A.N.Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. *Dokl.Akad.Nauk SSSR 30, 1941*
- [6] R.H.Kraichnan. Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids 10, p.1417-1423, 1967*
- [7] G.K.Batchelor. Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids (Suppl.II), p.233-239, 1969*
- [8] D.Bernard. On The Point Velocity Correlation Functions in 2d Forced Turbulence. *chao-dyn/9902010v2, 18.20.1999*
- [9] D.K.Lilly. Numerical Simulation of Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids (Suppl.II), p.240-249, 1969*
- [10] S.Danilov,D.Gurarie. Forced two-dimensional turbulence in spectral and physical space. *Phys.Rev.E 63, p.1-12, 2001*
- [11] B.Simeon. Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen *Skriptum zur Vorlesung a.d.TU Mnchen(Ws2003/2004)*
- [12] M.F.Tome,S.McKee. A Computational Marker and Cell Method for Free Surface Flows in General Domains. *J.Computational Physics 110, p.171-186, 1994*
- [13] C.Canuto,M.Y.Hussaini,A.Quateroni,T.A.Zang. Spectral Methods in Fluid Dynamics. *Springer Verlag, New York, 1988*
- [14] J.Paret,P.Tabeling. Experimental Observation of the Two-Dimensional Energy Cascade. *Phys.Rev.Lett.79, p.4162-4165, 1997*

- [15] U.Frisch. Turbulence. *Cambridge University Press, Cambridge, 2001*
- [16] R.Benzi,S.Ciliberto,R.Tripiccione,C.Baudet,F.Massaioli,S.Succi.
Extendet self-similarity in turbulent flows. *Phys.Rev.E 48, p.29-32, 1993*

A C - Code zur numerischen Lösung der Wirbeltransportgleichung

```
//-----//
//-----//
//
//      Programm 2DTurbulenz.c zur numerischen Intergration der Wirbeltransport-Gleichung
//
//      Pseudospektral-Verfahren mit Zeitschritt-Berechnung nach Adams-Bashforth
//
//-----//
//-----//
//

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <fftw3.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

#define DIM 512    // Dimension der Wirbelfeldes

//-----//
//-----//
//

void ABIntegration(char Speicheradresse[200],char fileInfo[300],double Zeit,
    fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex Force[DIM][DIM],
    fftw_complex ForceX[DIM][DIM],double Nue,double Gamma,
    double kaw,double Breite,double Rauschen,
    double R,double L,double *dt,double dtmax,int Bild,
    fftw_complex Fun1[DIM][DIM],fftw_complex Fun2[DIM][DIM],
    fftw_complex Fun3[DIM][DIM],
    fftw_complex Fun[DIM][DIM],fftw_plan hinNLin,fftw_plan ruckFun,
    fftw_complex NLin[DIM][DIM],double V[2][DIM+2][DIM+2],
    fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],fftw_complex Chi[DIM][DIM],
    fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi);

void Funktion(char Speicheradresse[200],char fileInfo[300],double Zeit,
    fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex Force[DIM][DIM],
    fftw_complex ForceX[DIM][DIM],double Nue,double Gamma,double kaw,double Breite,
    double Rauschen,double R,double L,double **dt,double dtmax,int Bild,
    fftw_complex Fun[DIM][DIM],fftw_plan hinNLin,fftw_plan ruckFun,
    fftw_complex NLin[DIM][DIM],double V[2][DIM+2][DIM+2],
    fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],fftw_complex Chi[DIM][DIM],
    fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi);

void Nichtlin(char fileInfo[300],double Zeit,fftw_complex Omega[DIM][DIM],double Nue,double L,
    double **dt,double dtmax,int Bild,fftw_complex NLin[DIM][DIM],
    double V[2][DIM+2][DIM+2],fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],
    fftw_complex Chi[DIM][DIM],fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi);
```

```

void Poisson(fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],
             fftw_complex Chi[DIM][DIM],double L,fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi);

void Startkonfiguration(char *ParaDat,char Speicheradresse[200],char Datum[6],double *Zeit,
double *dt,double *dtmax,int *T,double *Bildzeit,double *Nue,
double *Gamma,double *kaw,double *Breite,double *Rauschen,double *R,
fftw_complex Omega[DIM][DIM]);

void Omegaplot(fftw_complex Omega[DIM][DIM],double L,int t,double Zeit,char Datum[6],
              char Speicheradresse[200]);

void Infoplot(char fileInfo[300],double V[2][DIM+2][DIM+2],double L,double dt,int T,
              double Bildzeit,double Nue,double Gamma,double Rauschen,double Breite,double R,
              int kaw,int t,double Zeit,char Datum[6],char Speicheradresse[200]);

void CFL(char fileInfo[300],double V[2][DIM+2][DIM+2],double L,double dx,double dtmax,
double ****dt,double Nue,int Bild,double Zeit);

//-----//
//-----//
//

int main(int argc, char *argv[])
{
    //-----//
    //          //
    //  Globale Deklarationen  //
    //-----//
    //          //

    // Einlesen

    char *ParaDat = argv[1];

    char Speicheradresse[200];

    // Bezeichnung fuer die Info - Datei;

    char fileInfo[300];

    // Zufallszahlen zwischen 0.0 und 1.0

    srand48(time(NULL));

    // Datum zur Benennung der Daten

    char Datum[6];

    // Zeitvariablen

    double
        Zeit,           // physikalische Zeit
        RZeit,          // Rechenzeit bis zur Ausgabe der Daten in die Datei
        Bildzeit,        // Zeitdifferenz zwischen den Speicherungen der Felder
        Bildwert;         // Bildwert = RZeit/Bildzeit

