



– Bachelorarbeit –

# **Großskalige Winde bei der turbulenten Rayleigh-Bénard Konvektion**

Large-scale winds in turbulent Rayleigh-Bénard convection

Katharina Ritter

Juni 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Turbulente Phänomene . . . . .	1
1.2	Rayleigh-Bénard-System . . . . .	2
1.3	Großskalige Winde und <i>Reversals</i> . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Boussinesq-Approximation . . . . .	3
2.1.1	Randbedingungen . . . . .	4
2.1.2	Behandlung des Auftriebsterms . . . . .	4
2.1.3	Vereinfachung durch Entdimensionalisierung . . . . .	5
2.2	Nähere Betrachtung des Temperaturfeldes . . . . .	5
2.2.1	Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .	5
2.2.2	Problematik der Nichtlinearität . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Modell für die Amplituden des Temperaturfeldes</b>	<b>8</b>
3.1	Ansatz der Modenzerlegung . . . . .	8
3.2	Koeffizienten $a, b$ . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Untersuchung des Gleichungssystems</b>	<b>10</b>
4.1	Analyse der Fixpunkte . . . . .	10
4.1.1	Fixpunkt $(0, 0)$ . . . . .	11
4.1.2	Fixpunkt $(0, -\frac{\epsilon_g}{c})$ . . . . .	11
4.1.3	Fixpunkte $\left(\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a}\right)$ . . . . .	11
4.2	Verhalten im Phasenraum . . . . .	15
4.3	Das Gleichungssystem als Hamilton'sches System . . . . .	21
4.4	Varianten des Gleichungssystems . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Diskussion</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>28</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>I</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>II</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>III</b>

# 1 Einführung

*Wie faszinierend es doch sein kann, einen Schluck kalte Milch in den heißen Tee zu gießen und mit dem Umrühren ein wenig zu warten. In der Zwischenzeit wogt die Milch durch den Tee und viele kleine Verwirbelungen werden sichtbar. Genauso ergeben sich Muster, von denen man behaupten würde, so etwas Ähnliches doch gerade zuvor schon einmal gesehen zu haben...*

## 1.1 Turbulente Phänomene

Selbstähnlichkeit, komplexe raumzeitliche Strukturen und damit mitunter schwierig zu durchdringende Dynamiken sowie die sensible Reaktion eines Systems auf Anfangs- und Randbedingungen sind wohl Stichworte, die unmittelbar mit dem Begriff der Turbulenz verknüpft sind. Turbulenzen spielen beispielsweise eine Rolle, wenn man die Bewegung der Erdplatten verstehen will, die durch aus Temperaturdifferenzen resultierender Konvektion im Erdinneren getrieben wird. Ein vollkommen anderes Anwendungsgebiet ist das Designen von Gebäuden, die ohne Klimaanlage auskommen. Dazu muss man zum einen über gute Baumaterialien verfügen, andererseits jedoch auch verstehen, wie die Wärmeströme sich verhalten. Ein weiteres prominentes Beispiel sind die Verwirbelungen in der Luft, wie sie hinter Triebwerken entstehen. Turbulente Wirbelschleppen können zu erheblichen Flugproblemen führen.

Zu den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit es zu Turbulenzen kommt, zählen in obigen Beispielen unter anderem genügend große Temperaturdifferenzen. Man kann die Temperaturdifferenzen als eine Störung des Systems auffassen, die unkontrolliert verlaufende Bewegungen im System zufolge haben. Ursprünglich auf Wärmetransport beruhende, geordnete Konvektionen gehen dann zu ungeordneten, „chaotischen“, turbulenten Konvektionen über. So ungeordnet das System auch erscheinen mag, selbst im turbulenten Regime lassen sich gewisse Strukturen identifizieren – eine Tatsache, die es uns ermöglicht, das Verhalten solcher Systeme immer mehr zu durchdringen.

Ein System verhält sich nie ausschließlich turbulent. Vielmehr ist ein System bis zu einer kritischen Schwelle hin stabil. Erst wenn die Geometrie, Temperaturunterschiede etc. das Überschreiten dieser Schwelle erzwingen, wird ein System instabil und turbulente Phänomene treten zutage. Oftmals lassen sich diese kritischen Verzweigungspunkte, sogenannte Bifurkationen<sup>1</sup>, berechnen. Über die Dynamiken zwischen diesen Punkten weiß man jedoch verhältnismäßig wenig, bisweilen gar nichts. Ungeklärt ist ebenso, ob das System am Ende<sup>2</sup> einen universellen Zustand einnimmt oder es verschiedene Endszenarien gibt.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem vielfach untersuchten System – dem Rayleigh-Bénard-System – welches wir in den folgenden Abschnitten phänomenologisch und mathematisch ein wenig kennen lernen wollen. Im Speziellen soll dann ein Modell für das Auftreten von *Reversals* bei großskaligen Winden, also dem Orientierungswechsel der Konvektionsmuster, entwickelt werden. Dieses

<sup>1</sup>Bifurkationen sind anschaulich gesprochen Weggabelungen, an denen das System sein Verhalten grundlegend ändert wie zum Beispiel beim Übergang hin zu turbulenten Strömungen. Man spricht von stabilen Zweigen, wenn man das Verhalten tatsächlich beobachten kann. Instabile Zweige werden hingegen nicht beobachtet.

<sup>2</sup>„Ende“ meint den Grenzfall der das System charakterisierenden Rayleighzahl  $Ra \rightarrow \infty$  (siehe auch Kapitel 2.1.3)

Phänomen ist im turbulenten Bereich des Systems zu beobachten. Dabei interessieren wir uns für die zeitliche Entwicklung der Amplituden der Moden des Temperaturfeldes. Die Amplituden erhält man durch Projektion auf entsprechende Basismoden. Das angenommene Gleichungssystem wird anschließend mittels linearer Stabilitätsanalyse auf sein Verhalten hin untersucht. Abschließend werden die Ergebnisse mit denen aus numerischen Simulationen verglichen und beurteilt.

## 1.2 Rayleigh-Bénard-System

Das Rayleigh-Bénard-System besteht aus einem Fluid, welches zwischen zwei horizontalen Platten eingeschlossen ist. An der unteren Platte wird das System geheizt, sodass erwärmtes Fluid geringerer Dichte zur oberen, kühleren Platte aufsteigt, dort abgekühlt wird und wieder nach unten fällt. Diese Konvektion tritt infolge von Gravitation auf. Die sich dabei ausbildenden Konvektionsmuster sind vielfältig und stark mit dem vorherrschenden Temperaturgradienten verknüpft, wobei die Komplexität mit wachsender Temperaturdifferenz zunimmt. Genauso sind die entstehenden Strukturen von der Geometrie des Systems abhängig, welche in der Rayleighzahl sowie im Seitenverhältnis Berücksichtigung findet.

Historisch geht das Rayleigh-Bénard-System auf die Dissertation von Henri Bénard aus dem Jahre 1900 zurück, in der er das Experiment ausführlich behandelt. Lord Rayleigh, der zweite Namensgeber, beschrieb das System 1916 erstmals theoretisch.

## 1.3 Großskalige Winde und *Reversals*

Betrachtet man ein zweidimensionales, rechteckiges Rayleigh-Bénard-System mit festem Seitenverhältnis bei genügend großen Rayleighzahlen, so bilden sich im System Konvektionsmuster, die aus einer oder zwei zentralen großen Konvektionsrollen sowie kleineren Rollen bestehen können, die in den Ecken liegen. Die Orientierung der Konvektionsrollen schlägt im zeitlichen Verlauf in die Gegenrichtung um. Man spricht von einem *Reversal*. Dabei scheinen die Eckrollen einen entscheidenden Anteil zu diesem Umkehrprozess beizutragen. Wachsen die Amplituden der Eckrollen so an, dass sie auf die zentrale, großskalige Konvektion in entscheidendem Maße störend wirken, findet der Orientierungswechsel statt. Getrieben werden diese Prozesse durch sich von den Grenzschichten ablösende *plumes*. Von unten steigt pilzartig sehr viel heißes Fluid nach oben (umgekehrt fällt kaltes Fluid sehr schnell nach unten). Die Wärme wird dann in Form kinetischer Energie zum Teil in den Eckrollen „gespeichert“, sodass infolge dessen die Amplituden dieser Eckmoden anwachsen. Beispielsweise werden in [SNS<sup>+</sup>10] diese Phänomene auf Basis statistischer Analysen von numerischen Simulationen beschrieben und diskutiert.

Bislang ist jedoch unseres Wissens nach weitestgehend ungeklärt, wie sich diese Umkehrprozesse im Detail erklären oder mathematisch beschreiben lassen, wenn man sich nicht mit Nichtlinearitäten beschäftigen möchte, wie sie den Grundgleichungen entspringen. Dies soll uns als Motivation für die Modellbildung in dieser Arbeit dienen.

## 2 Mathematische Grundlagen

Für die Beschreibung des Rayleigh-Bénard-Systems sind drei Größen wesentlich: das vektorielle Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , das skalare Temperaturfeld  $T(\mathbf{x}, t)$  und der Druck  $p(\mathbf{x}, t)$ . Die Größen sind orts- und zeitabhängig;  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  und  $t \in \mathbb{R}$ .

Man betrachtet nun ein inkompressibles Fluid, auf das eine externe Kraft wirkt. Dann gilt für das Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - g \frac{\rho}{\rho_0} \vec{e}_z \quad (2.1)$$

als Evolutionsgleichung. Dabei ist  $\nu$  die kinematische Viskosität und  $\rho$  die Dichte des Fluids. Die Nichtlinearität  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  beschreibt den Transport des Feldes,  $g$  ist die Erdbeschleunigung. Der Druckterm stellt lediglich sicher, dass die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt ist, weshalb für den Druck keine Zustandsgleichung benötigt wird. Die Evolution des Geschwindigkeitsfeldes wird insgesamt durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben, der der Kraftterm  $-g \frac{\rho}{\rho_0} \vec{e}_z$  hinzugefügt wurde.

Aufgrund der Inkompressibilität des Fluids muss des Weiteren

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.2)$$

erfüllt sein.

Das Temperaturfeld  $T$  genügt der Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = \kappa \Delta T(\mathbf{x}, t). \quad (2.3)$$

Der Term  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$  ist für die Kopplung des Temperaturfeldes an das Geschwindigkeitsfeld, also die Advektion, zuständig;  $\kappa$  ist der Wärmeleitungskoeffizient des Fluids.

In der Behandlung der Gleichungen stellen die Nichtlinearität und der Druckterm in (2.1), der zu nichtlokalen Effekten führt, eine Herausforderung dar. Eine vielfach verwendete, geeignete Näherung für die Grundgleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) ist die Boussinesq-Näherung.

### 2.1 Boussinesq-Approximation

Die Boussinesq-Approximation ist nach V. J. Boussinesq [Bou03] benannt. Sie macht einen Ansatz für die Dichte des Fluids und geht dabei davon aus, dass die Temperaturabhängigkeit der Fluidichte vernachlässigbar gering ist. Dazu seien die Änderungen in der Temperatur und damit die temperaturabhängigen Dichteänderungen klein. Die Temperaturabhängigkeit findet nur im Term für das Einwirken externer Kräfte Berücksichtigung. Eigentlich sind auch materialabhängige Größen wie  $\nu$ ,  $\kappa$  von der Temperatur abhängig, welche jedoch im Rahmen der Näherung ebenfalls vernachlässigt werden.

Die Dichte  $\rho$  verändere sich linear mit der Temperatur, sodass

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (2.4)$$

für den Auftriebsterm formuliert werden kann.  $\rho_0$  ist die Dichte des Fluids bei einer Referenztemperatur  $T_0$ ,  $\alpha$  der Wärmeausdehnungskoeffizient. Damit folgen die Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + g\alpha T(\mathbf{x}, t) \vec{e}_z \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) = \kappa \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (2.5b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.5c)$$

Wie bereits erwähnt, werden die Temperaturschwankungen als klein angenommen. Für zu große Temperaturdifferenzen treten sogenannte Nicht-Boussinesq-Effekte im System auf, auf die hier lediglich hingewiesen sei.

