

Nichtmarkovsche Modelle für die Lagrangesche Teilchenstatistik turbulenter Strömungen

als Diplomarbeit vorgelegt von
Adrian Baule

Oktober 2004



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

In fact, all epistemologic value of the theory of probability is based on this: that large-scale random phenomena in their collective action create strict, non random regularity.

B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Grundlagen der Turbulenz	1
1.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen	1
1.2 Phänomenologische Ansätze	4
1.2.1 Die Richardson-Kaskade	5
1.2.2 Die Theorie von Kolmogorov	6
1.3 Die Lagrange-Beschreibung der Turbulenz	8
1.3.1 K41 im Lagrange-Bild	10
1.4 Intermittenz	12
2 Experimente zur Lagrangeschen Teilchenstatistik	14
2.1 Doppler-Sonar-Messung	15
2.2 Teilchendetektor Messung	18
2.3 Direkte numerische Simulation	20
3 Heuristische Modelle für die Einteilchenstatistik	23
3.1 Modelle im Euler-Bild	23
3.1.1 Kolmogorovs log-normal Modell	23
3.1.2 Castaings Gleichung	24
3.1.3 Beschreibung einer turbulenten Kaskade	25
3.2 Multifraktale Modelle	26
3.2.1 Dissipationseffekte	28
3.2.2 Multifraktaler Random Walk	30
3.3 Tsallis-Statistik und Turbulenz	32
3.4 Lagrangesche Modellierung	35
3.4.1 Das Oboukhov-Modell	35
3.4.2 Lagrangesche Teilchenmethoden	36
4 Gleichungshierarchie und verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung	38
4.1 Eine Hierarchie von Entwicklungsgleichungen	39
4.2 Verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung	42
4.3 Schliessungsansatz und Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells	44
4.3.1 Die Geschwindigkeitsverteilung $f(u, t)$	45

5	Verbundverteilungen für eine Klasse Nichtmarkovscher Prozesse	48
5.1	Continuous Time Random Walks	49
5.1.1	Der Prozess $X(s)$	52
5.1.2	Der Prozess $t(s)$	53
5.1.3	Der Prozess $X(t) = X(s(t))$	53
5.2	Einseitige stabile Lévy-Prozesse	55
5.2.1	Die einzeitige Verteilung	55
5.2.2	Die mehrzeitigen Verteilungen	56
5.3	Der inverse Prozess $s(t)$	57
5.3.1	Die einzeitige Verteilung	57
5.3.2	Die mehrzeitigen Verteilungen	59
5.4	Fraktionale Fokker-Planck-Gleichungen	66
5.4.1	Die einzeitige fraktionale Fokker-Planck-Gleichung	66
5.4.2	Die Verteilungen für mehrere Zeiten	67
5.4.3	Momente des fraktionalen Diffusionsprozesses	73
5.5	Eine verallgemeinerte Mastergleichung	74
6	Verteilungen für Ort und Geschwindigkeit	79
6.1	Die exakte Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells	80
6.2	Eine heuristische Erweiterung des Oboukhov-Modells	81
6.2.1	Lösung des erweiterten Oboukhov-Modells	82
6.2.2	Grenzfälle	84
6.2.3	Die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$	85
6.2.4	Momente des erweiterten Oboukhov-Modells	86
6.3	Gekoppelte Langevin-Gleichungen	87
6.3.1	Der Prozess $\mathbf{X}(s)$	88
6.3.2	Der Prozess $\mathbf{X}(t)$	89
7	Zusammenfassung	91
A	Fourier- und Laplace-Transformationen	93
A.1	Die Fourier-Transformation	93
A.2	Die Laplace-Transformation	94
B	Fraktionale Differentialoperatoren	96
C	Berechnung der Momente	98
D	Randterme der mehrzeitigen Verbundverteilung	99

Einleitung

Betrachtet man die Geschichte der theoretischen Physik des 20. Jahrhunderts, so lassen sich deutliche Entwicklungslinien verfolgen. Ausgehend von der Quantenmechanik wurde mit enormem Aufwand an einem fundamentalem Verständnis der Struktur der Materie und ihrer Wechselwirkungen gearbeitet. Das Vordringen zu immer kleineren Skalen ging mit einer immer engeren Verknüpfung mit der Mathematik einher, die ihrerseits vereinheitlichende theoretische Konzepte hervorbringen konnte. Auf der anderen Seite stehen neue Erkenntnisse über den Aufbau des Universums in unvorstellbarer räumlicher und zeitlicher Entfernung von der Erde. Die Physik, die sich auf der Grössenskala des Menschen abspielt, war angesichts dieser Bemühungen lange Zeit in den Hintergrund gedrängt und wurde als wenig modern angesehen. Nicht zuletzt auch deshalb, weil die Probleme dieser „klassischen“ Physik als gelöst angesehen wurden. Erst im Verlauf der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts kam wieder ein Bewusstsein für solche Phänomene auf, die sich schon einfach beobachten lassen, wenn man aus dem Fenster blickt. Das scheinbar chaotische Verhalten natürlicher Systeme ist allgegenwärtig und dennoch nur wenig verstanden. In der Tat sind vielen Physikern die Eigenschaften schwarzer Löcher vertrauter als die Dynamik des Wassers, das aus dem Wasserhahn strömt. Die Physik komplexer Systeme erfährt inzwischen zunehmendes Interesse und der grosse Reiz macht nicht nur ihre enorme Relevanz für die täglich erfahrene Welt aus. Auch hier besteht die Hoffnung, dass sich universelle Strukturen auffinden lassen, die einer grossen Vielfalt physikalischer Erscheinungen zugrundeliegen.

Als Paradebeispiel für ein solches komplexes System können gerade turbulente Flüssigkeitsströmungen angesehen werden. Flüssigkeiten, die im Vergleich zur Dissipation hohe Strömungsgeschwindigkeiten aufweisen stehen im extremen Nichtgleichgewicht und sind durch komplexe Wirbelstrukturen auf allen Skalen charakterisiert. Die grundlegenden deterministischen Bewegungsgleichungen solcher hydrodynamischer Systeme, die Navier-Stokes-Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit, sind bereits seit über 150 Jahren bekannt, aber noch immer ist „das Problem der Turbulenz“ ungelöst.

Wie ist diese weitverbreitete Aussage zu verstehen? Gerade turbulenten Strömungen kommt eine enorme Bedeutung in vielfältigen ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen zu. Solche Systeme werden aber zumeist ohne grosses physikalisches Verständnis behandelt. Beispielsweise werden ausgehend von den Navier-Stokes-Gleichungen Fluidsysteme mit ihren spezifischen Randbedingungen numerisch simuliert oder modelliert. Das Ziel in einer Theorie der Turbulenz

ist aber letztendlich diejenigen Eigenschaften der Strömung zu erfassen, die unabhängig von der Art der Flüssigkeit und der Geometrie und Beschaffenheit der Ränder sind. Diese universellen Eigenschaften sind von statistischer Natur, man findet sie Bereich kleiner Skalen und fern von Grenzflächen. Bislang ist es trotz umfangreicher Bemühungen nicht gelungen, die universellen Statistiken des turbulenten Geschwindigkeitsfelds aus den physikalischen Bewegungsgleichungen herzuleiten. Es besteht in der Forschungsgemeinschaft noch nicht einmal Konsens darüber, welches die richtigen Ansätze und Methoden sind, mit denen dieses Problem angegangen werden könnte. Die Turbulenzforschung ist daher geprägt von phänomenologischen Modellen, die auf Kolmogorovs erfolgreiche Theorie der universellen kleinskaligen Turbulenzstatistiken von 1941 [K41] zurückgehen. Aus einfachen Modellannahmen werden darin mit Hilfe von Dimensionsanalyse Vorhersagen für das Skalierungsverhalten statistischer Größen gemacht, die in Experimenten näherungsweise gefunden werden. Darüberhinaus wurde mit grossem Aufwand an Theorien gearbeitet, die in Anlehnung an die Erfolge in der Teilchentheorie auf Störungstheorie und Renormierungsgruppe [McCo] beruhen. Allerdings bleibt bis auf Kolmogorovs Theorie aus über einem halben Jahrhundert Turbulenzforschung nicht viel festzuhalten.

Betrachtet man das Problem der Turbulenz in einem grösseren Kontext, so kann man darin einen wichtigen Teil einer noch zu formulierenden statistischen Theorie der Nichtgleichgewichtssysteme sehen. Wie im Fall der Boltzmann-Gibbs-Gleichgewichtsstatistik ist hier das Ziel, eine physikalische Grösse zu finden, die von Nichtgleichgewichtssystemen extremalisiert wird und die Bestimmung der Statistiken des Systems ermöglicht. Indes ist eine solche Theorie noch in weiter Ferne. Neue Ideen eröffnet vielleicht die Betrachtung turbulenter Strömungen im Zusammenhang mit Strukturbildungsvorgängen. So chaotisch und unvorhersagbar Turbulenz auch erscheinen mag, sie ist ein Zustand von hochkomplexer Ordnung.

Auch wenn die Turbulenzforschung schon seit Jahrzehnten auf den entscheidenden Durchbruch wartet, konnten sich in den vergangenen Jahren vielversprechende Entwicklungen durchsetzen. Von immer grösserer Bedeutung erweist sich das sogenannte Lagrange-Bild der Turbulenz. Hier wird die Strömung nicht über ein von raumfesten Koordinaten abhängiges Geschwindigkeitsfeld (das sogenannte Euler-Bild), sondern über mitbewegte Teilchen beschrieben. Ausgangspunkt einer statistischen Theorie sind Teilchenorte und Teilchengeschwindigkeiten, die Newtonschen Bewegungsgleichungen unterliegen. Diese Lagrangesche Beschreibung der Turbulenz hat eine lange Tradition, die bis zu den frühen Arbeiten von Taylor [Ta21] und Richardson [Ri26] zurückreicht. Kraichnan bemerkte schon in den 60er Jahren des 20. Jh., als sich die Forschung weitgehend auf die Untersuchung von Kolmogorovs Theorie im Euler-Bild konzentrierte, dass eine Lagrangesche Beschreibung der Turbulenz von beträchtlichem Interesse sei [McCo]. In letzter Zeit wurde deutlich, dass die Charakteristiken von turbulentem Flüssigkeitstransport und turbulenter Mischung auf die Eigenschaften der Teilcentrajektorien zurückzuführen sind [SS00]. Weitere Fortschritte wurden bei der Behandlung passiver Skalare im

Kraichnan-Modell erzielt [FGV01]. Die anschauliche Teilchenbeschreibung ist darüberhinaus ein geeigneter Ausgangspunkt für die Modellierung turbulenter Strömungen, die eine grosse Rolle in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen spielt [Pope].

Die Schwierigkeiten bei der Durchführung anspruchsvoller Experimente mit Lagrange-Teilchen konnten erst vor wenigen Jahren durch neue experimentelle Methoden überwunden werden. Dadurch wurden genaue Daten über die Bewegung der Teilchen bis hin zu den Statistiken der Beschleunigung verfügbar. Ein wichtiges Ergebnis dieser Experimente ist der deutliche Nachweis der intermittenten Lagrangeschen Geschwindigkeitsverteilungen [LVCAB01],[MMMP01]. Die aktuelle Forschungsentwicklung zeigt, dass die Beschreibung der Turbulenz im Lagrange-Bild aufgrund dieser experimentellen Ergebnisse immer grösseres Interesse erfährt. Tatsächlich wurden eine Vielzahl phänomenologischer Theorien veröffentlicht, die über unterschiedliche Modellannahmen die intermittenten Statistiken reproduzieren können. Dies lässt zum einen den grossen Einfluss erkennen, der immer noch von Kolmogorovs erfolgreicher Theorie ausgeht, zum anderen besteht offensichtlich noch immer keine Einigkeit, wie eine statistische Theorie der Turbulenz auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen formuliert werden kann. Bemerkenswerterweise wurde gerade im Lagrange-Bild ein vielversprechender Ansatz für eine solche Theorie vorgestellt. R. Friedrich konnte aus einer statistischen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen eine verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung eines Lagrange-Teilchens herleiten [Fr03]. Die Lösungen dieser Entwicklungsgleichung stimmen mit den Experimenten hervorragend überein und lassen die Verbindung zu einer bestimmten Klasse Nichtmarkovscher Prozesse erkennen, den sogenannten Continuous Time Random Walks (CTRW). Damit sind Hinweise dafür gegeben, dass der universelle stochastische Prozess, der dem Verhalten der Teilchengeschwindigkeit zugrundeliegt, einen solchen CTRW annimmt.

CTRWs wurden ursprünglich von Montroll und Weiss als Erweiterung des gewöhnlichen Random Walk eingeführt [WM65] und sind mittlerweile ein weitverbreitetes stochastisches Modell zur Beschreibung anomaler Diffusionsvorgänge in den verschiedensten physikalischen Systemen. Historisch interessant ist die Anmerkung, dass das erste bekannte Auftreten von anomaler Diffusion gerade ein Ergebnis aus der Turbulenzforschung ist. Richardson stellte Anfang des letzten Jahrhunderts fest, dass ein Teilchen in einer turbulenten Strömung von der Normaldiffusion abweichende Statistiken zeigt — das heute nach ihm benannte Richardson-Gesetz.

In den letzten Jahren wurde deutlich, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer bestimmten Klasse solcher CTRWs mit Fokker-Planck-Gleichungen in Beziehung stehen, die fraktionale Zeitableitungen enthalten [Fo94],[MK00]. Zeitableitungen fraktionaler Ordnung sind dazu geeignet, Gedächtniseffekte zu berücksichtigen, wodurch der Nichtmarkovcharakter des betrachteten Systems zum Ausdruck kommt. Insgesamt ermöglichen CTRWs in Verbindung mit fraktionalen Fokker-Planck-Gleichungen eine einfache und adäquate Modellierung von Systemen mit anomalen Diffusionseigenschaften.

Die oben skizzierte Entwicklung der Turbulenzforschung kann als Motivation für die vorliegende Arbeit angesehen werden. Da der Vergleich mit den Experimenten zur Lagrange-Turbulenz alleine keinen Aufschluss darüber erbringen kann, welches in den verschiedenen phänomenologischen Theorien vorgeschlagene stochastische Modell tatsächlich der turbulenten Geschwindigkeit entspricht, ist es von der theoretischen Seite her notwendig, neue statistische Größen einzuführen, die eine Differenzierung ermöglichen. Berücksichtigt man, dass die verschiedenen Modelle Nichtmarkoveigenschaften aufweisen, so liegt es nahe, anstelle der einzeitigen Verteilungen aus den Experimenten mehrzeitige Verbundverteilungen zu betrachten, die einen Nichtmarkovprozess erst vollständig charakterisieren. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt darin, solche mehrzeitigen Verbundverteilungen des CTRWs zu untersuchen. Erstaunlicherweise ist eine Erweiterung auf mehrere Zeiten bislang noch nicht vorgenommen worden, obwohl der CTRW seit mehr als 30 Jahren in theoretischen Modellen Anwendung findet. Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse sind daher auch von grundlegendem Interesse für die Theorie stochastischer Prozesse im Allgemeinen. Darüberhinaus werden stochastische Modelle für Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens untersucht, die ebenfalls auf einem CTRW beruhen. Ausgehend von diesem Nichtmarkovprozess wird also eine weitgehende Charakterisierung der Lagrange-Statistiken vorgenommen, die zukünftigen Experimenten Rechnung tragen kann.

Ein kurzer Überblick über diese Arbeit: In Kapitel 1 wird in die Grundlagen einer statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen eingeführt. Im Mittelpunkt stehen dabei die phänomenologische Theorie von Kolmogorov und das Lagrange-Bild der Turbulenz. Zwei neuere Experimente und eine numerische Simulation zur Lagrange-Turbulenz werden in Kapitel 2 vorgestellt. Wie diese Ergebnisse im Rahmen unterschiedlicher phänomenologischer Modelle behandelt werden können, diskutiert Kapitel 3. Daran schliesst sich die Theorie von R. Friedrich an (Kapitel 4), welche die Geschwindigkeitsstatistiken mit den Navier-Stokes-Gleichungen in Verbindung bringen kann. Den Hauptteil dieser Arbeit stellen die Kapitel 5 und 6 dar, in denen mehrzeitige Verbundverteilungen des CTRWs sowie stochastische Modelle für Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens untersucht werden. Abschliessend werden die Ergebnisse zusammengefasst.

Kapitel 1

Grundlagen der Turbulenz

In diesem Kapitel wird in die Grundlagen der aktuellen Turbulenzforschung eingeführt. Obwohl es sich bei Turbulenz in erster Linie um ein hydrodynamisches Phänomen handelt, wird mit Ausnahme der klassischen Bewegungsgleichungen nicht weiter auf die Fluidodynamik eingegangen¹. Anstelle einer feldtheoretischen Behandlung steht von Beginn an eine statistische Beschreibung² im Mittelpunkt. Diese bietet einen geeigneten Zugang zu komplexen Nichtgleichgewichtssystemen und ist gerade im Fall turbulenter Strömungen ein aussichtsreicher Ansatz. Weitere Schwerpunkte liegen im Folgenden auf phänomenologischen Modellen, die in vielen Theorien grundlegend für eine statistische Beschreibung sind, sowie auf der Einführung des sogenannten Lagrange-Bilds der Turbulenz, das eine Alternative zu Feldtheorien darstellt.

1.1 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Am Beginn jeder Betrachtungen über Turbulenz steht die fundamentale Gleichung von Navier und Stokes für das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Position \mathbf{x} im physikalischen Raum und der Zeit t :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (1.1)$$

Hier werden $p(\mathbf{x}, t)$ als Druck und ν als kinematische Viskosität bezeichnet, die sich beide aus den bekannten mechanischen Grössen Druck und Viskosität durch Division mit der Flüssigkeitsdichte ρ ergeben. Die Navier-Stokes Gleichungen entsprechen damit einer Newtonschen Bilanzgleichung für die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Mathematisch stellen sie nichtlineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, die durch Rand- und Anfangsbedingungen erweitert werden müssen. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen wird vorausgesetzt, obgleich ein Beweis bislang nicht erbracht werden konnte, der in der Tat als eines der grössten ungelösten Probleme der mathematischen Physik angesehen wird.

¹Als Einführung in dieses Gebiet soll auf [Batc2] verwiesen werden.

²Eine erschöpfende Behandlung der statistischen Hydrodynamik findet sich in [MoYa].

Die Dichte ρ wird als konstant angenommen, d.h es werden ausschliesslich inkompressible Flüssigkeiten betrachtet. Als Folge davon wird die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$ zu der Bedingung:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad . \quad (1.2)$$

Die Bewegungsgleichungen Gl.(1.1) für die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsfelds zusammen mit der Bedingung Gl.(1.2) werden im Folgenden als Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnet. Es besteht allgemeiner Konsens darüber, dass diese Gleichungen die Phänomene der (inkompressiblen) Hydrodynamik in ihrer ganzen Vielfalt enthalten. In der Theorie der Turbulenz werden sie im axiomatischen Sinn an den Anfang gestellt.

Die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfelds hat unmittelbare Konsequenzen für den Druckterm: bildet man die Divergenz von Gl.(1.1) und berücksichtigt die Bedingung (1.2), so ergibt sich eine Poissongleichung für $p(\mathbf{x}, t)$:

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)] \quad . \quad (1.3)$$

Im Fall einer auf ein endliches Volumen beschränkten Flüssigkeit müssen nun für die Lösung dieser Gleichung Randbedingungen explizit berücksichtigt werden. Im Fall der von Neumann-Randbedingungen wären diese die Druckgradienten an den Rändern. Da aber im Folgenden ein unendlich ausgedehntes Flüssigkeitsvolumen betrachtet wird, können die Randwerte vernachlässigen werden und die Lösung von Gl.(1.3) lautet mit der Greensfunktion des Laplaceoperators:

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V d\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)] \quad . \quad (1.4)$$

Der Druck ist also eine nichtlokale Grösse und abhängig vom Verhalten des Geschwindigkeitsfelds im gesamten Raum.

Damit steht man vor der Situation, dass das Verhalten der Flüssigkeit im Prinzip eindeutig durch die Gleichungen (1.1) und (1.2) determiniert ist, eine exakte analytische Lösung für einen gegebenen Anfangszustand aber nur in sehr wenigen Fällen möglich ist. Ausser in der Nichtlokalität des Druckterms liegt die prinzipielle Schwierigkeit vor allem in der Behandlung der Nichtlinearität $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, die das System stark abhängig von den Anfangsbedingungen macht. Das System kann von einem scheinbar geordneten Zustand in völlige Unordnung übergehen, wie beim Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung deutlich wird.

Zur Beschreibung des Charakters einer solchen inkompressiblen Flüssigkeitsströmung wird als Parameter die Reynoldszahl eingeführt:

$$Re = \frac{LU}{\nu} \quad . \quad (1.5)$$

Hier bezeichnen L und U charakteristische Längen und Geschwindigkeiten der betrachteten Strömung und ν ist deren kinematische Viskosität. Die Reynoldszahl ist für eine gegebene Geometrie der einzige Kontrollparameter der Strömung (das sogenannte *Ähnlichkeitsprinzip*) und gibt den Grad der Turbulenz an — je grösser die Reynoldszahl, desto turbulenter die Flüssigkeit. Dies ist anhand Gl.(1.1) einzusehen: Mit kleiner werdender Viskosität wird der nichtlineare Term im Vergleich zum Dissipationsterm immer dominanter. Der Grenzfall der vollentwickelten Turbulenz, entspricht einer Flüssigkeitsströmung mit $Re \rightarrow \infty$ bzw. $\nu \rightarrow 0$. Eine weitergehende Charakterisierung dieses Zustands wird in den nächsten Abschnitten behandelt.

Die Tatsache, dass eine deterministische Vorhersage des Verhaltens der turbulenten Strömung praktisch nicht möglich ist und das Geschwindigkeitsfeld sich scheinbar „zufällig“ verhält, motiviert einen statistischen Zugang zur Turbulenz. Im Blickpunkt steht dann nicht die konkrete Realisierung einer Strömung mit einem bestimmten Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, sondern die dieses Feld charakterisierenden statistischen Grössen mit reduzierter Information, wie z.B. Strukturfunktionen. In einer solchen Betrachtungsweise ist die Verteilung³ der Geschwindigkeiten von zentraler Bedeutung und wird folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned} f^N(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, t_i\}) &:= f^N(\mathbf{u}_N, \mathbf{x}_N, t_N; \dots; \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, t_1) \\ &= \langle \delta(\mathbf{u}_N - \mathbf{u}(\mathbf{x}_N, t_N)) \dots \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t_1)) \rangle \quad . \quad (1.6) \end{aligned}$$

Der Index i geht von $1 \dots N$ und kennzeichnet einen Punkt in der Strömung; Die Klammern $\langle \dots \rangle$ bezeichnen einen geeigneten statistischen Mittelwert. In Betracht kommen hier

- Ensemblemittelwerte, die insbesondere im noch einzuführenden Lagrange-Bild verwendet werden,
- zeitliche Mittelwerte im Fall stationärer Turbulenz,
- räumliche Mittelwerte im Fall homogener Turbulenz.

$f^1(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{u}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t am Ort \mathbf{x} einen Wert zwischen \mathbf{u} und $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ annimmt.

Um das Geschwindigkeitsfeld unabhängig von einer eventuell vorhandenen Hauptströmung zu charakterisieren und dessen statistischen Eigenschaften zugänglich zu machen, werden gewöhnlich neue Feldvariablen eingeführt, die sogenannten Geschwindigkeitsinkremente. Sie sind definiert als die Differenz der Geschwindigkeiten an zwei Punkten, die durch einen Vektor \mathbf{l} getrennt sind:

$$\delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) := \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (1.7)$$

Von besonderer Bedeutung sind im Folgenden die longitudinalen Geschwindigkeitsinkremente $\delta v_{||}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{l}) \cdot \frac{1}{l}$, also die Inkremente Gl.(1.7) projiziert

³Eine mathematisch strengere Bezeichnung ist Wahrscheinlichkeitsdichte.

auf die Verbindungslinie **1**. Betrachtet man das turbulente Feld als eine Ansammlung von Wirbeln (siehe Abschnitt 1.2.1), so gibt das Geschwindigkeitsinkrement in gewisser Weise die Geschwindigkeit eines Wirbels mit Durchmesser l an.

Ausgehend von diesen Geschwindigkeitsinkrementen werden als statistische Grössen Momente n -ter Ordnung eingeführt, die als Strukturfunktionen bezeichnet werden. Die longitudinalen Strukturfunktionen sind definiert als:

$$S_n(\mathbf{x}, \mathbf{l}) := \langle v_{||}(\mathbf{x}, \mathbf{l})^n \rangle \quad . \quad (1.8)$$

Diese Strukturfunktionen spielen nicht nur eine wichtige Rolle in phänomenologischen Theorie, sondern auch bei der Auswertung von Experimenten und Simulationen turbulenter Strömungen, da sie im Vergleich zur vollständigen Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente einfacher zu messen sind und über bestimmte Eigenschaften Auskunft geben können.

1.2 Phänomenologische Ansätze

Das grundlegende Problem in einer statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen besteht darin, die statistischen Grössen mit den Navier-Stokes-Gleichungen in Verbindung zu bringen. Ganz allgemein gibt es nur sehr wenige Erkenntnisse über Turbulenz, die sich direkt aus den Bewegungsgleichungen herleiten lassen. Daher wurde versucht, sich dem Problem phänomenologisch zu nähern, d.h. es werden geeignete, mit den Gleichungen verträgliche Hypothesen formuliert und daraus Vorhersagen abgeleitet, die mit Experimenten verifiziert werden können. Mit dem Erfolg der Theorie von Kolmogorov (siehe Abschnitt 1.2.2) wurde die Bedeutung solcher Ansätze deutlich. Inzwischen nehmen sie einen grossen Stellenwert in der Turbulenzforschung ein.

Zunächst soll der turbulente Zustand genauer charakterisiert werden. Es werden Strömungen im Grenzfall der vollentwickelten Turbulenz betrachtet, also für unendlich grosse Reynoldszahlen $Re \rightarrow \infty$. Für diesen Zustand wird angenommen, dass die grundlegenden Symmetrien auf kleinen Skalen im statistischen Sinn erhalten sind. Das bedeutet, dass die Symmetrien der Navier-Stokes-Gleichungen, die in der Turbulenz gebrochen sind, im vollentwickelten Zustand statistisch wieder hergestellt werden. Die statistischen Grössen sind dann invariant unter solchen Symmetrietransformationen \mathcal{T} :

$$f^N(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, t_i\}) = f^N(\mathcal{T}\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, t_i\}) \quad . \quad (1.9)$$

Man spricht von stationärer homogener isotroper Turbulenz auf kleinen Skalen, wenn die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente die entsprechende Symmetrieeigenschaft zeigt. Als Konsequenz von Homogenität und Isotropie werden dann z.B. die longitudinalen Strukturfunktionen nur vom Betrag des Abstands \mathbf{l} abhängig: $S_n(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = S_n(l)$. Im Weiteren werden bei der Betrachtung statistischer kleinskaliger Grössen stets diese Eigenschaften berücksichtigt.

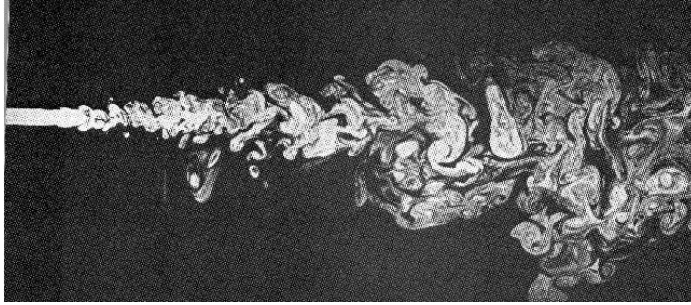


Abbildung 1.1: Ein turbulenter Wasserstrahl. Man erkennt die Wirbelstrukturen auf unterschiedlichen Skalen. Im Bereich kleiner Skalen sind Isotropie und Homogenität im statistischen Sinn wiederhergestellt.

Von besonderer Bedeutung ist die Skalierungssymmetrie (Skaleninvarianz) kleiner Skalen, die wie folgt formuliert werden kann:

$$\delta v(\lambda l) = \lambda^h \delta v(l) \quad . \quad (1.10)$$

Das Gleichheitszeichen bezieht sich hier auf Gleichheit in der Verteilung. Postuliert man die Selbstähnlichkeit der kleinskaligen Turbulenz, so existiert nur ein einziger globaler Skalenexponent, der Gl.(1.10) erfüllt. Dieser hat den Wert $h = 1/3$ [Fr95].

Alle diese Eigenschaften werden als universell angenommen, d.h. als unabhängig vom spezifischen, die Turbulenz erzeugenden Mechanismus.

Um ein dissipatives System wie es die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben, in einem stationären Zustand zu halten, ist eine kontinuierliche Energiezufuhr notwendig, die gewöhnlich über die Grenzflächen der Strömung erfolgt. Für ein unendlich ausgedehntes Flüssigkeitsvolumen nimmt man an, dass es über ein δ -korreliertes Gaußverteiltes Zufallsfeld $F(\mathbf{x}, t)$ getrieben wird. Turbulenz entsteht dann, wenn die Energiezufuhr und die Dissipation sich auf räumlich getrennten Skalen abspielen.

1.2.1 Die Richardson-Kaskade

Die Vorstellung eines solchen Fliessgleichgewichts liegt dem Modell der Energiekaskade zugrunde, das von Richardson formuliert wurde [Ri26]. Das grundlegende Konzept ist die Vorstellung, dass turbulente Strömungen sich aus Wirbeln unterschiedlicher Größe l zusammensetzen, denen charakteristische Geschwindigkeiten $u(l)$ und Zeitskalen $t_l = l/u(l)$ zugeordnet sind. Dabei können grosse Wirbel kleinere Wirbel enthalten. Auf der grössten Skala l_0 , die in der Größenordnung der charakteristischen Länge der Strömung liegt, wird Energie mit einer konstanten Rate ϵ zugeführt und erzeugt Wirbel dieser Grössenskala. Deren Reynoldszahl $Re_0 = u_0 l_0 / \nu$ entspricht der Reynoldszahl der Strömung, wodurch Viskositätseffekte für diese Wirbel vernachlässigbar klein werden.

Die Idee ist nun, dass diese grössten Wirbel instabil sind und in kleinere Wirbel

aufbrechen, auf welche die Energie mit derselben Rate ϵ übertragen wird. Die kleineren Wirbel brechen wieder in noch kleinere auf und so fort. Die Energie geht in diesem Kaskadenprozess also auf immer kleinere Skalen über, bis die Reynoldszahl $Re(l) = u(l)l/\nu$ ausreichend klein für eine stabile Wirbelbewegung ist und über die Viskosität die Energie dissipiert werden kann. Dies ist gerade für $Re(l) \approx 1$ der Fall.

Die wichtigen Modellannahmen in diesem Bild der Energiekaskade sind:

- Die Rate des Energieflusses und der Energiedissipation sind gleich der Rate, mit der Energie zugeführt wird. Also gilt

$$\epsilon = \frac{u_0^2}{t_0} = \frac{u_0^3}{l_0} = konst. \quad ,$$

unabhängig von ν .

- Die Wechselwirkung erfolgt nur lokal zwischen Wirbeln derselben Größenordnung.
- Es wird Skaleninvarianz der turbulenten Strömung angenommen, da die Wirbel auf allen Skalen das Volumen vollständig ausfüllen.

Die Theorie von Kolmogorov präzisiert dieses einfache phänomenologische Modell und entwickelt daraus eine statistische Theorie der Turbulenz auf kleinen Skalen.

1.2.2 Die Theorie von Kolmogorov

Die Theorie von Kolmogorov aus dem Jahre 1941 — daher als K41 bezeichnet — war wegweisend für die moderne Turbulenzforschung [K41]. Ausgehend von einfachen Modellannahmen werden darin genaue Vorhersagen über statistische Eigenschaften der Turbulenz gemacht. Ein Grossteil der aktuellen experimentellen und theoretischen Forschung beschäftigt sich noch immer damit, diese Vorhersagen zu untersuchen, bzw. die Theorie geeignet zu erweitern.

In ihrer knappen Originalform besteht K41 aus drei Hypothesen⁴. Die ersten beiden lauten:

- *Hypothese der lokalen Isotropie*: Für ausreichend hohe Reynoldszahlen sind die kleinskaligen turbulenten Bewegungen ($l \ll l_0$) statistisch isotrop.
- *Erste Ähnlichkeitshypothese*: Für hohe, aber nicht unendlich grosse Reynoldszahlen sind die Statistiken der kleinskaligen Bewegungen universell und eindeutig durch l, ν und ϵ bestimmt.

Im Wesentlichen besagen diese Hypothesen, dass die Turbulenz auf kleinen Skalen einen universellen Zustand annimmt, der jegliche Information über den Erzeugungsmechanismus verloren hat. Aus den beiden zentralen Parametern ϵ

⁴Die Darstellung hier orientiert sich an [Pope].