```

A C - Code zur numerischen Lösung der Wirbeltransportgleichung

```
int T;                                // Anzahl der Iterationen

//-----//
//                                     //
// Deklarationen fuer die Funktion main //
//-----//
//                                     //

fftw_complex
    Omega[DIM][DIM],                // (pseudo-)skalares Feld der Wirbelstaerke Omega
    Force[DIM][DIM],                // (Zufalls-)Kraftfeld (im k-Raum)
    ForceX[DIM][DIM];               // Fouriertransformierte des Kraftfeldes (im Ortsraum)

double
    //dx,                            Ortsschritt
    //dy,
    //d2x,                           2.0*dx
    //d2y,
    Nue,                             // dynamische Viskositaet
    Gamma,                           // zusaetzliche Reibung
    kaw,                             // k-Mode des maximalen Krafteintrags
    Breite,                          // Breite der Gauss-verteilten Amplitude der Zufallskraft
    Rauschen,                        // Faktor in der Zufallskraft
    R,                               // Gewichtungsfaktor in der Zufallskraft
    L,                               // Feldlaenge L = 2.0*PI
    dt,                              // Zeitschritt (dynamisch ueber die CFL-Bedingung angepasst)
    dtmax;                           // maximaler Zeitschritt

int
    i,
    j,
    t,
    Bild;                            // Zaehlvariable fuer das Speichern der Omega-Felder und Info-Dateien
                                    // und des einfachen Energiespektrums

//-----//
//                                     //
// Deklarationen fuer die Funktion ABIntegration //
//-----//
//                                     //

fftw_complex
    Fun1[DIM][DIM],                 // Funktion zum vorherigen Zeitpunkt f(Omega,t-dt)
    Fun2[DIM][DIM],                 // Funktion zum vorvorherigen Zeitpunkt f(Omega,t-2*dt)
    Fun3[DIM][DIM];                 // Funktion zum Zeitpunkt f(Omega,t-3*dt)

//-----//
//                                     //
// Deklarationen fuer die Funktion Funktion //
//-----//
//                                     //

fftw_complex Fun[DIM][DIM]; // Funktion f(Omega,t) -> rechte Seite der DGL

// Fouriertrafo in Fktn. Funktion

fftw_plan
    hinNLin,                        // Hintrafo
    ruckFun;                         // Ruecktrafo
```

```

//-----//
//                                     //
//   Deklarationen fuer die Funktion Nichtlin //
//-----//
//                                     //

fftw_complex NLin[DIM][DIM]; // Hilfsfeld zur Berechnung des nichtlinearen Terms

double V[2][DIM+2][DIM+2]; // vektorielltes Geschwindigkeitsfeld

//-----//
//                                     //
//   Deklarationen fuer die Funktion Poisson //
//-----//
//                                     //

fftw_complex
  OmegaK[DIM][DIM], // Fouriertransformierte des Omega-Feldes (im k-Raum)
  Chi[DIM][DIM];    // Feld der Stromfunktion

// Fouriertrafo in Fktn. Poisson

fftw_plan
  hinOmega, // Hintrafo
  ruckChi;  // Ruecktrafo

//-----//
//-----//
//                                     //
//-----//
//   (vorlaeufige) Initialisierung der Variablen und Parameter -- Eingabe der AB //
//-----//
//                                     //

// Zeitvariablen

dt = 0.002;
dtmax = 0.002;

Zeit = 0.0;
RZeit = 0.0;
Bild = 1; // Anfangsbedingung, damit das Startfeld gespeichert wird
Bildwert = 1.0;

// Feldabmessungen

L = 2.0*M_PI;

// Konstanten - Wirbelfeld

Nue = 0.0001;
Gamma = 0.005;

```

```

//Konstanten - Kraftfeld

kaw = 100;
Breite = 0.0005;
Rauschen = 10000.0;
R = 0.9;


//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Wirbelfeldes   //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    Omega[i][j][0] = 0.0 ;
    Omega[i][j][1] = 0.0 ;
}
}

//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Kraftfeldes   //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    Force[i][j][0] = 0.0 ;
    Force[i][j][1] = 0.0 ;
}
}

//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Feldes Fun   //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    Fun[i][j][0] = 0.0 ;
    Fun[i][j][1] = 0.0 ;
}
}

//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Feldes Fun1   //
//-----//
//                                     //

```

```

    for(i=0;i<DIM;i++)
    {
        for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        Fun1[i][j][0] = 0.0 ;
        Fun1[i][j][1] = 0.0 ;
    }
    }

//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Feldes Fun2   //
//-----//
//                                     //

    for(i=0;i<DIM;i++)
    {
        for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        Fun2[i][j][0] = 0.0 ;
        Fun2[i][j][1] = 0.0 ;
    }
    }

//-----//
//                                     //
//   Initialisierung des Feldes Fun3   //
//-----//
//                                     //

    for(i=0;i<DIM;i++)
    {
        for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        Fun3[i][j][0] = 0.0 ;
        Fun3[i][j][1] = 0.0 ;
    }
    }

//-----//
//                                     //
//                                     //
//                                     //

//-----//
//                                     //
//   Einlesen der Startkonfiguration   //
//-----//
//                                     //

// Aufruf der Funktion Startkonfiguration zur endgueltigen Initialisierung der Parameter
// und evtl. zum Einlesen von Start-Feldern

Startkonfiguration(ParaDat,Speicheradresse,Datum,&Zeit,&dt,&dtmax,&T,&Bildzeit,&Nue,&Gamma,
    &kaw,&Breite,&Rauschen,&R,&Omega);

//-----//
//-----//
//-----//