### 2.1.1 Randbedingungen

Im Rayleigh-Bénard-Experiment ist das Fluid zwischen zwei horizontalen Platten verschiedener Temperatur eingesperrt. Der Abstand dieser Platten betrage  $h$ , sodass  $z = 0$  und  $z = h$  die Lage der Platten beschreibt. In x-y-Richtung nimmt man ein unendlich ausgedehntes Fluid an. Für die mathematische Behandlung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes müssen diese gewisse Randbedingungen erfüllen.

Für das Geschwindigkeitsfeld lassen sich verschiedene Randbedingungen formulieren. Sollen an den Rändern *no slip*-Bedingungen gelten, sind alle Geschwindigkeitskomponenten gleich Null:

$$\mathbf{u}(x, y, z = 0, t) = \mathbf{u}(x, y, z = h, t) = 0 \quad (2.6)$$

Für spannungsfreie Ränder wird gefordert, dass an den Stellen  $z = 0$  und  $z = h$

$$u_z = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0, \quad \forall x, y, t \quad (2.7)$$

gilt. Die restlichen Komponenten  $u_x, u_y$  des Geschwindigkeitsfeldes sind dabei beliebig. Ebenso gelten als Randbedingungen für das Temperaturfeld

$$T(x, y, z = 0, t) = T_u \quad (2.8a)$$

$$T(x, y, z = h, t) = T_o. \quad (2.8b)$$

Die Temperatur der Platten wird also als konstant angenommen.

### 2.1.2 Behandlung des Auftriebsterms

In der Evolutionsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld (2.5a) finden sich ein Druckgradient und eine Temperaturabhängigkeit. Geht man nun vom wärmeleitenden Grundzustand  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$  aus, dann folgt, dass Druck und Temperatur nur noch von der Höhe  $z$  abhängen. Die Betrachtung des Temperaturfeldes  $T(\mathbf{x}, t)$  oder aber einer Abweichung  $\theta(\mathbf{x}, t)$  von einem linearen Temperaturprofil  $T_{\text{lin}}(z)$  zwischen den Platten ändert lediglich die Bedeutung des Druckes. Genauso betrachtet man entweder den Druck  $p(\mathbf{x}, t)$  oder die Abweichung des Druckes  $P(\mathbf{x}, t)$  von dem Druckprofil  $p_{\text{lin}}(z)$ :

$$T(\mathbf{x}, t) = \theta(\mathbf{x}, t) + T_{\text{lin}}(z) \quad (2.9a)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}, t) + p_{\text{lin}}(z) \quad (2.9b)$$

### 2.1.3 Vereinfachung durch Entdimensionalisierung

Das Einführen von dimensionslosen Variablen ermöglicht es, die Gleichungen (2.5) weiter zu reduzieren und charakteristische, dimensionslose Parameter anzugeben. Dazu werden folgende Übergänge gemacht:

$$\frac{1}{h} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \quad (2.10a)$$

$$\frac{\kappa}{h^2} t \rightarrow t' \quad (2.10b)$$

$$\frac{h}{\kappa} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}' \quad (2.10c)$$

$$\frac{h^2}{\kappa^2} p \rightarrow p' \quad (2.10d)$$

$$\frac{1}{T(z=h) - T(z=0)} \theta \rightarrow \theta' \quad (2.10e)$$

Im Folgenden werden die Striche der Übersicht halber weggelassen.

Die entdimensionalisierten Gleichungen für das Rayleigh-Bénard-System lauten folgendermaßen:

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla P(\mathbf{x}, t) + \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \text{Ra} \cdot \theta(\mathbf{x}, t) \vec{e}_z \quad (2.11a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \theta(\mathbf{x}, t) = \Delta \theta(\mathbf{x}, t) + u_z(\mathbf{x}, t) \quad (2.11b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.11c)$$

Als dimensionslose Größen ergeben sich die Prandtlzahl  $\text{Pr}$  und die Rayleighzahl  $\text{Ra}$  zu

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (2.12)$$

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g (T_o - T_u) h^3}{\nu \kappa}. \quad (2.13)$$

Die Prandtlzahl setzt die kinematische Viskosität und die Temperaturleitfähigkeit ins Verhältnis und ist damit eine durch das Fluid gegebene Kenngröße. Die Rayleighzahl beschreibt den Wärmetransport innerhalb des Fluids. Neben der Rayleighzahl beschreibt vor allem das Seitenverhältnis  $\Gamma = \frac{\text{Systembreite}}{\text{Systemhöhe}}$  die Geometrie des Systems. Rayleighzahl und Seitenverhältnis stellen damit extern einstellbare Parameter dar.

Bei großen Prandtlzahlen können Trägheitseffekte im System vernachlässigt werden. Das Geschwindigkeitsfeld verhält sich dann wie es das Temperaturfeld vorgibt.

## 2.2 Nähere Betrachtung des Temperaturfeldes

### 2.2.1 Lineare Stabilitätsanalyse

In einem engen Rahmen kann das Rayleigh-Bénard-System analytisch behandelt werden. Für kleine Rayleighzahlen kann mithilfe einer linearen Stabilitätsanalyse gezeigt werden, dass sich bei einer kritischen Rayleighzahl Konvektionsrollen im Fluid ausbilden. Dabei werden die Oberbeck-Boussinesq-Gleichungen zugrunde gelegt.

Es wird an dieser Stelle auf die Darstellung der mathematischen Details verzichtet und auf entsprechende Bücher zum Thema verwiesen, u.a. [Cha61].

Kern der Behandlung der Gleichungen (2.11) ist, dass sich das Geschwindigkeitsfeld in Abhängigkeit des Temperaturfeldes als

$$\mathbf{u} = (\nabla \times \nabla \times \vec{e}_z \Delta^{-2} \theta) \text{Ra} \quad (2.14)$$

ausdrücken lässt. Die z-Komponente ist also  $u_z = -\text{Ra} \Delta^{(2)} \Delta^{-2} \theta$ . Auf diese Weise erhält man aus (2.11b) eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \Delta \theta - \text{Ra} \Delta^{(2)} \Delta^{-2} \theta. \quad (2.15)$$

$\Delta^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ist hier der Laplace-Operator in zwei Dimensionen,  $\Delta^{-2}$  der inverse Laplace-Operator<sup>1</sup> zum Quadrat.

Für den linearen Fall gilt, dass  $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0$  ist. Betrachtet wird also nur

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \Delta \theta - \text{Ra} \Delta^{(2)} \Delta^{-2} \theta. \quad (2.16)$$

Betrachten wir von nun an nur noch den zweidimensionalen Fall.

Da das Temperaturprofil linear ist und die Platten eine konstante Temperatur besitzen, erfüllt der Ansatz

$$\theta(x, z, t) = e^{\lambda_{kl} t} e^{ikx} \sin(\pi l z) = e^{\lambda_{kl} t} \theta_{kl} \quad (2.17)$$

die Gleichung (2.16). Die Reduktion der Dimension hat zufolge, dass  $\Delta^{(2)}$  in  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  übergeht. Es liegt damit ein Eigenwertproblem vor:

$$\lambda_{kl} \theta_{kl} = (\Delta - \text{Ra} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta^{-2}) \theta_{kl}. \quad (2.18)$$

Lösen des Eigenwertproblems und Betrachten des stationären Falls  $\lambda_{kl} = 0$  ergibt die kritische Rayleighzahl  $\text{Ra}_c$  zu

$$\text{Ra}_c = \frac{(k^2 + \pi^2 l^2)^3}{k^2}. \quad (2.19)$$

Erreicht die Rayleighzahl den kritischen Wert, so geht der Wärmetransport durch Wärmeleitung in konvektionsgetriebenen Wärmetransport über. Für  $l = 1$  lässt sich eine minimale kritische Rayleighzahl  $\text{Ra}_{c,\min} = \frac{27\pi^4}{4}$  bei einer minimalen Wellenzahl  $k_{\min} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  angeben. Da die kritische Rayleighzahl lediglich von  $k$  und  $l$  abhängt, hängt sie nur vom Seitenverhältnis der entstehenden Konvektionsrollen ab.

Als allgemeine Lösung erhält man für das Temperaturfeld  $\theta$  eine Superposition aller Eigenfunktionen  $\theta_{kl}$ , die orthonormal zueinander sind:

$$\theta(x, z, t) = \sum_{k,l} e^{\lambda_{kl} t} \xi_{kl}(0) \theta_{kl} = \sum_{k,l} \xi_{kl}(t) \theta_{kl}, \quad (2.20)$$

wobei  $\xi_{kl}(t)$  die zeitliche Entwicklung der Amplitude der dazugehörigen Mode ist.

<sup>1</sup> $\Delta^{-2}$  steht formal für eine Lösung durch Benutzung einer Green'schen Funktion.



### 2.2.2 Problematik der Nichtlinearität

In der linearen Stabilitätsanalyse wird die Nichtlinearität  $-\mathbf{u} \cdot \nabla \theta$  vernachlässigt. Um für die Amplituden  $\xi$  eine Evolutionsgleichung zu finden, muss diese Nichtlinearität jedoch berücksichtigt werden, denn in ihr ist die Information enthalten, wie die Moden untereinander koppeln und so einen Beitrag zu einer bestimmten Mode liefern.

Wir gehen von Gleichung (2.15) aus und machen folgende Ansätze für das Temperaturfeld  $\theta$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$ :

$$\theta(x, z, t) = \sum_{k,l} \xi_{kl}(t) \theta_{kl}(x, z), \quad (2.21)$$

$$\mathbf{u}(x, z, t) = \sum_{k,l} \tilde{\xi}_{kl}(t) \begin{pmatrix} v_{kl} \\ w_{kl} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Setzen wir dies in Gleichung (2.15) und nutzen aus, dass die Eigenfunktionen  $\theta_{kl}$  paarweise orthogonal zueinander sind, so führt das auf die Gleichung

$$\dot{\xi}_{kl} + \sum_{k',l'} \sum_{k'',l''} \tilde{\xi}_{k'l'} \xi_{k''l''} \langle \theta_{kl} | \mathbf{u}_{k'l'} \cdot \nabla \theta_{k''l''} \rangle = \sum_{k',l'} \left( \xi_{k'l'} \langle \theta_{kl} | \Delta \theta_{k'l'} \rangle + \tilde{\xi}_{k'l'} \text{Ra} \langle \theta_{kl} | w_{k'l'} \rangle \right), \quad (2.23)$$

in der sich die Auswertung des Skalarproduktes  $\langle \theta_{kl} | \mathbf{u}_{k'l'} \cdot \nabla \theta_{k''l''} \rangle$  als schwierig gestaltet. Die Modenkopplungskoeffizienten unterliegen zwar gewissen Auswahlregeln, deren vollständige Formulierung jedoch nicht geschlossen angegeben werden kann. Eine Möglichkeit das unendlich-dimensionale Gleichungssystem numerisch anzugehen ist die Anwendung des Galerkin-Verfahrens. Die Kunst besteht darin, die Approximation geschickt abubrechen, sodass die Terme vernachlässigt werden, die bei der Modenkopplung nicht mehr ins Gewicht fallen.

Es ist also wünschenswert, über ein einfaches Modell für die zeitliche Entwicklung der Amplituden  $\xi$  zu verfügen, um den Schwierigkeiten des Modenkopplungsterms in Gleichung (2.23) zu entkommen. Im folgenden Kapitel 3 soll ein solches Modell entwickelt werden.

## 3 Modell für die Amplituden des Temperaturfeldes

In diesem Kapitel wollen wir ein Gleichungssystem für die zeitliche Entwicklung der Amplituden des Temperaturfeldes entwickeln. Dabei wählen wir als Ansatz, dass sich das Feld in gerade und ungerade Moden zerlegen lässt und untersuchen anschließend in Kapitel 4 das sich aus Symmetrieüberlegungen ergebende Gleichungssystem auf seine Dynamik hin. Des Weiteren werden in Kapitel 5 die Ergebnisse mit numerisch erzeugten Daten verglichen, um so das gewählte Gleichungssystem beurteilen zu können.