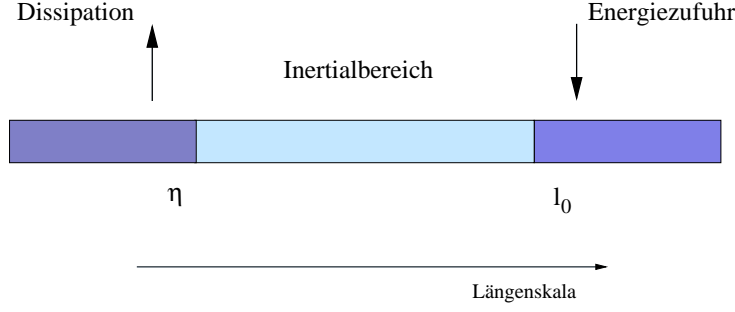


Abbildung 1.2: Die drei Bereiche der turbulenten Energiekaskade.

(Dimension m^2/s^3) und ν (Dimension m^2/s) lassen sich eindeutige Längen-, Geschwindigkeits- und Zeitskalen bilden, die sogenannten Kolmogorov-Skalen:

$$\begin{aligned}\eta &= (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \\ \tau_\eta &= (\nu/\epsilon)^{1/2}, \\ u_\eta &= \eta/\tau_\eta = (\epsilon\nu)^{1/4}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Da die auf diesen Skalen basierende Reynoldszahl $Re(\eta) = \eta u_\eta / \nu = 1$ ist, charakterisieren die Kolmogorov-Skalen die kleinsten Wirbel, für die Dissipationseffekte wirksam werden. Die Bedeutung der Begriffe Universalität und Ähnlichkeitshypothese in dieser Theorie kann dann folgendermassen erläutert werden. Betrachtet man mit den Kolmogorov-Skalen skalierte dimensionslose Geschwindigkeitsinkremente $\delta v_u = \delta v_{||}(l/\eta)/u_\eta$, so können die Statistiken von δv_u nicht zusätzlich von ϵ oder ν abhängen, weil man aus diesen beiden Parametern keine dimensionslose Grösse bilden kann. Nach der zweiten Hypothese bedeutet das aber, dass diese Statistiken universell für alle turbulenten Strömungen gültig sind. Nach K41 sind alle turbulenten Geschwindigkeitsfelder statistisch identisch, wenn sie mit den Kolmogorov-Skalen skaliert werden.

Identifiziert man die Dissipationsskala mit η , so lassen sich im Bild der turbulenten Kaskade drei wesentliche Bereiche unterscheiden (siehe Abb. 1.2.2):

- $l > l_0$: Der Bereich der Energiezufuhr, gekennzeichnet durch die grosskaligen anisotropen Wirbelbewegungen. Für $l < l_0$ spricht man vom universellen Gleichgewichtsbereich.
- $\eta \ll l \ll l_0$: Der Inertialbereich, in dem die Dissipation vernachlässigbar ist.
- $l \ll \eta$: Der Dissipationsbereich, in dem die Viskosität wirksam ist.

Aus der ersten Ähnlichkeitshypothese ergibt sich für den Inertialbereich die

- *Zweite Ähnlichkeitshypothese*: im Grenzfall unendlich hoher Reynoldszahlen sind die Statistiken der kleinskaligen Bewegungen im Bereich $\eta \ll l \ll$

l_0 universell und eindeutig durch l und ϵ bestimmt, unabhängig von der Viskosität ν .

Seit K41 liegt ein Hauptaugenmerk der statistischen Theorien zur Turbulenz auf den Eigenschaften des turbulenten Geschwindigkeitsfelds im Inertialbereich. Hier soll nur auf die wichtigsten Folgerungen aus den Hypothesen eingegangen werden.

Mit einfacher Dimensionsanalyse folgt aus der zweiten Ähnlichkeitshypothese für das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen n -ter Ordnung im Inertialbereich:

$$S_n(l) = C_n(\epsilon l)^{n/3} \quad , \quad (1.12)$$

wobei C_n dimensionslose Konstanten sind.

Durch Fourieranalyse der Strukturfunktion 2. Ordnung folgt daraus weiter das bekannte $k^{-5/3}$ -Energiespektrum des Inertialbereichs:

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad . \quad (1.13)$$

Darüberhinaus hat Kolmogorov in seiner dritten Veröffentlichung zur Turbulenz aus dem Jahre 1941 die exakte Form der longitudinalen Strukturfunktion 3. Ordnung aus den Navier-Stokes-Gleichungen beweisen können (siehe z.B. [Fr95]):

$$\langle \delta v_{||}(l)^3 \rangle = -\frac{4}{5}\epsilon l \quad . \quad (1.14)$$

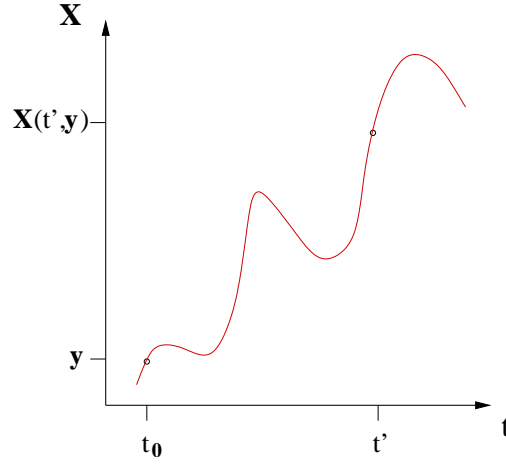
Dieses sogenannte $-4/5$ -Gesetz ist eines der wichtigsten Ergebnisse in der Turbulenzforschung, weil es sowohl exakt als auch nichttrivial ist. Insofern kann Gl.(1.14) als eine Art Randbedingung für Theorien zur Turbulenz angesehen werden, die insbesondere bei erweiterten phänomenologischen Modellen als Konsistenzkriterium herangezogen wird.

Schon bald nach der Veröffentlichung von K41 hat Landau das Problem aufgeworfen, dass Konstanten wie C_n für $n \neq 3$ nicht universell sein können, also von der speziellen Strömungsgeometrie abhängen. Moderne Formulierungen von K41 beruhen daher nicht auf postulierter Universalität, sondern auf Symmetrien der Turbulenz, wie sie in Abschnitt 1.1 behandelt wurden. Zusammen mit dem $-4/5$ -Gesetz führt dieser Zugang auf dieselben Vorhersagen für das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen und die Form des Energiespektrums [Fr95].

Zudem wurden in aktuellen Experimenten deutliche Hinweise dafür gefunden, dass im Bereich experimentell zugänglicher Reynoldszahlen die Statistiken keineswegs universell sind [RPFCC02]. Dies wirft die Frage auf, inwiefern Modelle im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ überhaupt für beobachtete turbulente Strömungen relevant sind.

1.3 Die Lagrange-Beschreibung der Turbulenz

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die turbulente Strömung durch das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ in Abhängigkeit von raumfesten Koordinaten \mathbf{x}

Abbildung 1.3: Trajektorie eines Lagrange-Teilchens $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$.

beschrieben, entsprechend einem klassischen feldtheoretischen Zugang. Alternativ zu dieser sogenannten *Euler*-Beschreibung, kann die Strömung durch die Orte und Geschwindigkeiten mitbewegter Teilchen erfasst werden. In diesem sogenannten *Lagrange*-Bild ist das Flüssigkeitsteilchen — auch als Lagrange-Teilchen bezeichnet — ein Punkt, der sich mit der lokalen Geschwindigkeit der Flüssigkeit bewegt: $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ bezeichnet seinen Ort \mathbf{X} zur Zeit t , wenn es zur festen Referenzzeit t_0 am Ort \mathbf{y} war (siehe Abb. 1.3). Die Trajektorie $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ wird über zwei Gleichungen festgelegt. Erstens ist die Startposition zur Zeit t_0 nach Definition:

$$\mathbf{X}(t = t_0, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \quad . \quad (1.15)$$

Zweitens ist die Teilchengeschwindigkeit gerade über die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an dessen Ort \mathbf{X} gegeben:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) := \mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t) \quad . \quad (1.16)$$

Lagrangesche Feldvariablen erhält man demnach durch Einsetzen des Teilchenortes in die Eulerschen Felder, sie sind nur vom Anfangsort \mathbf{y} des Teilchens und der Zeit t abhängig. Bei vorgegebenem Eulerschen Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ kann durch Integration von Gl.(1.16) die Trajektorie $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ eindeutig bestimmt werden.

Mathematisch ist dieses Teilchenkonzept als eine Koordinatentransformation von raumfesten Koordinaten \mathbf{y} zu mitbewegten Koordinaten $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ anzusehen. Die Inkompressibilitätsbedingung Gl.(1.2) erfordert dann, dass die Determinante der Jacobimatrix der Transformation konstant 1 ist:

$$\text{Det} \left[\frac{\partial \mathbf{X}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right] = 1 \quad . \quad (1.17)$$

Die Flüssigkeitsströmung wird nun über Newtonsche Bewegungsgleichungen

beschrieben:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) \quad , \\ \frac{d}{dt}\mathbf{U}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \quad ,\end{aligned}\tag{1.18}$$

mit dem Lagrangeschen Beschleunigungsfeld $\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$, das die physikalisch wirkenden Kräfte wiedergibt. Diese erhält man explizit über die Navier-Stokes-Gleichungen (1.1), wenn man berücksichtigt, dass für Lagrangesche Feldvariablen gilt:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}(t, \mathbf{y}) = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} .\tag{1.19}$$

Daraus folgt mit Gl.(1.1):

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{y}) = [-\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} .\tag{1.20}$$

In der Lagrange-Beschreibung der Turbulenz sind die Navier-Stokes-Gleichungen (1.1) gegeben durch die Gleichungen (1.18) und (1.20) unter Berücksichtigung der Bedingung (1.17). Offensichtlich ist hier die zentrale Grösse die Beschleunigung des Teilchens. Daher ermöglicht diese Beschreibung physikalisch motivierte Modellierungsansätze.

Ausgangspunkt einer statistischen Theorie sind Teilchenorte $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ und Teilchengeschwindigkeiten $\mathbf{U}(t, \mathbf{y})$. Als zentrale statistische Grösse wird hierfür eine Lagrangesche Verteilung $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)$ eingeführt:

$$\begin{aligned}f^N(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, t_i\}) = & \quad < \delta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{U}(t_1, \mathbf{y}_1))\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{X}(t_1, \mathbf{y}_1))\dots \\ & \delta(\mathbf{u}_N - \mathbf{U}(t_N, \mathbf{y}_N))\delta(\mathbf{x}_N - \mathbf{X}(t_N, \mathbf{y}_N)) > .\end{aligned}\tag{1.21}$$

Der Index $i = 1 \dots N$ bezeichnet hier einzelne Teilchen, die sich zur Startzeit am Ort \mathbf{y}_i befinden.

Aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung Gl.(1.17) ist der Zusammenhang zwischen den Statistiken im Euler- und Lagrange-Bild gegeben als:

$$f^N(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, t_i\}) = \int d\mathbf{y}_1 \dots \int d\mathbf{y}_N f^N(\{\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i, t_i\}) .\tag{1.22}$$

1.3.1 K41 im Lagrange-Bild

Die phänomenologische Theorie von Kolmogorov lässt sich in entsprechender Weise im Lagrange-Bild formulieren. Ausgangspunkte sind wieder die Vorstellung einer turbulenten Wirbelkaskade sowie die Hypothesen über lokale Isotropie und Universalität. Es gilt zu berücksichtigen, dass Lagrangesche Grössen mit der Zeit t und dem festen Anfangsort \mathbf{y} indiziert werden. Somit bezieht sich die Lagrangesche Formulierung von K41 auf Zeitskalen anstelle von Längenskalen. Insbesondere werden Strukturfunktionen als Mittelwerte von zeitlichen

Geschwindigkeitsinkrementen definiert:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{v}(t, \tau) &:= \mathbf{U}(t + \tau, \mathbf{y}) - \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) \quad , \\ D_n(\tau) &:= \langle |\delta v(\tau)|^n \rangle \quad .\end{aligned}\tag{1.23}$$

Wie im Euler-Bild lassen sich auch hier drei Skalenbereiche unterscheiden: der Integralbereich der Energiezufuhr, der Inertialbereich und der Dissipationsbereich. Der Integralbereich wird mit Hilfe der Lagrangeschen Integralzeit T_L bestimmt, die über die Lagrangesche Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeit,

$$R^L(\tau) := \frac{\langle \mathbf{U}(t, \mathbf{y}) \mathbf{U}(t + \tau, \mathbf{y}) \rangle}{\langle \mathbf{U}(t, \mathbf{y})^2 \rangle} \quad ,\tag{1.24}$$

wie folgt definiert ist:

$$T_L = \int_0^\infty R^L(\tau) d\tau \quad .\tag{1.25}$$

Das bedeutet, dass die Geschwindigkeitsinkremente gerade für $t > T_L$ unkorreliert, d.h. statistisch unabhängig werden. Die Dissipationsskala wird wie im Euler-Bild mit $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ festgelegt. Damit erstreckt sich der Inertialbereich über das Intervall $\tau_\eta \ll \tau \ll T_L$.

Postuliert man die drei Hypothesen in analoger Form, so besagt die erste Ähnlichkeitshypothese, dass die statistischen Eigenschaften turbulenter Strömungen ausschliesslich von ν , ϵ und τ abhängen. Die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente in einer Dimension $h(\delta_\tau v, \tau)$ ist nach Reskalierung mit den Kolmogorov-Skalen (1.11) also durch eine universelle dimensionslose Funktion $H(\bar{u}, \bar{\tau})$ gegeben:

$$h(\delta_\tau v, \tau) = \frac{1}{u_\eta} H\left(\frac{\delta_\tau v}{u_\tau}, \frac{\tau}{\tau_\eta}\right) = \frac{1}{(\epsilon \nu)^{1/4}} H\left(\frac{\delta_\tau v}{(\epsilon \nu)^{1/4}}, \frac{\tau}{(\nu/\epsilon)^{1/2}}\right) \quad .\tag{1.26}$$

Aus der zweiten Ähnlichkeitshypothese folgt weiter, dass $h(\delta_\tau v, \tau)$ im Inertialbereich unabhängig von der Viskosität ν sein soll. Diese Forderung ist erfüllt, wenn $H(\bar{u}, \bar{\tau})$ in folgender Form gegeben ist:

$$H(\bar{u}, \bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\tau}^{1/2}} H\left(\frac{\bar{u}}{\bar{\tau}^{1/2}}\right) \quad ,\tag{1.27}$$

da sich dann in Gl.(1.26) ν herauskürzt. Damit ergibt sich die Verteilung $h(\delta_\tau v, \tau)$ im Inertialbereich zu

$$h(\delta_\tau v, \tau) = \frac{1}{(\epsilon \tau)^{1/2}} H\left(\frac{\delta_\tau v}{(\epsilon \tau)^{1/2}}\right) \quad .\tag{1.28}$$

Das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen n -ter Ordnung lässt sich daraus unmittelbar durch Integration bestimmen:

$$D_n(\tau) \sim C_n (\epsilon \tau)^{n/2} \quad ,\tag{1.29}$$

mit der universellen dimensionslosen Konstanten C_n .

Eine alternative Formulierung von K41 im Lagrange-Bild geht auf Oboukhov zurück [Ob59]. Die Grundannahme ist hier, dass sich die Geschwindigkeitsänderungen, die das Lagrange-Teilchen erfährt, „zufällig“ ereignen. Drückt man das Lagrange-Geschwindigkeitsinkrement folgendermassen aus:

$$\delta v(\tau) = U(t + \tau, y) - U(t, y) = \int_t^{t+\tau} dt' a(t') \quad , \quad (1.30)$$

so bedeuten diese zufälligen Geschwindigkeitsänderungen, dass $a(t)$ als eine δ -korrelierte Zufallsvariable gegeben ist. Mit der zusätzlichen Annahme, dass das zweite Moment von $a(t)$ existiert, folgt für das Inkrement $\delta v(\tau)$ nach dem zentralen Grenzwertsatz:

$$\delta v(\tau) \sim (\epsilon \tau)^{1/2} \beta \quad , \quad (1.31)$$

wobei β eine Gaußverteilte Zufallsvariable darstellt. Die Statistiken von $\delta v(\tau)$ sind damit vollständig bestimmt und zeigen das durch die Gleichungen (1.28) und (1.29) gegebene Skalierungsverhalten.

Im Lagrange-Bild erhält man also die Vorhersagen von K41, indem man für die turbulente Beschleunigung einen einfachen stochastischen Prozess wie z.B. den Wiener-Prozess ansetzt. Die Geschwindigkeit des Lagrange-Teilchens wird dann durch einen einfachen Diffusionsprozess vollständig beschrieben.

1.4 Intermittenz

Eine der zentralen Aussagen der Kolmogorovs Theorie ist das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen im Inertialbereich Gl.(1.12) bzw. Gl.(1.29), die aus einfacher Dimensionsanalyse hergeleitet werden können. Diese Voraussagen stehen im Gegensatz zu den bestehenden experimentellen Messungen der Strukturfunktionen, sowohl für Experimente im Euler- als auch im Lagrange-Bild. Man findet hier vielmehr sogenanntes anomales Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen:

$$D_n(\tau) \sim \tau^{\zeta_n} \quad , \quad (1.32)$$

wobei $\zeta_n = n/2 + \zeta'(n)$ mit der nichtlinearen Funktion $\zeta'(n)$.

Abbildung 1.4 zeigt die in einem Experiment gemessenen Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente $\delta v(\tau)$ für verschiedene τ : Im Inertialbereich zeigen die Verteilungen mit kleiner werdendem Abstand eine immer stärkere Abweichung von einer Gaußverteilung und entwickeln eine ausgeprägte Spitze mit weiten Flanken. Dieser Befund deutet darauf hin, dass starke Fluktuationen mit immer grösserer Wahrscheinlichkeit auftreten. Turbulenz zeigt sogenanntes *intermittentes* Verhalten. Darüberhinaus sind die Statistiken im Inertialbereich offensichtlich nicht skaleninvariant und spiegeln die Brechung der Skalierungssymmetrie wieder.

Eine physikalische Erklärung für das Phänomen der Intermittenz in turbulenten Strömungen konnte bislang nicht eindeutig gefunden werden. Es wird gemeinhin

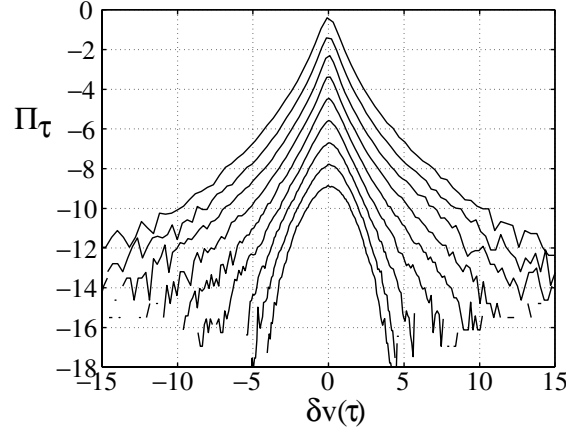


Abbildung 1.4: Experimentelle Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente $\delta v(\tau)$ für verschiedene τ . Für τ in der Größenordnung von T_L ist die Verteilung Gaußförmig (unterste Kurve). Für kleinere τ wird der intermittente Charakter der Verteilungen zunehmend deutlich (siehe Abschnitt 2.1). Abbildung entnommen aus [MMMP01].

vermutet, dass eine Ursache in langreichweitigen Korrelationen des turbulenten Beschleunigungsfelds zu finden ist. Die genannten Eigenschaften weisen darauf hin, dass das Geschwindigkeitsfeld eine komplexe Ordnung enthält, der man mit den oben behandelten Ansätzen nicht gerecht wird. Trotz der Erfolge von K41 werden die Unzulänglichkeiten von Kolmogorovs Theorie zunehmend deutlich. Die Intermittenz, das damit verbundene anomale Skalierungsverhalten und die Nichtgaußschen Statistiken erweisen sich nicht als Ausnahme, sondern als Charakteristikum turbulenter Strömungen.

Diese Eigenschaften aus erweiterten phänomenologischen Theorien zu erklären stand im Mittelpunkt der Turbulenzforschung der vergangenen Jahre und führte zu vielfältigen Erweiterungen von K41. Das Problem an solchen phänomenologischen Ansätzen ist allerdings, dass zwar die experimentellen Verteilungen erfolgreich reproduziert werden können, dass aber keinerlei Verbindung zu den grundlegenden physikalisch wirkenden Kräften besteht. Ziel einer statistischen Beschreibung der Turbulenz ist letztendlich, die anomalen Statistiken aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten zu können.

Kapitel 2

Experimente zur Lagrangeschen Teilchenstatistik

Die Turbulenzforschung ist bereits seit ihren Anfängen durch eine enge Verbindung von Theorie und Experiment geprägt [Batc1]. Experimentelle Untersuchungen turbulenter Strömungen wurden dabei aus technischen Gründen vorwiegend im Euler-Bild vorgenommen. In solchen Experimenten wird die Geschwindigkeit der Strömung an einem festen Ort im Raum gemessen. Das Messverfahren beruht gewöhnlich auf einem Heissdraht-Anemometer, das über die Kühlrate die Geschwindigkeit bestimmen kann. Auf diese Weise werden Geschwindigkeitsdifferenzen zu verschiedenen Zeiten, d.h. über zeitliche Inkremente τ , gemessen und nachträglich in räumliche Inkremente übertragen. Der Schlüssel dazu ist die sogenannte *Taylorhypothese*: Es wird angenommen, dass im Vergleich zur Hauptströmung U sehr kleine Fluktuationen l über die Beziehung $l = U\tau$ mit den zeitlichen Inkrementen zusammenhängen. Dieses Verfahren liefert genau Daten über das Euler-Geschwindigkeitsfeld bis hin zu sehr hohen Reynoldszahlen.

Hingegen müssen bei Experimenten im Lagrange-Bild die Bahnen der in die Strömung eingestreuten Tracerteilchen optisch aufgenommen werden. In der Praxis ist dies nicht einfach zu verwirklichen, da die Bewegungen der Teilchen sich auf einer sehr kleinen Zeitskala abspielen, die bis in die Größenordnung der Kolmogorov-Zeit τ_η hinabreicht. In Bruchteilen von Millisekunden können hier extreme Beschleunigungen wirken. Für eine akurate Messung müssen die Teilchenbahnen daher in einem weiten räumlichen und zeitlichen Skalenbereich aufgelöst werden. Das Teilchen muss sich zudem lange genug im Messvolumen aufhalten. In der Regel wird es für eine Dauer zwischen $1 T_L$ und $10 T_L$ verfolgt. Ein zusätzliches Problem bei diesen Experimenten ist die Frage, inwieweit die Tracerteilchen mit ihrer festen Grösse und Dichte überhaupt einem idealen Lagrange-Teilchen entsprechen können. Es wird angenommen, dass genau solche Teilchen diese Funktion erfüllen, die kleiner als die Kolmogorov Länge η sind und eine Dichte besitzen, die derjenigen der Flüssigkeit entspricht. Der Einfluss der Effekte, die aus einer endlichen Teilchengrösse resultieren wie z.B. Reibung, wird bei den Messungen gewöhnlich vernachlässigt. Allerdings

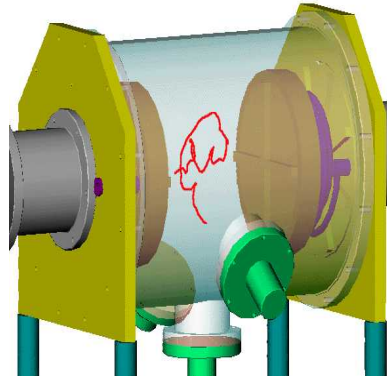


Abbildung 2.1: Grafik des Experiments aus Lyon. Man erkennt die Scheiben links und rechts, den Ultraschallemitter unter dem Zylinder und an beiden Seiten die Empfänger. Die Abmessungen sind hier: Radius $9,5\text{ cm}$, Abstand 18 cm . Die Drehfrequenz der Scheiben beträgt 7 Hz . Entnommen aus [MDLAP02].

bestehen Hinweise darauf, dass das Verhalten realer Teilchen eine völlig andere Dynamik als Punktteilchen aufweisen kann [NTGT02].

Hier soll noch angemerkt werden, dass bei Experimenten anstelle der Reynoldszahl üblicherweise die sogenannte Taylor-Reynoldszahl Re_λ als Mass für die Stärke der Turbulenz verwendet wird. Diese ist aus den charakteristischen Grössen einfacher zu bestimmen: $Re_\lambda = \sqrt{15Re} \sim T_L/\tau_\eta$.

Zwei neuere Experimente konnten die Schwierigkeiten, die bei der Messung Lagrangescher Teilchenbahnen auftreten auf sehr unterschiedliche Weise lösen.

2.1 Doppler-Sonar-Messung

Die Gruppe um J.F. Pinton in Lyon entwickelte eine auf dem Dopplereffekt beruhende Methode, um die Geschwindigkeiten und Orte der Lagrange-Teilchen exakt zu messen [MMMP01]. Die Turbulenz wird hier über eine sogenannte von-Karman-Strömung erzeugt: In einem Zylinder drehen sich zwei Scheiben gegensinnig mit hoher Frequenz und übertragen die Bewegung durch Reibung an den Grenzflächen. Um die Reibungseffekte auf das Wasser zu vergrössern trägt jede Scheibe zusätzlich 5 mm hohe Klingen. Diese Art von Strömungserzeugung hat den Vorteil, dass man eine sehr turbulente Strömung auf kompaktem Raum ohne Hauptströmung erhält, in der sich die Teilchen relativ lange aufhalten können. Für eine Energiezufuhr von $\epsilon = 25\text{ W/kg}$ ergibt sich eine Taylor Reynoldszahl von $R_\lambda = 740$. Insgesamt erhält man eine in guter Näherung homogene und isotrope Turbulenz.

Die Lagrange-Teilchen sind kleine Polystyrolkugeln der Dichte von Wasser mit einem Durchmesser von $d = 250\text{ }\mu\text{m}$. Es wird angenommen, dass diese Teilchen der Flüssigkeitsbewegung für Zeiten grösser als ein charakteristisches

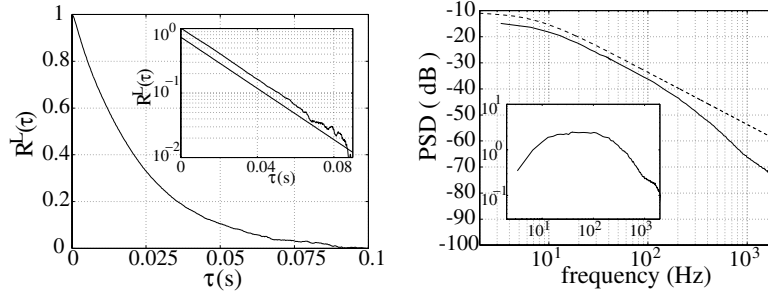


Abbildung 2.2: Links: Exponentiell abfallende Autokorrelationsfunktion mit logarithmischem Fit (kleines Bild). Rechts: Leistungsspektrum. Vergleich mit der berechneten Lorentzkurve. Kompensiertes Spektrum $\omega^2 E^L$ (kleines Bild). Entnommen aus [MMMP01].

τ_{min} folgen. Diese Zeit wird entsprechend dem Wirbelmodell aus dem Verhältnis des Durchmessers zur Umlaufgeschwindigkeit der Wirbel mit Durchmesser d bestimmt und ergibt $\tau_{min} \approx 1 \text{ ms}$. Kleinere Skalen können aufgrund der Trägheit nicht aufgelöst werden, daher auch nicht der Dissipationsbereich, der bei $\tau_\eta = 0,2 \text{ ms}$ beginnt. Insgesamt werden die Kugeln für einen Zeitraum zwischen 1 ms bis zu $10 T_L$ — solange sie sich im Messbereich aufhalten — als Lagrange-Teilchen angesehen.

Das Verfahren zur Messung von Ort und Geschwindigkeit des Teilchens basiert hier auf dem Doppler-Sonar-Prinzip: Auf das Flüssigkeitsvolumen wird fortwährend eine sinusförmige monochromatische Ultraschallwelle der Frequenz $f_0 = 2,5 \text{ MHz}$ eingestrahlt, die von den Tracerteilchen gestreut wird. Zwei im 45 Grad Winkel positionierte Empfänger detektieren die reflektierte Schallwelle und ermöglichen so die Orts- und Geschwindigkeitsmessung (siehe Grafik 2.1). Der Ort wird über direkte Triangulation ermittelt, die Geschwindigkeit über die Bestimmung der Frequenzverschiebung Δf durch den Dopplereffekt. Für den Streuvorgang gilt der Zusammenhang: $2\pi\Delta f = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$, wobei \mathbf{q} der Streuvektor ist (Differenz von einfallender und gestreuter Welle) und \mathbf{v} die gesuchte Geschwindigkeit. Die zeitliche Entwicklung der Frequenzverschiebung wird über eine hochauflösende parametrische Methode numerisch ausgewertet und liefert die Komponente von \mathbf{v} entlang \mathbf{q} .

Die Ergebnisse dieser Messung sollen im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Zunächst wurde die Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeit bestimmt, die einen exponentiell abfallenden Verlauf zeigt (siehe Abb. 2.2):

$$R^L(\tau) = \frac{\langle v(t)v(t+\tau) \rangle}{\langle v^2 \rangle} \sim e^{-\tau/T_L} \quad . \quad (2.1)$$

Daraus erhält man die Lagrangesche Integralzeit: $T_L = 22 \text{ ms}$. In dieser Größenordnung spielt sich zugleich die Energiezufuhr ab. Aus der Autokorrelationsfunktion lässt sich durch eine Fouriertransformation direkt das Spektrum der Geschwindigkeit $E^L(\omega)$ berechnen, das folglich die Form einer Lorentzkurve hat.

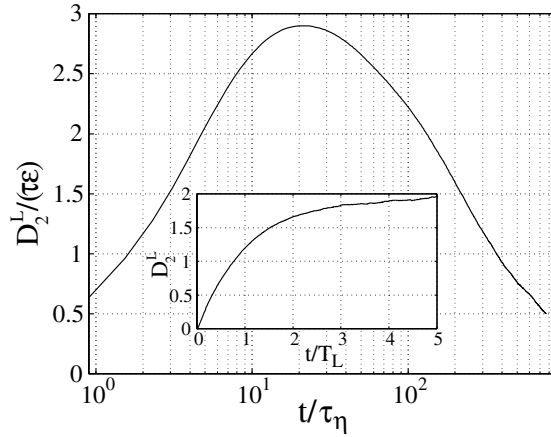


Abbildung 2.3: Die Strukturfunktion 2. Ordnung. Grosses Bild: $D_2(\tau)/\epsilon\tau$. Kleines Bild: $D_2(\tau)$ als Funktion der Zeit. Ein waagrechtes Plateau ist nicht zu erkennen. Entnommen aus [MMMP01].

Eine Dimensionsanalyse nach K41 ergibt für das Spektrum das Skalierungsverhalten $E^L \sim \epsilon\omega^{-2}$. Dieses Ergebnis kann experimentell bestätigt werden.

Weiterhin folgt aus K41 als Skalierungsverhalten für die Strukturfunktion 2. Ordnung:

$$D_2(\tau) = C_0\epsilon\tau \quad , \quad (2.2)$$

mit der universellen dimensionslosen Konstanten C_0 . Abb. 2.3 zeigt das Ergebnis der experimentellen Messung für $D_2(\tau)/\epsilon\tau$: ein waagrechtes Plateau ist hier in keinsten Weise festzustellen. Dieser Befund könnte darauf zurückzuführen sein, dass C_0 von der Reynoldszahl abhängt, $C_0 = C_0(Re)$, und erst im Limes unendlich hoher Re gegen einen konstanten Wert konvergiert.

Der Kernpunkt des Experiments ist die Messung der Verteilung $\Pi(\delta_\tau v)$ der Geschwindigkeitsinkremente $\delta_\tau v$ für verschiedene Zeitskalen τ . Die Messungen können in Abb. 2.4 verglichen werden (alle Verteilungen wurden auf Varianz 1 normiert). Man erkennt zunächst die klare Symmetrie der Kurven, wodurch die lokale Isotropie der Strömung gut belegt ist. Das Hauptaugenmerk liegt auf der ausgeprägten intermittenten Form der Verteilungen für kleine Skalen. Im Bereich der integralen Zeitskala ist $\Pi(\delta_\tau v)$ klar Gaußförmig und entwickelt mit kleiner werdendem τ weite Flanken. Für die kleinste aufgelöste Zeitskala $\tau = 0,15 \text{ ms}$ ist die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente stark intermittent.