```

```

//-----//
//                                     //
//  Plaene fuer die Fouriertrafos  //
//-----//
//                                     //

// Plan der Fouriertransformation f(x,y) -> F(kx,ky) in der Fktn. Funktion
hinNlin = fftw_plan_dft_2d(DIM,DIM,&Nlin[0][0],&Nlin[0][0],FFTW_FORWARD,FFTW_ESTIMATE);

// Plan der FourierRuecktransformation F(kx,ky) -> f(x,y) in der Fktn. Funktion
ruckFun = fftw_plan_dft_2d(DIM,DIM,&Fun[0][0],&Fun[0][0],FFTW_BACKWARD,FFTW_ESTIMATE);

//-----//
//                                     //

// Plan der Fouriertransformation f(x,y) -> F(kx,ky) in der Fktn. Poisson
hinOmega = fftw_plan_dft_2d(DIM,DIM,&Omega[0][0],&OmegaK[0][0],FFTW_FORWARD,FFTW_ESTIMATE);

// Plan der Fouriertransformation F(kx,ky) -> f(x,y) in der Fktn. Poisson
ruckChi = fftw_plan_dft_2d(DIM,DIM,&Chi[0][0],&Chi[0][0],FFTW_BACKWARD,FFTW_ESTIMATE);

//-----//
//                                     //

//-----//
//-----//
//                                     //
//               Ausfuehrung der Integration fuer T Zeitschritte               //
//-----//
//-----//

for(t=0;t<T;t++)
{
    if(Bild == 1)
{
    // Omega-File      (speichert das Omega-Feld in einer Datei)

    Omegaplot(Omega,L,t,Zeit,Datum,Speicheradresse);

    // Info-File      (speichert das Info-File in einer Datei)

    Infoplot(fileInfo,V,L,dt,T,Bildzeit,Nue,Gamma,Rauschen,Breite,R,kaw,t,Zeit,Datum,
    Speicheradresse);

    RZeit = 0.0;      //setzt die Rechenzeit fuer die Bildausgabe wieder auf Null
}
}

```

```

// Ausgabe der Zeitparameter

printf("%d \n",t);
printf("Zeit: %f s\n",Zeit);
printf("Zeitschritt: %f s\n",dt);
printf("Bildwert: %f\n",Bildwert);
printf("Bild: %d\n",Bild);

// Integrations-Routine

ABIntegration(Speicheradresse,fileInfo,Zeit,Omega,Force,ForceX,Nue,Gamma,kaw,Breite,
Rauschen,R,L,&dt,dmax,Bild,Fun1,Fun2,Fun3,Fun,hinNLin,ruckFun,NLin,V,
OmegaK,Chi,hinOmega,ruckChi);

// Umschreiben der Felder aus der Integrations-Routine

for(i=0;i<DIM;i++)
{
for(j=0;j<DIM;j++)
{
Fun3[i][j][0] = Fun2[i][j][0];
Fun3[i][j][1] = 0.0;

Fun2[i][j][0] = Fun1[i][j][0];
Fun2[i][j][1] = 0.0;

Fun1[i][j][0] = Fun[i][j][0];
Fun1[i][j][1] = 0.0;

Fun[i][j][0] = 0.0;
Fun[i][j][1] = 0.0;
}
}

// Anpassung der Zeitparameter

Zeit += dt;
RZeit += dt;
Bildwert = RZeit/Bildzeit;
Bild = (int)Bildwert;

}

//-----//
//-----//
//-----//
//

//-----//
//-----//
// Loeschen der Plaene fuer die Fouriertrafos //
//-----//
//

//Trafos in der Fktn. Funktion

fftw_destroy_plan(hinNLin);
fftw_destroy_plan(ruckFun);

//Trafos in der Fktn. Poisson

```

```

    fftw_destroy_plan(hinOmega);
    fftw_destroy_plan(ruckChi);

    return 0;
}

/*****
/*****
/*****

void ABIntegration(char Speicheradresse[200],char fileInfo[300],double Zeit,
    fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex Force[DIM][DIM],
    fftw_complex ForceX[DIM][DIM],double Nue,double Gamma,
    double kaw,double Breite,double Rauschen,
    double R,double L,double *dt,double dtmax,int Bild,
    fftw_complex Fun1[DIM][DIM],fftw_complex Fun2[DIM][DIM],
    fftw_complex Fun3[DIM][DIM],
    fftw_complex Fun[DIM][DIM],fftw_plan hinNLin,fftw_plan ruckFun,
    fftw_complex NLin[DIM][DIM],double V[2][DIM+2][DIM+2],
    fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],fftw_complex Chi[DIM][DIM],
    fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi)
{
    //-----//
    // //
    // //
    // Integration der Wirbeltransportgleichung nach dem Schema: //
    // //
    // dOmega/dt = f(Omega,t) //
    // mit //
    // f(Omega,t) = Fx[ Fk{-(u*Nabla)*Omega} - Nue*k^2*OmegaK - Gamma*OmegaK + FK] //
    // //
    // Fk: Fouriertransformierte im Fourierraum //
    // Fx: Fouriertransformierte im Ortsraum //
    // //
    // //
    // + Berechnung der Funktion f(Omega,t) in der Funktion "Funktion" //
    // + Berechnung des nichtlinearen Terms [-(u*Nabla)*Omega] in der Funktion "Nichtlin" //
    // in der Form [dChi/dy*dOmega/dx - dChi/dx*dOmega/dy] //
    // + Berechnung der Stromfunktion Chi in der Funktion "Poisson" //
    // //
    // //
    // Adams - Bashforth - Intagation: //
    // //
    // Omega(t+dt) = Omega(t) + dt/24*{ 5*f(Omega,t) - 59*f(Omega,t-dt) + 37*f(Omega,t-2*dt) //
    // - 9*f(Omega,t-3*dt)} //
    //-----//
    // //

    //-----//
    // //
    // Funktionsdeklarationen //
    //-----//
    // //

    int
    i,
    j;