### 3.1 Ansatz der Modenzerlegung

Aus numerischen Experimenten wie sie u.a. in [Sin11, SNS<sup>+</sup>10, Lül11] untersucht werden geht hervor, dass sich offensichtlich verschiedene Moden des Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeldes überlagern und so eine Rollenstruktur ausbilden wie in Abbildung 3.1 beispielhaft dargestellt ist.

Ausgehend von dieser Überlagerung liegt für uns der Ansatz nahe, dass sich das Temperaturfeld aus einer geraden und einer ungeraden Basismode zusammensetzt. „Gerade“ und „ungerade“ beziehen sich hierbei auf das Verhalten gegebenüber Spiegelung. Sei die ungerade Mode durch  $\varphi_u$  und die gerade Mode durch  $\varphi_g$  gegeben. Durch Projektion des Feldes auf diese Basismoden  $\varphi_u, \varphi_g$  erhalten wir ihre Gewichtung in Form der entsprechenden Amplituden  $\xi_u$  und  $\xi_g$ . Das Feld lässt sich dann

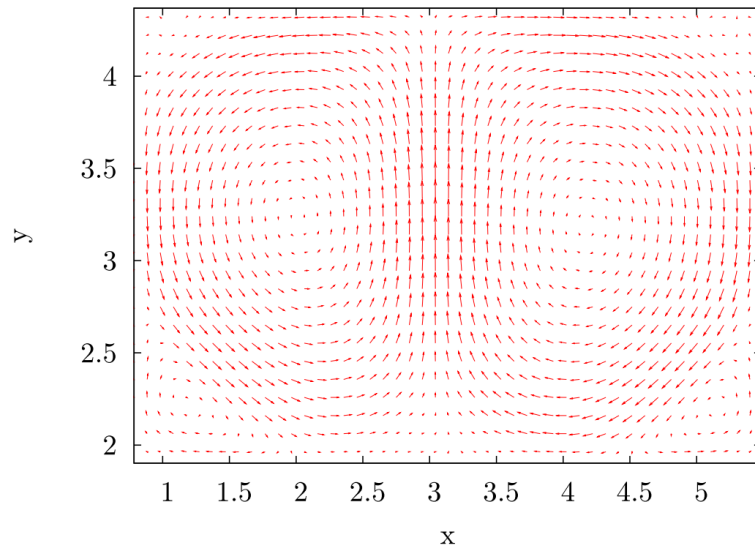


Abbildung 3.1: Zeitgemitteltes Geschwindigkeitsfeld für die Simulationsparameter  $Ra = 10^7$ ,  $Pr = 1$ , Anzahl der Datenpunkte  $N_x = N_y = 512$ , Seitenverhältnis  $\Gamma = 1.9$  [Sin11].

ausdrücken als

$$\theta(x, z, t) = \xi_u(t)\varphi_u(x, z) + \xi_g(t)\varphi_g(x, z) + R(x, z, t). \quad (3.1)$$

Das Residuum  $R$  fasst dabei die Terme zusammen, die im Rahmen unserer Näherung vernachlässigt werden. Natürlich muss man an dieser Stelle Informationsverluste in Kauf nehmen, da Basismoden höherer Ordnung nicht beachtet werden.

Gesucht ist nun ein Gleichungssystem für die zeitliche Entwicklung der Amplituden  $\dot{\xi}_u, \dot{\xi}_g$ .

Gleichung (2.15) dient als Ausgangspunkt. Mit  $L = \Delta - \text{Ra}\Delta^{(2)}\Delta^{-2}$  lautet sie

$$\dot{\theta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = L\theta. \quad (3.2)$$

Die Zerlegung in gerade und ungerade Moden fordert, dass sich die Gleichungen für  $\xi_u$  antisymmetrisch und für  $\xi_g$  symmetrisch verhalten. Desweiteren sollten in der zeitlichen Entwicklung der ungeraden Mode keine geraden Terme  $\xi_u^2, \xi_g^2, \dots$  auftreten sowie umgekehrt in der geraden Mode keine ungeraden Terme  $\xi_u\xi_g, \dots$  stehen dürfen.

Basierend auf diesen Annahmen liegt für die zeitliche Entwicklung

$$\dot{\xi}_u = \epsilon_u \xi_u - a \xi_u \xi_g + r_u \quad (3.3a)$$

$$\dot{\xi}_g = \epsilon_g \xi_g + b \xi_u^2 + c \xi_g^2 + r_g \quad (3.3b)$$

als erster Ansatz für ein Gleichungssystem nahe. Die Koeffizienten  $\epsilon_u, \epsilon_g, a, b, c \in \mathbb{R}$  sind bis auf Weiteres zunächst unbekannt,  $r_u$  und  $r_g$  beschreiben Terme höherer Ordnungen, die im Folgenden jedoch vernachlässigt werden.

### 3.2 Bemerkung zu den Koeffizienten $a, b$ des Gleichungssystem

Setzen wir den Ansatz der Modenzerlegung  $\theta = \theta_u + \theta_g$  in (3.2) ein, so erhalten wir aufgrund der linearen Unabhängigkeit von gerader und ungerader Mode:

$$\dot{\theta}_u + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_u + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_g = L\theta_u \quad (3.4a)$$

$$\dot{\theta}_g + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_u + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_g = L\theta_g \quad (3.4b)$$

In beiden Gleichungen (3.4) steht ein Kopplungsterm  $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta_g$  bzw.  $\mathbf{u} \cdot \nabla \theta_u$ . Unser aufgestelltes Gleichungssystem (3.3) weist ebenfalls Kopplungsterme auf, denen die Koeffizienten  $a, b$  zugewiesen sind. Multiplizieren wir (3.4a) mit  $\theta_g$  und (3.4b) mit  $\theta_u$ , so verbleiben von (3.4) zwei Skalarprodukte, die der Kopplung zuzuordnen sind:

$$0 = \langle \theta_g | \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_u \rangle \quad (3.5a)$$

$$0 = \langle \theta_u | \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_g \rangle \quad (3.5b)$$

Hieraus lässt sich schließen, dass die Koeffizienten  $a, b$  das gleiche Vorzeichen haben müssen.

Insgesamt erhalten wir für die zeitliche Entwicklung der Amplituden ein System nichtlinearer gekoppelter Differentialgleichungen, deren Eigenschaften im folgenden Kapitel 4 näher beleuchtet werden sollen.

## 4 Untersuchung des Gleichungssystems

Bei dem Gleichungssystem (3.3) handelt es sich um ein System nichtlinearer gekoppelter Differentialgleichungen, für das keine analytische Lösung  $\xi_g(\xi_u)$  angegeben werden kann. Wir werden uns der Dynamik des Systems annähern, indem wir das System einer linearen Stabilitätsanalyse unterziehen. Durch eine lineare Stabilitätsanalyse können Aussagen über das Verhalten des Systems in der Nähe seiner Fixpunkte gemacht werden. Ein Fixpunkt zeichnet sich dadurch aus, dass er eine stationäre Lösung für das zeitabhängige Gleichungssystem ist. Betrachtet man nun dessen Umgebung, indem man das Gleichungssystem linearisiert und die Fixpunkte einsetzt, so erhält man Einblicke in die Dynamik des Systems. Weitere Erläuterungen zu diesem gängigen Verfahren finden sich in Lehrbüchern zur Dynamik nichtlinearer Systeme wie [GH83, Tab89].

### 4.1 Analyse der Fixpunkte

Zunächst werden die Fixpunkte des Systems bestimmt, also die Lösungen, für die  $\dot{\xi}_u = \dot{\xi}_g = 0$  gilt. Als Fixpunkte  $(\xi_{u,0}, \xi_{g,0})$  finden wir:

$$(0, 0) \quad (4.1a)$$

$$\left(0, -\frac{\epsilon_g}{c}\right) \quad (4.1b)$$

$$\left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g\epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a}\right) \quad (4.1c)$$

$$\left(-\frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g\epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a}\right) \quad (4.1d)$$

Der nächste Schritt ist die Linearisierung des Gleichungssystems (3.3), indem die Jacobi-Matrix mit  $J_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j}$  bestimmt wird, wobei  $\xi = (\xi_u, \xi_g)$ . Alle Terme höherer Ordnung als der linearen werden vernachlässigt.

$$\delta \dot{\xi}_u = (\epsilon_u - a\xi_g)|_{(\xi_{u,0}, \xi_{g,0})} \delta \xi_u - a\xi_u|_{(\xi_{u,0}, \xi_{g,0})} \delta \xi_g + \dots \quad (4.2a)$$

$$\delta \dot{\xi}_g = 2b\xi_u|_{(\xi_{u,0}, \xi_{g,0})} \delta \xi_u + (\epsilon_g + 2c\xi_g)|_{(\xi_{u,0}, \xi_{g,0})} \delta \xi_g + \dots \quad (4.2b)$$

Das System hat nun die Form  $\delta \dot{\xi} = J(\xi_{u,0}, \xi_{g,0}) \delta \xi$ . Nun gilt es, die Eigenwerte  $\lambda$  des Systems zu jedem Fixpunkt zu bestimmen und anschließend aus ihnen auf die Stabilität des Fixpunktes und damit auf das dynamische Verhalten des Systems in dessen Nähe zu schlussfolgern. Für jeden Fixpunkt wird jeweils die Jacobi-Matrix sowie die daraus resultierenden Eigenwerte angegeben. Soweit möglich wird ebenfalls eine allgemeine Lösung daraus abgeleitet. Des Weiteren wird die Stabilität des Fixpunktes innerhalb gewisser Annahmen bestimmt.

Für die Koeffizienten  $a, b, c$  gilt, dass sie ungleich Null sein müssen, da andernfalls die Fixpunkte nicht definiert sind.

**4.1.1 Fixpunkt  $(0, 0)$** 

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \epsilon_u & 0 \\ 0 & \epsilon_g \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\lambda_1 = \epsilon_u \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \epsilon_g \quad (4.4)$$

Der Fixpunkt  $(0, 0)$  ist je nach Wahl der Koeffizienten stabil, instabil oder hyperbolisch wie man der Tabelle 4.1 entnehmen kann. Als allgemeine Lösung ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \delta \xi_u \\ \delta \xi_g \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\epsilon_u t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\epsilon_g t} \quad (4.5)$$

Die Koeffizienten  $c_1, c_2$  wählen den Punkt im Phasenraum, dessen Entwicklung betrachtet wird;  $t$  gibt die Zeit an.

Tabelle 4.1: Stabilität des Fixpunktes  $(0, 0)$ .

Stabilität	Koeffizienten
stabil	$\epsilon_u, \epsilon_g < 0$
instabil	$\epsilon_u, \epsilon_g > 0$
hyperbolisch	$\epsilon_g < 0 < \epsilon_u$ $\epsilon_u < 0 < \epsilon_g$

**4.1.2 Fixpunkt  $(0, -\frac{\epsilon_g}{c})$** 

$$J\left(0, \frac{\epsilon_g}{c}\right) = \begin{pmatrix} \epsilon_u + \frac{a}{c}\epsilon_g & 0 \\ 0 & -\epsilon_g \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$$\lambda_1 = \epsilon_u + \frac{a}{c}\epsilon_g \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\epsilon_g \quad (4.7)$$

Aus Tabelle 4.2 lässt sich entnehmen, dass der Fixpunkt  $(0, -\frac{\epsilon_g}{c})$  stabil, instabil oder hyperbolisch sein kann. Die Nebenbedingungen entscheiden hierbei darüber, ob der Fixpunkt stabiles/instabiles oder hyperbolisches Verhalten zeigt. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{pmatrix} \delta \xi_u \\ \delta \xi_g \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{(\epsilon_u + \frac{a}{c}\epsilon_g)t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\epsilon_g t} \quad (4.8)$$

**4.1.3 Fixpunkte  $\left(\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a}\right)$** 

Die Vereinfachung, dass der Wurzelterm gleich Null ist, drängt sich zunächst auf. Als Ergebnis erhält man jedoch einen Eigenwert zu Null, was keine Information über die Stabilität des Fixpunktes einbringt. Daher berechnen wir zunächst einmal allgemein die Eigenwerte. Da die Determinante der Jacobimatrix für die Fixpunkte (4.1c) und (4.1d) dieselbe ist, fassen wir die Fixpunkte in der Analyse zusammen:

$$J\left(\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mp \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}} \\ \pm \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}} & \epsilon_g + \frac{2c}{a}\epsilon_u \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Tabelle 4.2: Stabilität des Fixpunktes  $(0, -\frac{\epsilon_g}{c})$ .