Die Verteilungen $\Pi(\delta_\tau v)$ können offensichtlich für unterschiedliche τ nicht durch Reskalierung ineinander überführt werden. Diese Eigenschaft ist am anomalen Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen zu erkennen: $\langle |\delta_\tau v|^n \rangle \sim \tau^{\zeta(n)}$ mit der nichtlinearen Funktion $\zeta(n)$. In Experimenten wird dieses Skalierungsverhalten gewöhnlich mit dem „extended self-similarity“ (ESS) Ansatz untersucht: Da bei endlichen Reynoldszahlen der Inertialbereich nicht sehr ausgeprägt ist, betrachtet man stattdessen das relative Skalierungsverhalten der Struktur-

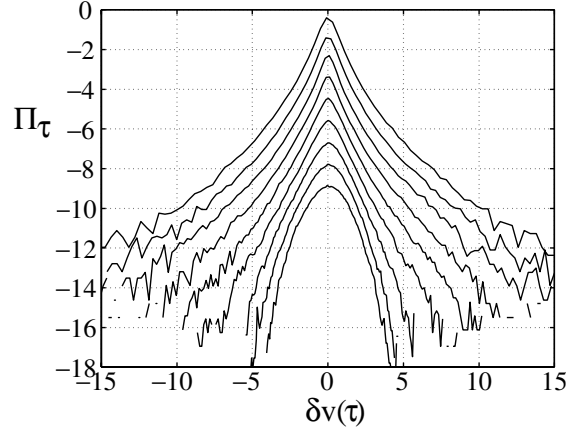


Abbildung 2.4: Normierte Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente $\delta_\tau v$. τ variiert von 0.15 ms (oberste Kurve) bis 40 ms (unterste Kurve). Für kleine τ werden die Verteilungen zunehmend intermittent und nähern sich der Form der Beschleunigungsverteilung an (vgl. Abb. 2.6). Entnommen aus [MMMP01].

funktionen $\langle |\delta_\tau v|^n \rangle \sim \langle |\delta_\tau v|^2 \rangle^{\xi(q)}$, mit $\xi(q) = \zeta(q)/\zeta(2)$. Die Messung ergibt für $\xi(q)$ die Gesetzmässigkeit [MDLAP02]:

$$\xi(q) = (1/2 + \lambda_L^2)q - \lambda_L^2 q^2/2 \quad , \quad (2.3)$$

wobei für $\lambda_L^2 = 0,115 \pm 0.01$ ermittelt wird. Nach K41 wird für $n = 2$ der Wert $\zeta(2) = 1$ erwartet, also wäre dann $\lambda_L = 0$. λ_L kann daher als ein Parameter für die Stärke der Intermittenz angesehen werden. Bei Heissdraht Experimenten im Euler-Bild findet man zum Vergleich $\lambda_E^2 = 0,025$. Das Experiment von Lyon zeigt damit deutlich das intermittente Verhalten der Lagrange-Turbulenz im Inertialbereich. Die Intermittenz ist hier sogar deutlich ausgeprägter als im Euler-Bild.

2.2 Teilchendetektor Messung

Die Gruppe um E. Bodenschatz an der Cornell University verwendete für ihr Experiment zur Lagrange-Turbulenz eine Detektortechnologie aus Beschleunigerexperimenten, um die benötigte hohe Auflösung der Zeitskala zu erreichen [LVCAB01]. Mit dieser Technik wird eine zeitliche Auflösung von bis zu $0.05 \tau_\eta$ erreicht und ermöglicht sogar, anstelle von Geschwindigkeitsinkrementen direkt die Beschleunigung der Teilchen zu messen. Allerdings können aufgrund des relativ kleinen Messvolumens innerhalb der Strömung die Teilchenbahnen nur für einige wenige Millisekunden verfolgt werden.

Die turbulente Strömung ist wie beim Lyon-Experiment eine von-Karman-Strömung mit vergleichbarer Geometrie. Bei einer Rotationsfrequenz von $7,0 \text{ Hz}$ werden Reynoldszahlen bis zu $Re_\lambda = 970$ erzeugt. Aufgrund einer mittleren Streckung der Strömung entlang der Scheibenachse, wird sie hier zwar als annähernd homogen, aber nicht als isotrop angenommen. Vielmehr sind

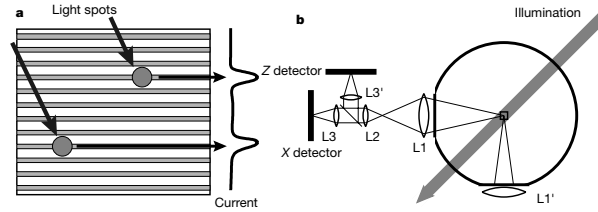


Abbildung 2.5: Messvorrichtung des Cornell-Experiments. **a:** Schematische Darstellung des Streifendetektors. **b:** Das optische System. Entnommen aus [LVCAB01].

in der Auswertung bei allen Reynoldszahlen die Auswirkungen der anisotropen grossen Wirbel auf die Beschleunigung messbar. Die charakteristischen Skalen für die höchsten Reynoldszahlen sind $\eta = 18 \mu\text{m}$ und $\tau_\eta = 0,3 \text{ ms}$.

Die Tracerteilchen sind ebenfalls Polystyrolkugeln der Dichte von Wasser, allerdings mit einem Durchmesser von $d = 46 \mu\text{m}$ deutlich kleiner als in Lyon. Aus Messungen mit verschiedenen Teilchengrössen konnte eine Abweichung der Beschleunigungen im Vergleich zu idealen Flüssigkeitsteilchen von $\approx 10\%$ extrapoliert werden. Hieran wird deutlich, dass die Teilchengrösse insbesondere für das Experiment in Lyon eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle darstellt.

Die Grafik 2.5 zeigt den experimentellen Aufbau der Detektormessung. Im Zentrum der Strömung wird der Messbereich von 8 mm^3 mit einem 6 Watt starken Argon Ionenlaser bestrahlt, der zu den beiden Empfängerlinsen einen Winkel von 45 Grad einnimmt. Als Detektor werden Silikon Streifendetektoren verwendet, die gewöhnlich in Elementarteilchenexperimenten die Teilchenbahnen ausmessen. Streifendetektoren sind im Prinzip planare Photodioden, die eine eindimensionale Projektion der einfallenden Lichtintensität mit sehr hoher Geschwindigkeit aufnehmen können (bis zu 70000 mal pro s). Eine Linse (L1) bringt das ausfallende Licht über einen Strahlteiler auf ein Paar von Streifendetektoren, die ein zweidimensionales Bild (x-z Koordinaten) der Teilchenbahn aufnehmen. Dasselbe geschieht mit einer zweiten Linse (L1') für die y und z Koordinaten. Über dieses optische System kann direkt die dreidimensionale Position des Teilchens mit einer Genauigkeit von $7 \mu\text{m}$ erfasst werden.

Die Verteilung der gemessenen Beschleunigungen hat auch hier eine stark intermittente Form (siehe Abb. 2.6). Ein Vergleich mit dem Lyon-Experiment zeigt, dass dort die Verteilung für die kleinsten Geschwindigkeitsinkremente sich bereits deutlich an die Form der Beschleunigungsverteilung annähert. Wieder sind die weiten Flanken im Vergleich zu einer Gaußverteilung mit derselben Varianz (gestrichelte Linie) ausgeprägt.

Neben dieser zentralen Messung wurde zusätzlich eine theoretische Vorhersage für die Varianz einer Beschleunigungskomponente untersucht. Heisenberg und

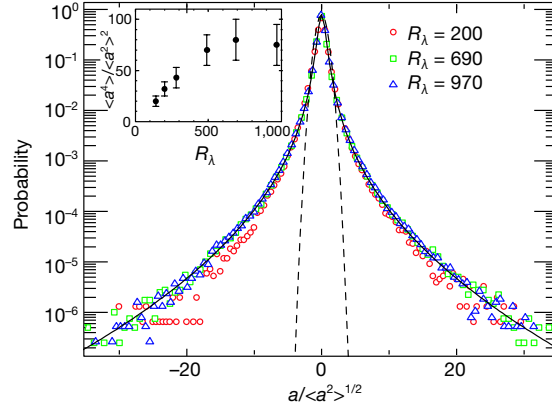


Abbildung 2.6: Die experimentelle Beschleunigungsverteilung (normiert). Im kleinen Bild wurde die Kurtosis $\langle a^4 \rangle / \langle a^2 \rangle^2$ in Abhängigkeit von Re_λ aufgetragen. Sie gibt die Stärke der Abweichung von einer Gaussfunktion an. Entnommen aus [LVCAB01].

Yaglom konnten aus K41 folgendes Gesetz herleiten [MoYa]:

$$\langle a_i a_j \rangle = a_0 \epsilon^{3/2} \nu^{-1/2} \delta_{ij} \quad . \quad (2.4)$$

Für den Fall Gaußscher Fluktuationen hätte die universelle Konstante a_0 einen Wert von ≈ 1 . Hingegen zeigt das experimentelle Resultat, dass a_0 von Re_λ abhängt und erst für $Re_\lambda > 500$ annähernd konstant wird. In diesem Bereich wird damit das K41 Verhalten bestätigt. Allerdings ist auch für die höchsten Reynoldszahlen die Beschleunigung nicht vollständig isotrop, wie aus einem Vergleich der transversalen und axialen Beschleunigungskomponenten erkennbar ist. Die Messung zeigt, dass selbst für $Re_\lambda \approx 1000$ die Auswirkungen der anisotropen grossen Skalen vorhanden sind.

Die Ergebnisse des Cornell Experiments stehen insgesamt im Einklang mit ihrem französischen Pendant. Durch die Detektortechnik ist es hier sogar gelungen, bis in die kleinsten Skalenbereiche vorzustossen und direkt die Beschleunigung eines Lagrange-Teilchens zu messen.

2.3 Direkte numerische Simulation

Als Ergänzung zu den oben diskutierten experimentellen Messungen werden abschliessend die Ergebnisse einer aktuellen direkten numerischen Simulation (DNS) zur Turbulenz im Lagrange-Bild vorgestellt. In der DNS der Gruppe Biferale aus Rom können die Teilchenbahnen sowohl im dissipativen Bereich aufgelöst, als auch für Zeiten in der Grössenordnung von T_L verfolgt werden [BBCLT04]. Allerdings sind die Reynoldszahlen mit $Re_\lambda \approx 280$ deutlich niedriger.

In einer DNS werden die Navier-Stokes-Gleichungen direkt integriert, es fliessen also keinerlei Modellannahmen ein. Die Integration wird in einem dreidimensionalen Würfel mit 1024^3 Gitterpunkten und periodischen Randbedingungen

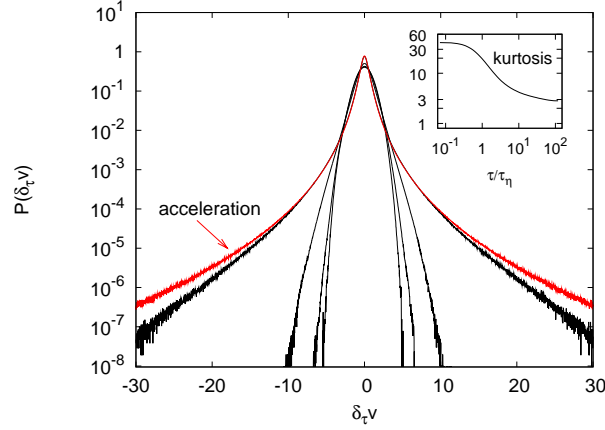


Abbildung 2.7: Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente und der Beschleunigung (äusserste Kurve) in der DNS. Verlauf der Kurtosis in Abhängigkeit von τ (kleines Bild). Entnommen aus [BBCLT04].

unter Verwendung eines Pseudospektralverfahrens durchgeführt. Aufgrund des hohen Rechenaufwands wird ein Parallelcomputer verwendet.

Durch eine konstante Rate der Energiezufuhr ϵ wird ein statistisch stationäres Geschwindigkeitsfeld erzeugt, in das Millionen von Lagrange-Teilchen eingelassen werden. Über die Beziehung

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(X(t), t) \quad (2.5)$$

werden die Trajektorien der Teilchen über die Zeidauer T_L integriert. Die Orte $X(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{X}(t)$ werden mit einer Aufzeichnungsrate von $0.07 \tau_\eta$ für die Datenauswertung gespeichert.

Die gemessenen Verteilungen in Abb. 2.7 stehen im Einklang mit den Ergebnissen aus Lyon und Cornell. Die Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente sind im Bereich T_L Gaußförmig und werden für kleiner werdendes τ immer stärker intermittent. Schliesslich nähern sie sich der bekannten Form der Beschleunigungsverteilung mit den weiten Flanken an. Den Verlauf dieser Entwicklung zeigt ein Plot der Kurtosis $K(\tau) = \frac{\langle (\delta_\tau v)^4 \rangle}{\langle (\delta_\tau v)^2 \rangle^2}$ in Abhängigkeit von τ (kleines Bild in Abb. 2.7): Für den Bereich um T_L ist sie Gaußkurven entsprechend 3 und steigt für kleiner werdende τ an bis sie einen Sättigungsbereich erreicht.

In dieser Simulation wurde ebenfalls das anomale Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen untersucht. Abb. 2.8 zeigt die $D_n(\tau)$, die für $n = 2, 4, 6$ doppelt logarithmisch aufgetragen wurden. Die Skalenexponenten werden wieder mit dem ESS-Ansatz ermittelt: hier findet man die relativen Exponenten $\xi(4) = 1,7 \pm 0,05$, $\xi(5) = 2,0 \pm 0,05$ und $\xi(6) = 2,2 \pm 0,07$, was mit dem Resultat aus Lyon Gl.(2.3) vergleichbar ist.

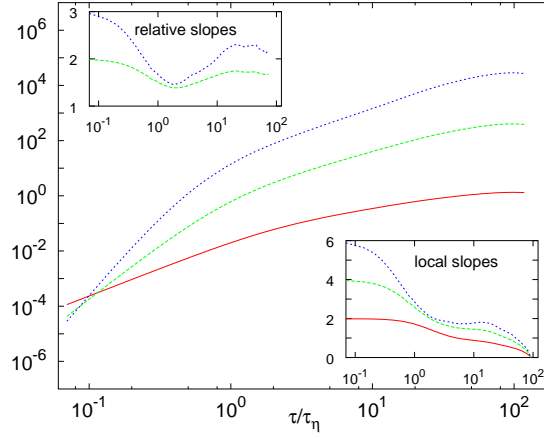


Abbildung 2.8: Doppelt logarithmischer Plot von $D_n(\tau)$ für $n = 2, 4, 6$ (von unten nach oben) gegen τ . Unten rechts: lokale Steigung $d \log D_n / d \log \tau$. Oben links: relative Steigung bzgl. $D_2(\tau)$. Entnommen aus [BBCLT04].

Zusätzlich wurde die Konstante a_0 aus der Heisenberg-Yaglom-Vorhersage gemessen (siehe Gl.(2.4)). Mit dem Wert $a_0 = 3.5 \pm 0.3$ entspricht sie den Ergebnissen aus Cornell für vergleichbare Reynoldszahlen.

Die Experimente und Simulationen stimmen also in ihren Ergebnissen für die statistischen Größen der vollentwickelten Lagrange-Turbulenz weitgehend überein. Viele Vorhersagen aus K41 können nicht eindeutig nachgewiesen werden, wobei sich natürlich die Frage stellt, für welche Reynoldszahlen tatsächlich ein ausgeprägter Inertialbereich vorhanden ist. Der Kernpunkt ist die stark intermittente Form der Verteilungen der Geschwindigkeitsinkremente für kleine τ bzw. der Beschleunigung des Lagrange-Teilchens. Wie dieser experimentelle Befund in Einklang mit phänomenologischen Theorien gebracht werden kann, wird im nächsten Kapitel behandelt.

Kapitel 3

Heuristische Modelle für die Einteilchenstatistik

Der intermittente Charakter turbulenter Strömungen konnte im Euler-Bild schon wesentlich früher als im Lagrange-Bild nachgewiesen werden. Schon seit den 60er Jahren beschäftigt sich ein Grossteil der Turbulenzforschung damit, die Diskrepanz zwischen den Vorhersagen von K41 und den experimentellen Ergebnissen zu untersuchen und davon ausgehend verfeinerte phänomenologische Modelle zu formulieren.

In diesem Kapitel werden verschiedene heuristische Intermittenzmodelle für die Lagrangesche Teilchenstatistik vorgestellt. Ausgehend von Kolmogorovs selbst eingeführter Erweiterung seiner Theorie stehen zunächst Eulersche Modelle im Blickpunkt, die wie im Fall des multifraktalen Modells, in das Lagrange-Bild übertragen werden können. Bei den eigenständigen Lagrange-Modellen ist ein vielfach verwendeter Ansatz die Modellierung der turbulenten Beschleunigung über einen stochastischen Prozess. In neuerer Zeit weckte eine mögliche Verbindung der Teilchenstatistiken zur nichtextensiven Tsallis-Statistik grosse Resonanz. Allen heuristischen Modellen gemeinsam ist die Tatsache, dass ihre Bedeutung nur durch den Vergleich mit den Experimenten bewertet werden kann. Die hier vorgestellte Übersicht ist natürlich bei weitem nicht vollständig. Die Vielfalt der Modelle zeigt zum einen das grosse Interesse an den neueren experimentellen Ergebnissen, zum anderen aber auch, dass über eine einheitliche Beschreibung noch kein Konsens erzielt wurde. Für eine weitergehende Diskussion wird auf den Übersichts-Artikel von Aringazin und Mazhitov [AM04] verwiesen.

3.1 Modelle im Euler-Bild

3.1.1 Kolmogorovs log-normal Modell

Die von Kolmogorov und Oboukhov 1962 veröffentlichten Erweiterungen von K41 [K62],[Ob62] beziehen sich auf die beiden Ähnlichkeitshypothesen (siehe Abschnitt 1.2.2). Die erste Ähnlichkeitshypothese wird folgendermassen abgeändert: Die Statistiken der Euler-Geschwindigkeitsinkremente $\delta v_l := \delta v(l)$ hängen nicht mehr von einer überall in der Strömung konstanten Dissipationsrate ϵ ,

sondern vielmehr von der Grösse ϵ_l ab, der über die Skala l gemittelten lokalen Dissipationsrate $\epsilon(\mathbf{x}, t)$:

$$\epsilon_l(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{l^3} \int_V \epsilon(\mathbf{x} + \mathbf{l}', t) d\mathbf{l}' \quad , \quad (3.1)$$

wobei definiert wird

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{2} \nu \sum_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad . \quad (3.2)$$

Die zweite verfeinerte Ähnlichkeitshypothese besagt dann, dass im Bereich $\eta \ll l \ll l_0$ die Statistiken von δv_l nur in Abhängigkeit von ϵ_l universell sind und durch ϵ_l und l unabhängig von ν festgelegt werden. Analog zur originalen Formulierung folgt daraus aus einer Dimensionsanalyse: $\langle (\delta_l v)^n | \epsilon_l \rangle = C_n (\epsilon_l l)^{n/3}$ mit der dimensionslosen Konstanten C_n . Das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen im Inertialbereich erhält man daraus als unbedingten Mittelwert:

$$S_n(l) = \langle |\delta_l v|^n \rangle = \langle \langle |\delta_l v|^n | \epsilon_l \rangle \rangle = C_n \langle \epsilon_l^{n/3} \rangle l^{n/3} \quad . \quad (3.3)$$

Da $\langle \epsilon_l \rangle = \epsilon$ gilt, ergeben K41 und K62 im Fall $n = 3$ beide die von dem $-4/5$ -Gesetz geforderte Vorhersage.

Um Aussagen über die Strukturfunktionen für beliebige n zu machen, müssen die statistischen Eigenschaften von ϵ_l festgelegt werden. Dazu wird die Annahme gemacht, dass ϵ_l log-normal verteilt ist (d.h. $\ln(\epsilon_l/\epsilon)$ ist normalverteilt). Zusätzlich soll gelten $\langle \epsilon_l^2 \rangle / \epsilon \sim (l_0/l)^\mu$ mit der positiven Konstanten μ , die als Intermittenz-Exponent bezeichnet wird. Die Momente von ϵ_l skalieren dann wie

$$\frac{\langle \epsilon_l^m \rangle}{\epsilon^m} \sim \left(\frac{l_0}{l} \right)^{m(m-1)\mu/2} \quad . \quad (3.4)$$

Für das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen Gl.(3.3) ergibt sich daraus $S_n(l) \sim l^{\zeta_n}$ mit dem Exponenten

$$\zeta_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{18} \mu n(n-3) \quad . \quad (3.5)$$

Aus dem experimentell bestimmten Intermittenz-Exponenten $\mu = 0.25 \pm 0.05$ erhält man z.B. für $n = 2$: $\zeta_2 \approx \frac{2}{3} + \frac{1}{36}$ und damit eine kleine Korrektur zum $k^{-5/3}$ Spektrum. Bei grossen n stimmen die Vorhersagen von K62 mit den Experimenten immer weniger überein. Die Bedeutung der verfeinerten Hypothesen liegt damit vor allem darin, dass sie als erstes heuristisches Modell den Intermittenzphänomenen Rechnung trugen und wegweisend für viele spätere Ansätze waren.

3.1.2 Castaings Gleichung

B. Castaing verfolgte dieselbe Idee lokal unterschiedlicher ϵ_l [CGH90]. Um die Statistiken bestimmen zu können, benötigt man wie oben zwei Annahmen: die Statistik der relevanten Grössen für ein festes ϵ_l und die Verteilung der ϵ_l in der

Strömung.

Da letztendlich nur diese ϵ_l -Verteilung für die intermittenten Statistiken verantwortlich ist, wird als erste Annahme postuliert, dass jede von einem festen ϵ_l abhängige Grösse normalverteilt ist. Die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente $\delta_l v$ ist in diesem Fall vollständig durch die Varianz σ_l festgelegt:

$$P(\delta_l v) = \frac{1}{\sigma_l \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(\delta_l v)^2}{2\sigma_l^2} \right), \quad (3.6)$$

wobei dimensionelle Überlegungen den Zusammenhang $\sigma_l \sim (\epsilon_l l)^{1/3}$ ergeben. Die Intermittenz kommt nun durch die fluktuierenden σ_l ins Spiel. Entsprechend K62 ist auch hier die zweite Annahme, dass σ_l log-normal verteilt ist:

$$Q(\sigma_l) = \frac{1}{\lambda \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{\ln^2(\sigma_l/\sigma^0)}{2\lambda^2} \right) \frac{1}{\sigma_l} \quad . \quad (3.7)$$

σ^0 ist die wahrscheinlichste Varianz von $\delta_l v$ und λ ist die Varianz von $\ln(\sigma_l)$. Aus Gl.(3.6) und Gl.(3.7) erhält man die intermittente Verteilung für $\delta_l v$:

$$\begin{aligned} \Pi(\delta_l v) &= \int_0^\infty d\sigma_l P(\delta_l v) Q(\sigma_l) \\ &= \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty d\sigma_l \exp \left(-\frac{(\delta_l v)^2}{2\sigma_l^2} \right) \exp \left(-\frac{\ln^2(\sigma_l/\sigma^0)}{2\lambda^2} \right) \frac{1}{\sigma_l^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dieser Ausdruck kann als Integraltransformation einer Gaußfunktion aufgefasst werden und gibt damit eine allgemeine Form der Geschwindigkeitsverteilungen vor:

$$f(u, t) = \int_0^\infty n(s, t) \exp \left(-\frac{u^2}{s} \right) \quad . \quad (3.9)$$

Gleichungen dieser Art mit unterschiedlichen $n(s, t)$ liefern ebenfalls in anderen Modellen die gesuchten intermittenten Verteilungen, sowohl im Euler- als auch im Lagrange-Bild. Man kann daher Gl.(3.9) als ein vereinheitlichendes Schema ansetzen. Hier soll schon angemerkt werden, dass dadurch auch das Problem der heuristischen Ansätze deutlich wird: Die gesuchten Kurven werden im Prinzip einfach durch eine Überlagerung unterschiedlich gewichteter Gaußkurven angenähert, wobei die Gewichtungsfaktoren aus zusätzlichen Modellannahmen stammen. Die Navier-Stokes-Gleichungen, in denen die physikalischen Vorgänge zum Ausdruck kommen, die letztendlich für die charakteristische Form der Verteilungen verantwortlich sind, bleiben darin allerdings unberücksichtigt.

3.1.3 Beschreibung einer turbulenten Kaskade

Ein innovativer phänomenologischer Ansatz, um die gesamte turbulente Kaskade statistisch zu beschreiben, geht auf J. Peinke und R. Friedrich zurück [FP97]. Aus den experimentellen Daten eines freien turbulenten Strahls wurde die Verbundverteilung $f(v_2, l_2; v_1, l_1)$ für die Geschwindigkeitsinkremente v_2, v_1 auf zwei

unterschiedlichen Längenskalen l_2, l_1 bestimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeit $p(v_2, l_2 | v_1, l_1)$ unterliegt dabei einer Fokker-Planck-Gleichung mit experimentell bestimmten Drift- und Diffusionskoeffizienten $D^1(v_2, l_2), D^2(v_2, l_2)$:

$$\frac{\partial}{\partial l_2} p(v_2, l_2 | v_1, l_1) = \left\{ - \left(\frac{\partial}{\partial v_2} \right) D^1(v_2, l_2) + \left(\frac{\partial}{\partial v_2} \right)^2 D^2(v_2, l_2) \right\} p(v_2, l_2 | v_1, l_1). \quad (3.10)$$

Diese Gleichung beschreibt die Entwicklung der Verteilung als Funktion der Skala l und gibt daher auch die beobachtete Intermittenz wieder. Vereinfachende Annahmen über die Drift- und Diffusionskoeffizienten zeigen, dass in dieser Beschreibung sowohl das Skalierungsverhalten nach K41, als auch nach K62 enthalten ist.

3.2 Multifraktale Modelle

Wie in Abschnitt 1.2.2 kurz erwähnt wurde, beruhen moderne Formulierungen von K41 auf einer postulierten Skaleninvarianz der Turbulenz: Es wird angenommen, dass die Strömung genau einen Skalenexponenten h besitzt, so dass $\delta v(x, \lambda l) = \lambda^h \delta v(x, l)$. Mit dem Wert $h = \frac{1}{3}$ folgt direkt das Skalierungsverhalten $S_n(l) \sim l^{n/3}$. Betrachtet man allerdings die Symmetrieeigenschaften der Navier-Stokes Gleichung, so findet man im Grenzfall der vollentwickelten Turbulenz $\nu \rightarrow 0$ eine Invarianz unter beliebigen reellen Skalenexponenten h .

Das von Frisch und Parisi entwickelte multifraktale Modell [PF85] erweitert gerade die Einschränkung auf einen einzigen Exponenten. Die Grundidee ist die, dass sich die Strömung aus fraktalen Mengen zusammensetzt, in deren Umgebung jeweils ein anderer Skalenexponent gültig ist. Im Bild der Richardson Kaskade kann man sich unter einer fraktalen Menge \mathcal{S}_h anschaulich die Menge der Wirbel einer sehr kleinen Skala l vorstellen, wenn das von den Wirbeln eingenommene Volumen bei jedem Zerfallsprozess weiter abnimmt (in etwa entsprechend einer Cantor Menge).

Die globale Skaleninvarianz von K41 wird jetzt zu einer lokalen Skaleninvarianz, d.h. in der turbulenten Strömung gibt es eine ganze Reihe von Skalenexponenten $I = (h_{\min}, h_{\max})$. Für jedes $h \in I$ existiert eine Menge $\mathcal{S}_h \in \mathbb{R}^3$ mit einer fraktalen Dimension $\mathcal{D}(h)$, so dass innerhalb dieser Mengen \mathcal{S}_h das Skalierungsverhalten nach K41 gilt: $\delta_l v(x) \sim v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^{h(x)}$ für $x \in \mathcal{S}_h$. Im multifraktalen Modell wird postuliert, dass die Skalenexponenten h_{\min} und h_{\max} , sowie die Funktion $\mathcal{D}(h)$ universell sind (die sogenannte *multifraktale Universalität*).

Aus dem lokalen Verhalten ergibt sich das globale Skalierungsverhalten der Eulerschen Strukturfunktionen durch Integration über alle h :

$$S_n(l) = \langle |\delta_l v|^n \rangle \sim v_0^n \int_{h \in I} dh \left(\frac{l}{l_0} \right)^{hn+3-\mathcal{D}(h)}. \quad (3.11)$$

Der Faktor $\left(\frac{l}{l_0} \right)^{3-\mathcal{D}(h)}$ ist hier die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Abstands l von der Menge \mathcal{S}_h mit der fraktalen Dimension $\mathcal{D}(h)$ zu sein. Im Limes $l \ll l_0$

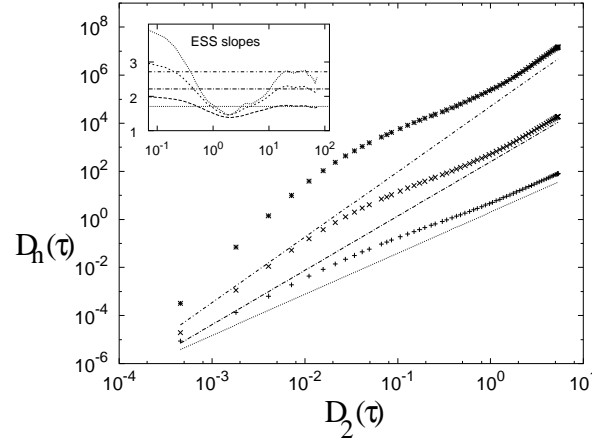


Abbildung 3.1: ESS-Plot der Lagrangeschen Strukturfunktionen $D_n(\tau)$ gegen $D_2(\tau)$. Symbole beziehen sich auf Daten der DNS für $n = 4, 6, 8$ (von unten nach oben). Die Vorhersagen des multifraktalen Modells zeigen nur für grosse τ eine Übereinstimmung. Im kleinen Bild sind dieselben DNS-Daten in Abhängigkeit von τ zu sehen. Entnommen aus [BBCDLT04].

dominiert in Gl.(3.11) der kleinste Exponent:

$$S_n(l) \sim v_0^n \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\zeta_n^E} . \quad (3.12)$$

Der anomale Skalierungsexponent der Strukturfunktionen ist also

$$\zeta_n^E = \inf[nh + 3 - \mathcal{D}(h)] , \quad (3.13)$$

wobei das $-4/5$ -Gesetz zu der Randbedingung $\zeta_3^E = \inf[3h + 3 - \mathcal{D}(h)] = 1$ führt.

Dieses phänomenologische Modell im Euler-Bild, kann nun in analoger Weise auf die Geschwindigkeitsstatistiken der Lagrange-Teilchen übertragen werden [BBCDLT04]. Dazu kann man sich vorstellen, dass sich die Geschwindigkeitsfluktuationen entlang einer Teilchenbahn aus den Beiträgen der verschiedenen Wirbel zusammensetzen. Für eine Zeitdifferenz τ ist der Hauptbeitrag von einem Wirbel der Grösse l , also gilt $\delta_\tau v \sim \delta_l v$. Weiterhin nimmt man an, dass τ und l über die typische Wirbelumlaufzeit verknüpft sind: $\tau \sim l/\delta_l v$. Mit dem Skalierungsverhalten $\delta_l v \sim v_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^h$ folgt

$$\tau \sim \frac{l_0^h}{v_0} l^{1-h} . \quad (3.14)$$

Aus dem multifraktalen Ausdruck für die Eulersche Strukturfunktion Gl.(3.11) ergibt sich dann direkt das Ergebnis für die Lagrangesche Strukturfunktion:

$$D_n(\tau) = \langle |\delta_\tau v|^n \rangle \sim v_0^n \int_{h \in I} dh \left(\frac{\tau}{T_L} \right)^{\frac{hn+3-\mathcal{D}(h)}{1-h}} . \quad (3.15)$$

Hier liefern die fluktuierenden Wirbelumlaufgeschwindigkeiten einen zusätzlichen Beitrag. Die Wahrscheinlichkeit, in einer Zeitdifferenz τ einen Skalenexponenten h vorzufinden, ist nun proportional zu $\left(\frac{\tau}{T_L}\right)^{\frac{3-\mathcal{D}(h)}{1-h}}$. Im Grenzfall $\tau \ll T_L$ dominiert wieder der kleinste Exponent in Gl.(3.15): $D_n(\tau) \sim \tau^{\zeta_n^L}$. Der anomale Lagrange-Skalierungsexponent ist folglich

$$\zeta_n^L = \inf \left[\frac{hp + 3 - \mathcal{D}(h)}{1 - h} \right] \quad . \quad (3.16)$$

Abb. 3.1 zeigt einen Vergleich der Vorhersagen dieses Modells mit den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation von der Gruppe Biferales. Ein klares Skalierungsverhalten kann mit der ESS Methode nur für grosse τ (bzw. D_2) erzielt werden (grosses Bild). Eine Erklärung für die starken Abweichungen im Bereich kleiner τ bieten eventuell beobachtete Wirbelstrukturen.

3.2.1 Dissipationseffekte

Die Aussagen der hier behandelten Modelle hatten sich bislang ausschliesslich auf den Inertialbereich der turbulenten Energiekaskade bezogen. Das multifraktale Modell kann über den besprochenen Rahmen hinaus so erweitert werden, dass auch für den Dissipationsbereich Vorhersagen gemacht werden können. Insgesamt wird so eine Beschreibung der Intermittenzeffekte für einen grossen Skalenbereich ermöglicht [CRLMPA03].