```

```

//-----//
//                                     //
//   Berechnung der Funktion f(Omega,t) //
//-----//
//                                     //

// Ausfuehren der Funktion "Funktion" liefert der Ausdruck f(Omega,t)

Funktion(Speicheradresse,fileInfo,Zeit,Omega,Force,ForceX,Nue,Gamma,kaw,Breite,Rauschen,R,
L,&dt,dTmax,Bild,Fun,hinNLin,ruckFun,NLin,V,OmegaK,Chi,hinOmega,ruckChi);

//-----//
//                                     //
//   Intagration nach Adams & Bashforth //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    Omega[i][j][0] = Omega[i][j][0] + *dt/24.0*( 55.0* Fun[i][j][0]
        - 59.0*Fun1[i][j][0]
        + 37.0*Fun2[i][j][0]
        - 9.0*Fun3[i][j][0]);
    Omega[i][j][1] = 0.0;
}
}
}

/*****
/*****
/*****

void Funktion(char Speicheradresse[200],char fileInfo[300],double Zeit,
    fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex Force[DIM][DIM],
    fftw_complex ForceX[DIM][DIM],double Nue,double Gamma,double kaw,double Breite,
    double Rauschen,double R,double L,double **dt,double dTmax,int Bild,
    fftw_complex Fun[DIM][DIM],fftw_plan hinNLin,fftw_plan ruckFun,
    fftw_complex NLin[DIM][DIM],double V[2][DIM+2][DIM+2],
    fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],fftw_complex Chi[DIM][DIM],
    fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi)
{
    //-----//
    //                                     //
    //                                     //
    //   Berechnung der Funktion //
    //                                     //
    //   f(Omega,t) = Fx[ Fk{-(u*Nabla)*Omega} - Nue*k^2*OmegaK - Gamma*OmegaK + Force ] //
    //                                     //
    //   + Berechnung des nichtlinearen Terms in der Funktion "Nichtlin" //
    //   + Beschraenkung der Wirkung von Nue und Gamma auf verschiedene Bereiche im k-Spektrum //
    //   durch geeignete Wahl von Bezugswellenlaengen kmax und k0 //
    //                                     //
    //   - Nue*k^2*OmegaK - Gamma*OmegaK -> {- Nue*(k/kmax)^4 - Gamma*(k0/k)}*OmegaK //
    //                                     //
    //   + Kraftansatz nur fuer spezielle Anregungsmoden kA //
    //                                     //
    //   Force(t+dt) = Rauschen*(1-R^2)*exp(i*Zufallsphase) + R*Force(t) //
    //                                     //

```

```
//
//-----//
//

//-----//
//      Funktionsdeklarationen      //
//-----//
//

double
    k,
    kx,
    ky,
    dkx,
    dky,
    kA,
    k2,
    ReForce,
    ImForce;

int
    i,
    j,
    ihalb,
    jhalb;

//-----//
//      Initialisierung der Variablen      //
//-----//
//

ihalb = (DIM)/2;
jhalb = (DIM)/2;

dkx = 2.0*M_PI/L;
dky = 2.0*M_PI/L;
kA = dkx*kaw;

//-----//
//      Berechnung des nichtlinearen Terms      //
//-----//
//

// Ausfuehren der Funktion "Nichtlin" liefert den nichtlinearen Term [-(u*Nabla)*Omega]
// in dem Feld NLin

Nichtlin(fileInfo,Zeit,Omega,Nue,L,&dt,dtmax,Bild,NLin,V,OmegaK,Chi,hinOmega,ruckChi);

//-----//
//      Ausfuehrung der Fouriertransformation f(x,y) -> F(kx,ky)      //
//      fuer das Feld NLin -> NLin      //
//-----//
//
```

```

fftw_execute(hinNLin);

//-----//
//
//   Berechnung des Ausdrucks
//
//   [  $F_k\{-(u \cdot \nabla) \cdot \Omega\} - \nu k^2 \Omega_K - \gamma \Omega_K + \text{Force}$  ]
//
//-----//
//

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{

    // Berechnung von kx

    if(i<=ihalb)
    {
        kx = i*dkx;
    }
    else
    {
        kx =(i-(DIM))*dkx;
    }

    // Berechnung von ky

    if(j<=jhalb)
    {
        ky = j*dky;
    }
    else
    {
        ky =(j-(DIM))*dky;
    }

    // Berechnung von k^2

    k2 = kx*kx + ky*ky;

    // Berechnung von k

    k = sqrt(k2);

//-----//
//

// Initialisierung des Kraftfeldes

ReForce = exp(-Breite*(k-kA)*(k-kA))*Rauschen*sqrt(1 - R*R)*cos(drand48()*2.0*M_PI)
          + R*Force[i][j][0];
ImForce = exp(-Breite*(k-kA)*(k-kA))*Rauschen*sqrt(1 - R*R)*sin(drand48()*2.0*M_PI)
          + R*Force[i][j][1];