Stabilität	Koeffizienten		Nebenbedingung
stabil	$\epsilon_u, a < 0$	$\epsilon_g, c > 0$	
	$\epsilon_u, c < 0$	$\epsilon_g, a > 0$	
	$\epsilon_u, a, c < 0$	$\epsilon_g > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, a, c > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$a < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, c > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$c < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, a > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
instabil	$\epsilon_g, a < 0$	$\epsilon_u, c > 0$	
	$\epsilon_g, c < 0$	$\epsilon_u, a > 0$	
	$\epsilon_g, \epsilon_u, a, c < 0$		$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g, a, c < 0$	$\epsilon_u > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, a, c > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g, \epsilon_u, a < 0$	$c > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g, \epsilon_u, c < 0$	$a > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
hyperbolisch		$\epsilon_g, \epsilon_u, a, c > 0$	
	$\epsilon_g, \epsilon_u, a, c < 0$		
	$\epsilon_g, \epsilon_u < 0$	$a, c > 0$	
	$a, c < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u > 0$	
	$\epsilon_u, a < 0$	$\epsilon_g, c > 0$	
	$\epsilon_u, c < 0$	$\epsilon_g, a > 0$	
	$\epsilon_g, \epsilon_u, a < 0$	$c > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g, \epsilon_u, c < 0$	$a > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$a < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, c > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$c < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, a > 0$	$ \epsilon_u  >  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_u, a, c < 0$	$\epsilon_g > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, a, c > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g, a, c < 0$	$\epsilon_u > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $
	$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, a, c > 0$	$ \epsilon_u  <  \frac{a}{c}\epsilon_g $

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon_g}{2} + \frac{c\epsilon_u}{a} \pm \frac{\sqrt{(a\epsilon_g + 2c\epsilon_u)^2 + 8a(a\epsilon_g\epsilon_u + c\epsilon_u^2)}}{2a} \quad (4.10)$$

Um die Fallunterscheidung für die Koeffizienten  $a, c, \epsilon_u, \epsilon_g$  zu vereinfachen, führen wir für die Amplituden  $\xi$  und die Zeit  $t$  eine Skalierung ein:

$$\xi_u = \alpha \tilde{\xi}_u \quad (4.11a)$$

$$\xi_g = \beta \tilde{\xi}_g \quad (4.11b)$$

$$t = \tau \tilde{t} \Rightarrow \dot{\xi} = \frac{1}{\tau} \dot{\tilde{\xi}} \quad (4.11c)$$

Das Gleichungssystem (3.3) geht dann in

$$\dot{\tilde{\xi}}_u = \epsilon_u \tau \tilde{\xi}_u - a \beta \tau \tilde{\xi}_u \tilde{\xi}_g \quad (4.12a)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_g = \epsilon_g \tau \tilde{\xi}_g + b \frac{\alpha^2 \tau}{\beta} \tilde{\xi}_g^2 + c \beta \tau \tilde{\xi}_g^2 \quad (4.12b)$$

über. Die Koeffizienten  $\alpha, \beta$  werden so gewählt, dass  $a\beta\tau = b\frac{\alpha^2\tau}{\beta} = 1$  gilt, woraus im Übrigen auch direkt folgt, dass das Vorzeichen von  $a, b$  gleich ist. Weiterhin sei

$$\gamma := c\beta\tau. \quad (4.13)$$

Das linear reskalierte System (4.12) lässt sich so auf

$$\dot{\tilde{\xi}}_u = \epsilon_u \tilde{\xi}_u - \tilde{\xi}_u \tilde{\xi}_g \quad (4.14a)$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_g = \epsilon_g \tilde{\xi}_g + \tilde{\xi}_g^2 + \gamma \tilde{\xi}_g^2 \quad (4.14b)$$

reduzieren. Dabei entfällt jeweils aus den ersten Termen der rechten Handseite der Faktor  $\tau$ . Der Grund hierfür ist, dass die Zeit immer derart gewählt werden kann, sodass  $t, \tilde{t} \in \mathbb{R}_+$  und damit  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , sowie  $\tau$  in den sich ergebenden Eigenwerten bei der linearen Stabilitätsanalyse ausgeklammert werden kann. Daher hat  $\tau$  keinen Einfluss auf die Stabilität der Fixpunkte.

Nach diesen Überlegungen folgt für (4.10):

$$\lambda_{1,2} = \frac{\epsilon_g}{2} + \gamma\epsilon_u \pm \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_g^2 + 8\epsilon_g\epsilon_u + 4\epsilon_g\epsilon_u\gamma + 8\gamma\epsilon_u^2 + 4\gamma^2\epsilon_u^2} = A \pm B. \quad (4.15)$$

Die Analyse zeigt, dass der Fixpunkt (4.1c) bzw. (4.1d) stabiles, instabiles und hyperbolisches Verhalten, sowie stabile oder instabile Fixpunkte, in die das System hinein spiralt, ausbilden kann. Die Stabilität der Fixpunkte ist dabei sowohl von der Wahl der Koeffizienten als auch von dem Verhalten der beiden Terme  $A, B$  in (4.15) abhängig, was sich sich aus Tabelle 4.4 entnehmen lässt.

Die Fixpunkte sollen in  $\mathbb{R}$  liegen, woraus sich ableiten lässt, dass bei den Fixpunkten für den Term unter der Wurzel  $\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g\epsilon_u a}{b} > 0$  gelten muss. Die Gleichheit haben wir bereits ausgeschlossen. Im reskalierten System muss gelten:

$$\epsilon_u(-\epsilon_g - \gamma\epsilon_u) > 0. \quad (4.16)$$

Aus dieser Bedingung ergeben sich die Fallunterscheidungen für die Koeffizienten  $\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma$  wie sie in Tabelle 4.3 stehen.

Tabelle 4.3: Fallunterscheidungen für die Koeffizienten des reskalierten Gleichungssystems.

$\gamma$	$\epsilon_g$	$\epsilon_u$
$\gamma < 0$ ,	$\epsilon_g \leq 0$ ,	$\epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$
		$\epsilon_u > 0$
	$\epsilon_g > 0$ ,	$\epsilon_u < 0$
$\gamma > 0$ ,	$\epsilon_g < 0$ ,	$\epsilon_u > -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$
		$0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$
	$\epsilon_g > 0$ ,	$-\frac{\epsilon_g}{\gamma} < \epsilon_u < 0$

Die allgemeine Lösung wird im reskalierten System für den Fixpunkt (4.1c) durch

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{\xi}_u \\ \delta \tilde{\xi}_g \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2\sqrt{-\epsilon_u(\epsilon_g + \gamma\epsilon_u)}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{2\sqrt{-\epsilon_u(\epsilon_g + \gamma\epsilon_u)}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}, \quad (4.17)$$

und für den Fixpunkt (4.1d) durch

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{\xi}_u \\ \delta \tilde{\xi}_g \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{2\sqrt{-\epsilon_u(\epsilon_g + \gamma\epsilon_u)}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{2\sqrt{-\epsilon_u(\epsilon_g + \gamma\epsilon_u)}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (4.18)$$

beschrieben.

Tabelle 4.4: Stabilität der Fixpunkte  $(\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a})$  in Bezug auf die Eigenwerte (4.15).

Stabilität	$A \ \& \ B$	Koeffizienten	
stabil	$A < 0, B > 0, A > B$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g, \gamma < 0$	$\epsilon_u > 0$
		$\epsilon_g, \epsilon_u < 0$	$\gamma > 0$
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$
instabil	$A > 0, B > 0, A > B$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u, \gamma < 0$	$\epsilon_g > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$
			$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma > 0$
hyperbolisch	$A < 0, B > 0, A < B$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g, \gamma < 0$	$\epsilon_u > 0$
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$
	$A > 0, B > 0, A > B$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u, \gamma < 0$	$\epsilon_g > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$
			$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma > 0$
stabil spiralend	$A < 0, B < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$
instabil spiralend	$A > 0, B < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma < 0$	
		$\epsilon_g < 0$	$\epsilon_u, \gamma > 0$
		$\epsilon_u < 0$	$\epsilon_g, \gamma > 0$
		$\gamma < 0$	$\epsilon_g, \epsilon_u$



## 4.2 Verhalten im Phasenraum

Anhand der Trajektorien im Phasenraum lässt sich das dynamische Verhalten der Amplituden  $\xi_u$  und  $\xi_g$  veranschaulichen. Um erste Einblicke zu erhalten, wird das Gleichungssystem (4.14) zugrunde gelegt und die Amplituden unter der Wahl der Koeffizienten  $\epsilon_g, \epsilon_u, \gamma$  nach Tabelle 4.3 exemplarisch für die verschiedenen Fälle gegeneinander aufgetragen. Dabei wird auf [Cla09] zurückgegriffen.

Die Fallunterscheidungen

$$\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u > -\frac{\epsilon_g}{\gamma} \quad \text{und} \quad \gamma < 0, \epsilon_g < 0, \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$$

sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Phasenraumportraits sind jeweils für zwei unterschiedliche Parameterwahlen für  $\epsilon_u$  gezeichnet.  $(0, 0)$  ist bei den Systemen entweder ein stabiler (links) oder ein instabiler (rechts) Fixpunkt. In 4.1(a) laufen die Stromlinien in einen stabil spirалenden Fixpunkt, in 4.1(b) entspringen sie einem instabil spirалenden Fixpunkt. Im Gegensatz dazu sind die entsprechenden Punkte in 4.1(c) und 4.1(d) nur stabile oder instabile Fixpunkte. Hyperbolische Fixpunkte liegen entweder bei  $(0, 1)$ , wie in 4.1(a) und 4.1(c), oder bei  $(0, -1)$ .

Die Phasenraumportraits in Abbildung 4.2 zeigen ähnliches Verhalten wie die in Abbildung 4.1. Die Stromlinien entspringen entweder einem instabilen Fixpunkt und münden in einem stabil spirалenden, wie in 4.1(a) und 4.1(c) oder spirалen aus einem instabilen kommend hin zu einem stabilen Fixpunkt. Bis auf 4.1(c) weisen alle Phasenraumportraits einen hyperbolischen Fixpunkt bei  $(0, 0)$  auf. In 4.1(c) ist  $(0, 0)$  stabil.

Für

$$\gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma} \quad \text{und} \quad \gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$$

sind die Stromlinien stark in  $\xi_g$ -Richtung orientiert wie in Abbildung 4.3. Das linke System 4.3(a) besitzt vier Fixpunkte.  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  sind hyperbolisch, die anderen beiden bei  $(\pm 0.5, 0.5)$  sind spirалende Fixpunkte. Die entsprechende Vergrößerung in 4.3(c) gibt Aufschluss über die Details und weist auf Oszillationen im System hin. In 4.3(b) findet man bei  $(0, 0)$  einen stabilen und bei  $(0, -1)$  einen hyperbolischen Fixpunkt. Da die Amplitude  $\xi_g$  unbeschränkt ist, streben diese Systeme einer Resonanzkatastrophe entgegen, sind also nicht stabil. Für die Beschreibung unseres Systems sind daher derartige Parameterwahlen nicht geeignet.