Zunächst wird ein Geschwindigkeitsinkrement $\delta_\tau v$ als Produkt von zwei Anteilen formuliert:

$$\delta_\tau v(t) = v(t + \tau) - v(t) = \beta \left(\frac{\tau}{T_L} \right) \delta_{T_L} v \quad . \quad (3.17)$$

Die unabhängige Zufallsfunktion $\beta(\tau/T_L)$ enthält die gesamte Abhängigkeit des Geschwindigkeitsinkrements von der Zeitskala τ . Wie zuvor wird die Verteilung der $\delta_{T_L} v$ — der Geschwindigkeitsinkremente für integrale Zeiten — als Gaußfunktion (\mathcal{G}) angenommen. Mit der Verteilung $P(\beta)$ der Fluktuationen β schreibt sich die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente für beliebige Skalen τ folgendermassen:

$$\Pi(\delta_\tau v) = \int \frac{d\beta}{\beta} \mathcal{G} \left(\frac{\delta_\tau v}{\beta} \right) P(\beta) \quad . \quad (3.18)$$

Im multifraktalen Modell haben die Fluktuationen des Inertialbereichs das Skalierungsverhalten $\beta \sim (\tau/T_L)^h$ mit einer Verteilung $P(\beta) \sim (\tau/T_L)^{1-\mathcal{D}(h)}$. Der Übergang von den Statistiken des Inertialbereichs zu denen des Dissipationsbereichs geschieht dann, wenn die lokale Reynoldszahl ≈ 1 wird und Reibungseffekte wirksam werden (siehe Abschnitt 1.2.1):

$$1 = \frac{l\delta_l v}{\nu} = \frac{\tau\delta_l v^2}{\nu} \sim \frac{\tau}{T_L} \beta^2 \left(\frac{\tau}{T_L} \right) Re \sim \left(\frac{\tau}{T_L} \right)^{2h+1} Re \quad . \quad (3.19)$$

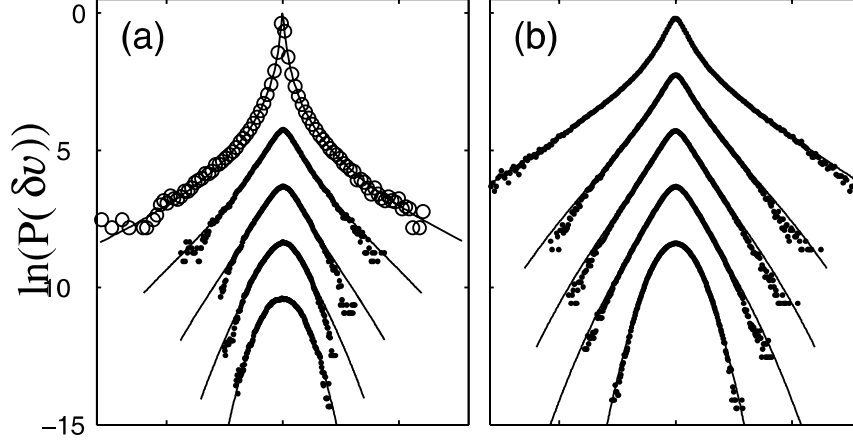


Abbildung 3.2: Ergebnisse des multifraktalen Modells unter Berücksichtigung des Dissipationsbereichs. (a) Genäherte Kurven an die experimentellen Daten aus Cornell (oberste Verteilung) und Lyon. (b) Vergleich mit einer DNS. Entnommen aus [CRLMPA03].

Hier ist Re die integrale Reynoldszahl. Daraus folgt zum einen eine lokale Dissipationsskala τ_η , an der die lokalen Geschwindigkeitsinkremente zum Skalierungsverhalten des Dissipationsbereichs übergehen, $\tau_\eta(h) = T_L Re^{-\frac{1}{2h+1}}$, zum anderen ergibt sich für diesen Übergang ein kritischer Skalenexponent $h^*(\tau) = -\frac{1}{2}(1 - \ln \frac{\tau}{T_L})$. Damit überhaupt ein Inertialbereich vorhanden ist, muss zudem $h \geq -1/2$ sein.

Im Vergleich zu K41 gibt es also nicht nur eine Dissipationsskala τ_η , sondern entsprechend den Skalenexponenten ein ganzes Spektrum $\tau_\eta(h_{max}) > \tau_\eta(h) > \tau_\eta(h_{min})$. Geht man zu immer kleineren Skalen τ , so wird immer noch der Einfluss der Skalenexponenten h spürbar, für die $\tau \geq \tau_\eta(h)$ gilt. Dies führt zur Ausbildung des sogenannten *dissipativen Zwischenbereichs*. Das dissipative Skalierungsverhalten ist

$$\beta \sim \left(\frac{\tau}{T_L}\right)^h, \quad P(\beta) \sim \left(\frac{\tau_\eta(h)}{T_L}\right)^{1-\mathcal{D}(h)}. \quad (3.20)$$

Für das Skalierungsverhalten der Geschwindigkeitsinkremente $\delta_\tau v$ auf einer Skala τ ergeben sich daher sowohl Effekte des Inertial- als auch des Dissipationsbereichs, die über $\beta(\tau/T_L; h)$ berücksichtigt werden können. Zweckmässigerweise transformiert man dazu die Integrationsvariable auf h . Für $h > h^*(\tau)$ soll $\beta(\tau/T_L; h)$ dann das dissipative, für $-1/2 < h < h^*(\tau)$ das inertielle Skalierungsverhalten erfüllen. Zusätzlich fordert man einen stetig differenzierbaren Übergang von $\beta(\tau/T_L; h)$ am Punkt $h^*(\tau)$. Diese Anforderungen führen auf folgenden Ansatz für die Funktion $\beta(\tau/T_L; h)$, der den gesamten Skalenbereich abdeckt:

$$\beta\left(h; \frac{\tau}{T_L}, Re\right) = \frac{\left(\frac{\tau}{T_L}\right)^h}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_\eta(h)}\right)^{-\delta}\right]^{(1-h)/\delta}}, \quad (3.21)$$

wobei die Abhängigkeit von Re über τ_η auftritt. δ ist ein freier Parameter, der für einen glatten Übergang von inertialen zu dissipativen Skalen verantwortlich ist. Für die Verteilungsfunktion wird entsprechend angesetzt

$$P\left(h; \frac{\tau}{T_L}, Re, \mathcal{D}(h)\right) \sim \frac{\left(\frac{\tau}{T_L}\right)^{1-\mathcal{D}(h)}}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_\eta(h)}\right)^{-\delta}\right]^{(\mathcal{D}(h)-1)/\delta}} \quad . \quad (3.22)$$

Der Ausdruck für die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente einer Zeitskala τ ist nach Gl.(3.18) mit diesen beiden Gleichungen vollständig bestimmt,

$$\Pi(\delta_\tau v) = \int_{-1/2}^{\infty} dh \frac{P\left(h; \frac{\tau}{T_L}, Re, \mathcal{D}(h)\right)}{\beta\left(h; \frac{\tau}{T_L}, Re\right)} \mathcal{G}\left(\frac{\delta_\tau v}{\beta}\right) \quad , \quad (3.23)$$

und kann zur Analyse der experimentellen und numerischen Daten verwendet werden.

Die freien Variablen sind dann T_L , Re , δ und $\mathcal{D}(h)$. Die globalen Parameter T_L und Re sind direkt über den Erzeugungsmechanismus der Strömung gegeben. Das Spektrum der Skalenexponenten $\mathcal{D}(h)$ kann nur aus den Daten bestimmt werden. Man nimmt als Ansatz gewöhnlich eine quadratische Gleichung an: $\mathcal{D}(h) = 1 - (h - c_1)^2/2c_2$. Die Bedingung $c_1 = 1/2 + c_2$ gewährleistet das K41-Skalierungsverhalten für die Strukturfunktion 2. Ordnung. Die Datensätze werden schliesslich über die Parameter δ und c_2 angenähert (siehe Abb. 3.2).

3.2.2 Multifraktaler Random Walk

Die Gruppe Pinton entwickelte ein dynamisches Modell auf der Grundlage einer Langevin-Gleichung, um die fluktuierende Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens zu beschreiben [MDLAP02]. Der entscheidende Ansatz für die benötigten Intermittenzkorrekturen ist die Annahme, dass die Stärke der stochastischen Kraft (entsprechend die Schrittweite des Random Walk) langreichweitige Korrelationen in der Zeit aufweist.

Betrachtet man ein Geschwindigkeitsinkrement über eine Zeitdifferenz τ , so lässt sich dieses als eine Summe über die Beiträge kleinerer Zeiten τ_1 auffassen:

$$\delta_\tau v(t) = v(t + \tau) - v(t) = \sum_{n=1}^{\tau/\tau_1} \delta_{\tau_1} v(t + n\tau_1) \quad . \quad (3.24)$$

Für statistisch unabhängige Inkremente der Dauer τ_1 verhalten sich die Geschwindigkeitsfluktuationen $\delta_\tau v$ wie ein Brownsches Teilchen und ergeben nach dem zentralen Grenzwertsatz die Statistiken von K41. Die stochastische Kraft wäre in diesem Fall weisses Rauschen. Experimentelle Messungen in Lyon weisen aber darauf hin, dass diese statistische Unabhängigkeit nicht gegeben ist: Die Autokorrelation der Schrittweiten $|\delta_{\tau_1} v|$ fällt nur sehr langsam ab und verschwindet erst für $\tau_1 > T_L$ [MDLAP02].

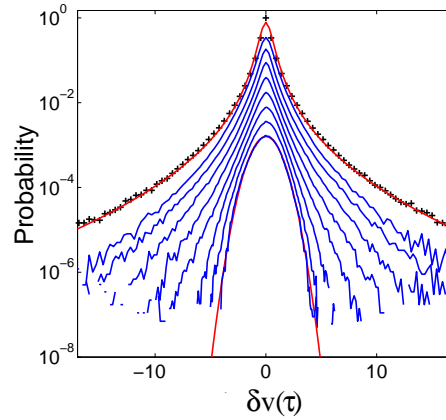


Abbildung 3.3: Ein Vergleich des multifraktalen Random Walk Modells mit dem Experiment aus Lyon. Die Kreuze an der obersten Kurve entsprechen der Vorhersage des MRW für $\lambda^2 = 0.115$. Entnommen aus [MDLAP02].

Dieser Befund wird im Random Walk Modell folgendermassen berücksichtigt: Die Langevin-Gleichung beschreibt das Verhalten der Teilchengeschwindigkeit über die Variable $W(t)$, die von einer stochastischen Kraft getrieben wird. Die Richtung der stochastischen Kraft wird durch eine gewöhnliche Langevin-Kraft modelliert, also als eine δ -korrelierte Gaußverteilte Zufallsvariable mit verschwindendem Mittelwert. Die Stärke der Kraft $A(t)$ ist immer positiv und soll die Korrelationen wiedergeben: $A(t) = e^{\omega(t)}$. Dies wird dadurch erreicht, dass der stochastische Prozess $\omega(t)$ die folgende Beziehung für $\tau < T_L$ erfüllt:

$$\langle \omega(t)\omega(t+\tau) \rangle = -\lambda^2 \ln\left(\frac{\tau}{T_L}\right) \quad . \quad (3.25)$$

Der Parameter λ^2 variiert die zeitliche Korrelation des Prozesses. Durch dieses Modell wird eine Dynamik beschrieben, die einem eindimensionalen multifraktalen Random Walk entspricht.

Analytische Rechnungen zeigen dann multifraktale Skalierungseigenschaften der Momente von $W(t)$: $\langle |\delta_\tau W|^n \rangle \sim \tau^{\zeta(n)}$ mit dem Exponenten

$$\zeta(n) = \left(\frac{1}{2} + \lambda^2\right)n - \frac{\lambda^2 n^2}{2} \quad . \quad (3.26)$$

In diesem Modell reguliert also derselbe Parameter λ^2 sowohl die Stärke der Intermittenz als auch die zeitliche Korrelation des stochastischen Prozesses.

In den experimentellen Ergebnissen aus Lyon wurden Hinweise auf das Verhalten des ESS-Skalierungsexponenten in Form von Gl.(3.26) gefunden. Der Intermittenzparameter wurde dort aus einer Näherung bestimmt: $\lambda^2 = 0,115 \pm 0.01$. Die Verteilung der Geschwindigkeitsinkremente des Modells reproduziert dann die experimentellen Verteilungen recht gut, wie anhand Abb. 3.3 ersichtlich ist.

3.3 Tsallis-Statistik und Turbulenz

Eine nichtextensive Formulierung der statistische Mechanik wurde von C. Tsallis Ende der 80er Jahre als Erweiterung der Boltzmann-Gibbs-Gleichgewichtsstatistik eingeführt [Ts88]. Seither haben sich vielfältige Anwendungen in der statistischen Physik ergeben bis hin zu komplexen Nichtgleichgewichtssystemen. Motiviert durch die neueren Lagrange-Experimente wurden auch Modelle der Turbulenz formuliert, denen eine nichtextensive Statistik zugrundeliegt.

Tsallis-Statistik beruht im Wesentlichen auf der nichtextensiven Entropie Formel:

$$S_Q = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_i p_i^q \right) \quad . \quad (3.27)$$

Die Summe geht über die Wahrscheinlichkeiten p_i der mikroskopischen Zustände i des physikalischen Systems. $q \neq 1$ ist der zentrale Parameter der Theorie, der sogenannte Entropie-Index. Im Grenzfall $q \rightarrow 1$ ergibt sich aus Gl.(3.27) die extensive Boltzmann-Entropie $S = -\sum_i p_i \ln p_i$. Analog zur gewöhnlichen statistischen Mechanik erhält man die Verteilung der Zustände über die Extremalisierung von S_Q unter geeigneten Nebenbedingungen. Dieses Vorgehen führt auf eine verallgemeinerte Version der kanonischen Verteilung:

$$p_i = \frac{1}{Z_q} (1 - (1-q)\beta E_i)^{\frac{1}{1-q}} \quad , \quad (3.28)$$

mit der Zustandssumme $Z_q = \sum_i \frac{1}{Z_q} (1 - (1-q)\beta E_i)^{\frac{1}{1-q}}$, der inversen Temperatur $\beta = 1/(k_B T)$ und der Energie des i -ten Zustands E_i . Für $q \rightarrow 1$ erhält man aus Gl.(3.28) wie erwartet den Boltzmann faktor $p_i \sim e^{-\beta E_i}$.

Die Frage nach der physikalischen Realisierbarkeit der Tsallis-Statistik kann im Rahmen der von C. Beck entwickelten sogenannten „Superstatistik“ beantwortet werden [Be01], in der die verallgemeinerte kanonische Verteilung Gl.(3.28) als ein Spezialfall enthalten ist. Diese Superstatistiken sind relevant für die Beschreibung von Nichtgleichgewichtssystemen mit einem fluktuierenden intensiven Parameter, der z.B. für die inverse Temperatur oder im Fall der Turbulenz für die Dissipationsrate stehen kann.

Eine Superstatistik kann einfach dynamisch realisiert werden. Ausgangspunkt ist die folgende Langevin-Gleichung für eine Komponente der Beschleunigung $a(t)$:

$$\dot{a}(t) = \gamma F(a) + \sigma \Gamma(t) \quad . \quad (3.29)$$

Hier ist $\Gamma(t)$ eine gewöhnliche δ -korrelierte Langevin-Kraft, $\gamma > 0$ eine Reibungskonstante, σ ein Mass für die Stärke des Rauschens und $F(a) = -\frac{\partial}{\partial a} V(a)$ die Driftkraft. Für konstante γ und σ ist die stationäre Verteilung von a gegeben durch $P(a) \sim e^{-\beta V(a)}$, wobei $\beta := \frac{\gamma}{\sigma^2}$. Da ein fluktuierendes β angenommen wird, folgt als zusätzliche Forderung, dass γ und σ so fluktuieren, dass β

eine bestimmte Verteilung $f(\beta)$ besitzt. Die Fluktuationen sollen sich zudem auf einer sehr grossen Zeitskala abspielen, so dass sich das System für kleine Zeiten stets in einem lokalen Gleichgewicht befindet. Im Bild der turbulenten Strömung kann man sich anschaulich vorstellen, dass das Lagrange-Teilchen bei seiner Bewegung durch die Strömung lokal unterschiedliche Dissipationsraten spürt.

Die bedingte Verteilung von a für ein festes β ist also gegeben als

$$p(a|\beta) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp\{-\beta V(a)\} \quad , \quad (3.30)$$

mit der Normierungskonstanten $Z(\beta)$. Für eine gegebene Verteilung $f(\beta)$ der Fluktuationen erhält man daraus die unbedingte Verteilung für die Beschleunigung:

$$\Pi(a) = \int p(a|\beta) f(\beta) d\beta \quad . \quad (3.31)$$

Daran ist wieder die allgemeine Form Gl.(3.9) erkennbar. Über eine geeignete Wahl des Potentials $V(a)$ und der Verteilung $f(\beta)$ kann diese Verteilung an unterschiedliche physikalische Systeme angepasst werden. Die Verteilung der Tsallis-Statistik Gl.(3.28) entspricht dem harmonischen Potential $V(a) = \frac{1}{2}a^2$ und einer Γ -Verteilung der Ordnung n für $f(\beta)$:

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{n}{\beta_0} \right)^n \beta^{n-1} \exp \left\{ -\frac{n\beta}{\beta_0} \right\} \quad . \quad (3.32)$$

Hier ist $\beta_0 = \langle \beta \rangle$ der Mittelwert der fluktuierenden β . Der Entropie-Index ist dann gegeben als $q = \frac{1}{n} + 1$.

Zur Beschreibung der Turbulenzstatistiken wurden von Beck in diesem Modell der Superstatistik zwei verschiedene Ansätze vorgeschlagen.

Behält man die Γ -Verteilungen für $f(\beta)$ bei und wählt ein Potential der Form $V(a) = |u|^{2\alpha}$, so ist $f(\beta)$ mit Gl.(3.32) gegeben und die bedingte Verteilung Gl.(3.30) wird zu

$$p(a|\beta) = \frac{\alpha}{\Gamma(\frac{1}{2\alpha})} \beta^{\frac{1}{2\alpha}} \exp \{ -\beta |u|^{2\alpha} \} \quad , \quad (3.33)$$

d.h. sie nimmt die Form sogenannter gestreckter Exponentialfunktionen an. Die fluktuierende Grösse β ist hier mit der lokal gemittelten Dissipationsrate ϵ_l über eine typische Zeitskala τ verknüpft: $\beta = \Lambda \epsilon_l \tau$, wobei Λ eine geeignet dimensionierte Konstante ist.

Alternativ kann für das Potential die Form $V(a) = \frac{1}{2}a^2$ und für $f(\beta)$ die bereits erwähnte log-normal Verteilung Gl.(3.7) angenommen werden [Be02]. Die bedingten Verteilungen sind dann die bekannten Gaußfunktionen und die Verteilung der Beschleunigung ist analog zu Gl.(3.8):

$$\Pi(a) = \frac{1}{2\pi s} \int_0^\infty d\beta \beta^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(\log \frac{\beta}{m})^2}{2s^2} \right\} e^{-\frac{1}{2}\beta a^2} \quad . \quad (3.34)$$

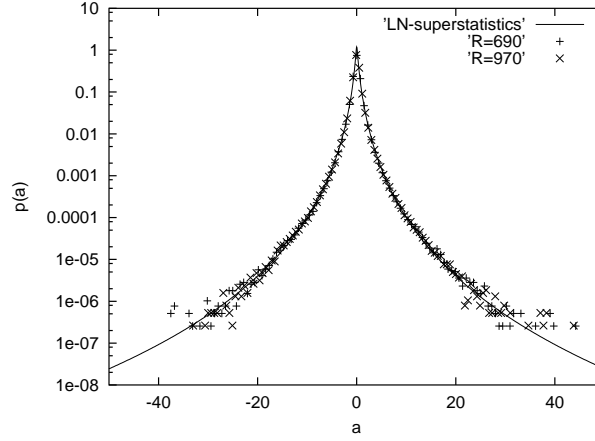


Abbildung 3.4: Die Vorhersage der Superstatistik Gl.(3.34) für $s^2 = 3,0$ im Vergleich mit dem Cornell-Experiment. Entnommen aus [Be02].

Für $m = e^{\frac{s^2}{2}}$ haben die Verteilungen $\Pi(a)$ Varianz 1 und können mit der experimentellen Beschleunigungsstatistik aus Abschnitt 2.2 verglichen werden. Der einzige Parameter zur Anpassung der Kurven ist dann s . Die sehr gute Übereinstimmung in Abb. 3.4 wird durch $s^2 = 3.0$ erreicht. Die log-normal Verteilung führt im Vergleich zur obigen Γ -Verteilung nicht auf einen Potenzverlauf der Flanken von $\Pi(a)$, was eine bessere Näherung an die Ergebnisse des Experiments aus Cornell ergibt. Auf jeden Fall bleibt festzuhalten, dass dieser Ansatz im Wesentlichen dem lange bekannten Castaing-Modell aus Abschnitt 3.1.2 entspricht. Es wurde lediglich ausgehend von der stochastischen Langevin-Gleichung (3.29) formuliert.

Die aus der Superstatistik hergeleiteten Beschleunigungsverteilungen nähern sich augenscheinlich hervorragend an die experimentellen Verteilungen an. Dennoch stellt sich die Frage nach der Bedeutung der nichtextensiven statistischen Mechanik im Hinblick auf die charakteristischen Eigenschaften der Turbulenz (siehe hierzu [GK03]). Im Prinzip ist es ein zentrales Ziel in der Theorie komplexer Systeme, eine Grösse zu finden, die durch ein Nichtgleichgewichtssystem extremalisiert wird, entsprechend der Boltzmann-Entropie im Gleichgewichtsfall. Die Tsallis-Entropie kann dies lediglich für Systeme erfüllen, die sehr viel einfacher als die Turbulenz sind. Die Langevin-Gleichung (3.29) realisiert z.B. nur ein System mit einem Freiheitsgrad im Vergleich zu den unzähligen korrelierten Freiheitsgraden einer turbulenten Strömung. Zudem können charakteristische statistische Eigenschaften der turbulenten Energiekaskade nicht durch eine Statistik widergegeben werden, die auf der kinetischen Energie basiert [GK03]. Die Tsallis-Statistik muss hier wohl eher als ein eleganter Ansatz zur Datenanalyse angesehen werden ohne jedoch Hinweise auf grundlegende physikalische Zusammenhänge zu geben oder gar das Turbulenzproblem zu lösen.

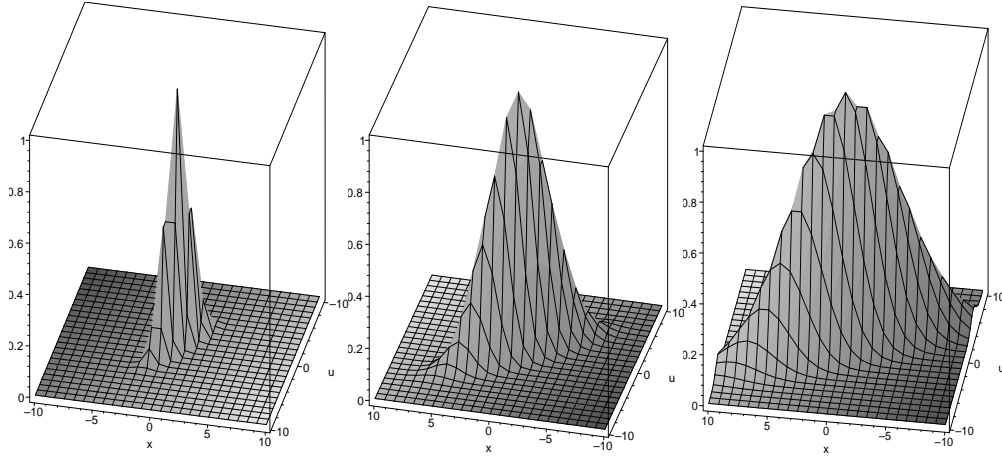


Abbildung 3.5: Die Verbundverteilung für Ort und Geschwindigkeit des Oboukhov-Modells Gl.(3.38) zu verschiedenen Zeiten (von links nach rechts zunehmend).

3.4 Lagrangesche Modellierung

Der Lagrangesche Zugang zur Turbulenz hat den Vorteil, dass er sich auf die Beschleunigung als zentrale Grösse der Fluidodynamik konzentriert. Tatsächlich bietet die Newtonsche Form der Bewegungsgleichungen Gl.(1.18) die Möglichkeit, das Verhalten turbulenter Strömungen auf der Grundlage physikalisch motivierter Näherungen der Beschleunigung zu verstehen. Ein solcher Ansatz garantiert Galilei-Invarianz, die in vielen Eulerschen Modellen gebrochen wird [MoYa]. Obwohl solche Modellierungsansätze schon früh eingeführt wurden, haben sich erst im letzten Jahrzehnt umfangreichere Forschungsaktivitäten auf diesem Gebiet entwickelt.

3.4.1 Das Oboukhov-Modell

Bereits in den 50er Jahren formulierte Oboukhov ein sehr einfaches Modell, um die Statistik eines einzelnen Lagrange-Teilchens zu beschreiben (siehe auch Abschnitt 1.3.1). Die Beschleunigung des Teilchens wird dabei nicht durch die physikalisch wirkenden Kräfte entsprechend den Navier-Stokes Gleichungen ausgedrückt, sondern als eine Zufallsvariable angenommen. Im einfachsten Fall ist die Beschleunigung ein stochastischer Prozess mit Gaußscher Statistik. Für Ort und Geschwindigkeit des Teilchens erhält man folglich die Langevin-Gleichung:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t, y) &= U(t, y) \quad , \\ \dot{U}(t, y) &= A(t, y) \quad ,\end{aligned}\tag{3.35}$$

mit der normalverteilten Zufallsvariable $A(t, y)$:

$$\begin{aligned}\langle A(t, y) \rangle &= 0 \quad , \\ \langle A(t, y)A(t', y) \rangle &= 2Q\delta(t - t') \quad .\end{aligned}\tag{3.36}$$

Über die Langevin-Gleichung werden die einzelnen Realisierungen des stochastischen Prozesses bestimmt. Die Beschreibung über eine Verteilung $f(u, x, y, t)$ erhält man aus der zugehörigen Fokker-Planck Gleichung. Aus Gl.(3.35) ergibt sich dann die Entwicklungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u, x, y, t) + u \cdot \nabla_x f(u, x, y, t) = Q \Delta_u f(u, x, y, t) \quad . \quad (3.37)$$

Die Lösungen dieser Gleichung haben die Gaußsche Form (siehe Abb. 3.4.1)

$$f(u, x, y, t) = N(t) \exp \left\{ -\frac{u^2}{Qt} - \frac{3(x-y) \cdot u}{Qt^2} - \frac{3(x-y)^2}{Qt^3} \right\} \quad . \quad (3.38)$$

und folgendes Skalierungsverhalten der Momente:

$$\langle (x-y)^2 \rangle \sim Qt^3 \quad , \quad (3.39)$$

$$\langle u^2 \rangle \sim Qt \quad . \quad (3.40)$$

Offensichtlich steht Gl.(3.40) im Einklang mit dem nach K41 geforderten Skalierungsverhalten. Gl.(3.39) ist das bekannte Richardson Gesetz für das mittlere Abstandsquadrat eines Teilchens in einer turbulenten Strömung. Das Oboukhov Modell kann also ausgehend von einer einfachen Modellannahme zwei sehr grundlegende Vorhersagen machen. Intermittenz-Korrekturen werden allerdings nicht berücksichtigt. Dieses Modell ist damit der klassische Ausgangspunkt für erweiterte Modellierungsansätze in einer Lagrangeschen Beschreibung der Turbulenz.

3.4.2 Lagrangesche Teilchenmethoden

Die Ansätze des Oboukhov-Modells wurden insbesondere von der Gruppe um S. Pope an der Cornell University weiterentwickelt [Pope]. Die sogenannten Lagrangeschen Teilchenmethoden entsprechen einer ganzen Klasse von Modellen, die unterschiedlichen Anforderungen an die Modellierung gerecht werden können. Sie spielen insbesondere im Ingenieurwesen eine grosse Rolle. Diese Teilchenmodelle beruhen auf einer allgemeinen Form der Langevin-Gleichung entsprechend Gl.(3.35) für Ort und Geschwindigkeit des Lagrange-Teilchens:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t, y) &= U(t, y) \quad , \\ \dot{U}(t, y) &= a(U(t), X(t), t) + b(X(t), t) \Gamma(t) \quad . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Hier sind $a(u, x, t)$ und $b(x, t)$ die Drift- und Diffusionskoeffizienten, $\Gamma(t)$ ist eine gewöhnliche Langevin-Kraft. Die zugeordnete Fokker-Planck Gleichung hat dann die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(u, x, y, t) + u \cdot \nabla_x f(u, x, y, t) &= -\nabla_u \{ a(u, x, t) f(u, x, y, t) \} \\ &\quad + \frac{1}{2} b(x, t)^2 \Delta_u f(u, x, y, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Offensichtlich enthält Gl.(3.42) das Oboukhov-Modell im Grenzfall eines verschwindenden Drift- und eines konstanten Diffusionskoeffizienten. Wählt man stattdessen die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a(u, x, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla_x \langle p \rangle + G(U(t) - \langle U \rangle) \quad , \\ b(x, t) &= \sqrt{C_0 \epsilon}, \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

so erhält man das sogenannte verallgemeinerte Langevin-Modell [Pope]. Hier sind $\langle p \rangle$ und $\langle U \rangle$ die Eulerschen Grössen mittlerer Druck und mittlere Geschwindigkeit. Der erste Driftterm in Gl.(3.43) enthält den Druckgradienten als exakten Term aus den Navier-Stokes-Gleichungen. Über die Variable G kann ein spezifisches Modell charakterisiert werden. Identifiziert man die Konstante C_0 mit der universellen Kolmogorov-Konstanten C_2 , so führt der Diffusionsterm auf das K41 Skalierungsverhalten der Lagrangeschen Strukturfunktion 2. Ordnung. Allgemein ist ein isotroper Diffusionsterm notwendig, um konsistent mit der K41 Hypothese der lokalen Isotropie zu sein. Die Wahl und Form der Koeffizienten in Gl.(3.42) ist letztendlich immer auf die Forderung nach Konsistenz mit physikalischen Rahmenbedingungen und -annahmen zurückzuführen.

Ein Vorteil der Lagrangeschen Teilchenmethoden im Vergleich zu anderen Modellierungsansätzen ist ihre Realisierbarkeit. Unter der Bedingung, dass die vorkommenden Koeffizienten reell und begrenzt sind, können Realisierungen von $X(t)$ und $U(t)$ stets bestimmt werden und folglich auch ihre Statistiken. Es tauchen keine unphysikalischen Artefakte auf. Dies unterstreicht auf der einen Seite ihre gute praktische Anwendbarkeit, zudem werden daran die Vorteile einer Lagrangeschen Turbulenzbeschreibung bei Modellierungsansätzen deutlich.

Kapitel 4

Gleichungshierarchie und verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung

Im vorangegangenen Kapitel wurden verschiedene heuristische Modelle im Lagrange-Bild vorgestellt, welche die experimentellen Ergebnisse der Einteilchenstatistiken reproduzieren können. Diesen Modellen ist gemeinsam, dass sie die Existenz eines universellen stochastischen Prozesses postulieren, der dem Verhalten der Geschwindigkeitsinkremente im Inertialbereich zugrundeliegt und sich in den Statistiken widerspiegelt. Für die zentrale Grösse in einer Lagrangeschen Beschreibung der Turbulenz, der N-Teilchen Verteilung $f(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}; t)$ (siehe Definition Gl.(1.21)), müsste folglich eine Entwicklungsgleichung entsprechend der Fokker-Planck Gleichung formuliert werden können:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f^N(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}; t) &+ \sum_i \mathbf{u}_i \cdot \nabla_{\mathbf{x}_i} f^N(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}; t) \\ &= - \sum_i \nabla_{\mathbf{u}_i} \cdot D^1(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}) f^N(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}; t) \\ &+ \sum_{ij} \nabla_{\mathbf{u}_i} D^2(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}) \nabla_{\mathbf{u}_j} f^N(\{\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j\}; t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wie aus den experimentellen Ergebnissen hervorgeht, muss der stochastische Prozess nicht notwendigerweise Markov-Eigenschaften aufweisen. Eine Gleichung der Form (4.1) mit geeigneten Drift- und Diffusionstermen kann dennoch in geeigneter Weise die Eigenschaften turbulenter Strömungen modellieren und wird z.B. bei den Lagrangeschen Teilchenmethoden verwendet. Der einfache Markov-Fall mit verschwindendem Drift- und konstantem Diffusionsterm ergibt das behandelte Oboukhov-Modell.

Die zentrale Frage ist nun, wie die Statistiken der Turbulenz mit den grundlegenden physikalischen Vorgängen verbunden sind, also wie eine Entwicklungsgleichung in der Art von Gl.(4.1) nicht aus zusätzlichen Annahmen, sondern direkt aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet werden kann.