```

```

Force[i][j][0] = ReForce;
Force[i][j][1] = ImForce;

//-----//
//

// Berechnung von [ Fk{-(u*Nabla)*Omega} - Nue*k^2*OmegaK - Gamma*OmegaK + Force ]
Fun[i][j][0] = NLin[i][j][0]-(Nue*k2 + Gamma)*OmegaK[i][j][0]+Force[i][j][0];
Fun[i][j][1] = NLin[i][j][1]-(Nue*k2 + Gamma)*OmegaK[i][j][1]+Force[i][j][1];

//-----//
//

//-----//
//      De-Aliasing      //
//-----//
//

if(k2 >= (DIM/3.0)*(DIM/3.0))
{
    Fun[i][j][0] = 0.0;
    Fun[i][j][1] = 0.0;
}
}

}

//-----//
//      Ausfuehrung der Fouriertransformation F(kx,ky) -> f(x,y) //
//      fuer das Feld Fun -> Fun //
//-----//
//

fftw_execute(ruckFun);

//-----//
//      Skalierung      //
//-----//
//

// Skalierung des Fun-Feldes( nach der Fouriertrafo )

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        Fun[i][j][0] /= (DIM)*(DIM);
        Fun[i][j][1] /= (DIM)*(DIM);
    }
}
}

```

```

/*****
/*****
/*****

void Nichtlin(char fileInfo[300],double Zeit,fftw_complex Omega[DIM][DIM],double Nue,double L,
double ***dt,double dtmax,int Bild,fftw_complex NLin[DIM][DIM],
double V[2][DIM+2][DIM+2],fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],
fftw_complex Chi[DIM][DIM],fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi)
{

//-----//
//      Funktionsdeklarationen      //
//-----//
//

fftw_complex
    OMEGA[DIM+2][DIM+2],
    CHI[DIM+2][DIM+2],
    NLIN[DIM+2][DIM+2];

double
    dOMEGAdx,
    dOMEGAdy,
    dx,
    dy,
    d2x,
    d2y;

int
    i,
    j;

//-----//
//      Initialisierung der Variablen      //
//-----//
//

dx = L/(DIM);
dy = L/(DIM);
d2x = 2.0*dx;
d2y = 2.0*dy;

//-----//
//      Berechnung der Stromfunktion      //
//-----//
//

// Ausfuehren der Funktion Poisson liefert das Feld der Stromfunktion Chi

Poisson(Omega,OmegaK,Chi,L,hinOmega,ruckChi);

//-----//
//      Vergroessern der Felder      //
//-----//

```

```
//
//

// Umschreiben von Chi[DIM][DIM] in groesseres Feld CHI [DIM+2][DIM+2]
// und Beruecksichtigung der periodischen Randbedingungen

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        CHI[i+1][j+1][0]=Chi[i][j][0];
        CHI[i+1][j+1][1]=Chi[i][j][1];
    }
}

for(i=1;i<DIM+1;i++)
{
    CHI[i][0][0]=Chi[i-1][DIM-1][0];
    CHI[i][0][1]=Chi[i-1][DIM-1][1];
    CHI[i][DIM+1][0]=Chi[i-1][0][0];
    CHI[i][DIM+1][1]=Chi[i-1][0][1];
}

for(j=1;j<DIM+1;j++)
{
    CHI[0][j][0]=Chi[DIM-1][j-1][0];
    CHI[0][j][1]=Chi[DIM-1][j-1][1];
    CHI[DIM+1][j][0]=Chi[0][j-1][0];
    CHI[DIM+1][j][1]=Chi[0][j-1][1];
}

// Umschreiben von Omega[DIM][DIM] in groesseres Feld OMEGA[DIM+2][DIM+2]
// und Beruecksichtigung der periodischen Randbedingungen

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        OMEGA[i+1][j+1][0]=Omega[i][j][0];
        OMEGA[i+1][j+1][1]=Omega[i][j][1];
    }
}

for(i=1;i<DIM+1;i++)
{
    OMEGA[i][0][0]=Omega[i-1][DIM-1][0];
    OMEGA[i][0][1]=Omega[i-1][DIM-1][1];
    OMEGA[i][DIM+1][0]=Omega[i-1][1][0];
    OMEGA[i][DIM+1][1]=Omega[i-1][1][1];
}

for(j=1;j<DIM+1;j++)
{
    OMEGA[0][j][0]=Omega[DIM-1][j-1][0];
    OMEGA[0][j][1]=Omega[DIM-1][j-1][1];
    OMEGA[DIM+1][j][0]=Omega[1][j-1][0];
    OMEGA[DIM+1][j][1]=Omega[1][j-1][1];
}

//-----//
//
//   Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus den partiellen Ableitungen dCHI/dx,dCHI/dy
//-----//
//
```

```

for(i=1; i<DIM+1; i++)
{
    for (j=1; j<DIM+1; j++)
{
    // Berechnung der partiellen Ableitungen Vx = -dCHI/dy und Vy = dCHI/dx

V[0][i][j] = -(CHI[i][j+1][0] - CHI[i][j-1][0])/d2y;
V[1][i][j] = (CHI[i+1][j][0] - CHI[i-1][j][0])/d2x;
}
}

//-----//
//                                     //
//   Beruecksichtigung der Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung //
//-----//
//                                     //
//                                     //

// bei der Wahl des maximalen Zeitschrittes dtmax = 0.002 sind die
// CFL-Bedingungen stets erfuehlt

CFL(fileInfo,V,L,dx,dtmax,&dt,Nue,Bild,Zeit);

printf("CFL-dt: %lf\n",***dt);

//-----//
//                                     //
//   Berechnung des nichtlinearen Terms [- (V*Nabla)*Omega(t)] //
//-----//
//                                     //
//                                     //

for(i=1; i<DIM+1; i++)
{
    for (j=1; j<DIM+1; j++)
{
    // Berechnung der partiellen Ableitungen dOMEGA/dx und dOMEGA/dy

dOMEGAdx = (OMEGA[i+1][j][0] - OMEGA[i-1][j][0])/d2x;
dOMEGAdy = (OMEGA[i][j+1][0] - OMEGA[i][j-1][0])/d2y;

// Berechnung des Terms -[(V*Nabla)OMEGA(T)] in der Form
//   -[(-dCHI/dy)*dOMEGA/dx + dCHI/dx*dOMEGA/dy]

NLIN[i][j][0] = -(V[0][i][j]*dOMEGAdx + V[1][i][j]*dOMEGAdy);
}
}

//-----//
//                                     //
//   Verkleinern des Feldes //
//-----//
//                                     //
//                                     //

// Umschreiben in kleineres Feld NLin[DIM][DIM] --
// Verhinderung von Randeffekten in der Fouriertrafo

for(i=0; i<DIM; i++)
{