In Abbildung 4.4 sieht man, dass sich die Richtung der Stromlinien umkehrt, wenn das Vorzeichen der Koeffizienten  $a, b$  negativ ist. Gleichzeitig muss  $c > 0$  gelten, und  $\epsilon_g, \epsilon_u$  müssen verschiedene Vorzeichen haben.

In allen Fällen sind bislang geforderte Relationen zwischen den Koeffizienten beachtet worden. Bei Missachtung der Relationen entstehen Phasenraumportraits wie in Abbildung 4.5. Sie werden hier nicht weiter behandelt, weil sie aufgrund der auftretenden Divergenzen das System nicht sinnvoll beschreiben. Stattdessen wenden wir uns der Diskussion derjenigen Ergebnisse zu, die die an die Koeffizienten gestellten Bedingungen erfüllen.

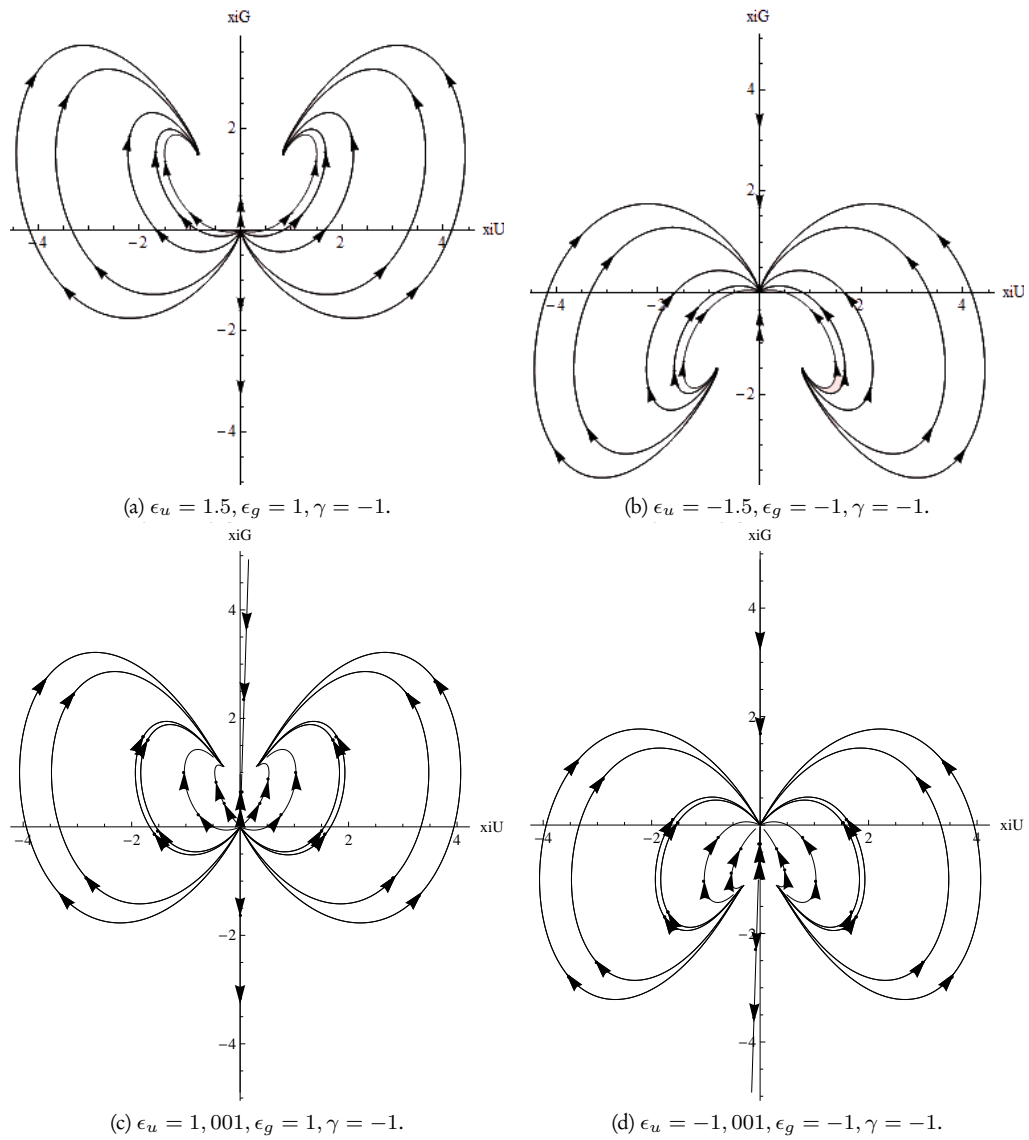


Abbildung 4.1: Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14). Links:  $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u > -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ ,  
rechts:  $\gamma < 0, \epsilon_g < 0, \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ .

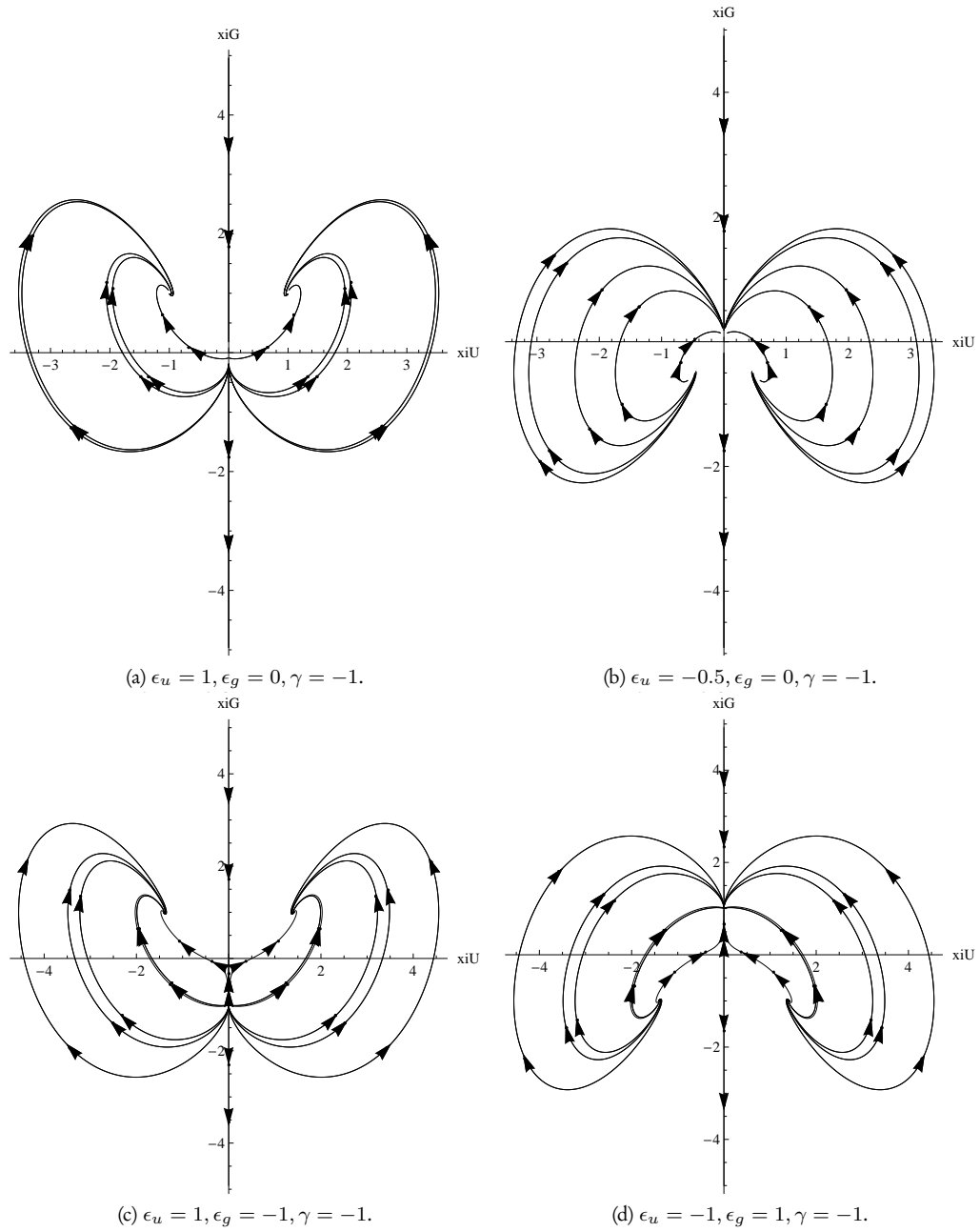


Abbildung 4.2: Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14).

Oben links:  $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u > 0$ ; oben rechts:  $\gamma > 0, \epsilon_g = 0, \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ ;  
 unten links:  $\gamma < 0, \epsilon_g < 0, \epsilon_u > 0$ ; unten rechts:  $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u < 0$ .

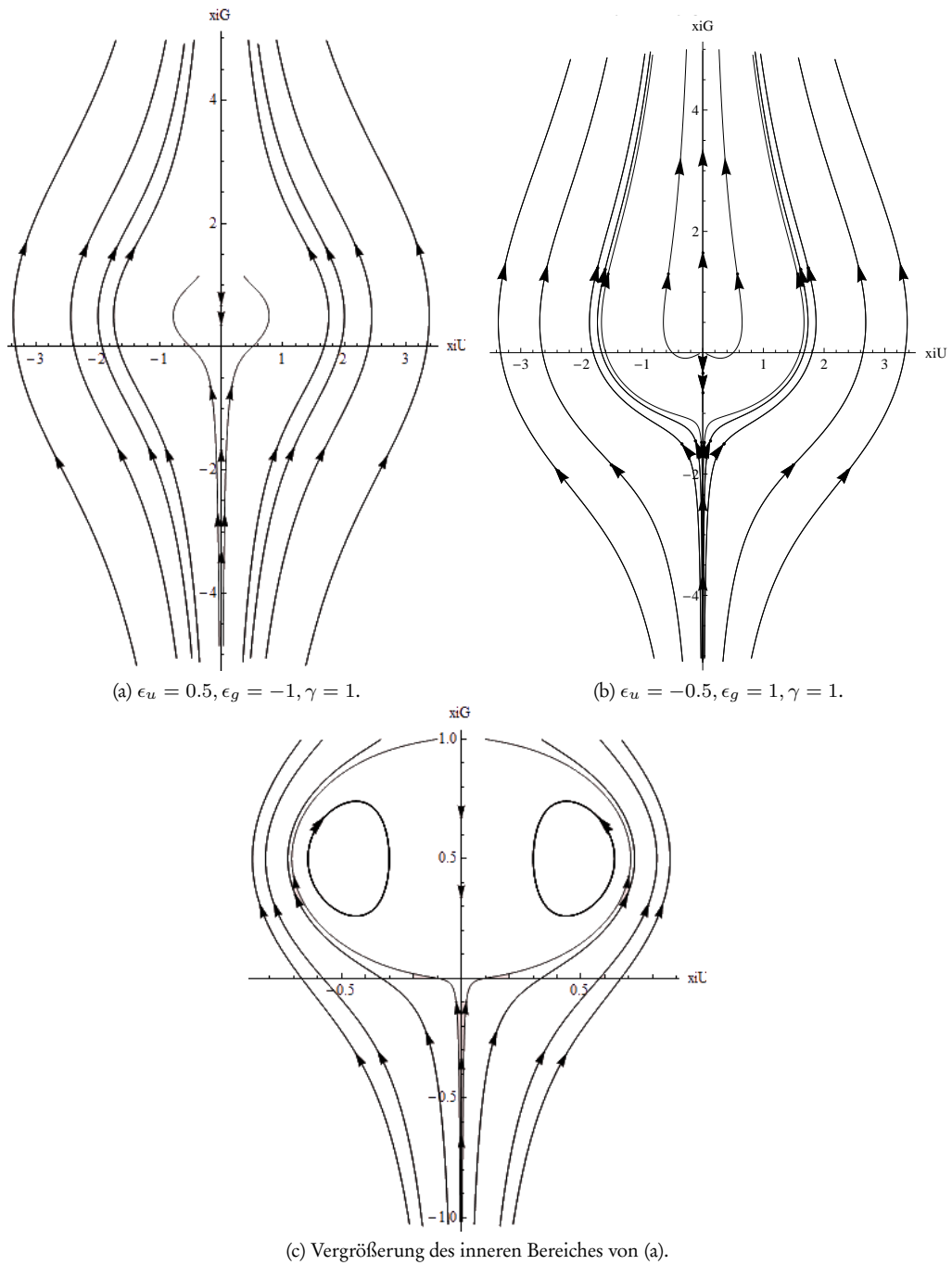


Abbildung 4.3: Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14).