Dieses grundlegende Problem einer statistischen Beschreibung der Turbulenz wird in diesem Kapitel behandelt. Ein neuerer Lösungsansatz geht auf R. Friedrich zurück [Fr03], der ausgehend von einer statistischen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen im Lagrange-Bild eine Gleichungshierarchie für die Verbundverteilung für Ort und Geschwindigkeit von N Teilchen herleiten konnte. Aus dieser Hierarchie ergibt sich eine verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung in der Form von Gl.(4.1) für die Einteilchenverteilung. Ein physikalisch motivierter Schliessungsansatz führt davon ausgehend auf eine Erweiterung des Oboukhov-Modells. Für den Fall der Geschwindigkeitsverteilung kann dieses Modell gelöst werden und lässt die Verbindung zu einer Klasse Nichtmarkovscher Prozesse erkennen, die dazu geeignet ist, die Statistiken der Geschwindigkeitsinkremente zu beschreiben.

4.1 Eine Hierarchie von Entwicklungsgleichungen

Zunächst soll eine Entwicklungsgleichung für die Verbundverteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ für Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens hergeleitet werden [Fr02]. Dazu führt man eine sogenannte feinkörnige Einteilchenverteilung ein, die eine gegebene Realisierung der Strömung beschreibt:

$$\bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) := \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \mathbf{y}))\delta(\mathbf{u} - \mathbf{U}(t, \mathbf{y})) \quad . \quad (4.2)$$

Die Bewegungsgleichung für $\bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ ergibt sich durch zeitliche Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - \dot{\mathbf{U}}(t, \mathbf{y}) \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad . \quad (4.3)$$

Unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen für ein Lagrange-Teilchen, $\dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{U}(t, \mathbf{y})$ und $\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t, \mathbf{y})$, sowie der Eigenschaften der δ -Funktion ist die Entwicklungsgleichung für die feinkörnige Verteilung daraus gegeben als:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad . \quad (4.4)$$

$\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$ ist die auf ein Lagrange-Teilchen wirkende Beschleunigung, die physikalisch über die Navier-Stokes-Gleichungen mit dem Druck und der Dissipation verknüpft ist.

Der Übergang zu einer statistischen Beschreibung erfolgt nun durch Mittelung der feinkörnigen Verteilung über die stochastischen Realisierungen:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \langle \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \quad , \quad (4.5)$$

wobei $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ auch als grobkörnige Verteilung bezeichnet wird. Durch Mittelung von Gl.(4.4) erhält man also eine Entwicklungsgleichung für die Einteilchenverteilung:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \langle \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \quad . \quad (4.6)$$

Bis zu diesem Punkt sind nur mathematische Umformungen vorgenommen worden. Die Bedeutung der Gl.(4.6) ist daher lediglich, dass die zeitliche Entwicklung der Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ von dem Term $\langle \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle$ abhängt, der als bedingte Beschleunigung interpretiert werden kann. Die Verbindung zur Turbulenz erfolgt erst, wenn die Beschleunigung $\mathbf{A}(t, \mathbf{y})$ durch die tatsächlich wirkenden physikalischen Kräfte ausgedrückt wird. Alternativ können hier zusätzliche Annahmen über den Beschleunigungsterm gemacht werden, die auf einfachere geschlossene Entwicklungsgleichungen für die Verteilung führen (siehe Abschnitt 3-Modellierung).

Im Weiteren soll direkter Bezug auf die Navier-Stokes-Gleichungen genommen werden, in denen die Beschleunigung explizit durch Gl.(1.20) gegeben ist:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{y}) = [-\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} .$$

Im Folgenden wird dieser Ausdruck formal umgeschrieben. Der Druckterm kann als Lösung der Poissongleichung mit Hilfe von Gl.(1.4) bestimmt werden. Der erste Term in obiger Gleichung lautet dann:

$$\begin{aligned} \nabla p(\mathbf{x}, t) &= \int d\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)] \\ &= \int d\mathbf{x}' \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) : \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) , \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei entsprechend definiert wird:

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) : \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) := \frac{1}{4\pi} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)] . \quad (4.8)$$

Für den Dissipationsterm schreibt man:

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \nu \int d\mathbf{x}' \Delta_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \\ &= \nu \int d\mathbf{x}' L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) , \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit der formal definierten Funktion $L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \Delta_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Setzt man diese beiden Ausdrücke in Gl.(4.7) ein, so ergibt sich nach einer Koordinatentransformation $\mathbf{x}' = \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')$ für die Beschleunigung eines Lagrange-Teilchens:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) &= - \int d\mathbf{y}' \Gamma[\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')] : \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') : \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') \\ &\quad + \nu \int d\mathbf{y}' L[\mathbf{X}(t, \mathbf{y}), \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')] \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die bedingte Beschleunigung lautet damit:

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \\ &= - \int d\mathbf{y}' \langle \Gamma[\mathbf{x}, \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')] : \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') : \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \\ &\quad + \nu \int d\mathbf{y}' \langle L[\mathbf{x}, \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')] \mathbf{U}(t, \mathbf{y}') \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Hier wurden wieder die Eigenschaften der δ -Funktionen aus der feinkörnigen Verteilung verwendet und \mathbf{x} anstelle von $\mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ geschrieben. Um entsprechend die gestrichenen Variablen umschreiben und die Mittelung durchführen zu können, muss im nächsten Schritt die Identität in der Form $1 = \int d\mathbf{u}' \int d\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{X}(t, \mathbf{y}')) \delta(\mathbf{u}' - \mathbf{U}(t, \mathbf{y}'))$ eingesetzt werden. Die bedingte Beschleunigung wird folglich mit einer Zweiteilchenverteilung in Beziehung gesetzt:

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{A}(t, \mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \rangle \\
&= - \int d\mathbf{u}' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') : \mathbf{u}' : \mathbf{u}' f(\mathbf{u}', \mathbf{x}', \mathbf{y}', t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\
&\quad + \nu \int d\mathbf{u}' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' L(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{u}' f(\mathbf{u}', \mathbf{x}', \mathbf{y}', t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\
&= \int d\mathbf{u}' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{u}') \quad .
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Hier nimmt der Operator $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{u}')$ die folgende Form an:

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{u}') := - \sum_{jk} \frac{\partial^3}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{x}_k} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{u}'_j \mathbf{u}'_k + \nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Delta_{\mathbf{x}'} \mathbf{u}'_i. \tag{4.13}$$

Schliesslich ergibt sich die Entwicklungsgleichung für die Einteilchenverteilung unter Berücksichtigung der Beschleunigung im Lagrange-Bild:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\
&= - \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int d\mathbf{u}' \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{y}' \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{u}') f(\mathbf{u}', \mathbf{x}', \mathbf{y}', t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aufgrund der Nichtlokalität des Druckterms (siehe Gl.(4.7)) ist diese Entwicklungsgleichung ungeschlossen und mit der Zweiteilchenverteilung verknüpft.

Dieses Ergebnis kann in derselben Weise auf N Teilchen erweitert werden. Die Entwicklungsgleichung für die N -Teilchenverteilung ist dann ebenfalls ungeschlossen und enthält entsprechend die $(N+1)$ -Teilchenverteilung. Insgesamt erhält man eine Hierarchie von Entwicklungsgleichungen.

Das ungeschlossene System von Bewegungsgleichungen ist unmittelbare Folge des hier betrachteten Teilchenmodells, welches das kontinuierliche Geschwindigkeitsfeld durch eine endliche Anzahl diskreter Teilchen beschreibt. Im Gegensatz zu einer feldtheoretischen Beschreibung des turbulenten Geschwindigkeitsfelds kann diese Lagrangesche Beschreibung daher nicht die gesamte Information des Systems enthalten und führt auf ungeschlossene Gleichungen.

Erst der Kontinuumsübergang führt auf eine geschlossene Entwicklungsgleichung, die allerdings die Gestalt einer Funktionalgleichung für das Dichtefunktional $F(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{u}(\mathbf{y}), t(\mathbf{y}))$ annimmt:

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{y} \left[\frac{\delta}{\delta t(\mathbf{y})} + \mathbf{u}(\mathbf{y}) \cdot \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}(\mathbf{y})} \right] F(\mathbf{u}(\mathbf{y}), \mathbf{x}(\mathbf{y}), t(\mathbf{y})) \\
&= - \int d\mathbf{y} \int d\mathbf{y}' \frac{\delta}{\delta \mathbf{u}(\mathbf{y})} \mathcal{A}(\mathbf{x}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}(\mathbf{y}'), \mathbf{u}(\mathbf{y}')) F(\mathbf{u}(\mathbf{y}), \mathbf{x}(\mathbf{y}), t(\mathbf{y})) \quad .
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Abschliessend ist noch zu bemerken, dass auch im Euler-Bild eine entsprechende Hierarchie von Entwicklungsgleichungen für die Euler-Geschwindigkeitsverteilungen hergeleitet werden kann [Lu69], [UL69]. Diese ergibt sich aus der hier besprochenen Hierarchie durch Integration über die Startpunkte \mathbf{y} .

4.2 Verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung

Im Folgenden wird aus den Ergebnisse des vorherigen Abschnitts eine formal geschlossene verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung für die Einteilchenverteilung hergeleitet. Dazu wird die Entwicklungsgleichung für die Zweiteilchenverteilung gelöst und die Lösung in Gl.(4.14) für die unbekannte Verteilung $f(\mathbf{u}', \mathbf{x}', \mathbf{y}', t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ eingesetzt.

Zunächst erweist es sich als zweckmässig, gemischte Euler-Lagrange-Verteilungen einzuführen, die sowohl die Orte und Geschwindigkeiten der Lagrange-Teilchen, als auch Punkte des Euler-Geschwindigkeitsfelds miteinbeziehen. Diese gemischten Verteilungen können aus der reinen Lagrange-Verteilung durch Integration über die Anfangsorte \mathbf{y}_i gewonnen werden (siehe Abschnitt 1.3):

$$\begin{aligned} & f_{E|L}^N(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{v}_m, \mathbf{r}_m, t_m; \mathbf{u}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{y}_{m+1}, t_{m+1}; \dots; \mathbf{u}_N, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N, t_N) \\ & := \langle \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{r}_1, t_1)) \dots \delta(\mathbf{v}_m - \mathbf{u}(\mathbf{r}_m, t_m)) \\ & \quad \delta(\mathbf{x}_{m+1} - \mathbf{X}(t_{m+1}, \mathbf{y}_{m+1})) \dots \delta(\mathbf{x}_N - \mathbf{X}_N(t_N, \mathbf{y}_N)) \rangle \\ & = \int d\mathbf{y}_1 \dots \int d\mathbf{y}_m f_L^N(\{\mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, t_i\}) \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Euler-Geschwindigkeiten und -Orte werden hier stets mit \mathbf{v}_i und \mathbf{r}_i bezeichnet.

Wenn man in der Einteilchen-Entwicklungsgleichung Gl.(4.14) die Integration über \mathbf{y}' ausführt, erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) & + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ & = -\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r} \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Anstelle der Zweiteilchen-Lagrange-Verteilung enthält diese Entwicklungsgleichung die gemischte Euler-Lagrange-Verteilung $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ eines Lagrange-Teilchens $(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ und eines Euler-Punktes (\mathbf{r}, t) . Für diese gemischte Verteilung, kann nun analog zum vorherigen Abschnitt eine Entwicklungsgleichung aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t') & + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t') \\ & = -\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r} \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, \mathbf{v}) f(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t'). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Lösung $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ ergibt sich daraus durch Integration über t' von $t_0 = 0$ bis t :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{u}t, \mathbf{y}, 0) \\ &\quad - \int_0^t dt' [\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int d\mathbf{v}' d\mathbf{r}' \mathcal{A}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{r}', \mathbf{v}') \\ &\quad f(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, t')]_{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(t-t')} \quad . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Der erste Term ist die Anfangsbedingung f_0 , die Retardierung $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t')$ resultiert aus den Galilei-Transformationen vor und nach der Integration.

Führt man im nächsten Schritt für die unbekannte gemischte Verteilung $f(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t')$ eine unbekannte bedingte Verteilung $p(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t')$ ein:

$$f(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t') = p(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t') f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t'), \quad (4.20)$$

so kann die so formulierte Verteilung $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ in Gl.(4.17) eingesetzt werden und hat zur Folge, dass die sich ergebende Entwicklungsgleichung für $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, t)$ formal geschlossen ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &= f_{init} - \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int_0^t dt' D^1(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t'), \mathbf{y}) f(\mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t'), \mathbf{y}, t') \\ &\quad + \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int_0^t dt' D^2(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t'), \mathbf{y}) [\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, t')]_{\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(t-t')} \quad . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Diese Gleichung ist die verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung für die Einzelteilchenverteilung.

Hier treten im Vergleich zur gewöhnlichen Fokker-Planck-Gleichung der Term f_{init} auf, der aus der Anfangsbedingung f_0 resultiert, sowie die zeitlichen Integrationen, die Gedächtniseffekte hervorrufen. Beides ist charakteristisch für Nichtmarkovprozesse. Die Drift- und Diffusionsterme hängen zusätzlich von der unbekannten bedingten Verteilung $p(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t')$ ab.

Der Diffusionsterm ist explizit gegeben als:

$$\begin{aligned} &D^2(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{v}' \int d\mathbf{r}' \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, \mathbf{v}) \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t') - \mathbf{r}', \mathbf{v}') \\ &\quad p(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{v}', \mathbf{r}', t' | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t') \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck ist gerade die bedingte zweizeitige zweipunktige Beschleunigungsbeschleunigungskorrelation:

$$D^2(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t') | \mathbf{U}(t', \mathbf{y}) \mathbf{X}(t', \mathbf{y}) \rangle_{\mathbf{r} = \mathbf{u}(t-t')} \quad . \quad (4.23)$$

Der Driftterm ist dann entsprechend:

$$D^1(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\nabla_{\mathbf{u}} < \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t') | \mathbf{U}(t', \mathbf{y}) \mathbf{X}(t', \mathbf{y}) >]_{\mathbf{r}=\mathbf{u}(t-t')} \quad (4.24)$$

Es ist also gelungen, eine exakte Fokker-Planck-Gleichung für die Verbundverteilung eines Lagrange-Teilchens aus der Hierarchie von Entwicklungsgleichungen herzuleiten, also letztendlich auf der Grundlage einer statistischen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen.

4.3 Schliessungsansatz und Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells

Auch wenn die verallgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung eine exakte Beziehung zwischen der Einteilchenstatistik und den Navier-Stokes-Gleichungen ausdrückt, bleibt das Problem dennoch ungelöst, da als unbekannter Term $p(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}; t')$ enthalten ist. Es ist daher sinnvoll, geeignete Näherungen für die bedingte Beschleunigung anzusetzen, die eine wesentliche Vereinfachung von Gl.(4.21) zur Folge haben. Dieses Vorgehen ist ähnlich wie bei den Lagrangeschen Modellierungsansätzen.

Letztendlich soll diese Vereinfachung auf eine Entwicklungsgleichung in der Form des Oboukhov-Modells führen, die den Nichtgaußschen Geschwindigkeitsstatistiken Rechnung tragen kann. Da in erster Linie der Diffusionsterm für das Verhalten des Lagrange-Teilchens im Inertialbereich verantwortlich sein soll, werden die weiteren Terme in Gl.(4.21) vernachlässigt. Diese Näherung kann wie folgt formuliert werden:

$$p(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}; t') \approx f_E(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \quad . \quad (4.25)$$

$f_E(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t'; \mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ ist die entsprechende zweizeitige Euler-Verteilung. Durch Gl.(4.25) wird die Beschleunigungsbeschleunigungskorrelation also als unabhängig von Ort und Geschwindigkeit des Teilchens angenommen. Diese Annahme kann auch von einem physikalischen Blickpunkt aus motiviert werden: Die Beschleunigung ist insbesondere durch den Gradienten des Druckfelds bestimmt, welches wiederum von der gesamten Struktur der umgebenden Flüssigkeit abhängt. In gewisser Weise kann daher die genaue Position des Teilchens darin vernachlässigt werden.

Mit dieser Näherung verschwindet der Driftterm und der Diffusionsterm nimmt folgende Form an:

$$\begin{aligned} D^2(\mathbf{u}, t, t' | \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) &\approx D^2(\mathbf{u}, t, t') \\ &= \int d\mathbf{v}' \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{r} \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, v) \\ &\quad \mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t') - \mathbf{r}', v') f_E(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t; \mathbf{v}', \mathbf{r}', t'), \end{aligned} \quad (4.26)$$

d.h. er ist durch die zweizeitige zweipunktige Beschleunigungsbeschleunigungskorrelation $D^2(\mathbf{u}, t, t') = < \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \mathbf{a}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(t - t'), t') >$ gegeben. Die ver-

allgemeinerte Fokker-Planck-Gleichung (4.21) wird damit zu einer Nichtmarkovschen Erweiterung des Oboukhov-Modells:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &+ \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int_0^t dt' D^2(\mathbf{u}, t, t') [\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, t')]_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}-\mathbf{u}(t-t')}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Allerdings ist die genaue Form der zweizeitigen Beschleunigungsbeschleunigungskorrelation $D^2(\mathbf{u}, t, t')$ unbekannt und wurde bislang nicht in Experimenten oder numerischen Simulationen untersucht. Lösungsansätze müssen daher auf phänomenologische Theorien zurückgreifen. Aus einer Dimensionsanalyse im Sinne von K41 kann ein funktioneller Ausdruck für $D^2(\mathbf{u}, t, t')$ in folgender Form abgeleitet werden:

$$D_{ij}^2(\mathbf{u}, t, t') = \frac{\epsilon^{3/2}}{\mathbf{u}^{2/3}(t-t')^{2/3}} \left\{ \delta_{ij} \alpha \left(\frac{\mathbf{u}}{(t-t')^{1/2}} \right) + \frac{\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}^2} \beta \left(\frac{\mathbf{u}}{(t-t')^{1/2}} \right) \right\}. \quad (4.28)$$

Zusätzlich kann man formal zeigen, dass die Lösungen der verallgemeinerten Fokker-Planck-Gleichung dasselbe Skalierungsverhalten wie die Lösungen des gewöhnlichen Oboukhov-Modells besitzen:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{t^6} f\left(\frac{\mathbf{u}}{t^{1/2}}, \frac{\mathbf{x}}{t^{3/2}}, \frac{\mathbf{y}}{t^{3/2}}\right). \quad (4.29)$$

Hier wird deutlich, dass dieses Skalierungsverhalten nicht notwendigerweise mit Gaußschen Statistiken verbunden ist.

In Kapitel 6 werden konkrete Lösungsmethoden für die Integrodifferentialgleichung Gl.(4.27) des verallgemeinerten Oboukhov-Modells besprochen. Anstelle der Verbundverteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ soll im Weiteren nur die Verteilung der Geschwindigkeit $f(\mathbf{u}, t)$ behandelt werden. Für diese können mit den Experimenten vergleichbare Ergebnisse hergeleitet werden.

4.3.1 Die Geschwindigkeitsverteilung $f(u, t)$

Die Verteilung der Geschwindigkeit $f(\mathbf{u}, t)$ erhält man aus $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ durch Integration über den ganzen Raum: $f(\mathbf{u}, t) = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$. Berücksichtigt man dazu noch die räumliche Isotropie des Geschwindigkeitsfelds bei vollentwickelter Turbulenz, so wird $f(\mathbf{u}, t)$ zu einer Funktion, die nur von $u = |\mathbf{u}|$ abhängig ist. Aus Gl.(4.27) folgt mit diesen Einschränkungen die Entwicklungsgleichung für $f(u, t)$ (in d Dimensionen) in folgender Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u, t) = \frac{1}{u^{d-1}} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{2/3}} u^{d-1-2/3} Q_0\left(\frac{u}{\sqrt{t-t'}}\right) \frac{\partial}{\partial u} f(u, t'). \quad (4.30)$$

Die Terme u^{d-1} stammen hier aus dem Radialanteil der Divergenz $\nabla_{\mathbf{u}}$. Die Funktion $Q_0(\xi) = \epsilon^{3/2}[\alpha(\xi) + \beta(\xi)]$ aus Gl.(4.28) ist unbekannt. Nimmt man an, dass $Q_0(\xi)$ einem Potenzgesetz folgt:

$$Q_0(\xi) = Q_0 \xi^\mu, \quad \mu > 0, \quad (4.31)$$

so geht mit μ ein zusätzlicher Parameter in das Modell ein. Die Annahme eines Potenzgesetzes für $Q_0(\xi)$ bedeutet, dass man langreichweitige Korrelationen innerhalb des Beschleunigungsfelds annimmt. Diese Eigenschaft wurde auch schon beim Modell des Multifraktalen Random Walks (siehe Abschnitt 3.2.2) zugrundegelegt.

Das Integral in Gl.(4.30) divergiert an der Stelle $t = t'$ für $2/3 + \mu/2 > 1$. Eine Möglichkeit der Regularisierung bietet hier der Riemann-Liouville-Differentialoperator ${}_0D_t^p$ (siehe Anhang):

$${}_0D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{1-n+p}} f(t') \quad , \quad (4.32)$$

wobei $n > p > n-1$. Mit $p = \mu/2 - 1/3$ wird Gl.(4.30) zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(u, t) = \frac{1}{u^{d-1}} \frac{\partial}{\partial u} u^{d-1-2/3+\mu} Q_0 \frac{\partial}{\partial u} {}_0D_t^p f(u, t) \quad . \quad (4.33)$$

Die Entwicklungsgleichung für $f(u, t)$ enthält somit eine fraktionale Zeitableitung. Für den Fall $\mu = 2/3$ ergibt sich daraus das gewöhnliche Oboukhov-Modell mit der bekannten Lösung. Beschränkt man sich auf $n = 1$ und folglich $1/3 < \mu/2 < 4/3$, so wird das Verhalten der Geschwindigkeit durch einen sogenannten Continuous Time Random Walk beschrieben.

Die Lösung von Gl.(4.33) kann explizit als eine Integraltransformation angegeben werden (siehe Kapitel 5):

$$f(u, t) = \int_0^t ds h(s, t) f_1(u, s, \Theta) \quad . \quad (4.34)$$

Hier ist der Kern $h(s, t)$ gegeben als

$$h(s, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{s^{1+1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t}{s^{1/\alpha}} \right) \quad , \quad (4.35)$$

mit $\alpha = 1-p = 2/3 - \mu/2$ als Stabilitätsindex der einseitigen Lévy-Verteilung $L_\alpha(t)$. Die Verteilung $f_1(u, s, \Theta)$ mit $\Theta := 2/3 - \mu$ ist gegeben als Lösung von Gl.(4.33) für $p = 0$. Sie nimmt die Form einer gestreckten Exponentialfunktion an:

$$f_1(u, s, \Theta) = \frac{A(\Theta, d)}{(Q_0(2 + \Theta)^2 s)^{d/(2+\Theta)}} \exp \left\{ -\frac{u^{2\alpha}}{Q_0(2 + \Theta)^2 s} \right\} \quad . \quad (4.36)$$

Der Potenzansatz für $Q_0(\xi)$ führt somit auf eine Familie von Verteilungen, die vom Parameter μ abhängen. Passt man μ z.B. an die experimentellen Ergebnisse aus Lyon an, so ergibt sich eine hervorragende Übereinstimmung, wie in Abb.4.1 zu sehen ist. Bemerkenswert ist insbesondere, dass nur ein freier Parameter ausreicht, um die gute Anpassung zu erzielen.

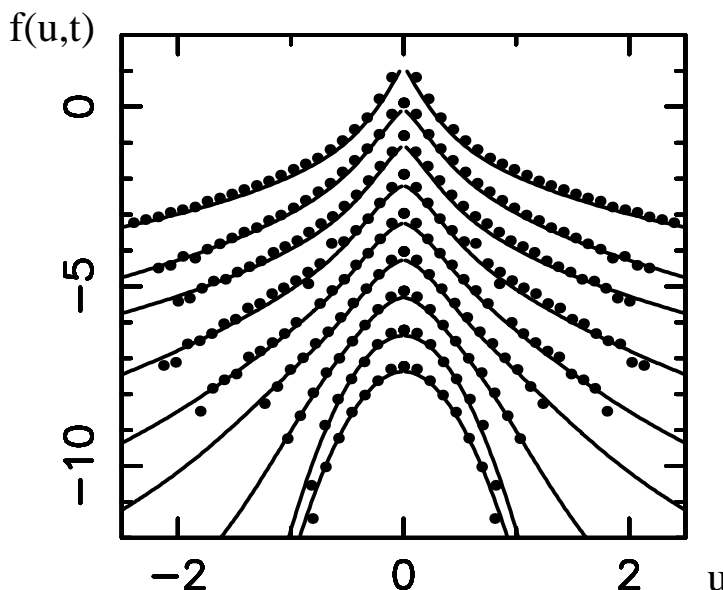


Abbildung 4.1: Vergleich der Verteilung $f(u, t)$ (Gl.(4.34)) für verschiedene Werte von μ mit den Experimentellen Verteilungen aus Lyon. Der Parameter nimmt von oben nach unten Werte zwischen $\mu = 1,71$ ($\tau = 0,15$ ms) und $\mu = 0,70$ ($\tau = 40,0$ ms) an (siehe hierzu auch Abb. 2.4). Entnommen aus [Fr03].

Der Schliessungsansatz Gl.(4.25) führt auf eine Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells, in welchem der Diffusionsterm mit der zweizeitigen zweipunktigen Beschleunigungsbeschleunigungskorrelation in Verbindung gebracht wird. Mit Hilfe einer Dimensionsanalyse nach K41 kann diese unbekannte Korrelationsfunktion in einer funktionellen Form angegeben werden und hat zur Folge, dass die Lösungen ein Skalierungsverhalten besitzen, dass mit Kolmogorovs Theorie übereinstimmt. Daran wird deutlich, dass ein solches Skalierungsverhalten nicht zwingend eine Gaußförmige Verteilung impliziert, wie im Fall der Geschwindigkeitsverteilung Gl.(4.34) explizit gezeigt wird. Der Potenzansatz für die Beschleunigungskorrelation wird im Nachhinein durch die sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten unterstützt. Über eine zusätzliche Zeitabhängigkeit des Parameters μ könnte auch der Verlauf der Formänderung von Normalverteilungen zu stark intermittenten Verteilungen berücksichtigt werden.

Die Geschwindigkeitsstatistiken können darüberhinaus in Beziehung zu einer Klasse Nichtmarkovscher Prozesse gesetzt werden, die wie das multifraktale Random Walk Modell Gedächtniseffekte beinhalten. Der intermittente Charakter der Verteilungen wird damit ebenfalls auf die langreichweitigen Korrelationen des turbulenten Beschleunigungsfelds zurückgeführt. Allerdings wird hier der zugrundeliegende stochastische Prozess als ein Continuous Time Random Walk identifiziert. Diese Klasse Nichtmarkovscher Prozesse ist zentraler Gegenstand des nächsten Kapitels.

Kapitel 5

Verbundverteilungen für eine Klasse Nichtmarkovscher Prozesse

Die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels sind deutliche Hinweise auf eine Beziehung der Geschwindigkeitsstatistiken eines Lagrange-Teilchens in vollentwickelter Turbulenz mit einer Klasse stochastischer Prozesse, den sogenannten Continuous Time Random Walks (CTRWs). Einerseits besitzt die Theorie von Friedrich gegenüber den in Kapitel 3 besprochenen heuristischen Modellen den Vorzug, dass sie auf einer statistischen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen beruht. Andererseits zeigt aber auch hier die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente die aus anderen Modellen bekannte Form:

$$f(u, t) = \int_0^\infty n(s, t) f(u, s) ds \quad , \quad (5.1)$$

d.h. sie kann als eine Überlagerung von unterschiedlich gewichteten Basisfunktionen $f(u, s)$ angesehen werden. Diese sind entweder gewöhnliche Gaußfunktionen - also die nach K41 erwarteten Verteilungen - oder, wie in den Modellen von Beck und Friedrich, gestreckte Exponentialfunktionen. Die genäherten Kurven an die experimentellen Ergebnisse aus Lyon oder Cornell sind bei allen Modellen augenscheinlich sehr gut. Aus dem Vergleich mit dem Experiment kann hier also keinem der vorgeschlagenen Theorien der Vorzug gegeben werden. Der grosse Entwicklungsschritt der beiden aktuellen Experimente gegenüber den früheren darf auch nicht darüber hinwegtäuschen, dass die aktuellen Messungen eine präzise Aussage über den zugrundeliegenden stochastischen Prozess gar nicht erlauben. Daher ist es von der theoretischen Seite her notwendig, neue Grössen zu betrachten, die als Entscheidungskriterium zwischen verschiedenen stochastischen Modellen dienen und in zukünftigen Experimenten oder Simulationen berücksichtigt werden können.

Eine mögliche Erweiterung besteht darin, Voraussagen über mehrzeitige Verbundverteilungen der Geschwindigkeit zu machen. Allen Modellen ist gemeinsam, dass der beschriebene stochastische Prozess Nichtmarkoveigenschaften besitzt. Nichtmarkovprozesse sind aber durch die Angabe einer

einzeitigen Verteilung nicht vollständig charakterisiert.

Im vorliegenden Kapitel sollen Verbundverteilungen für eine Klasse Nichtmarkovscher Prozesse untersucht werden, die als Realisierung eines Continuous Time Random Walks angesehen werden können. Da sich alle bisherigen Untersuchungen der CTRWs in der Literatur auf einzeitige Verteilungen beschränken, ist diese Erweiterung nicht allein für die Turbulenzforschung, sondern auch für die Theorie stochastischer Prozesse im Allgemeinen von grundlegendem Interesse.

Im nächsten Abschnitt werden CTRWs eingeführt und die hier behandelte Realisierung in der Form gekoppelter Langevin-Gleichungen nach Fogedby [Fo94] vorgestellt. Die einzelnen Prozesse werden genauer betrachtet. In Abschnitt 5.2 werden Lévyprozesse besprochen. Der zugehörige inverse Prozess ist von zentraler Bedeutung, um den CTRW vollständig charakterisieren zu können (Abschnitt 5.3). Schliesslich werden in Abschnitt 5.4 sowohl für einzeitige als auch mehrzeitige Verteilungen fraktionale Fokker-Planck Gleichungen hergeleitet. Diese sind im einzeitigen Fall bereits bekannt und in einer Reihe von Veröffentlichungen eingehend untersucht worden. Für mehrere Zeiten kann eine konsistente Erweiterung der fraktionalen Diffusionsgleichung angegeben werden. Abschliessend wird in Abschnitt 5.5 der Zusammenhang mit einer verallgemeinerten Mastergleichung diskutiert, auf deren Grundlage der CTRW alternativ beschrieben werden kann.

5.1 Continuous Time Random Walks

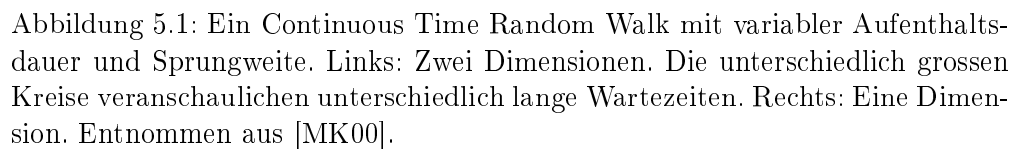
Das stochastische Modell der Continuous Time Random Walks wurde Ende der 60er Jahre von Montroll und Weiss als Erweiterung des gewöhnlichen Brownschen Random Walks eingeführt [WM65]. Anstelle von sukzessiven Sprüngen mit fester Sprungweite, wie sie dem gewöhnlichen Random Walk zu Grunde liegen, werden sowohl veränderliche Sprungweiten, als auch unterschiedlich lange Aufenthaltszeiten zwischen aufeinanderfolgenden Sprüngen zugelassen (siehe Abb. 5.1). Diese beiden Grössen werden über eine Sprungverteilung $\psi(\eta, \tau)$ charakterisiert, die die Wahrscheinlichkeit angibt, einen Sprung der Weite η nach einer Wartezeit τ vorzufinden. Die marginale Verteilung der Sprungweiten ergibt sich daraus zu

$$\pi(\eta) := \int_0^\infty d\tau \psi(\eta, \tau) \quad , \quad (5.2)$$

und die Verteilung der Wartezeiten zu

$$\omega(\tau) := \int_0^\infty d\eta \psi(\eta, \tau) \quad . \quad (5.3)$$

Nimmt man voneinander unabhängige Wartezeiten und Sprungweiten an, so erhält man die entkoppelte Form der Sprungverteilung: $\psi(\eta, \tau) = \omega(\tau)\pi(\eta)$. Im gekoppelten Fall wäre $\psi(\eta, \tau) = p(\tau|\eta)\pi(\eta)$ bzw. $\psi(\eta, \tau) = p(\eta|\tau)\omega(\tau)$. Eine bestimmte Sprungweite wäre dann stets mit einer „Flugzeit“ verbunden. Hier



Verschiedene CTRWs können über ihre charakteristische Wartezeit

$$T := \int_0^\infty d\tau \, \tau \, \omega(\tau) \quad , \quad (5.4)$$

und die Varianz ihrer Sprungweite

$$\Sigma^2 := \int_0^\infty d\eta \, \eta^2 \, \pi(\eta) \quad , \quad (5.5)$$

kategorisiert werden. Sie können damit in drei Gruppen eingeteilt werden, die sich durch ihr Diffusionsverhalten unterscheiden:

- T und Σ^2 sind endlich. Der CTRW zeigt normal diffusives Verhalten und entspricht dem gewöhnlichen Random Walk.
- T divergiert und Σ^2 bleibt endlich. Der CTRW ist subdiffusiv.
- T bleibt endlich und Σ^2 divergiert. Der CTRW ist superdiffusiv.