```

```

        for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        NLin[i][j][0] = NLIN[i+1][j+1][0];
        NLin[i][j][1] = 0.0;
    }

    }
}

/*****
/*****
/*****/

void Poisson(fftw_complex Omega[DIM][DIM],fftw_complex OmegaK[DIM][DIM],
            fftw_complex Chi[DIM][DIM],double L,fftw_plan hinOmega,fftw_plan ruckChi)
{

    //-----//
    //                                     //
    // Funktionsdeklarationen           //
    //-----//
    //                                     //

    double
        kx,
        ky,
        k2,
        dkx,
        dky;

    int
        i,
        j,
        ihalb,
        jhalb;

    //-----//
    //                                     //
    // Initialisierung der Variablen    //
    //-----//
    //                                     //

    dkx = 2.0*M_PI/L;
    dky = 2.0*M_PI/L;
    ihalb = (DIM)/2;
    jhalb = (DIM)/2;

    //-----//
    //                                     //
    // Ausfuehrung der Fouriertransformation F(kx,ky) -> f(x,y) //
    //                                     fuer das Feld Omega -> OmegaK //
    //-----//
    //                                     //

    fftw_execute(hinOmega);

```

```

//-----//
//                                     //
//   Berechnung des Quotienten FK[Omega]/(-k^2)   //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    // Berechnung von kx

    if(i<=ihalb)
    {
        kx = i*dkx;
    }
    else
    {
        kx =(i-(DIM))*dkx;
    }

    // Berechnung von ky

    if(j<=jhalb)
    {
        ky = j*dky;
    }
    else
    {
        ky =(j-(DIM))*dky;
    }

    // Berechnung von k^2

    k2 = kx*kx + ky*ky;

    // Berechnung des Quotienten   FK[Omega]/(-k^2)
    // Ausschluss von k^2 = 0

    if(k2 == 0.0)
    {
        Chi[i][j][0] = 0.0;
        Chi[i][j][1] = 0.0;
    }
    else
    {
        Chi[i][j][0] = OmegaK[i][j][0]/(-k2);
        Chi[i][j][1] = OmegaK[i][j][1]/(-k2);
    }

//-----//
//                                     //

//-----//
//                                     //
//   De-Aliasing   //
//-----//
//                                     //

if(k2 >= (DIM/3.0)*(DIM/3.0))

```

```

    {
        Chi[i][j][0] = 0.0;
        Chi[i][j][1] = 0.0;
    }
}

}

//-----//
//                                     //
//   Ausfuehrung der Fouriertransformation F(kx,ky) -> f(x,y) //
//               fuer das Feld Chi -> Chi                       //
//-----//
//                                     //

fftw_execute(ruckChi);

//-----//
//                                     //
//   Skalierung //
//-----//
//                                     //

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
    {
        Chi[i][j][0] /= (DIM)*(DIM);
        Chi[i][j][1] /= (DIM)*(DIM);
    }
}

}

/*****
/*****
/*****

//-----//
//-----//
//                                     //
//               Zusaetzliche Organisations- und Auswertungsfunktionen //
//-----//
//-----//
//                                     //

void Startkonfiguration(char *ParaDat,char Speicheradresse[200],char Datum[6],double *Zeit,
double *dt,double *dtmax,int *T,double *Bildzeit,double *Nue,
double *Gamma,double *kaw,double *Breite,double *Rauschen,double *R,
fftw_complex Omega[DIM][DIM])
{

//-----//
//                                     //
//               Programm zum Einlesen von Parametern und Dateien //
//-----//
//                                     //

FILE
    *fDatei,
    *fDaten;