Oben links:  $\gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ ; oben rechts:  $\gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ .

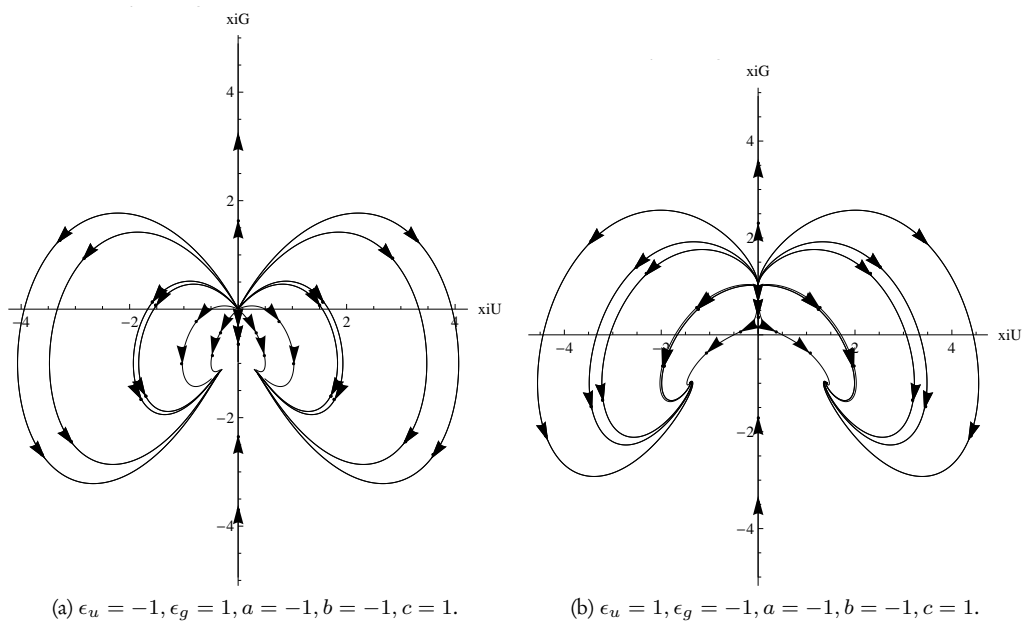


Abbildung 4.4: Phasenräume ausgehend von Gleichungssystem (3.3). Für  $a, b < 0$  kehrt sich die Stromrichtung um. Außerdem ist gefordert, dass  $c > 0$  ist und  $\epsilon_g, \epsilon_u$  verschiedene Vorzeichen haben.

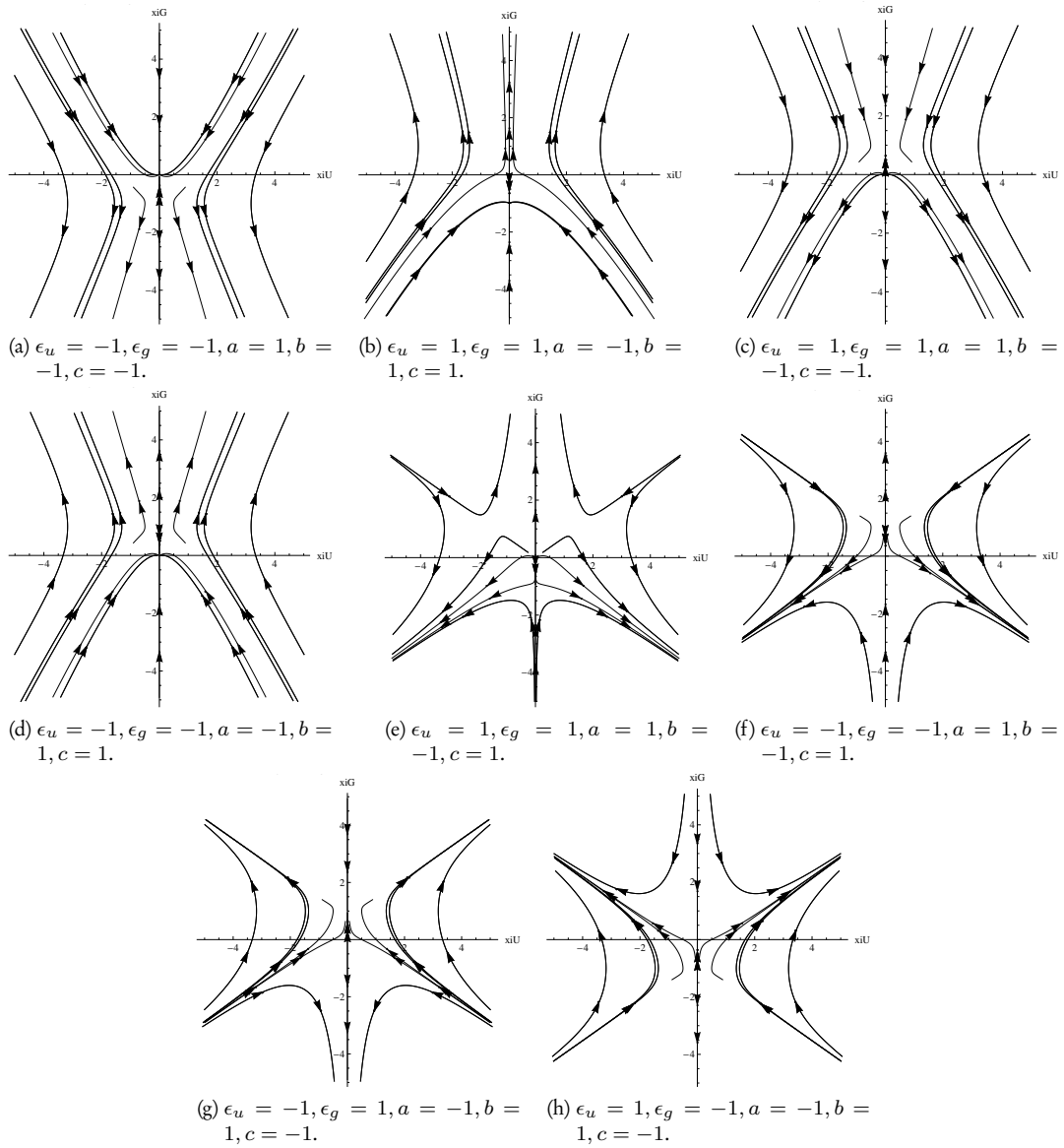


Abbildung 4.5: Phasenräume nach Gleichungssystem (3.3), die aufgrund der Koeffizientenwahl nicht gestattet sind.

### 4.3 Das Gleichungssystem als Hamilton'sches System

Ein Gedanke am Rande ist, für welche Fälle unser Gleichungssystem (3.3) ein Hamilton'sches System ist. Was dies konkret für Folgen hat, kann im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet werden.

Mit der Kenntnis der Hamiltonfunktion ist gleichzeitig die Energie des Systems bekannt. Damit das Gleichungssystem (3.3) Hamilton'sche Gestalt annimmt, müssen die Koeffizienten in gewissen Relationen zueinander stehen. Gesucht ist die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\xi_u, \xi_g)$  derart, dass

$$\dot{\xi}_u = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_g} = n_1(\xi_u, \xi_g) \quad (4.19a)$$

$$\dot{\xi}_g = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_u} = n_2(\xi_u, \xi_g). \quad (4.19b)$$

Die Integration von  $n_1$  über  $\xi_g$  ergibt:

$$\mathcal{H} = -\epsilon_u \xi_u \xi_g + \frac{1}{2} a \xi_u \xi_g^2 + f(\xi_u) \quad (4.20)$$

Bilden der Ableitung von dieser Gleichung (4.20) nach  $\xi_u$  und Gleichsetzen mit  $n_2$  aus (4.19) liefert

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_u} = -\epsilon_u \xi_g + \frac{1}{2} a \xi_g^2 + \frac{\partial f(\xi_u)}{\partial \xi_u} \stackrel{!}{=} \epsilon_g \xi_g + b \xi_u^2 + c \xi_g^2, \quad (4.21)$$

welche durch Koeffizientenvergleich auf folgende Relationen zwischen den Koeffizienten führt bzw.  $f(\xi_u)$  bestimmt:

$$\epsilon_g = -\epsilon_u \quad (4.22a)$$

$$c = \frac{1}{2} a \quad (4.22b)$$

$$f(\xi_u) = \frac{1}{3} b \xi_u^3 \quad (4.22c)$$

Damit folgt unter Einhaltung der Bedingungen (4.22) für die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H} = -\epsilon_u \xi_g \xi_u + \frac{1}{2} a \xi_u \xi_g^2 + \frac{1}{3} b \xi_u^3. \quad (4.23)$$

### 4.4 Varianten des Gleichungssystems

Im Folgenden wollen wir gezielt Terme aus dem hier behandelten Gleichungssystem (3.3) vernachlässigen, die Koeffizienten vor den verbleibenden Termen gleich Eins setzen und einen kurzen Blick auf die resultierenden Phasenraumportraits werfen.

Zunächst betrachten wir das vereinfachte System

$$\dot{\xi}_u = -\xi_u \xi_g \quad (4.24a)$$

$$\dot{\xi}_g = \xi_u^2. \quad (4.24b)$$

Das System besitzt den Fixpunkt  $(0, r)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Die Trajektorien im Phasenraum (Abbildung 4.6(a)) erhalten wir durch Betrachten von  $\frac{d\xi_g}{d\xi_u}$ . Sie werden durch

$$\xi_g^2 + \xi_u^2 = \text{const.} \quad (4.25)$$

beschrieben.