Welche Art von Diffusion vorliegt wird durch das zeitliche Verhalten des mittleren quadratischen Abstands des Teilchens von seinem Startpunkt x_0 festgelegt:

$$\langle (x(t) - x_0)^2 \rangle \sim t^\alpha \quad . \quad (5.6)$$

Für $\alpha = 1$ ist Gl.(5.6) die bekannte Einstein-Beziehung der normalen Diffusion. $\alpha > 1$ bedeutet verstärkte Diffusion, sogenannte Superdiffusion. Für $\alpha < 1$ wird das Diffusionsverhalten als subdiffusiv bezeichnet. Da die Größen T und Σ^2 unmittelbar mit den Eigenschaften der Diffusion in Verbindung gebracht werden können, stellen CTRWs ein weitverbreitetes Modell zur Beschreibung

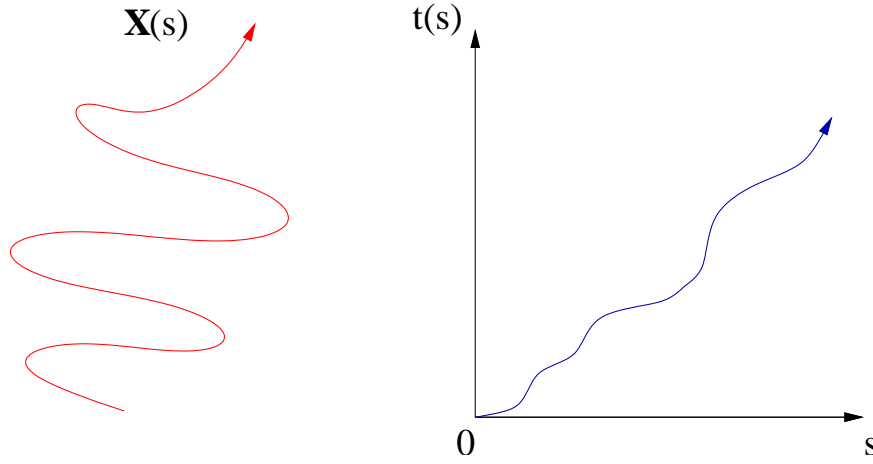


Abbildung 5.2: Linkes Bild: Der Prozess $X(s)$ als gewöhnlicher Random Walk in der Ebene, parametrisiert durch die kontinuierliche Bogenlänge s . Rechtes Bild: Der zugeordnete zeitliche Prozess $t(s)$ mit rein positiven Inkrementen.

anomaler Diffusionsprozesse dar.

Anschaulich bedeutet eine divergierende charakteristische Wartezeit, dass das Teilchen sehr lange an seinem Aufenthaltsort sitzenbleiben kann, mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit sogar unendlich lange (d.h. physikalisch an seinem Ort festgehalten wird). Folglich fällt die Verteilung $\omega(\tau)$ für grosse Zeiten τ nur schwach ab und führt zu einem divergierenden ersten Moment. Bleibt im Gegensatz dazu die Varianz der Sprungweiten endlich, was z.B. durch eine Gaußförmige Verteilung $\pi(\eta)$ erreicht wird, so verläuft insgesamt die Diffusion des Teilchens schwächer als im Normalfall. Hier sollen gerade diese subdiffusiven CTRW-Prozesse betrachtet werden.

H.C. Fogedby führte als Realisierung eines CTRWs zwei gekoppelte Langevin-Gleichungen ein [Fo94]:

$$\frac{dX(s)}{ds} = F(X) + \eta(s) \quad , \quad (5.7)$$

$$\frac{dt(s)}{ds} = \tau(s) \quad . \quad (5.8)$$

Der Random Walk wird hier durch die Variable s parametrisiert. Im diskreten Fall wäre s die Anzahl der Schritte, die das Teilchen durchführt, im hier betrachteten Kontinuumsfall entspricht dieser Parameter der Bogenlänge oder einer Art „Eigenzeit“. $X(s)$ und $t(s)$ bezeichnen den physikalischen Ort und die physikalische Zeit, $F(X)$ berücksichtigt ein eventuell vorhandenes externes Kraftfeld. Die Zufallsvariablen $\eta(s)$ und $\tau(s)$ sind für die stochastischen Eigenschaften des Prozesses verantwortlich und werden über die zugehörigen Verteilungen der Wartezeit $\omega(\tau)$ und der Sprungweite $\pi(\eta)$ charakterisiert. Da ein entkoppelter CTRW angenommen wird, sind η und τ statistisch unabhängig. Hier soll zur Vereinfachung stets nur eine Dimension betrachtet werden, eine Erweiterung auf mehrere Dimensionen kann ohne Probleme durchgeführt

werden.

Die Langevin-Gleichung (5.7) beschreibt einen stochastischen Prozess, der den Ort X des Teilchens in Abhängigkeit von der Eigenzeit s angibt. Über einen zweiten Prozess $t(s)$ wird jedem s die physikalische Zeit t zugeordnet (siehe Abb. 5.2). Der gekoppelte Prozess beschreibt den CTRW in den physikalischen Größen X und t .

Aufgrund der Kausalität nehmen wir an, dass stets $\tau(s) > 0$ gilt. Folglich ist der Prozess $t(s)$ invertierbar und ermöglicht über den inversen Prozess $s = t^{-1}(t) = s(t)$ eine Parametrisierung der Eigenzeit mit t . Die Eigenschaften dieses inversen Prozesses sind von zentralem Interesse, da sich daraus direkt der Prozess angeben lässt, der die Abhängigkeit des Ortes X von der Zeit t beschreibt:

$$X(t) = X(s(t)) \quad . \quad (5.9)$$

Für die Charakterisierung der Prozesse $X(t)$, $X(s)$ und $t(s)$ können nun entsprechend der üblichen Definition einzeitige und mehrzeitige Verteilungen eingeführt werden:

$$f(x, s) = \langle \delta(x - X(s)) \rangle \quad , \quad (5.10)$$

$$p(t, s) = \langle \delta(t - t(s)) \rangle \quad , \quad (5.11)$$

$$f(x, t) = \langle \delta(x - X(t)) \rangle \quad , \quad (5.12)$$

bzw.

$$f_1(x_2, s_2; x_1, s_1) = \langle \delta(x_2 - X(s_2))\delta(x_1 - X(s_1)) \rangle \quad , \quad (5.13)$$

$$p(t_2, s_2; t_1, s_1) = \langle \delta(t_2 - t(s_2))\delta(t_1 - t(s_1)) \rangle \quad , \quad (5.14)$$

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \langle \delta(x_2 - X(s(t_2)))\delta(x_1 - X(s(t_1))) \rangle \quad . \quad (5.15)$$

Die Klammern $\langle .. \rangle$ bezeichnen hier eine geeignete Mittelung über stochastische Realisierungen. Die Beschränkung auf $n = 2$ dient lediglich der Vereinfachung — eine Erweiterung auf beliebige Zeiten ist offensichtlich. Die Verteilungen (5.10) - (5.15) werden durch die Statistiken von η und τ vollständig festgelegt.

5.1.1 Der Prozess $X(s)$

Wir betrachten hier den Fall, dass $\eta(s)$ die Eigenschaften einer gewöhnliche Langevin Kraft hat, d.h. $\eta(s)$ ist Gaußverteilt mit

$$\begin{aligned} \langle \eta(s) \rangle &= 0 \quad , \\ \langle \eta(s)\eta(s') \rangle &= 2\delta(s - s') \quad . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Damit wird (5.7) zu einem Markovprozess und die Verteilung $f_1(x_2, s_2; x_1, s_1)$ kann über die mit der Langevin-Gleichung korrespondierende Fokker-Planck-Gleichung für die bedingte Verteilung $P(x_2, s_2|x_1, s_1)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} P(x_2, s_2|x_1, s_1) &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} F(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) P(x_2, s_2|x_1, s_1) \\ &= L_{FP}(x) P(x_2, s_2|x_1, s_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.17)$$

Hier und im Folgenden wird die Diffusionskonstante stets 1 gesetzt. Aufgrund der Markoveigenschaften des Prozesses $X(s)$ sind die Verbundverteilungen eindeutig über $P(x_2, s_2|x_1, s_1)$ und eine einzeitige Verteilung $f_1(x_1, s_1)$ festgelegt¹:

$$f_1(x_2, s_2; x_1, s_1) = P(x_2, s_2|x_1, s_1)f_1(x_1, s_1) \quad . \quad (5.18)$$

5.1.2 Der Prozess $t(s)$

Der stochastische Prozess $t(s)$ ist durch die statistischen Eigenschaften von $\tau(s)$ bestimmt. Die zugehörigen Verteilungen wurden oben mit $p(t, s)$ bzw. $p(t_2, s_2; t_1, s_1)$ bezeichnet. Hier soll $\tau(s)$ als ein einseitiger stabiler Lévy-Prozess der Ordnung α angenommen werden mit $0 < \alpha < 1$. Damit wird $t(s)$ ebenfalls zu einem Markovprozess, jedoch mit der charakteristischen Eigenschaft, dass das erste Moment divergiert. Die Annahmen über die Prozesse $X(s)$ und $t(s)$ haben also gerade zur Folge, dass der CTRW subdiffusives Verhalten zeigt. Die Verteilungen des stabilen Lévy-Prozesses werden im nächsten Abschnitt eingehender betrachtet.

5.1.3 Der Prozess $X(t) = X(s(t))$

Der hier behandelte CTRW wird über die Kopplung der beiden Langevin-Gleichungen (5.7) und (5.8) realisiert und führt auf den stochastischen Prozess $X(t) = X(s(t))$. Mit Hilfe des inversen Prozesses $s(t)$ folgt für die Verbundverteilung dieses Prozesses:

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \langle \delta(x_2 - X(s_2))\delta(s_2 - s(t_2))\delta(x_1 - X(s_1))\delta(s_1 - s(t_1)) \rangle, \quad (5.19)$$

wobei die Erweiterung auf beliebige Punkte ganz analog erfolgt. Nun lassen sich auch für diesen inversen Prozess Verteilungen einführen:

$$\begin{aligned} h(s, t) &= \langle \delta(s - s(t)) \rangle, \\ h(s_2, t_2; s_1, t_1) &= \langle \delta(s_2 - s(t_2))\delta(s_1 - s(t_1)) \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der Prozesse $X(s)$ und $t(s)$ faktorisiert der Erwartungswert in (5.19). Zusammen mit der Verteilung des Markovprozesses $X(s)$ erhält man dann die Verteilung des Prozesses $X(s(t))$ durch Elimination der Eigenzeit-Variablen s_i :

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 h(s_2, t_2; s_1, t_1) f_1(x_2, s_2; x_1, s_1). \quad (5.21)$$

Eine Erweiterung von Gl.(5.21) auf N Zeiten ist offensichtlich. Man kann für $N \rightarrow \infty$ sogar zu einer Pfadintegraldarstellung übergehen:

$$f[x(t)] = \int \mathcal{D}s(t) h(s(t)) f_1[x(s(t))] \quad . \quad (5.22)$$

¹Damit soll die Theorie der gewöhnlichen Fokker-Planck-Gleichung nur angerissen werden. Eine erschöpfende Behandlung findet man in den Büchern von Risken [Risk] und Gardiner [Gard].

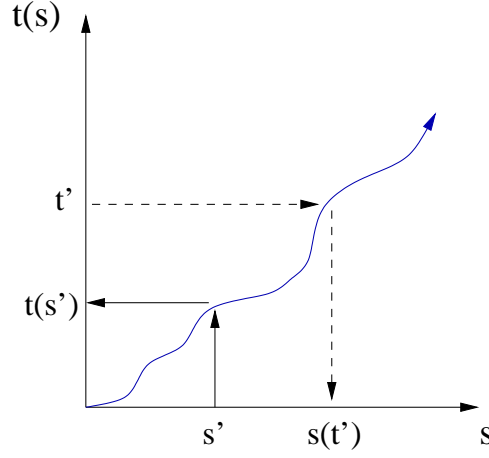


Abbildung 5.3: Skizze des Prozesses $t(s)$, der die Bogenlänge s mit der physikalischen Zeit t verknüpft. Wählt man $t' > t(s')$ so wird die zugehörige Bogenlänge $s(t') > s'$. Insgesamt ergibt sich die Beziehung (5.23).

Gl.(5.21) ist die zentrale Gleichung, die die gesuchte Verteilung des CTRWs wiedergibt. Sie kann folgendermassen interpretiert werden: Die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t den Ort X vorzufinden ist gerade gegeben als die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t bei der Eigenzeit s zu sein, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, zur Eigenzeit s den Ort X anzutreffen, summiert über alle möglichen s . Das zentrale Problem in Gl.(5.21) besteht nun darin, die Verteilung des inversen Prozesses $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ anzugeben, da die Verteilung $f_1(x_2, s_2; x_1, s_1)$ mit der Lösung der zugehörigen Fokker-Planck-Gleichung bestimmt werden kann.

An dieser Stelle soll betont werden, dass die Prozesse $X(s)$ und $t(s)$ beides Markovprozesse sind, die über die Kopplung mit dem Eigenzeitparameter auf einen Nichtmarkovschen subdiffusiven Prozess $X(t)$ führen. Für diese Nichtmarkoveigenschaft ist alleine der inverse Prozess $s(t)$ verantwortlich, wie ebenfalls anhand Gl.(5.21) einsichtig ist. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden die Eigenschaften des inversen Prozesses ausführlich diskutiert.

Die Verteilung h kann mit Hilfe der Verteilungsfunktion von $s(t)$ bestimmt werden. Zwischen den Prozessen $t(s)$ und $s(t)$ gilt die zentrale Beziehung

$$\Theta(s - s(t)) = 1 - \Theta(t - t(s)) \quad , \quad (5.23)$$

die in Abb. 5.3 veranschaulicht ist. $\Theta(t)$ ist die bekannte Heavyside-Funktion. Folglich besteht zwischen den Verteilungsfunktionen der beiden Prozesse der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \langle \Theta(s - s(t)) \rangle &= 1 - \langle \Theta(t - t(s)) \rangle \quad , \\ \langle \Theta(s_2 - s(t_2)) \Theta(s_1 - s(t_1)) \rangle &= \langle (1 - \Theta(t_2 - t(s_2))) (1 - \Theta(t_1 - t(s_1))) \rangle \\ &= 1 - \langle \Theta(t_2 - t(s_2)) \rangle - \langle \Theta(t_1 - t(s_1)) \rangle \\ &\quad + \langle \Theta(t_2 - t(s_2)) \Theta(t_1 - t(s_1)) \rangle . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ableitung von Gl.(5.24) nach s_i ergibt die Verteilung h des Prozesses $s(t)$:

$$\begin{aligned} h(s, t) &= -\frac{\partial}{\partial s} < \Theta(t - t(s)) > \quad , \\ h(s_2, t_2; s_1, t_1) &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} < \Theta(t_2 - t(s_2)) \Theta(t_1 - t(s_1)) > \quad . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Diese Gleichung verbindet die Statistiken des stabilen Lévy-Prozesses mit denen des inversen Prozesses und ist damit eine zentrale Relation für die folgenden Diskussionen.

Da $t = 0$ mit $s = 0$ korrespondiert, gelten die üblichen Randbedingungen:

$$\begin{aligned} h(s, 0) &= \delta(s) \quad , \\ h(s_2, t_2; s_1, 0) &= h(s_2, t_2) \delta(s_1) \quad , \\ h(s_2, t_2 \rightarrow t_1; s_1, t_1) &= \delta(s_2 - s_1) h(s_1, t_1) \quad , \end{aligned} \quad (5.26)$$

und können mit Gl.(5.25) verifiziert werden.

5.2 Einseitige stabile Lévy-Prozesse

In diesem Abschnitt wird der stabile Lévy-Prozess $t(s)$ eingehender untersucht [GnKo],[YCST99]. Die Behandlung der einzeitigen und mehrzeitigen Verteilungen erfolgt dabei getrennt. In beiden Fällen werden einseitige Lévy-Verteilungen auftauchen, die im Laplace-Raum eine einfacher zugängliche Form annehmen. Daher ist es sinnvoll, die charakteristische Funktion des Prozesses als Laplace-Transformierte zu definieren. Die zweizeitige charakteristische Funktion ist dann (siehe Anhang):

$$\begin{aligned} Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1) &:= \mathcal{L}\{p(t_2, s_2; t_1, s_1)\} \\ &= \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty dt_1 e^{-\lambda_2 t_2 - \lambda_1 t_1} p(t_2, s_2; t_1, s_1). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Im Folgenden wird stets verwendet, dass man $t(s_i)$ durch Integration der Langevin-Gleichung (5.8) über s_i erhält:

$$t(s_i) = \int_0^{s_i} ds' \tau(s') \quad . \quad (5.28)$$

5.2.1 Die einzeitige Verteilung

Die charakteristische Funktion von $t(s)$ nimmt im einzeitigen Fall folgende Form an:

$$Z(\lambda, s) = \mathcal{L}\{p(s, t)\} = < e^{-\lambda t(s)} > = < e^{-\lambda \int_0^s ds' \tau(s')} > \quad . \quad (5.29)$$

Mit der neuen Zufallsvariablen

$$\Gamma = \frac{1}{s^{1/\alpha}} \int_0^s ds' \tau(s') \quad , \quad (5.30)$$

lässt sich $Z(\lambda, s)$ direkt schreiben als:

$$Z(\lambda, s) = \langle e^{-\lambda s^{1/\alpha} \Gamma} \rangle = e^{-\lambda^\alpha s} \quad , \quad (5.31)$$

mit $0 < \alpha < 1$. Dieser Ausdruck ist die einzeitige charakteristische Funktion des stabilen stabilen Lévy-Prozesses. Im letzten Schritt wurden dabei die statistischen Eigenschaften von Γ verwendet, die sich folgendermassen ergeben. Nach den Voraussetzungen gilt, dass die Inkremente τ durch eine breite Verteilung charakterisiert sind: $\omega(\tau) \sim \tau^{-1-\alpha}$ wobei $0 < \alpha < 1$ sein muss, damit das erste Moment — die charakteristische Wartezeit — divergiert. Zusammen mit dem Normierungsfaktor $1/s^{1/\alpha}$ sind damit die Bedingungen des verallgemeinerten Grenzwertsatzes erfüllt und die Summenvariable Γ genügt einer Lévy-Verteilung.

Lévy-Verteilungen $L_{\alpha,\beta}(x)$ werden durch die beiden Parameter α und β festgelegt. α gibt das asymptotische Verhalten der stabilen Verteilung für grosse x an: $L_{\alpha,\beta}(x) \sim x^{-1-\alpha}$, also auch die Ordnung der divergierenden Momente. β charakterisiert die Asymmetry. Rein positive Inkremente $\tau > 0$ führen zu einer maximal asymmetrischen Verteilung $p(t < 0, s) = 0$. β hat dann den Wert 1. Im Weiteren werden die einseitigen Lévy-Verteilungen $L_{\alpha,\beta}$ für $\beta = 1$ mit L_α bezeichnet. Sie haben im Laplace-Raum die besonders einfache Form $\mathcal{L}\{L_\alpha(t)\} = e^{-\lambda^\alpha}$.

Die Verteilung $p(s, t)$ erhält man aus der Charakteristischen Funktion über die Laplace-Rücktransformation. Sie nimmt die folgende skaleninvariante Form an:

$$p(t, s) = \frac{1}{s^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t}{s^{1/\alpha}} \right) \quad . \quad (5.32)$$

5.2.2 Die mehrzeitigen Verteilungen

Die Erweiterung auf mehrere Zeiten kann jetzt ganz analog zum einzeitigen Fall durchgeführt werden. Die Verbundverteilung des stabilen stabilen Lévy-Prozesses wurde bereits in Gl.(5.14) eingeführt. Davon ausgehend ist die Charakteristische Funktion für mehrere Zeiten als Laplace-Transformierte von $p(t_2, s_2; t_1, s_1)$ gegeben:

$$Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1) = \langle e^{-\lambda_2 \int_0^{s_2} ds' \tau(s') - \lambda_1 \int_0^{s_1} ds' \tau(s')} \rangle \quad . \quad (5.33)$$

Unterscheidet man hier die beiden Fälle $s_2 > s_1$ und $s_2 < s_1$, so kann dieser Ausdruck weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1) = & \Theta(s_2 - s_1) \langle e^{-\lambda_2 \int_{s_1}^{s_2} ds' \tau(s') - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{s_1} ds' \tau(s')} \rangle \\ & + \Theta(s_1 - s_2) \langle e^{-\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} ds' \tau(s') - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^{s_2} ds' \tau(s')} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der Inkremente τ , faktorisieren die Erwartungswerte in beiden Summanden und die einzelnen Erwartungswerte können nun entsprechend Gl.(5.31) ausgedrückt werden. Die mehrzeitige Verteilung

des stabilen Lévy-Prozesses ergibt sich dann in folgender Form:

$$\begin{aligned} Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1) = & \Theta(s_2 - s_1) e^{-s_1(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha} e^{-(s_2 - s_1)\lambda_2^\alpha} \\ & + \Theta(s_1 - s_2) e^{-s_2(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha} e^{-(s_1 - s_2)\lambda_1^\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Das Auftreten der Exponenten $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha$ ist sowohl charakteristisch für den stabiler Lévy-Prozess $t(s)$ als auch für $s(t)$ und wird bei der Behandlung des inversen Prozesses eine wichtige Rolle spielen.

Die Verteilung $p(t_2, s_2; t_1, s_1)$ ist wie im einzeitigen Fall über die inverse Laplace-Transformation von Gl.(5.35) gegeben:

$$\begin{aligned} p(t_2, s_2; t_1, s_1) = & \Theta(s_2 - s_1) \frac{1}{(s_2 - s_1)^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t_2 - t_1}{(s_2 - s_1)^{1/\alpha}} \right) \frac{1}{s_1^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t_1}{s_1^{1/\alpha}} \right) \\ & + \Theta(s_1 - s_2) \frac{1}{(s_1 - s_2)^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t_1 - t_2}{(s_1 - s_2)^{1/\alpha}} \right) \frac{1}{s_2^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t_2}{s_2^{1/\alpha}} \right) . \end{aligned} \quad (5.36)$$

An diesem Ausdruck wird die Markoveigenschaft des stabilen Lévy-Prozesses deutlich, da die Übergangswahrscheinlichkeit $p(t_2, s_2 | t_1, s_1)$ z.B. für $s_2 > s_1$ direkt ersichtlich ist:

$$p(t_2, s_2 | t_1, s_1) = \frac{1}{(s_2 - s_1)^{1/\alpha}} L_\alpha \left(\frac{t_2 - t_1}{(s_2 - s_1)^{1/\alpha}} \right) \quad . \quad (5.37)$$

Der entsprechende Ausdruck für N Zeiten ist damit offensichtlich.

5.3 Der inverse Prozess $s(t)$

Die Verteilungen $h(s, t)$ bzw. $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ des inversen Prozesses können mit Hilfe der zentralen Gleichung (5.25) aus den oben behandelten Verteilungen des stabilen Lévy-Prozesses hergeleitet werden. Da die entsprechenden Ausdrücke im Laplace-Raum eine einfachere Form annehmen, ist es wieder zweckmässig, mit Laplace-Transformierten zu rechnen. Die ein- und mehrzeitigen Verteilungen werden im Folgenden wieder getrennt besprochen.

5.3.1 Die einzeitige Verteilung

Für die Laplace-Transformierte von $h(s, t)$ bezüglich t soll die Notation $\tilde{h}(s, \lambda) := \mathcal{L}\{h(s, t)\}$ verwendet werden. Gl.(5.25) lautet somit im Laplace-Raum:

$$\tilde{h}(s, \lambda) = -\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t(s)} \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\lambda} Z(s, \lambda) \quad , \quad (5.38)$$

wobei $Z(\lambda, s)$ die einzeitige charakteristische Funktion des stabilen Lévy-Prozesses Gl.(5.31) ist. Die Ableitung nach s kann leicht durchgeführt werden und ergibt direkt:

$$\tilde{h}(s, \lambda) = \lambda^{\alpha-1} e^{-s\lambda^\alpha} \quad . \quad (5.39)$$

Dieser Ausdruck wurde bereits in [Fo94] hergeleitet, ohne allerdings ein „einfaches physikalisches Argument“ angeben zu können. Hier beruht die Herleitung auf der Beziehung (5.23) zwischen den Prozessen $t(s)$ und $s(t)$.

Die inverse Laplace-Transformation von Gl.(5.39) lautet [Ba01]:

$$h(s, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{s^{1+1/\alpha}} L_\alpha\left(\frac{t}{s^{1/\alpha}}\right) \quad . \quad (5.40)$$

Dieser Ausdruck gibt explizit die Verteilung von $s(t)$ im einzeitigen Fall an. Der inverse Prozess ist hierfür also vollständig bestimmt und damit kann auch die Lösung des CTRWs mit Gl.(5.21) angegeben werden.

Um darüberhinaus eine Entwicklungsgleichung für die Verteilung $f(x, t)$ herleiten zu können, benötigt man zusätzlich eine Gleichung für $h(s, t)$. Nach Gl.(5.39) genügt $\tilde{h}(s, \lambda)$ der Differentialgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial s} \tilde{h}(s, \lambda) = \lambda^\alpha \tilde{h}(s, \lambda) \quad , \quad (5.41)$$

wobei die Anfangsbedingung $\tilde{h}(0, \lambda) = \lambda^{\alpha-1}$ für $s = 0$ lautet. Die inverse Laplace-Transformation wird nun in mehreren Schritten durchgeführt. Zuerst wird Gl.(5.41) nach $\tilde{h}(s, \lambda)$ aufgelöst:

$$\tilde{h}(s, \lambda) = -\lambda^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} \tilde{h}(s, \lambda) \quad . \quad (5.42)$$

Im Gegensatz zu Gl.(5.41) kann Gl.(5.42) ohne zusätzliche Randterme rücktransformiert werden und führt auf den Ausdruck

$$h(s, t) = -{}_0D_t^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} h(s, t) \quad , \quad (5.43)$$

wobei ${}_0D_t^{-\alpha}$ den fraktionalen Riemann-Liouville-Operator darstellt (siehe Anhang):

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} dt' \quad , \quad (5.44)$$

der aufgrund der Eigenschaft $\mathcal{L}\{{}_0D_t^{-\alpha} f(t)\} = \lambda^{-\alpha} f(\lambda)$ aus der inversen Laplace-Transformation resultiert. Schliesslich kann auf beiden Seiten von Gl.(5.43) nach t abgeleitet werden. Unter Berücksichtigung von ${}_0D_t^{1-\alpha} f(t) := \frac{\partial}{\partial t} {}_0D_t^{-\alpha} f(t)$ erhält man eine fraktionale Entwicklungsgleichung für die Verteilung $h(s, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} h(s, t) = -{}_0D_t^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} h(s, t) \quad . \quad (5.45)$$

Die Nichtlokalität des fraktionalen Integraloperators macht deutlich, dass der Verteilung $h(s, t)$ ein Nichtmarkovprozess zugrundeliegt. Als Folge von Gl.(5.21) zeigt damit auch der gekoppelte Prozess $X(s(t))$ Nichtmarkovsche Eigenschaften.

Momente von $h(s, t)$

Aus der Verteilung $h(s, t)$ können die einzeitigen Momente beliebiger Ordnung direkt bestimmt werden. Allerdings sind Lévy-Verteilungen für analytische Rechnungen nicht sehr geeignet. Alternativ können die Momente im Laplace-Raum berechnet werden. Da inverse Laplace-Transformation und Integration vertauschen, gilt allgemein:

$$\langle s(t)^n \rangle = \int_0^\infty ds s^n h(s, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_0^\infty ds s^n \tilde{h}(s, \lambda) \right\} \quad . \quad (5.46)$$

Mit Gl.(5.39) lautet dann z.B. das erste Moment

$$\langle s(t) \rangle = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_0^\infty ds' s \lambda^{\alpha-1} e^{-s\lambda^\alpha} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \{ \lambda^{-\alpha-1} \} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha. \quad (5.47)$$

Für einen Prozess $X(s)$, der als mittleres Abstandsqadrat $\langle x(s)^2 \rangle \sim s$ hat, folgt aus diesem Ergebnis nach Gl.(5.21) unmittelbar, dass der Prozess $X(s(t))$ die charakteristische Eigenschaft $\langle x(t)^2 \rangle \sim t^\alpha$ hat, mit $0 < \alpha < 1$ nach Voraussetzung. Damit ist explizit gezeigt, dass der hier betrachtete gekoppelte Prozess $X(s(t))$ subdiffusives Verhalten zeigt.

Zusätzlich kann eine rekursive Formel für die Momente n-ter Ordnung angegeben werden. Wenn man $\tilde{h}(s, \lambda)$ aus (5.39) in die allgemeine Formel (5.46) einsetzt und die Integration ausführt, erhält man:

$$\langle s(t)^n \rangle = \mathcal{L}^{-1} \{ \lambda^{\alpha-1} n! \lambda^{-(n+1)\alpha} \} = n! \mathcal{L}^{-1} \{ \lambda^{-(n-1)\alpha} \lambda^{-\alpha-1} \} \quad . \quad (5.48)$$

Nach einer Laplace-Rücktransformation und Vergleich mit Gl.(5.47) erhält man die folgende Gleichung:

$$\langle s(t)^n \rangle = n! {}_0D_t^{-(n-1)\alpha} \langle s(t) \rangle \quad . \quad (5.49)$$

Aus einem bekannten Moment können also die Momente beliebiger höherer Ordnung durch fraktionale Integration berechnet werden.

5.3.2 Die mehrzeitigen Verteilungen

Mit Hilfe der grundlegenden Gleichungen (5.25) und (5.35) kann ein Ausdruck für die Laplace-Transformierte $\tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) := \mathcal{L}\{h(s_2, t_2; s_1, t_1)\}$ in Analogie zum einzeitigen Fall hergeleitet werden. Gl.(5.25) lautet im Laplace-Raum:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \left\langle \frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t(s_2)} \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t(s_1)} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Hier tritt wieder die mehrzeitige charakteristische Funktion des stabilen Lévy-Prozesses auf. Die Ableitungen von $Z(\lambda_2, s_2; \lambda_1, s_1)$ nach s_1 und s_2 können

mit Gl.(5.35) ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) &= \delta(s_2 - s_1) \frac{\lambda_1^\alpha - (\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha + \lambda_2^\alpha}{\lambda_1 \lambda_2} e^{-s_1(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha} \\
&+ \Theta(s_2 - s_1) \frac{(\lambda_2^\alpha)((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha)}{\lambda_1 \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha s_1} e^{-\lambda_2^\alpha (s_2 - s_1)} \\
&+ \Theta(s_1 - s_2) \frac{(\lambda_1^\alpha)((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_1^\alpha)}{\lambda_1 \lambda_2} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha s_2} e^{-\lambda_1^\alpha (s_1 - s_2)}.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Dieser Ausdruck ist die Laplace-Transformierte der Verbundverteilung $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$. Wie beim Lévy-Prozess tauchen hier die Exponenten $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha$ auf. Zudem ist $\tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1)$ als besonderes Merkmal an der Stelle $s_2 = s_1$ unstetig.

Leider konnte die inverse Laplace-Transformation von Gl.(5.51) nicht in geschlossener Form berechnet werden. Besondere Probleme bereitet hier die Integration über das Produkt zweier Lévy-Verteilungen, die bei der Rücktransformation auftritt. Im Folgenden ist $\tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1)$ dennoch der Ausgangspunkt, um den inversen Prozess $s(t)$ ausführlich zu diskutieren.