```

```

char
    Line[4096],
    Parameter[100],
    Command[100],
    Einlesedaten[200];

int
    i,
    j;

double
    Wert;

//Initialisierung

Einlesedaten[0] = 0;
Speicheradresse[0] = 0;

//-----//
//                                     Parameter einlesen                                     //
//-----//

fDatei = fopen(ParaDat,"r");

if(fDatei != NULL)
{
    while(feof(fDatei) == 0)
{
    fgets(Line,4095,fDatei);
    sscanf(Line,"%s %s",Command,Parameter);

    // Adresse des Feldes zum Einlesen

    if(strcmp(Command,"Einlesedaten") == 0) sscanf(Parameter,"%s",Einlesedaten);

    // Adresse zur Speicherung der neuen Daten

    if(strcmp(Command,"Speicheradresse") == 0) sscanf(Parameter,"%s",Speicheradresse);

    // Parameter

    if(strcmp(Command,"Datum") == 0) sscanf(Parameter,"%s",Datum);
    if(strcmp(Command,"Zeit") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Zeit);
    if(strcmp(Command,"dt") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*dt);
    if(strcmp(Command,"dtmax") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*dtmax);
    if(strcmp(Command,"T") == 0) sscanf(Parameter,"%d",&*T);
    if(strcmp(Command,"Bildzeit") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Bildzeit);
    if(strcmp(Command,"Nue") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Nue);
    if(strcmp(Command,"Gamma") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Gamma);
    if(strcmp(Command,"kaw") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*kaw);
    if(strcmp(Command,"Breite") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Breite);
    if(strcmp(Command,"Rauschen") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*Rauschen);
    if(strcmp(Command,"R") == 0) sscanf(Parameter,"%lf",&*R);

}
}

if(Einlesedaten[0] == 0)
{
    printf("Keine vorgegebene Anfangsbedingung fuer die Wirbelstaerke!\n");
}

```

```

    }

    if(Speicheradresse[0] == 0)
    {
        printf("Achtung fehlende Speicheradresse!!! Programmabbruch!\n");
        exit(0);
    }

    //-----//
    //                                Feld einlesen                                //
    //-----//

    if(Einlesedaten[0] != 0)
    {
        fDaten = fopen(Einlesedaten,"r");

        if(fDaten != NULL)
        {
            printf("Super:Datei gefunden!!!\n");

            i=0;
            j=0;

            while((fscanf(fDaten,"%lf \n",&Wert)) != EOF)
            {
                Omega[i][j][0] = Wert;

                if((j+1)%DIM == 0.0)
                {
                    i++;
                    j=0;
                }

                else
                {
                    j++;
                }
            }

            printf("Datei schon ausgelesen!!!\n");
        }
        else
        {
            printf("Fehler:Datei nicht gefunden!!!\n");
        }

        fclose(fDaten);
    }

    //-----//
    //-----//

}

/*****
/*****
/*****

void Omegaplot(fftw_complex Omega[DIM][DIM],double L,int t,double Zeit,char Datum[6],
               char Speicheradresse[200])
{

```

```

//-----//
//
//          Programm zum Speichern des Wirbelstaerkenfeldes
//-----//
//

FILE
    *fOMEGA;

char
    file[50],
    gesamt[300];

int
    i,
    j;

sprintf(file,"Turb%s_%.10f.dat",Datum,Zeit);
sprintf(gesamt,"%s/%s",Speicheradresse,file);

fOMEGA=fopen(gesamt,"w");

for(i=0;i<DIM;i++)
{
    for(j=0;j<DIM;j++)
{
    fprintf(fOMEGA,"%lf \n",Omega[i][j][0]);
}
    fprintf(fOMEGA,"\n");
}

fclose(fOMEGA);
}

/*****
/*****
/*****

void Infoplot(char fileInfo[300],double V[2][DIM+2][DIM+2],double L,double dt,int T,
    double Bildzeit,double Nue,double Gamma,double Rauschen,double Breite,double R,
    int kaw,int t,double Zeit,char Datum[6],char Speicheradresse[200])
{
//-----//
//
//          Programm zum Speichern des Info-Files
//-----//
//

FILE
    *fInfo;

char
    file[50];

sprintf(file,"Info%s_%.10f.dat",Datum,Zeit);

```

```

sprintf(fileInfo,"%s/%s",Speicheradresse,file);

fInfo=fopen(fileInfo,"w");

// Info-File

// Ausgabe der Parameter

fprintf(fInfo,"Berechnungs - Parameter:\n");
fprintf(fInfo,"-----\n \n");

fprintf(fInfo,"T: %d \n",T);
fprintf(fInfo,"L: %f \n",L);
fprintf(fInfo,"Bildzeit: %f \n",Bildzeit);
fprintf(fInfo,"Nue: %f \n",Nue);
fprintf(fInfo,"Gamma: %f \n",Gamma);
fprintf(fInfo,"Rauschen: %f \n",Rauschen);
fprintf(fInfo,"Breite: %f \n",Breite);
fprintf(fInfo,"R: %f \n",R);
fprintf(fInfo,"Antriebswellenlaenge kaw: %d \n",kaw);
fprintf(fInfo,"DIM: %d\n \n",DIM);

// Iteration

fprintf(fInfo,"Zeitparameter:\n");
fprintf(fInfo,"-----\n \n");

fprintf(fInfo,"Iteration: %d\n",t);

fclose(fInfo);
}

/*****
/*****
/*****

void CFL(char fileInfo[300],double V[2][DIM+2][DIM+2],double L,double dx,double dtmax,
double ****dt,double Nue,int Bild,double Zeit)
{
//-----//
//
//          Programm zur Anpassung des Zeitschrittes
//          entsprechend der Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung
//-----//
//

FILE
*fCFL;

int
i,
j,
l,
VxVy,
xPos,
yPos;

double
Vmax,