Die zweite Vereinfachung führt auf

$$\dot{\xi}_u = -\xi_u \xi_g \quad (4.26a)$$

$$\dot{\xi}_g = \xi_g^2. \quad (4.26b)$$

Da der Fixpunkt  $(r, 0)$ ,  $r \in \mathbb{R}$  hyperbolisch ist, verlaufen die Stromlinien, wie in Abbildung 4.6(b) zu sehen ist, entlang von Hyperbeln der Form

$$\xi_g = \frac{1}{\xi_u} \cdot e^{\text{const.}}. \quad (4.27)$$

Für das letzte vereinfachte System (Abbildung 4.6.c)

$$\dot{\xi}_u = -\xi_u \xi_g \quad (4.28a)$$

$$\dot{\xi}_g = \xi_u^2 + \xi_g^2 \quad (4.28b)$$

liegen die Stromlinien in  $\xi_g$ -Richtung orientiert. Der Fixpunkt liegt bei  $(0, 0)$ , jedoch können keine sinnvollen Aussagen über das Verhalten der Amplituden in seiner Umgebung gemacht werden, da die Eigenwerte sich zu Null ergeben. Man sieht gewissermaßen eine Überlagerung der ersten beiden Fälle, wobei im Bereich der  $\xi_u$ -Achse der Term  $\xi_u^2$ , mit zunehmendem  $|\xi_g|$  der Term  $\xi_g^2$  dominiert. Für die Bestimmung der Trajektorie gehen wir zu Polarkoordinaten über:

$$\begin{pmatrix} \xi_u \\ \xi_g \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Damit ergibt sich als Trajektorie

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos \phi} \cdot [3 - \cos(2\phi)]^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.30)$$



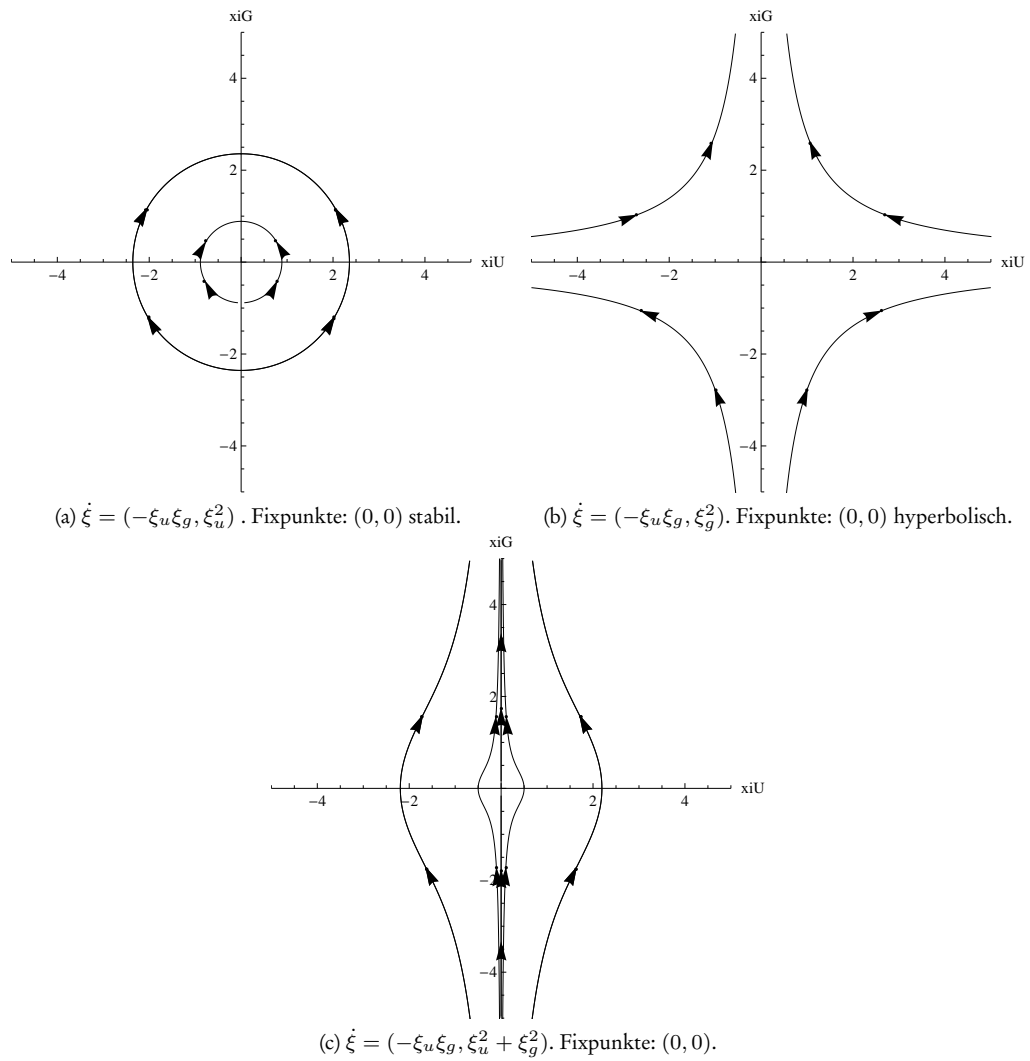


Abbildung 4.6: Phasenräume für verschiedene Varianten des Gleichungssystems.

## 5 Diskussion

### Gegenüberstellung der theoretischen und numerischen Phasenraumstrukturen

Die im letzten Kapitel 4.2 beschriebenen Phasenraumportraits sollen nun Ergebnissen aus numerischen Simulationen gegenüber gestellt werden. Die numerischen Daten aus [Lül11] wurden von A. Kraft im Rahmen seiner Bachelorarbeit [Kra11] entsprechend aufbereitet und zur Verfügung gestellt. Die Simulationsparameter lauten wie folgt:

$$\Gamma = 1, \quad \text{Ra} = 5 \cdot 10^7, \quad \text{Pr} = 3. \quad (5.1)$$

In [Kra11] wurde das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}$  analog zu (3.1) in gerade und ungerade Anteile zerlegt:

$$\mathbf{u} = \xi_g \boldsymbol{\varphi}_g + \xi_u \boldsymbol{\varphi}_u \quad (5.2)$$

Im Gegensatz zur Projektion auf analytisch gewählte Basismoden, enthalten die empirischen Daten die vollständigen Systeminformationen. Für sie wurde lediglich eine Konstruktionsregel formuliert. Die Abbildung 5.1 zeigt eine Zerlegung von  $\mathbf{u}$  in zeitlich gemittelte gerade (a) und ungerade (b) empirische Moden. Die Längen der Vektorpfeile korrelieren mit den Amplituden.

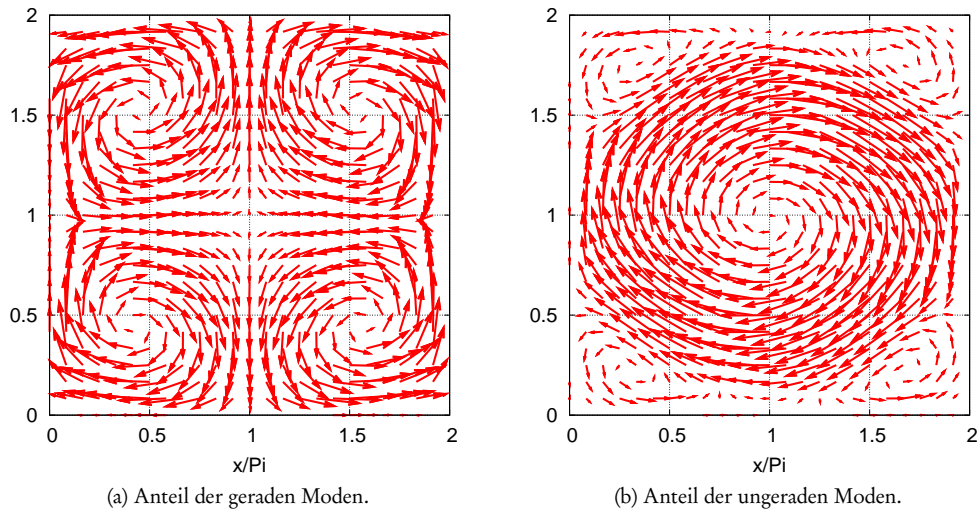


Abbildung 5.1: Zeitlich gemittelte empirische Moden des Geschwindigkeitsfeldes [Kra11].

Da Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld aneinander gekoppelt sind und sich ein Richtungswechsel in der Konvektion in beiden Systemen gleichermaßen durch einen Vorzeichenwechsel bemerkbar macht, können wir unsere theoretischen Überlegungen mit den Ergebnissen in [Kra11] vergleichen. Das dynamische Verhalten der geraden Amplitude  $\xi_g$  ( $\xi_{\text{even}}$ ) und der ungeraden Amplitude  $\xi_u$  ( $\xi_{\text{odd}}$ ) wird im Phasenraumportrait in Abbildung 5.2 gezeigt.

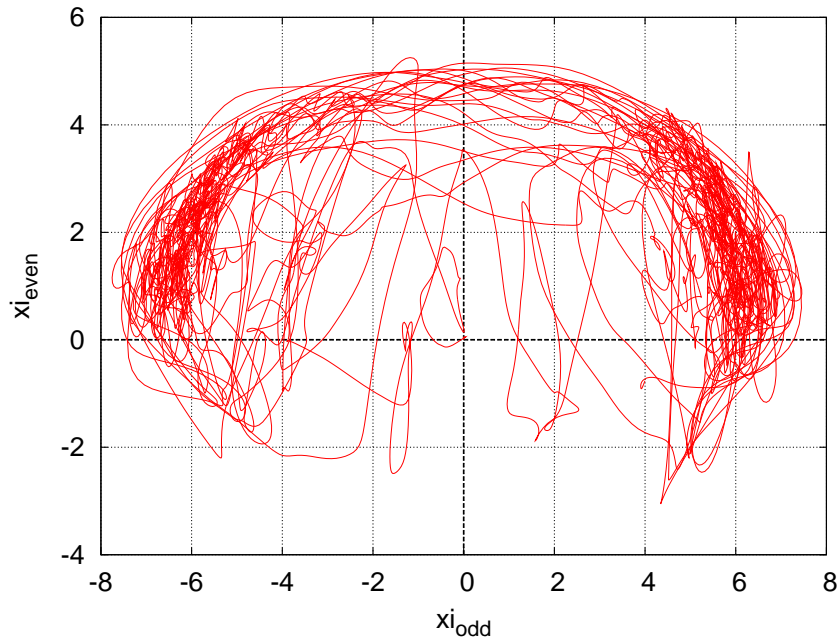


Abbildung 5.2: Phasenraum für die empirischen Amplituden [Kra11].

Zu sehen ist, dass das anfangs ruhige System sich zunächst aus dieser Ruhelage heraus bewegt. Das System hält sich nun entweder auf der positiven oder der negativen  $\xi_u$ -Seite auf, was bedeutet, dass die großskalige Konvektion sich entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn dreht. Von Zeit zu Zeit wechselt dieser Drehsinn, es findet ein *Reversal* statt. Ein Blick in die zeitliche Entwicklung der empirischen Amplituden in Abbildung 5.3 bestätigt dies. In der zeitlichen Entwicklung ist die Korrelation zwischen gerader und ungerader Amplitude zu sehen. Überschreitet die gerade Amplitude einen kritischen Wert, so findet der Drehsinnwechsel in der ungeraden Mode statt.

Die Trajektorien im Phasenraum formen eine Art Schale, die nach unten geöffnet ist. Das zeitliche Verhalten des Systems legt nahe, dass das System aus der Ruhelage heraus nach links oder rechts in scheinbar stabile Fixpunkte strebt. Bei einem Orientierungswechsel, also einem Wechsel der Trajektorie „auf die andere Seite“, kehrt sich dieser Prozess um: aus dem vormals stabilen Fixpunkt könnte ein instabiler werden, von dem sich das System wegbewegt. Vergleichen wir diese Beobachtungen mit den theoretischen Phasenraumportraits, so entfallen die entlang der  $\xi_g$ -Achse orientierten Stromlinien (Abbildung 4.3) als Ansatz zur theoretischen Beschreibung der Strukturen in Abbildung 5.2. Vielmehr richtet sich die Aufmerksamkeit auf die Phasenräume, in denen die Entwicklung der Amplituden ebenfalls schalenartige Strukturen aufweist (Abbildungen 4.1, 4.2 und 4.4). Der Vergleich lässt vermuten, dass verschiedene Phasenraumportraits alternieren. Denkbar wären beispielsweise die Phasenraumportraits wie in Abbildung 5.4. Auffällig ist, dass besonders die Innenbereiche eine Schalenform aufweisen wie man sie in Abbildung 5.2 sieht.