Die Struktur der mehrzeitigen Verteilungen

Ausgehend von Gl.(5.25) lässt sich eine allgemeine Form der Verteilungen des inversen Prozesses für beliebige Zeiten angeben. Nach Gl.(5.25) ist die Verteilung h als Ableitung der Verteilungsfunktion des stabilen Lévy-Prozesses nach s_i gegeben. Diese wiederum erhält man durch Integration der Verteilung Gl.(5.35) über t_i . Gl.(5.25) lautet dann im Fall $s_2 > s_1$:

$$\begin{aligned}
h(s_2, t_2; s_1, t_1) &= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \int_0^{t_1} dt'_1 \int_0^{t_2} dt'_2 p(t'_2 - t'_1, s_2 - s_1) p(t'_1, s_1) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s_1} \int_0^{t_1} dt'_1 h(s_2 - s_1, t_2 - t'_1) p(t'_1, s_1) \quad . \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich beliebige mehrzeitige Verteilungen. Beispielsweise ist $h(s_3, t_3; s_2, t_2; s_1, t_1)$ für $s_3 > s_2 > s_1$ gegeben als

$$\begin{aligned}
&h(s_3, t_3; s_2, t_2; s_1, t_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{\partial}{\partial s_2} \int_0^{t_1} dt'_1 \int_0^{t_2} dt'_2 h(s_3 - s_2, t_3 - t'_2) p(t'_2 - t'_1, s_2 - s_1) p(t'_1, s_1).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Ziel ist nun die mehrzeitigen Verteilungen rekursiv bestimmen zu können. Aus den Verteilungen h alleine ist das offensichtlich nicht direkt möglich. Definiert man hingegen die folgende Funktion:

$$H^2(s_2 - s_1, t_2 - t_1; s_1 - s_0, t_1 - t_0) = -\frac{\partial}{\partial s_1} \int_0^{t_1} dt'_1 h(s_2 - s_1, t_2 - t'_1) p(t'_1 - t_0, s_1 - s_0), \tag{5.54}$$

so lässt sich mit ihrer Hilfe die dreizeitige Verteilung Gl.(5.53) alternativ ausdrücken:

$$h(s_3, t_3; s_2, t_2; s_1, t_1) = -\frac{\partial}{\partial s_1} \int_0^{t_1} dt'_1 H^2(s_3 - s_2, t_3 - t_2; s_2 - s_1, t_2 - t'_1) p(t'_1, s_1). \quad (5.55)$$

Die Funktionen H^N wiederum erfüllen für beliebige Ordnungen die Rekursionsrelation:

$$\begin{aligned} & H^N(s_N - s_{N-1}, t_N - t_{N-1}; \dots; t_1 - t_0, s_1 - s_0) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s_1} \int_0^{t_1} dt'_1 H^{N-1}(s_N - s_{N-1}, t_N - t_{N-1}; \dots; s_2 - s_1, t_2 - t'_1) \\ & \quad p(t'_1 - t_0, s_1 - s_0) \quad . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Damit können die mehrzeitigen Verteilungen des inversen Prozesses allgemein berechnet werden:

$$\begin{aligned} & h(s_N, t_N; \dots; s_1, t_1) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s_1} \int_0^{t_1} dt'_1 H^{N-1}(s_N - s_{N-1}, t_N - t_{N-1}; \dots; s_2 - s_1, t_2 - t'_1) p(t'_1, s_1). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Auch hier führen die Integrale auf keine geschlossene Lösung und daher sind obige Relationen rein formal. Dennoch ist an ihnen die zugrundeliegende mathematische Struktur der statistischen Beschreibung des Prozesses $s(t)$ erkennbar.

Momente des inversen Prozess

Da kein analytisch geschlossener Ausdruck für die mehrzeitige Verteilung h gegeben ist, kann der Prozess $s(t)$ nur über statistische Größen mit reduzierter Information beschrieben werden. Dafür bieten sich gewöhnlich die Momente an. Anhand des einfachen Moments $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle$ wird das allgemeine Vorgehen vorgestellt. Ausgehend davon können beliebige Momente berechnet werden.

Das Moment $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle$ ist folgendermassen definiert:

$$\begin{aligned} \langle s(t_1)s(t_2) \rangle &= \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 s_1 s_2 h(s_2, t_2; s_1, t_1) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 s_1 s_2 \tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) \right\}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

wobei wiederum ausgenutzt wurde, dass inverse Laplace-Transformation und Integration vertauschen. Die Integration über s_1 und s_2 kann mit Gl.(5.50) durchgeführt werden. Als Ergebnis erhält man

$$\int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 s_1 s_2 \tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \left\{ \frac{\lambda_1^{-\alpha-1}}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2^{-\alpha-1}}{\lambda_1} \right\}. \quad (5.59)$$

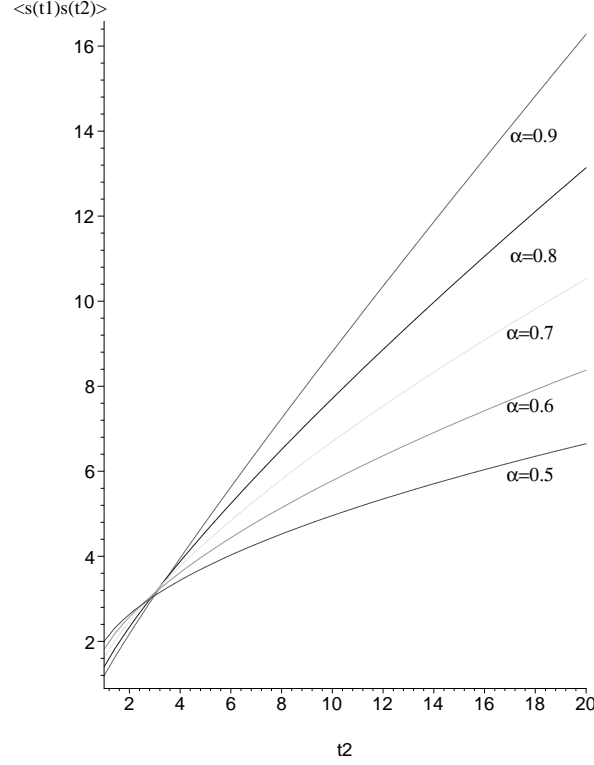


Abbildung 5.4: Das Moment $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle$ für $t_2 > t_1 = \text{const.}$ und verschiedene Werte von α .

Die inverse Laplace Transformation führt jetzt auf eine analytische Lösung für $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle$ (siehe Anhang):

$$\begin{aligned}
 & \langle s(t_1)s(t_2) \rangle \\
 &= \Theta(t_2 - t_1) \left\{ \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t_1^{2\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \frac{1}{\alpha} t_1^\alpha t_2^\alpha F\left(\alpha, -\alpha; \alpha + 1; \frac{t_1}{t_2}\right) \right\} \\
 &+ \Theta(t_1 - t_2) \left\{ \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} t_2^{2\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \frac{1}{\alpha} t_1^\alpha t_2^\alpha F\left(\alpha, -\alpha; \alpha + 1; \frac{t_2}{t_1}\right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Hier bezeichnet $F(a, b; c; z)$ die Hypergeometrische Funktion (siehe Kap.15 in [Abra]), die im Wesentlichen als eine Reihendarstellung des betreffenden Integrals anzusehen ist. Abb. 5.4 zeigt das zweite Moment für verschiedene Werte von α .

Man sieht, dass im Limes $t_2 \rightarrow t_1$ gilt: $\langle s(t_1)s(t_2) \rangle = \frac{2}{\Gamma(2\alpha+1)} t_1^{2\alpha}$. Dieser Grenzfall ist konsistent mit dem einzeitigen Moment zweiter Ordnung $\langle s(t)^2 \rangle$.

Die Berechnung der Momente höherer Ordnung kann nun entsprechend durchgeführt werden. Zusätzlich lässt sich mit Hilfe eines neu eingeführten Operators eine Rekursionsformel für beliebige Momente von $h(\{s_i, t_i\})$ angeben. Eine Erweiterung des fraktionalen Riemann-Liouville-Integraloperators Gl.(5.44) auf mehrere Zeiten wird im Laplace-Raum folgendermassen definiert:

$$\mathcal{L} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) \right\} = (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Eine explizite Darstellung dieses Operators ist durch folgendes Integral gegeben (siehe Anhang):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\min(t_1, t_2)} dt' t'^{\alpha-1} F(t_1 - t', t_2 - t') \quad . \quad (5.61)$$

Mit dieser Definition des Integraloperators kann die inverse Laplacetransformation des zweiten Moments Gl.(5.59) auch alternativ formuliert werden:

$$\langle s(t_1)s(t_2) \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \{ \langle s(t_1) \rangle + \langle s(t_2) \rangle \} \quad , \quad (5.62)$$

was nach der Berechnung über obige Integraldarstellung und Fallunterscheidung $t_2 > t_1$ bzw. $t_1 > t_2$ dasselbe Ergebnis wie Gl.(5.60) liefert. Der Vorteil des neu eingeführten Operators wird bei Momenten höherer Ordnung deutlich. Berechnet man beispielsweise das dritte Moment auf entsprechende Weise im Laplace-Raum, so kann der Ausdruck nicht geschlossen rücktransformiert werden. Dennoch ergibt sich in physikalischer Zeit mit Hilfe des Integraloperators ein expliziter Ausdruck :

$$\begin{aligned} & \langle s(t_1)s(t_2)s(t_3) \rangle \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_3} \right)^{-\alpha} \{ \langle s(t_1)s(t_2) \rangle + \langle s(t_1)s(t_3) \rangle \\ & \quad + \langle s(t_2)s(t_3) \rangle \} \quad . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Das dritte Moment ergibt sich somit durch fraktionale Integration über die Summe aller Permutationen der Momente zweiter Ordnung. Die Erweiterung auf beliebige Ordnungen ist nun offensichtlich. Im allgemeinen Fall berechnet man die Momente n -ter Ordnung durch fraktionale Integration über die Summe aller Permutationen der Momente $(n-1)$ -ter Ordnung.

Schliesslich können noch Gesetzmässigkeiten abgeleitet werden, wie aus Momenten höherer Ordnung die Momente niedrigerer Ordnung berechnet werden können — die sogenannten „fusion rules“. Wieder ausgehend vom zweiten Moment sieht man, dass Gl.(5.62) für $t_2 > t_1$ äquivalent zu folgender Gleichung ist

$$\langle s(t_2)s(t_1) \rangle = [{}_0D_{t_1}^{-\alpha} \{ \langle s(t_2 - \tilde{t}_1 + t_1) \rangle + \langle s(t_1) \rangle \}]_{\tilde{t}_1=t_1} \quad . \quad (5.64)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \langle s(t_2)s(t_1) \rangle &= \langle s(t_1)^2 \rangle = 2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} \langle s(t_1 - t') \rangle \\ &= {}_0D_{t_1}^{-\alpha} \langle s(t_1) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.65)$$

Um eine allgemeine Formel zu erhalten, muss noch das dritte Moment Gl.(5.63) betrachtet werden. Die Darstellung des fraktionalen Integraloperators ist hier

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_3} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2, t_3) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\min(t_1, t_2, t_3)} dt' t'^{\alpha-1} F(t_1 - t', t_2 - t', t_3 - t') \quad . \quad (5.66) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} & \lim_{t_3 \rightarrow t_1+0} \langle s(t_3)s(t_2)s(t_1) \rangle \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} \{ \langle s(t_1 - t')s(t_1 - t') \rangle + 2 \langle s(t_2 - t')s(t_1 - t') \rangle \} \\ &= {}_0D_{t_1}^{-\alpha} \{ \langle s(t_1)s(t_1) \rangle + 2 \langle s(t_2 - \tilde{t}_1 + t_1)s(t_1) \rangle \}_{\tilde{t}_1=t_1} \quad , \quad (5.67) \end{aligned}$$

und für $t_2 \rightarrow t_1$ folgt

$$\langle s(t_1)^3 \rangle = {}_3D_{t_1}^{-\alpha} \langle s(t_1)^2 \rangle = 6D_{t_1}^{-\alpha} D_{t_1}^{-\alpha} \langle s(t_1) \rangle = 6{}_0D_{t_1}^{-2\alpha} \langle s(t_1) \rangle . \quad (5.68)$$

Für die einzeitigen Momente gilt damit:

$$\langle s(t)^n \rangle = n! {}_0D_t^{-(n-1)\alpha} \langle s(t) \rangle .$$

Diese Beziehung wurde bereits aus der einzeitigen Verteilung hergeleitet (siehe Gl.(5.49)).

Die Momente des inversen Prozesses $s(t)$ sind mit Gl.(5.50) vollständig festgelegt. In analoger Weise werden auch die Momente des gekoppelten Prozesses bestimmt, wie am Ende des Abschnitts 5.4 behandelt wird. Die Rekursionsformeln für die Momente höherer Ordnung können alternativ aus einer Entwicklungsgleichung für die Verbundverteilung h hergeleitet werden.

Eine fraktionale Entwicklungsgleichung

Analog zum Vorgehen bei der einzeitigen Verteilung $h(s, t)$ soll nun eine Entwicklungsgleichung für die mehrzeitige Verteilung $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ hergeleitet werden. Mit Gl.(5.51) gilt im Laplace-Raum:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} \right) \tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) = -(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha \tilde{h}(s_2, \lambda_2; s_1, \lambda_1) \quad (5.69)$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(0, \lambda_2; 0, \lambda_1) &= \frac{\lambda_1^\alpha - (\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha + \lambda_2^\alpha}{\lambda_1 \lambda_2} \quad , \\ \tilde{h}(s_2, \lambda_2; 0, \lambda_1) &= \frac{(\lambda_2^\alpha)((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha)}{\lambda_1 \lambda_2} e^{-\lambda_2^\alpha s_2} \quad , \\ \tilde{h}(0, \lambda_2; s_1, \lambda_1) &= \frac{(\lambda_1^\alpha)((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_1^\alpha)}{\lambda_1 \lambda_2} e^{-\lambda_1^\alpha s_1} \quad . \quad (5.70) \end{aligned}$$

Gleichung (5.69) kann direkt überprüft werden, wenn man umgekehrt versucht, aus ihr die Lösung \tilde{h} zu berechnen. Ein übliches Verfahren, um partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen, ist die Methode der Charakteristiken. Dieser Ansatz führt zusammen mit den Anfangsbedingungen (5.70) gerade auf die richtige Lösung Gl.(5.51). Die Verteilung $h(s_2, t; s_1, t_1)$ ist im Laplace-Raum also vollständig durch (5.69) festgelegt.

Auch im mehrzeitigen Fall führt die inverse Laplace-Transformation auf ein fraktionales Integral:

$$h(s_2, t_2; s_1, t_1) = - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} \right) h(s_2, t_2; s_1, t_1). \quad (5.71)$$

Durch die Rücktransformation tritt hier wieder der im letzten Unterabschnitt eingeführte fraktionale Integraloperator für mehrere Zeiten auf, der offensichtlich mit den charakteristischen Eigenschaften der mehrzeitigen Statistiken des Prozesses $s(t)$ verknüpft ist.

Die Erweiterung von Gl.(5.71) auf N Zeiten ergibt sich in analoger Weise:

$$h(\{s_i, t_i\}) = - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{-\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s_i} \right) h(\{s_i, t_i\}) \quad . \quad (5.72)$$

Aus dieser Gleichung können ebenfalls die Momente $\langle s(t_N) \dots s(t_1) \rangle$ berechnet werden. Multiplikation mit dem Produkt $s_N \cdot \dots \cdot s_1$ und N -fache Integration auf beiden Seiten von (5.72) ergibt den folgenden Zusammenhang zwischen den Momenten $\langle s(t_N) \dots s(t_1) \rangle$:

$$\langle s(t_N) \dots s(t_1) \rangle = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{-\alpha} \{ \langle s(t_{N-1}) \dots s(t_1) \rangle + \text{Permut} \}. \quad (5.73)$$

Dieser Ausdruck ist äquivalent zu den oben hergeleiteten Gleichungen (5.54) und (5.53).

Die Entwicklungsgleichung für $h(\{s_i, t_i\})$ wird aus Gl.(5.72) durch Summation der Ableitungen nach t_i gebildet. In Analogie zum Riemann-Liouville-Differentialoperator definiert man hier: $\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{1-\alpha} f(\{t_i\}) := \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{-\alpha} f(\{t_i\})$. Daraus folgt entsprechend zu Gl.(5.45):

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right) h(\{s_i, t_i\}) = - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s_i} \right) h(\{s_i, t_i\}). \quad (5.74)$$

Hier ist nochmals zu betonen, dass diese einzelne fraktionale Differentialgleichung zusammen mit den geeigneten Anfangsbedingungen die mehrzeitigen Verteilungen explizit festlegt. Die Nichtmarkoveigenschaften des Prozesses $s(t)$ kommen auch im mehrzeitigen Fall durch den fraktionalen Integraloperator zum Ausdruck.

5.4 Fraktionale Fokker-Planck-Gleichungen

Die Verbundverteilung $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$ des Prozesses $X(s(t))$ wird durch die gekoppelten Langevin-Gleichungen (5.7) und (5.8) bestimmt und ist durch die Integraltransformation Gl.(5.21) gegeben. Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass der Integralkern $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ einer fraktionalen Differentialgleichung Gl.(5.71) genügt, wohingegen die Verteilung $f_1(x_2, s_2; x_1, s_1)$ des Markovprozesses (5.7) auf bekannte Weise berechnet werden kann. Der subdiffusive Nichtmarkovprozess $X(s(t))$ kann folglich als Markovprozess in der Eigenzeit s betrachtet werden, der über die „inverse Lévy-Transformation“ [Ba01] Gl.(5.21) in die physikalische Zeit t transformiert wird.

Für die einzeitige Verteilung $f(x, t)$ wurden bereits fraktionale Fokker-Planck-Gleichungen hergeleitet [Fo94], die aus der Theorie der CTRWs wohlbekannt sind [Co96], [MBK99], [YCST99]. Ziel dieses Abschnitts ist es, auch für die Verbundverteilung $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$ eine vergleichbare fraktionale Entwicklungsgleichung zu formulieren.

5.4.1 Die einzeitige fraktionale Fokker-Planck-Gleichung

Zunächst soll eine alternative Herleitung der bekannten einzeitigen fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung auf Grundlage des Modells von Fogedby vorgestellt werden. Hierzu geht man von dem Lösungsansatz Gl.(5.21) aus, der für $N = 1$ lautet:

$$f(x, t) = \int_0^\infty h(s, t) f_1(x, s) ds \quad . \quad (5.75)$$

Dabei ist einerseits $h(s, t)$ durch das fraktionale Integral Gl.(5.43) festgelegt:

$$h(s, t) = -{}_0D_t^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} h(s, t) \quad ,$$

und andererseits erfüllt $f_1(x, s)$ die gewöhnliche Fokker-Planck-Gleichung (5.17):

$$\frac{\partial}{\partial s} f_1(x, s) = L_{FP}(x) f_1(x, s) \quad .$$

Aus diesen drei Gleichungen kann nun wie folgt die fraktionale Fokker-Planck-Gleichung hergeleitet werden: Man setzt in Gl.(5.75) den Ausdruck (5.43) für $h(s, t)$ ein und führt auf der rechten Seite eine partielle Integration über s durch:

$$\begin{aligned} f(x, t) = & \quad {}_0D_t^{-\alpha} \int_0^\infty ds h(s, t) \frac{\partial}{\partial s} f_1(x, s) \\ & - {}_0D_t^{-\alpha} [h(\infty, t) f_1(x, \infty) - h(0, t) f_1(x, 0)] \quad . \end{aligned} \quad (5.76)$$

Berücksichtigt man zusätzlich die Randbedingungen

$$\begin{aligned} h(s \rightarrow \infty, t) &= 0 \quad , \\ {}_0D_t^{-\alpha} h(0, t) &= 1 \quad , \end{aligned} \quad (5.77)$$

so erhält man nach Substitution von Gl.(5.17) das fraktionale Integral

$$f(x, t) = {}_0D_t^{-\alpha} L_{FP} f(x, t) + f(x, 0) \quad , \quad (5.78)$$

wobei die Anfangsbedingung gewöhnlich $f_1(x, 0) = \delta(x)$ gesetzt wird. Schliesslich ergibt partielle Ableitung nach t die bekannte fraktionale Fokker-Planck-Gleichung (FFPG) für die Verteilung $f(x, t)$ des CTRWs:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} L_{FP} f(x, t) \quad . \quad (5.79)$$

Zur Lösung der FFPG ist es erforderlich, die zusätzliche Randbedingung ${}_0D_t^{-\alpha} f(x, t)|_{t=0}$ anzugeben. Mit Gl.(5.75) lässt sich direkt zeigen, dass dieser Term = 0 ist und somit die beiden Gleichungen (5.78) und (5.79) äquivalent sind:

$$\left[\int_0^\infty ds {}_0D_t^{-\alpha} h(s, t) f(x, s) \right]_{t=0} = \left[\int_0^\infty ds P(t, s) f(x, s) \right]_{t=0} = 0 \quad . \quad (5.80)$$

$P(t, s)$ ist die Verteilungsfunktion $< \Theta(t - t(s)) >$ des stabilen Lévy-Prozesses. Gl.(5.79) geht für $\alpha \rightarrow 1$ in die gewöhnliche Fokker-Planck-Gleichung über, da der fraktionale Riemann-Liouville Differentialoperator die Eigenschaft ${}_0D_t^0 F(t) = F(t)$ besitzt. Dies ist auch zu erwarten, da für diesen Grenzfall die charakteristische Wartezeit nicht mehr divergiert und der CTRW zum normalen Diffusionsprozess wird.

Gleichung (5.79) wurde in einer Reihe von Veröffentlichungen eingehend behandelt [MBK99],[MK00], in denen die Herleitung der FFPG auf einer verallgemeinerten Master-Gleichung beruht. In [Ba01] konnte Barkai die Lösung von Gl.(5.79) in der Form (5.75) mit dem Integralkern $h(s, t)$ (5.40) angeben. Die hier vorgestellten Ergebnisse zeigen also im einzeitigen Fall eine hervorragende Übereinstimmung mit bekannten Resultaten. Darüberhinaus ermöglichen die gekoppelten Langevin-Gleichungen eine direkte Erweiterung auf mehrere Zeiten.

Betrachtet man für den Prozess $X(s)$ die Diffusion ohne Kraftfeld, d.h. $F(X) = 0$, so reduziert sich L_{FP} auf $L_{FP} = L(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und die FFPG entspricht der fraktionalen Diffusionsgleichung, die von Schneider und Wyss [SW89] gelöst wurde (siehe Abb. 5.4.1). Die Betrachtung der mehrzeitigen Verteilungen im nächsten Unterabschnitt beschränkt sich auf diesen fraktionalen Diffusionsprozess.

5.4.2 Die Verteilungen für mehrere Zeiten

Das obige Vorgehen im Fall der einzeitigen Verteilung lässt sich in analoger Weise auf mehrere Zeiten übertragen. Ausgangspunkt ist wie zuvor Gl.(5.21):

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \int_0^\infty ds_1 \int_0^\infty ds_2 h(s_2, t_2; s_1, t_1) f_1(x_2, s_2; x_1, s_1) \quad .$$

Für $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ wurde ein fraktionales Integral in Gl.(5.71) angegeben. Es ist daher noch notwendig eine einzelne Entwicklungsgleichung entsprechend

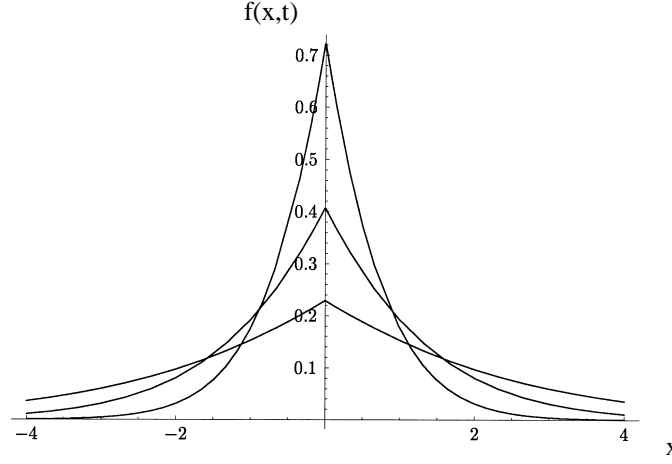


Abbildung 5.5: Lösung der fraktionalen Diffusionsgleichung. Die ausgeprägte Spitze ist charakteristisch für Lösungen fraktionaler Entwicklungsgleichungen. Entnommen aus [MK00].

Gl.(5.17) für die Verteilung $f_1(x_2, s_2; x_1, s_1)$ anzugeben. Für Markovprozesse hat eine solche Gleichung gewöhnlicherweise keine Bedeutung, da die Übergangswahrscheinlichkeit $P(x_N, s_N | x_{N-1}, s_{N-1})$ bereits die vollständige Information über den stochastischen Prozess enthält. Für die hier betrachteten Nichtmarkovprozesse hingegen müssen solche Gleichungen spezifiziert werden. Deshalb ist es notwendig, eine solche Entwicklungsgleichung zunächst für die Verbundverteilung des Prozesses $X(s)$ herzuleiten. Zur Vereinfachung beziehen sich die folgenden Rechnungen nur auf den fraktionalen Diffusionsprozess.

Die charakteristische Funktion des Markovprozesses $X(s)$ ist definiert als die Fourier-Transformation $\mathcal{F}\{x_i \rightarrow k_i\}$ von $f(x_2, s_2; x_1, s_1)$:

$$K(k_2, s_2; k_1, s_1) := \mathcal{F}\{f(x_2, s_2; x_1, s_1)\} = \langle e^{ik_2 X(s_2)} e^{ik_1 X(s_1)} \rangle \quad (5.81)$$

Nun kann analog zur Herleitung der Verbundverteilung des Lévyprozesses $t(s)$ in Abschnitt 5.2 vorgegangen werden. Nach einer Unterscheidung zwischen $s_2 < s_1$ und $s_2 > s_1$ können die Integrale umgeordnet werden. Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der Inkremente faktorisiert der Erwartungswert und kann entsprechend der gewöhnlichen Langevinkraft $\eta(s)$ durch zwei Gaußfunktionen ausgedrückt werden. Das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} K(k_2, s_2; k_1, s_1) = & \Theta(s_2 - s_1) e^{-s_1(k_1+k_2)^2} e^{-(s_2-s_1)k_2^2} \\ & + \Theta(s_1 - s_2) e^{-s_2(k_1+k_2)^2} e^{-(s_1-s_2)k_1^2} \quad . \quad (5.82) \end{aligned}$$

Hieran ist ersichtlich, dass Gaußverteilungen gerade Lévyverteilungen mit $\alpha = 2$ sind.

Damit genügt die charakteristische Funktion der Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} \right) K(k_2, s_2; k_1, s_1) = -(k_1 + k_2)^2 K(k_2, s_2; k_1, s_1) \quad . \quad (5.83)$$

Die inverse Fourier-Transformation führt schliesslich auf folgende mehrzeitige Diffusionsgleichung für die Verbundverteilung $f(x_2, s_2; x_1, s_1)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} \right) f(x_2, s_2; x_1, s_1) = L(x_2, x_1) f(x_2, s_2; x_1, s_1) \quad , \quad (5.84)$$

mit dem verallgemeinerten Diffusionsoperator

$L(x_2, x_1) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)$. Die Anfangsbedingungen dieser Gleichung sind aus Gl.(5.82) ersichtlich:

$$\begin{aligned} f_1(x_2, s_2; x_1, 0) &= f_1(x_2, s_2) \delta(x_1) \quad , \\ f_1(x_2, 0; x_1, s_1) &= f_1(x_1, s_1) \delta(x_2) \quad , \\ f_1(x_2, 0; x_1, 0) &= \delta(x_2) \delta(x_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.85)$$

Die Verbundverteilung des fraktionalen Diffusionsprozesses

Analog zum einzeitigen Fall kann nun die Verbundverteilung des CTRWs hergeleitet werden: In Gl.(5.21) wird für $h(s_2, t_2; s_1, t_1)$ Gl.(5.71) eingesetzt und auf der rechten Seite über s_1 und s_2 partiell integriert. Mit Gl.(5.84) ergibt sich dann für $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$ ein mehrzeitiges fraktionales Integral analog zu Gl.(5.78):

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} L(x_2, x_1) f(x_2, t_2; x_1, t_1) + b.c. \quad (5.86)$$

Die Randbedingungen *b.c.* resultieren aus den Randwerten der partiellen Integrationen und bestehen aus zwei Anteilen $b.c. = g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) + g_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$, die mit den Annahmen $h(s_2 \rightarrow \infty, t_2; s_1, t_1) = h(s_2, t_2; s_1 \rightarrow \infty, t_1) = 0$ zunächst folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) &:= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \int_0^\infty ds_2 h(s_2, t_2; 0, t_1) f_1(x_2, s_2) \delta(x_1) \quad , \\ g_2(x_1, x_2, t_1, t_2) &:= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \int_0^\infty ds_1 h(0, t_2; s_1, t_1) f_1(x_1, s_1) \delta(x_2) \quad . \end{aligned} \quad (5.87)$$

Eine Interpretation dieser Ausdrücke ist so nur schwer möglich und wird erst nach mehreren Umformungen zugänglich. Im Weiteren genügt es, nur einen der beiden Terme, z.B. $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$, zu betrachten. Das entsprechende Ergebniss für $g_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ erhält man durch einfaches Vertauschen der Indizes 1 und 2.

Die Berechnung von $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ wird zweckmässigerweise im Laplace-Raum durchgeführt, wo direkt die Transformierte von $h(s_2, t_2; s_1, 0)$ Gl.(5.70) eingesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\} &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} ((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha) \frac{1}{\lambda_1} \int_0^\infty ds_2 \lambda_2^{\alpha-1} e^{-s_2 \lambda_2^\alpha} f_1(x_2, s_2) \delta(x_1) \\ &= (1 - (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \lambda_2^\alpha) \frac{1}{\lambda_1} f(x_2, \lambda_2) \delta(x_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.88)$$

Für die Verteilung $f(x_2, \lambda_2)$ kann die Laplace-Transformierte des fraktionalen Integrals Gl.(5.78) substituiert werden, d.h. $f(x_2, \lambda_2) = \lambda_2^{-\alpha} L(x_2) f(x_2, \lambda_2) + \delta(x_2)/\lambda_2$. Damit erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)\} = & (\lambda_2^{-\alpha} - (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha}) \frac{1}{\lambda_1} L(x_2) f(x_2, \lambda_2) \\ & + \left(\frac{1}{\lambda_2} - (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \lambda_2^{\alpha-1} \right) \frac{1}{\lambda_1} \delta(x_2) \delta(x_1). \end{aligned} \quad (5.89)$$

Führt man davon die Rücktransformation durch, so lassen sich die fraktionalen Integrale explizit berechnen (siehe Anhang). Das Ergebnis für die Randbedingung $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ ist schliesslich:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) = \Theta(t_2 - t_1) \{ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2) \int_{t_1}^{t_2} dt' t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t') \delta(x_1) \\ & + (1 - \Phi(t_2, t_1)) \delta(x_2) \delta(x_1) \} \quad . \end{aligned} \quad (5.90)$$

Hier ist die Funktion $\Phi(t_2, t_1)$ definiert als:

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} h(0, t_2 - t') \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} (t_2 - t')^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^\alpha F\left(\alpha, -\alpha; \alpha + 1; \frac{t_1}{t_2}\right) \quad . \end{aligned} \quad (5.91)$$

Der Term $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ liefert also nur einen Beitrag für $t_2 > t_1$, entsprechend $g_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ nur für $t_1 > t_2$. Dieselbe Fallunterscheidung kann auch bei Gl.(5.86) durchgeführt werden. Man erhält daraus den kompletten Ausdruck für die Verteilung $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$ aus zwei Anteilen:

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \Theta(t_2 - t_1) f^>(x_2, t_2; x_1, t_1) + \Theta(t_1 - t_2) f^<(x_1, t_1; x_2, t_2) \quad , \quad (5.92)$$

wobei

$$\begin{aligned} f^>(x_2, t_2; x_1, t_1) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2, x_1) \int_0^{t_1} t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t'; x_1, t_1 - t') \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2) \int_{t_1}^{t_2} t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t') \delta(x_1) \\ & + (1 - \Phi(t_2, t_1)) \delta(x_2) \delta(x_1) \quad , \end{aligned} \quad (5.93)$$

und $f^<(x_1, t_1; x_2, t_2)$ einfach durch Vertauschung von t_2 und t_1 bzw. x_2 und x_1 in identischer Form aus $f^>(x_2, t_2; x_1, t_1)$ hervorgeht.

Die Terme in Gl.(5.93) können im Sinne einer zeitlichen Propagation des Prozesses ausgehend von den Anfangsverteilungen $\delta(x_2)$ und $\delta(x_1)$ interpretiert werden. Die Aufteilung der beiden Integrale über t macht deutlich, dass sich die Entwicklung nur in einer physikalischen Zeit abspielt, wobei einmal in Bezug auf x_2 und x_1 Sprünge stattfinden (oberster Term) und andererseits nur bezüglich

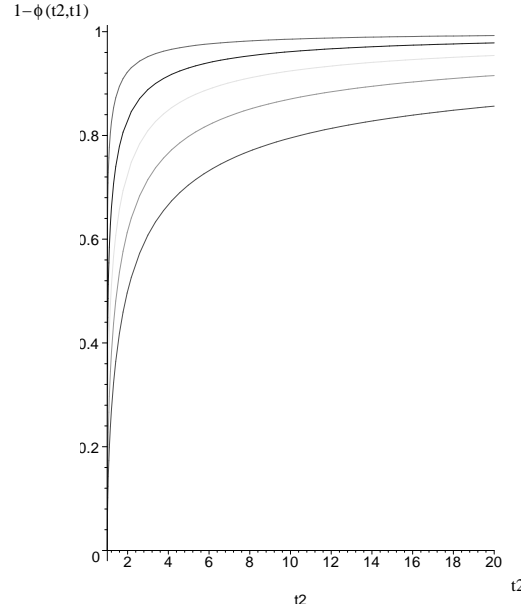


Abbildung 5.6: Die Funktion $1 - \phi(t_2, t_1)$ für $t_2 > t_1 = \text{konst.}$ und $\alpha = 0,5$ bis $0,9$ (von unten nach oben).

x_2 (zweiter Term von oben) Die Bedeutung des Terms $(1 - \Phi(t_2, t_1))\delta(x_2)\delta(x_1)$ ist dabei unklar. In Abb. 5.6 ist der zeitliche Verlauf ersichtlich: Für $t_2 \gg t_1$ ist der Randwert $\delta(x_2)\delta(x_1)$, im Bereich $t_2 \approx t_1$ wird der Faktor vor $\delta(x_2)\delta(x_1)$ kleiner 1. Im Grenzfall $t_2 \rightarrow t_1$ verschwindet der Term völlig.