```

```

    VMittel,
    Anzahl,
    Vmaxdt,
    Re;

double
    CFL1,
    CFL2,
    dtCFL,
    dtWert;

// Maximalwert der Geschwindigkeit Vmax, Mittelwert der Geschwindigkeit VMittel

Vmax = 0.0;
VMittel = 0.0;
Anzahl = 0.0;

for(l=0;l<2;l++)
{
    for(i=1;i<DIM+1;i++)
    {
        for(j=1;j<DIM+1;j++)
        {
            if(Vmax < sqrt((V[l][i][j])*V[l][i][j]))
            {
                // Bestimmung des Maximalwerts von V

                Vmax = sqrt((V[l][i][j]*V[l][i][j]));
                VxVy = 1;
                xPos = i;
                yPos = j;
            }

            // Bestimmung des Mittelwertes von V

            VMittel += sqrt((V[l][i][j]*V[l][i][j]));
            Anzahl++;
        }
    }
}

VMittel /= Anzahl;

// Bestimmung der Reynoldszahl Re = VMittel*L/Nue;

Re = VMittel*L/Nue;

if((Vmax != 0.0))
{
    // Die Courant-Friedrichs-Levi-Bedingung fuer den Zeitschritt

    // 1.)  $dt < dx^2 / 4 * Nue$  neue Formulierung
    // 2.)  $dt < dx / |Vmax|$ 

    CFL1 = (dx*dx)/(4.0*Nue);

    CFL2 = dx/Vmax;

```

```
// Auswahl der staerkeren dt - Einschraenkung

    if(CFL1 < CFL2)
    {
        dtCFL = CFL1;
    }
    else
    {
        dtCFL = CFL2;
    }

    // Suchen des entsprechenden dtmax/2^n - Wertes

    dtWert = dtmax;

    while(dtCFL < dtWert)
    {
        dtWert *= 0.5;
        printf("neuer dt-Wert: %lf\n",dtWert);
    }

    *****dt = dtWert;

}

printf("dt-Wert: %lf\n", (*****dt));
printf("Reynoldszahl Re = %f \n", Re);
printf("Vmax: %f \n", Vmax);


// Bestimmung von |Vmax*dt|

Vmaxdt = sqrt((Vmax*****dt)*(Vmax*****dt));


// Ausgabe der Daten in der Info - Datei

if(Bild == 1)
{

    fCFL=fopen(fileInfo,"a");

    // Zeitschritt

    fprintf(fCFL,"Zeitschritt: %f \n",*****dt);
    fprintf(fCFL,"Zeit: %f \n \n",Zeit);

    // Turbulenzdaten

    fprintf(fCFL,"Turbulenzdaten:\n");
    fprintf(fCFL,"-----\n \n");

    fprintf(fCFL,"Vmax: %f \n",Vmax);
    fprintf(fCFL,"Vx/Vy: %d (Vx=0,Vy=1)\n",VxVy);
    fprintf(fCFL,"xPos: %d \n",xPos);
    fprintf(fCFL,"yPos: %d \n",yPos);
    fprintf(fCFL," \n");
    fprintf(fCFL,"<V>:%f \n",VMittel);
    fprintf(fCFL,"|Vmax*dt|: %f \n",Vmaxdt);
    fprintf(fCFL,"Reynoldszahl Re = %f \n",Re);
    fprintf(fCFL," \n");
}
```

```
        fclose(fCFL);
    }

    // gesonderte Ausgabe der Reynoldszahl als Funktion des Iterationsschritts

    FILE *fRe;

    fRe = fopen("Re.dat","a");

    fprintf(fRe,"%f %lf\n",Zeit,Re);

    fclose(fRe);
}

/*****
/*****
/*****/
```


Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die freundliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und für die interessante Aufgabenstellung bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dipl.Phys. Oliver Kamps, der mir in dieser Diplomarbeit mit so manchem entscheidenden Tipp auf die Sprünge geholfen hat. Er war in dieser Zeit ein ausgezeichnete Betreuer, von dem ich so viel lernen konnte, und der mich mit seinem enormen physikalischen Verständnis immer wieder beeindruckt.

Sehr herzlich danken möchte ich auch meinen Bürokollegen Andreas Wilmer und meinem Freund Lars Lühning, mit denen ich eine wunderschöne Diplom-arbeitszeit verbringen durfte, und die mich gerade in der Endphase des Zusam-menschreibens so freundlich unterstützt haben.

Ich danke Herrn Dipl.Phys. David Kleinhans, der mir – glaube ich – wohl jede Frage zu Linux, Gnuplot & Co beantworten könnte.

Schließlich danke ich besonders meinen Eltern, die mir dieses Studium ermöglicht haben und auf deren Unterstützung ich jederzeit vertrauen kann.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 13. Oktober 2005