Für die zeitliche Entwicklung des numerischen Systems in Abbildung 5.3 könnte im Vergleich mit unserem System ein mögliches Szenario wie folgt aussehen: Ein Verhalten der Amplituden wie in Abbildung 5.4(a) treibt das System auf eine der Seiten. Erreicht das System den Fixpunkt, findet ein Umschaltprozess statt, der den *Reversal* einleitet. Damit einher geht ein Stabilitätswechsel

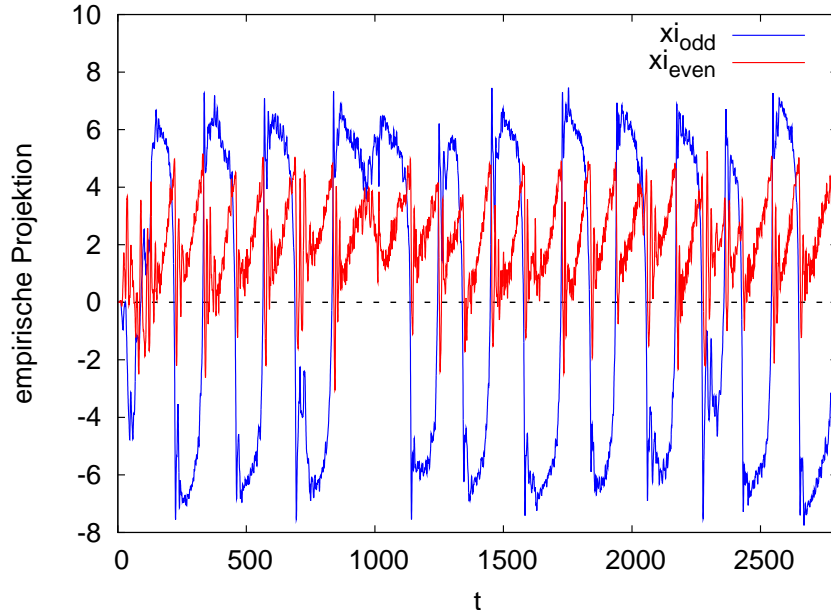


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung der empirischen Amplituden.  $\xi_u$  ist die erste ungerade,  $\xi_g$  die erste gerade Basismode [Kra11].

der Fixpunkte, verbunden mit einem Übergang hin zu Abbildung 5.4(b), sodass der nun instabile Fixpunkt das System in einen auf der  $\xi_g$ -Achse liegenden stabilen Fixpunkt zurücktreibt. In diesem Punkt schaltet das System zurück zu (a). Das empirische System (Abbildung 5.2) wechselt abermals die Seite. Folgt unser konstruiertes System dem empirischen, so bedeutet das für den Fixpunkt bei  $(0,1)$ , dass das Verhalten des Systems in diesem abhängig ist von der Richtung, aus der es den Fixpunkt erreicht. Die Richtung des Flusses muss beibehalten werden, da sonst keine stetigen Trajektorien zu beobachten wären.

Die zeitliche Entwicklung der Amplituden in Abbildung 5.3 deutet darauf hin, dass Orientierungswechsel immer dann auftreten, wenn  $\xi_g$  ungefähr sein Maximum erreicht hat. Für unser Modell bedeutet dies, dass in der Zeitdomäne die Umschaltprozesse in etwa mit den Extrema von  $\xi_u$  verknüpft sein müssten, was jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht wurde.

Es sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass dieses Szenario ein Interpretationsansatz ist und der weiteren Untersuchung bedarf.

Der Einfluss von Fluktuationen wurde in dieser Arbeit nicht behandelt. Denkbar wäre es ebenso, dass das System unter genügend starken Fluktuationen aus einem stabilen Fixpunkt in die Nähe eines instabilen Fixpunktes getrieben wird, in dessen Nähe sich entscheidet, ob ein *Reversal* stattfindet. Für diese Annahme spricht, dass es in Abbildung 5.2 eine Trajektorie gibt, bei der die Seite nicht gewechselt wird. In der zeitlichen Entwicklung (Abbildung 5.3) würde der Bereich  $t \in [750, 1250]$  mit dieser Annahme korrelieren.

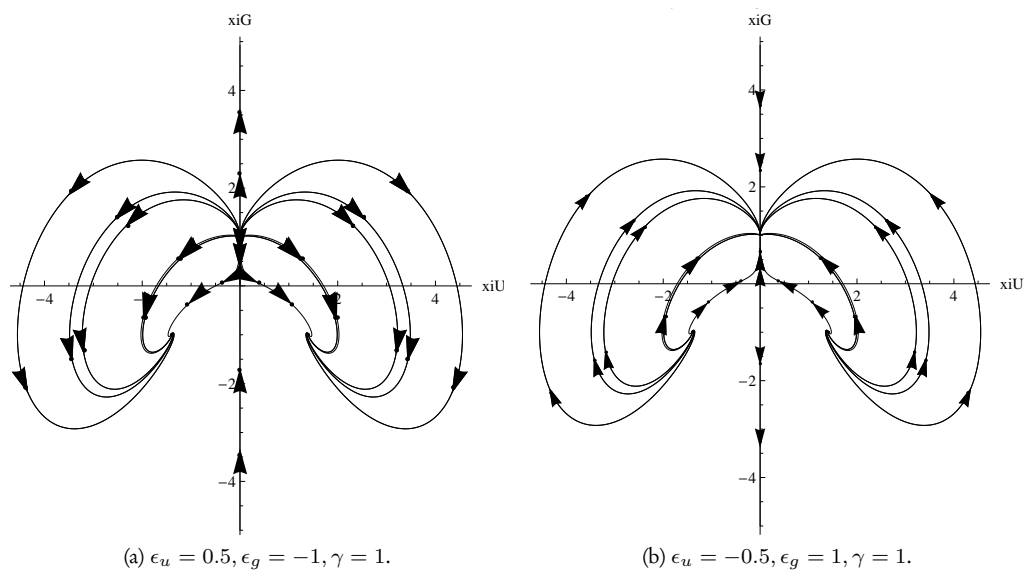


Abbildung 5.4: Zwei Phasenraumportraits, die man sich als alternierend vorstellen könnte, um die Dynamik in Abbildung 5.2 zu beschreiben.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Rest, rest, perturbed Spirit!

---

(Shakespeare)

Motiviert wurde diese Arbeit durch das Fehlen eines einfachen Modells, das *Reversals* beschreibt wie sie im turbulenten Regime des Rayleigh-Bénard-Systems auftreten. Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

Ausgehend von Symmetrieüberlegungen haben wir im Speziellen ein Gleichungssystem für die Amplituden des Temperaturfeldes abgeleitet und dessen dynamisches Verhalten im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse untersucht.

Für die auftretenden Koeffizienten konnten Bedingungen angegeben werden, die sie im Rahmen der Fixpunktanalyse erfüllen müssen. Ebenso lassen sich Relationen zwischen den Koeffizienten formulieren, unter denen das System Hamilton'schen Charakter annimmt. Die sich ergebenden Konsequenzen dieses Spezialfalls konnten hier nicht behandelt werden und bedürfen der weiteren Untersuchung.

Die aus unserem Gleichungssystem resultierenden Phasenraumportraits wurden mit denen verglichen, die mit Hilfe von aus numerischen Simulationen stammenden Daten in [Kra11] erzeugt wurden. Unsere Phasenraumstrukturen sehen den Trajektorien ähnlich, wie man sie aus numerischen Daten erhält. Den genauen Ablauf der *Reversals* können wir jedoch noch nicht verstehen. Betrachtet man die einzelnen Phasenraumportraits als „Zustand“, so muss man möglicherweise über eine Überlagerung mehrerer „Zustände“ nachdenken, um so vielleicht die *Reversals* erfassen zu können. Momentan können wir lediglich sagen, dass unser System sich auf einen stabilen Fixpunkt zu bewegt. Wie es das System allerdings schafft, diesem wieder zu verlassen, ist ungeklärt. Hierzu sollte untersucht werden, welchen Einfluss Fluktuationen auf das System haben. Sie könnten das System aus einem stabilen Fixpunkt heraus und zurück zu einem instabilen Fixpunkt treiben.

Ebenso wäre es interessant zu wissen, wie genau sich Terme höherer Ordnung auswirken. Unser System betrachtet bislang ausschließlich Terme bis zur quadratischen Ordnung.

Insgesamt stellt das gefundene und untersuchte Gleichungssystem einen guten Ansatz dar, um die Dynamik der Amplituden zu beschreiben – nicht mehr und nicht weniger. Dennoch sind weitere Anstrengungen notwendig, um gerade die Umorientierung großskaliger Konvektionen zu erfassen.

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Zeitgemitteltes Geschwindigkeitsfeld für die Simulationsparameter $Ra = 10^7$ , $Pr = 1$ , Anzahl der Datenpunkte $N_x = N_y = 512$ , Seitenverhältnis $\Gamma = 1.9$ [Sin11]. . . . .	8
4.1	Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14). Links: $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u > -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ , rechts: $\gamma < 0, \epsilon_g < 0, \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ . . . . .	16
4.2	Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14). Oben links: $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u > 0$ ; oben rechts: $\gamma > 0, \epsilon_g = 0, \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ ; unten links: $\gamma < 0, \epsilon_g < 0, \epsilon_u > 0$ ; unten rechts: $\gamma < 0, \epsilon_g > 0, \epsilon_u < 0$ . . . . .	17
4.3	Phasenräume nach Gleichungssystem (4.14). Oben links: $\gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ ; oben rechts: $\gamma > 0, \epsilon_g < 0, 0 < \epsilon_u < -\frac{\epsilon_g}{\gamma}$ . . . . .	18
4.4	Phasenräume ausgehend von Gleichungssystem (3.3). Für $a, b < 0$ kehrt sich die Stromrichtung um. Außerdem ist gefordert, dass $c > 0$ ist und $\epsilon_g, \epsilon_u$ verschiedene Vorzeichen haben. . . . .	19
4.5	Phasenräume nach Gleichungssystem (3.3), die aufgrund der Koeffizientenwahl nicht gestattet sind. . . . .	20
4.6	Phasenräume für verschiedene Varianten des Gleichungssystems. . . . .	23
5.1	Zeitlich gemittelte empirische Moden des Geschwindigkeitsfeldes [Kra11]. . . . .	24
5.2	Phasenraum für die empirischen Amplituden [Kra11]. . . . .	25
5.3	Zeitliche Entwicklung der empirischen Amplituden. $\xi_u$ ist die erste ungerade, $\xi_g$ die erste gerade Basismode [Kra11]. . . . .	26
5.4	Zwei Phasenraumportraits, die man sich als alternierend vorstellen könnte, um die Dynamik in Abbildung 5.2 zu beschreiben. . . . .	27

# Tabellenverzeichnis

4.1	Stabilität des Fixpunktes $(0, 0)$ . . . . .	11
4.2	Stabilität des Fixpunktes $(0, -\frac{\epsilon_g}{c})$ . . . . .	12
4.3	Fallunterscheidungen für die Koeffizienten des reskalierten Gleichungssystems. . . .	13
4.4	Stabilität der Fixpunkte $(\pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{-c\epsilon_u^2 - \epsilon_g \epsilon_u a}{b}}, \frac{\epsilon_u}{a})$ in Bezug auf die Eigenwerte (4.15). . .	14



# Literaturverzeichnis

- [Bou03] J. Boussinesq. *Théorie analytique de la chaleur*, volume 2 of *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. Gauthier-Villars, Paris, 1903.
- [Cha61] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International series of monographs on physics. Dover Publications, New York, 1961.
- [Cla09] Al Clark. DynPac - A Dynamical Systems Package Running Under Mathematica, Version 11.03. <http://www.me.rochester.edu/~clark/dynpac.html>, Juni 2009.
- [GH83] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Applied mathematical sciences. Springer, New York, 1983.
- [Kra11] Alexander Kraft. Analyse großskaliger Winde bei der turbulenten Rayleigh-Bénard-Konvektion. Bachelorarbeit, Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Juni 2011.
- [Lül11] Johannes Lülff. Statistische Eigenschaften turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Januar 2011.
- [Sin11] Michael Sinhuber. Turbulente Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster, Januar 2011.
- [SNS<sup>+</sup>10] Kazuyasu Sugiyama, Rui Ni, Richard J. A. M. Stevens, Tak Shing Chan, Sheng-Qi Zhou, Heng-Dong Xi, Chao Sun, Siegfried Grossmann, Ke-Qing Xia, and Detlef Lohse. Flow Reversals in Thermally Driven Turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 105(3):034503, Jul 2010.
- [Tab89] M. Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1989.

# Erklärung zur Bachelorarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe.

Katharina Ritter  
Münster, im Juni 2011