Ein Versuch, die drei Terme in Gl.(5.93) im Zusammenhang mit einer Wahrscheinlichkeitsbilanzgleichung zu deuten wird in Abschnitt 5.5 unternommen.

Aus Gl.(5.93) lassen sich zusätzlich die Grenfälle der mehrzeitigen Verteilung bestimmen. Für $t_1 = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 f(x_2, t_2; x_1, 0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2) \int_0^{t_2} dt' t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t') \delta(x_1) + \delta(x_2)\delta(x_1) \\
 &= {}_0D_{t_2}^{-\alpha} L(x_2) f(x_2, t_2) \delta(x_1) + \delta(x_2)\delta(x_1) \\
 &= f(x_2, t_2) \delta(x_1) \quad .
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

Im letzten Schritt wurde wieder Gl.(5.78) eingesetzt. Wird dazu $t_2 = 0$ gesetzt, so ergibt sich:

$$f(x_2, 0; x_1, 0) = \delta(x_2)\delta(x_1) \quad . \tag{5.95}$$

Beide Ergebnisse können ebenfalls aus Gl.(5.21) unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.85) hergeleitet werden.

Die mehrzeitige fraktionale Diffusionsgleichung

Wie bei der Herleitung der fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung für die einzeitige Verteilung kann nun aus dem fraktionalen Integral Gl.(5.86) bzw. Gl.(5.93)

die mehrzeitige fraktionale Diffusionsgleichung hergeleitet werden. Summation der partiellen Ableitungen nach t_i ergibt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) f(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{1-\alpha} L(x_2, x_1) f(x_2, t_2; x_1, t_1) + b.c. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Diese Gleichung ist die fraktionale Diffusionsgleichung für eine zweizeitige Verbundverteilung.

Die Randbedingungen $b.c.$ bestehen hier aus den Termen:

$$b.c. = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \{g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) + g_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\} \quad (5.97)$$

Mit Gl.(5.90) sieht man, dass für $t_2 > t_1$ nur ein Beitrag von $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ stehenbleibt:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \\ &= \Theta(t_2 - t_1) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \int_{t_1}^{t_2} t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t') \delta(x_1) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \Phi(t_2, t_1) \delta(x_2) \delta(x_1) \right\} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Entsprechend für $t_1 > t_2$ nur von $g_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

Zur Lösung von Gl.(5.96) müssen noch Anfangsbedingungen spezifiziert werden. Wie im letzten Unterabschnitt behandelt wurde, entsprechen diese in ihrer Form den Anfangsbedingungen der gewöhnlichen Diffusionsgleichung für mehrere Zeiten Gl.(5.85):

$$\begin{aligned} f(x_2, t_2; x_1, 0) &= f(x_2, t_2) \delta(x_1) \quad , \\ f(x_2, 0; x_1, t_1) &= f(x_1, t_1) \delta(x_2) \quad , \\ f(x_2, 0; x_1, 0) &= \delta(x_2) \delta(x_1) \quad . \end{aligned} \quad (5.99)$$

Mit diesen Termen können die Randbedingungen $b.c.$ anhand Gl.(5.98) explizit angegeben werden und erscheinen in der fraktionalen Diffusionsgleichung (5.96) nur als Inhomogenitäten.

Im N-zeitigen Fall lautet die fraktionale Diffusionsgleichung:

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right) f(\{x_i, t_i\}) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(\{x_i, t_i\}) + b.c. \quad (5.100)$$

Sie hat die Lösung:

$$f(\{x_i, t_i\}) = \int_0^\infty ds_1 \cdots \int_0^\infty ds_N h(\{s_i, t_i\}) f_1(\{x_i, s_i\}) \quad (5.101)$$

Als Ergebnis haben wir hier also eine geschlossene Entwicklungsgleichung für mehrzeitige Verbundverteilungen des CTRWs ableiten können. Gleichung (5.100) ist die Erweiterung der bekannten einzeitigen fraktionalen Diffusionsgleichung auf Verbundverteilungen.

Die fraktionalen Differentialoperatoren tauchen hier aufgrund der Eigenschaften des Kerns h auf. Wie im einzeitigen Fall ist daran der Nichtmarkovcharakter von $X(s(t))$ ersichtlich.

5.4.3 Momente des fraktionalen Diffusionsprozesses

In Abschnitt 5.3.2 wurden die Momente des Prozesses $s(t)$ explizit berechnet. Betrachtet man nun den gekoppelten Prozess $X(s(t))$, wobei $X(s)$ als einfacher Diffusionsprozess gegeben ist, so kann man auch hier mit Hilfe von Gl.(5.21) die Momente angeben. Das zweite Moment lautet:

$$\langle x(t_2)x(t_1) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty ds_1 ds_2 h(s_2, t_2; s_1, t_1) \langle x(s_2)x(s_1) \rangle \quad . \quad (5.102)$$

Sind die Momente $\langle x(s_2)x(s_1) \rangle$ des entsprechenden Markovprozesses bekannt, so können die Integrationen mit Hilfe der Laplace-Transformierten \tilde{h} ausgeführt und schliesslich das Ergebnis rücktransformiert werden (siehe Abschnitt 5.3).

Die Momente von $X(s)$ sind im betrachteten Fall Polynome in s :

$$\langle x(s_2)x(s_1) \rangle = \Theta(s_2 - s_1)s_1 + \Theta(s_1 - s_2)s_2 \quad . \quad (5.103)$$

Damit ergibt sich für Gl.(5.102) im Laplace-Raum

$$\mathcal{L}\{\langle x(t_2)x(t_1) \rangle\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha}{\lambda_1 \lambda_2} \int_0^\infty ds s e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha s} = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha \lambda_1 \lambda_2} \quad . \quad (5.104)$$

Die inverse Laplace-Transformation führt dann auf die Momente des CTRWs:

$$\begin{aligned} \langle x(t_2)x(t_1) \rangle &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \{ \Theta(t_2 - t_1)t_1^\alpha + \Theta(t_1 - t_2)t_2^\alpha \} \\ &= \Theta(t_2 - t_1) \langle s(t_1) \rangle + \Theta(t_1 - t_2) \langle s(t_2) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.105)$$

Mit denselben Schritten können alle weiteren Momente berechnet werden. Für $\langle x(t_2)^2 x(t_1)^2 \rangle$ beispielsweise ergibt sich zunächst folgender Ausdruck:

$$\langle x(s_2)^2 x(s_1)^2 \rangle = s_2 s_1 + 2\Theta(s_2 - s_1)s_1^2 + 2\Theta(s_1 - s_2)s_2^2 \quad , \quad (5.106)$$

und daraus

$$\begin{aligned} \langle x(t_2)^2 x(t_1)^2 \rangle &= \langle s(t_2)s(t_1) \rangle + 2\Theta(t_2 - t_1) \langle s(t_1)^2 \rangle \\ &\quad + 2\Theta(t_1 - t_2) \langle s(t_2)^2 \rangle \quad . \end{aligned} \quad (5.107)$$

Die allgemeine Struktur ist hieran deutlich erkennbar. Die Momente von $X(s(t))$ bekommt man dadurch, dass man die entsprechenden Momente von $X(s)$ über die s_i mittelt. Dabei hat $s_i > s_j$ auch $t_i > t_j$ zur Folge.

Um schliesslich eine allgemeine Formel für $\langle x(t_2)^{2m} x(t_1)^{2n} \rangle$ angeben zu können, benötigt man einen solchen Ausdruck für die Momente des Prozesses $X(s)$. Dieser lautet für $n > m$:

$$\langle x(s_2)^{2m} x(s_1)^{2n} \rangle = A s_2^m s_1^n + B \Theta(s_2 - s_1) s_1^{n-m} s_2^m + B \Theta(s_1 - s_2) s_2^{n-m} s_1^m. \quad (5.108)$$

Die Koeffizienten A, B, C lassen sich über die Anwendung des Wickschen Theorems auf Gaußprozesse bestimmen. Damit erhält man die gesuchten Momente beliebiger (gerader) Ordnungen:

$$\begin{aligned} & \langle x(t_2)^{2m} x(t_1)^{2n} \rangle \\ &= A \langle s(t_2)^m s(t_1)^n \rangle + B \Theta(t_2 - t_1) \langle s(t_1)^{n-m} s(t_2)^m \rangle \\ & \quad + B \Theta(t_1 - t_2) \langle s(t_2)^{n-m} s(t_1)^m \rangle. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Wie die Erwartungswerte $\langle s(t_2)^m s(t_1)^n \rangle$ berechnet werden können wurde bereits in Abschnitt 5.3.2 vorgestellt. Die Momente des CTRWs $X(s(t))$ sind damit für den Spezialfall, dass $X(s)$ ein einfacher Diffusionsprozess ist, vollständig bestimmt.

Für Prozesse $X(s)$ mit anderen Eigenschaften, wie z.B. Diffusion in einem Kraftfeld ist das Vorgehen analog zu dem hier gezeigten. Sind die Momente des Markovprozesses bekannt, können über die Beziehung Gl.(5.102) die entsprechenden Momente des CTRWs stets berechnet werden.

5.5 Eine verallgemeinerte Mastergleichung

In vielen Veröffentlichungen zur fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung und ihrer Verbindung mit den Continuous Time Random Walks [MBK99],[BMK00] wird der CTRW gemeinhin über eine verallgemeinerte Mastergleichung beschrieben. Im Folgenden wird kurz vorgestellt, wie aus dieser alternativen Beschreibung des CTRWs die FFPG (5.79) hergeleitet werden kann.

Mit Hilfe der Sprungverteilung $\psi(x, t)$ kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Teilchen zur Zeit t am Ort X aufhält in Form einer Wahrscheinlichkeitsbilanz angegeben werden:

$$f(x, t) = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x', t') f(x - x', t - t') + \phi(t) \delta(x) \quad (5.110)$$

D.h. $f(x, t)$ ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, sich an einem Punkt (X', t') mit $t' < t$ zu befinden und gerade einen Sprung nach (X, t) auszuführen. Der zweite Term ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen bis zur Zeit t nicht springt, d.h. dass es an seinem Startort $f(x, 0) = \delta(x)$ sitzenbleibt:

$$\phi(t) = 1 - \int_0^t dt' \omega(t') \quad (5.111)$$

Die Sprungverteilung ist hier gegeben als $\psi(x, t) = \omega(t)\pi(x)$ mit den Verteilungen der Sprungweite $\pi(x)$ und der Wartezeit $\omega(t)$ (siehe Abschnitt 5.1). Diese sind für die charakteristischen Eigenschaften des CTRWs verantwortlich. Der

subdiffusive Prozess ergibt sich genau dann, wenn die charakteristische Wartezeit T divergiert und die Varianz der Sprungweite Σ^2 endlich bleibt. Solche Verteilungen können z.B. das folgende asymptotische Verhalten im Laplace- bzw. Fourier-Raum haben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\omega(t)\} &= \tilde{\omega}(\lambda) \sim 1 - \lambda^\alpha + O(\lambda^2) \quad , \\ \mathcal{F}\{\pi(x)\} &= \tilde{\pi}(k) \sim 1 - k^2 + O(k^4) \quad .\end{aligned}\tag{5.112}$$

Wenn man berücksichtigt, dass Gl.(5.110) die Form von Fourier- und Laplace-Faltungsintegralen hat, lässt sich nach den entsprechenden Transformationen direkt die Lösung der Mastergleichung im Fourier-Laplace-Raum angeben:

$$\tilde{f}(k, \lambda) := \mathcal{FL}\{f(x, t)\} = \frac{1 - \tilde{\omega}(\lambda)}{\lambda} \frac{1}{1 - \tilde{\psi}(k, \lambda)} \quad ,\tag{5.113}$$

mit $\tilde{\psi}(k, \lambda) = \tilde{\omega}(\lambda)\tilde{\pi}(k)$.

Setzt man in diesen Ausdruck die spezielle Form der Sprung- und Wartezeitverteilung Gl.(5.112) ein, so erhält man:

$$\tilde{f}(k, u) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{1 - \tilde{\psi}(k, \lambda)} = \frac{1}{(1 + \lambda^{-\alpha}k^2)} \frac{1}{\lambda} \quad .\tag{5.114}$$

Im letzten Schritt wurden im Nenner die Terme dritter Ordnung vernachlässigt. Die Rücktransformation dieser Gleichung führt gerade auf das fraktionale Integral für $f(x, t)$ Gl.(5.78), bzw. nach partieller Ableitung nach t auf die bekannte fraktionale Fokker-Planck-Gleichung. Hier soll angemerkt werden, dass mit der speziellen Wartezeitverteilung $\tilde{\omega}(\lambda) \sim 1 - \lambda^\alpha$ die Funktion $\Phi(t)$ im Laplace-Raum zu $\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \lambda^{\alpha-1}$ wird. Dieser Ausdruck ist gerade die Laplace-Transformierte der Verteilung $h(s, t)$ für $s = 0$, siehe Gl.(5.39). Damit gilt im Limes grosser Zeiten:

$$\phi(t) = h(0, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} \quad .\tag{5.115}$$

Nach der Interpretation von $h(s, t)$ hatten beide Terme bereits dieselbe Bedeutung. In Abb. 5.7 ist $h(0, t)$ zu sehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen lange sitzenbleibt geht gegen Null. Für $t \rightarrow 0$ divergiert $h(0, t)$, während $\Phi(t \rightarrow 0) = 1$ wird (siehe Gl.(5.111)), d.h. die Näherung Gl.(5.112) ist in diesem Fall nicht mehr gültig.

Dies ist soweit bekannte Theorie. Nun soll der umgekehrte Weg gegangen werden. Im letzten Abschnitt wurde ein fraktionales Integral für die mehrzeitige Verteilung $f(x_2, t; x_1, t_1)$ hergeleitet. Eine diesem Ausdruck entsprechende verallgemeinerte Mastergleichung für die Verbundverteilung kann analog zum Vorgehen bei der einzeitigen Verteilung hergeleitet werden. Dadurch wird die Interpretation von G.(5.93) als Wahrscheinlichkeitsbilanz ermöglicht.

Ausgangspunkt ist Gl.(5.86) für $t_2 > t_1$, also

$$f(x_2, t_2; x_1, t_1) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} L(x_2, x_1) f(x_2, t_2; x_1, t_1) + g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) \quad .$$

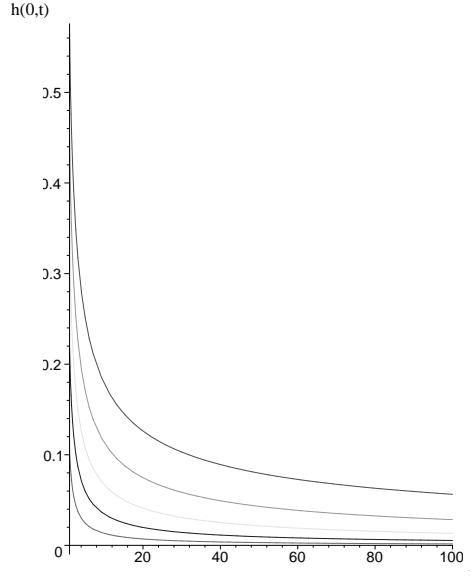


Abbildung 5.7: Die Funktion $h(0, t)$ Gl.(5.115) für α -Werte von 0,5 (oberste Kurve) bis 0,9. $h(0, t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Teilchen bis zur Zeit t an seinem Startort sitzenbleibt.

Mit Hilfe der Laplace-Transformierten von $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ Gl.(5.88) sieht man, dass die Fourier-Laplace-Transformierte dieser Gleichung folgendermassen lautet:

$$\tilde{f}(k_2, \lambda_2; k_1, \lambda_1) = \frac{1 - (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \lambda_2^\alpha}{1 + (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} (k_1 + k_2)^2} \tilde{f}(k_2, \lambda_2) \frac{1}{\lambda_1} \quad (5.116)$$

Der Nenner hat hier bereits eine Form analog zum einzeitigen Fall. Erweitert man nun mit $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha$, so erhält man einen Ausdruck, in dem wie oben der Nenner durch die Sprungverteilung ψ ausgedrückt werden kann:

$$\tilde{f}(k_2, \lambda_2; k_1, \lambda_1) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha}{1 - \tilde{\psi}(k_1 + k_2, \lambda_1 + \lambda_2)} \tilde{f}(k_2, \lambda_2) \frac{1}{\lambda_1} \quad (5.117)$$

Bevor dieser Ausdruck in eine verallgemeinerte Mastergleichung transformiert wird, soll noch die mit der einzeitigen Verteilung konsistente Form der Gl.(5.117) deutlich gemacht werden. Dazu kann für die transformierte Verteilung $\tilde{f}(k_2, \lambda_2)$ gerade der Ausdruck aus der einzeitigen Mastergleichung Gl.(5.114) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(k_2, \lambda_2; k_1, \lambda_1) \\ &= \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha) \lambda_2^{\alpha-1}}{(1 - \tilde{\psi}(k_1 + k_2, \lambda_1 + \lambda_2))(1 - \tilde{\psi}(k_2, \lambda_2))} \frac{1}{\lambda_1} \\ &= \frac{1}{(1 - \tilde{\psi}(k_1 + k_2, \lambda_1 + \lambda_2))} \frac{1}{(1 - \tilde{\psi}(k_2, \lambda_2))} \tilde{h}(s_2 \rightarrow 0, \lambda_2; 0, \lambda_1). \end{aligned} \quad (5.118)$$

Im letzten Schritt wurde ein Ergebnis aus der Untersuchung der mehrzeitigen Verteilung des inversen Prozesses verwendet (siehe Gl.(5.51)):

$\tilde{h}(s_2 \rightarrow 0, \lambda_2; 0, \lambda_1)$ gibt nach t_2 und t_1 rücktransformiert die Wahrscheinlichkeit an, dass das Teilchen bis $t_2 > t_1$ nicht gesprungen ist. Damit ist die Struktur der mehrzeitigen Verteilungen im Fourier-Laplace-Raum durch Vergleich mit Gl.(5.114) deutlich: Als Randterm ist die Wahrscheinlichkeit anzugeben, auf den Startpositionen sitzenzubleiben, die Propagation davon ausgehend wird durch Faktoren $1/(1 - \tilde{\psi})$ beschrieben.

Für die Transformation von Gl.(5.117) in eine mit dem fraktionalen Integral (5.93) vergleichbare Mastergleichung, muss die einzeitige Verteilung $\tilde{f}(k_2, \lambda_2)$ geeignet substituiert werden. Verwendet man die Fourier-Laplace-Transformierte von Gl.(5.110) in der Form $\tilde{f}(k_2, \lambda_2) = \tilde{\psi}(k_2, \lambda_2) \tilde{f}(k_2, \lambda_2) + \lambda^{\alpha-1}$, so ergibt sich:

$$\tilde{f}(k_2, \lambda_2; k_1, \lambda_1) = \frac{((\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha) \tilde{f}(k_2, \lambda_2) \frac{1}{\lambda_1}}{1 - \tilde{\psi}(k_1 + k_2, \lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\tilde{h}(s_2 \rightarrow 0, \lambda_2; 0, \lambda_1)}{1 - \tilde{\psi}(k_1 + k_2, \lambda_1 + \lambda_2)}. \quad (5.119)$$

Nun kann der Zähler des ersten Summanden mit Hilfe der Wartezeitverteilung $\tilde{\omega}(\lambda)$ gemäss Gl.(5.112) ausgedrückt werden: $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha - \lambda_2^\alpha = \tilde{\omega}(\lambda_2) - \tilde{\omega}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Für $t_2 > t_1$ führt die inverse Laplace-Transformation schliesslich auf folgende verallgemeinerte Mastergleichung:

$$\begin{aligned} & f(x_2, t_2; x_1, t_1) \\ &= \int_0^{t_1} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x', t') f(x_2 - x', t_2 - t'; x_1 - x', t_1 - t') \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} dt' \omega(t') \int_0^{t_2-t'} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \psi(x', t'') f(x_2 - x', t_2 - t' - t'') \delta(x_1) \\ &+ \tilde{h}(s_2 \rightarrow 0, \lambda_2; 0, \lambda_1) \delta(x_1) \delta(x_2) \end{aligned} \quad (5.120)$$

Diese Gleichung kann als eine Wahrscheinlichkeitsbilanzgleichung des CTRWs angesehen werden. Der unterste Term gibt wie oben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass kein Sprung ausgeführt wird und das Teilchen an den Startpositionen sitzenbleibt. Wie im einzeitigen Fall ergibt sich der Randwert $1 - \Phi(t_2, t_1)$ des mehrzeitigen fraktionalen Integrals Gl.(5.93) über fraktionale Integration dieses Terms:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} {}_0D_{t_2}^{-\alpha} \tilde{h}(s_2 \rightarrow 0, \lambda_2; 0, \lambda_1) = 1 - \Phi(t_2, t_1) \quad , \quad (5.121)$$

wie sich im Laplace-Raum feststellen lässt. Bei der einzeitigen Verteilung gilt zum Vergleich: ${}_0D_t^{-\alpha} h(0, t) = 1$.

Der nächste Term in der Mastergleichung besteht aus einer Art Faltung der Wartezeitverteilung $\omega(t)$ mit der einzeitigen Verteilung $f(x_2, t_2)$ und kann als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, dass das Teilchen zur Zeit t_1 am Anfangsort ist und zur Zeit $t_2 - t_1$ an x_2 , wobei es einen Sprung durchgeführt hat. Der oberste Term bilanziert schliesslich die Sprünge, die nach x_1 zur Zeit t_1 und x_2 zur Zeit t_2 führen.

Man sieht zudem, dass für die Grenzfälle $t_1 = 0$ und $t_1 = t_2 = 0$ die Mastergleichung nicht in die aus Gl.(5.99) erwarteten Ausdrücke übergeht. Dies kann

darauf zurückzuführen sein, dass die Gleichung implizit das asymptotische Verhalten der Wartezeitverteilung $\omega(\lambda) \approx 1 - \lambda^\alpha$ enthält und daher nur für grosse Zeiten gültig ist. Betrachtet man zum Vergleich den einzeitigen Fall, so ist für kleine Zeiten die Beziehung $\Phi(t) = h(0, t)$ ebenfalls nicht mehr gültig.

An den Ausdrücken für eine mehrzeitige verallgemeinerte Mastergleichung (Gleichungen (5.118) und (5.120)) wird deutlich, dass die einzeitige Mastergleichung Gl.(5.110) nicht ausreicht, um mehrzeitige Verbundverteilungen zu beschreiben. Diese sind aber für die vollständige Charakterisierung von Nichtmarkovprozessen unerlässlich.

Kapitel 6

Verteilungen für Ort und Geschwindigkeit

In diesem Kapitel werden Verbundverteilungen für Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens genauer untersucht. Zwei unterschiedliche Ansätze aus den vorangegangenen Kapiteln stehen hierbei im Blickpunkt. Einerseits existiert eine aus den Navier-Stokes-Gleichungen abgeleitete Entwicklungsgleichung für die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ ¹ eines Lagrange-Teilchens, die als eine Verallgemeinerung des heuristischen Oboukhov-Modells anzusehen ist. Dieses kann andererseits aufgrund seiner Einfachheit als Prototyp der phänomenologischen Ansätze zur Lagrangeschen Beschreibung der Turbulenz angesehen werden. Stochastische Realisierungen sind hier über eine Langevin-Gleichung gegeben, während die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ einer Fokker-Planck-Gleichung genügt. Zwischen diesen beiden Grenzfällen soll sich die Diskussion an dieser Stelle abspielen.

Die primäre Frage ist die nach einer exakten Lösung des verallgemeinerten Oboukhov-Modells. Für die Geschwindigkeitsverteilung $f(\mathbf{u}, t)$ kann diese im Rahmen eines CTRWs formuliert werden und ergibt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Zunächst werden daher Lösungsansätze für das verallgemeinerte Modell besprochen werden. Eine explizite Lösung für $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ konnte allerdings nicht gefunden werden.

Der nächste Schritt geht hin zu Erweiterungen des gewöhnlichen Oboukhov-Modells, die charakteristische Eigenschaften des verallgemeinerten Modells zeigen. Die hier behandelte Form der Erweiterung ist durch die Ergebnisse bei den Geschwindigkeitsverteilungen motiviert und liefert mit ihnen konsistente Ergebnisse. Im letzten Abschnitt werden mögliche stochastische Realisierungen dieses erweiterten Modells untersucht, denen CTRWs zugrundeliegen.

¹In diesem Kapitel wird die Abhängigkeit der Verteilung vom Startort y zur besseren Übersicht nicht mehr explizit angegeben.

6.1 Die exakte Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells

In Abschnitt 4.3 konnte eine Integrodifferentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Verbundverteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ eines Lagrange-Teilchens abgeleitet werden (siehe Gl.(4.27)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) &+ \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \\ &= \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \int_0^t dt' D^2(\mathbf{u}, t, t') [\nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{x}}, t')]_{\tilde{\mathbf{x}}=\mathbf{x}-\mathbf{u}(t-t')} \quad . \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Diffusionskoeffizient $D^2(\mathbf{u}, t, t')$ unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Die zweizeitige Beschleunigungskorrelation ist nach Gl.(4.28) somit nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ abhängig: $D^2(\mathbf{u}, t, t') \approx D^2(t - t')$. Wie bei der Geschwindigkeitsverteilung kann die Verbindung mit einer fraktionalen Zeitableitung gezogen werden. Formuliert man die zeitliche Retardierung $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(t - t')$ mit einem Translationsoperator $e^{-\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t}$, so kann der Riemann-Liouville-Differentialoperator folgendermassen in Gl.(6.1) eingeführt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{u}} e^{-\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} {}_0 D_t^{1-\alpha} e^{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} \nabla_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t). \quad (6.1)$$

Mit der Vertauschungsrelation $[\nabla_{\mathbf{u}}, e^{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t}] = t \nabla_{\mathbf{x}}$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) &+ \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \\ &= e^{-\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} (\nabla_{\mathbf{u}} - t \nabla_{\mathbf{x}}) {}_0 D_t^{1-\alpha} (\nabla_{\mathbf{u}} - t \nabla_{\mathbf{x}}) e^{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t). \quad (6.2) \end{aligned}$$

Hier bietet es sich an, eine neue Funktion zu definieren: $g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) := e^{\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$. Auf der rechten Seite kann dann $g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ substituiert werden und auf der linken Seite entsprechend $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = e^{-\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} t} g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$. Nachdem man die Translationsoperatoren auf beiden Seiten kürzt, erhält man daraus eine Gleichung für $g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = (\nabla_{\mathbf{u}} - t \nabla_{\mathbf{x}}) {}_0 D_t^{1-\alpha} (\nabla_{\mathbf{u}} - t \nabla_{\mathbf{x}}) g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad . \quad (6.3)$$

Zweckmässigerweise führt man hier eine Fourier-Laplace-Transformation durch, um die Gleichung zu vereinfachen. Bezeichnet man die transformierte Funktion als $G(\mathbf{w}, \mathbf{k}, \lambda) := \mathcal{FL}\{g(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)\}$ mit den konjugierten Fourier Variablen $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}$ und $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}$, so wird Gl.(6.3) zu:

$$\lambda G(\mathbf{w}, \mathbf{k}, \lambda) = - \left(\mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{k} \right) \lambda^{1-\alpha} \left(\mathbf{w} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{k} \right) G(\mathbf{w}, \mathbf{k}, \lambda) \quad , \quad (6.4)$$

beziehungsweise

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{k}^2 + \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{1-\alpha} \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} + \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} + \lambda^{1-\alpha} \mathbf{w}^2 + \lambda \right\} G = 0 \quad . \quad (6.5)$$

Randterme wurden bei der Transformation vernachlässigt.

In Anlehnung an die Ergebnisse bei der Behandlung der Geschwindigkeitsverteilung wird die Lösung dieser Gleichung als eine Überlagerung von zweidimensionalen Gaußkurven angesetzt:

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{k}, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} dP \int_{-\infty}^{\infty} dQ \int_{-\infty}^{\infty} dS N(P, Q, S, \lambda) e^{-P\mathbf{w}^2 - 2Q\mathbf{w} \cdot \mathbf{k} - S\mathbf{k}^2} \quad (6.6)$$

Substituiert man diesen Ansatz in Gl.(6.5) und integriert partiell, so erhält man eine partielle Differentialgleichung 3. Ordnung für den Kern $N(P, Q, S, \lambda)$:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2} \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial Q} + \lambda^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial P} - \lambda \right\} N = 0 \quad (6.7)$$

Eine Lösung dieser Gleichung konnte bislang nicht bestimmt werden. Die Probleme resultieren insbesondere aus den Ableitungen 3. Ordnung, die letztendlich aufgrund der zeitlichen Retardierung in Gl.(6.1) auftreten.

6.2 Eine heuristische Erweiterung des Oboukhov-Modells

Im Hinblick auf die Schwierigkeiten, mit denen man bei den Lösungsansätzen der exakten Verallgemeinerung des Oboukhov-Modells konfrontiert ist, erscheint es zweckmässig, zunächst einfachere Modelle für die Verbundverteilung eines Lagrange-Teilchens in Erwägung zu ziehen. Wie bei der Behandlung der Geschwindigkeitsverteilung deutlich wurde, scheinen fraktionale Zeitableitungen besonders dazu geeignet zu sein, zeitliche Korrelationen innerhalb der turbulenten Strömung zu beschreiben. Allerdings soll hier dieser Ansatz zunächst nicht auf die Basis eines Systems von Langevin-Gleichungen gestellt werden. Ansätze hierzu werden im nächsten Abschnitt behandelt.

In Analogie zur Erweiterung der gewöhnlichen Diffusionsgleichung wird eine fraktionale Zeitableitung in die Fokker-Planck-Gleichung des Oboukhov-Modells ad hoc eingeführt. In diesem Abschnitt wird also folgende fraktionale Entwicklungsgleichung für die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ eines Lagrange-Teilchens betrachtet:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \Delta_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (6.8)$$

Der Parameter α nimmt wie zuvor Werte $0 < \alpha < 1$ an, die Diffusionskonstante wird vereinfachend als 1 angenommen.

Die in Kapitel 5 besprochenen Ergebnisse für die fraktionale Diffusionsgleichung legen es nahe, als Lösungsansatz eine Überlagerung von Gaußfunktionen anzusetzen:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \quad , \quad (6.9)$$

wobei der Integralkern $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$ zusätzlich die Ortsvariable transformiert. Mit $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s)$ wird die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung des gewöhnlichen Oboukhov-Modells bezeichnet, das man im Grenzübergang $\alpha \rightarrow 1$ erhält:

$$\frac{\partial}{\partial s} f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) = \Delta_{\mathbf{u}} f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \quad . \quad (6.10)$$

Als weiteren Grenzfall erhält man aus Gl.(6.8) nach Integration über den ganzen Raum die fraktionale Diffusionsgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung

$$f(\mathbf{u}, t) = \int f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}:$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, t) = {}_0D_t^{1-\alpha} \Delta_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, t) \quad . \quad (6.11)$$

An dieser Stelle soll daran erinnert werden, dass die Lösung der fraktionalen Diffusionsgleichung durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$f(\mathbf{u}, t) = \int_0^\infty ds h(s, t) f_1(\mathbf{u}, t) \quad , \quad (6.12)$$

mit der Gaußfunktion $f_1(\mathbf{u}, t)$ als Lösung der gewöhnlichen Diffusionsgleichung und der Verteilung des inversen Levy-Prozesses $h(s, t)$.

6.2.1 Lösung des erweiterten Oboukhov-Modells

Für das hier vorgestellte Lösungsverfahren kann der Laplace-Operator $\Delta_{\mathbf{u}}$ im Prinzip durch einen beliebigen linearen Differentialoperator $L(\mathbf{u})$ ersetzt werden, da die charakteristischen Eigenschaften des Modells der Integralkern $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$ enthält. Eine Differentialgleichung für $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$ kann nun wie folgt abgeleitet werden. Man setzt den Ansatz Gl.(6.9) in die fraktionale Entwicklungsgleichung Gl.(6.8) ein. Der Laplaceoperator wirkt nur auf $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s)$ und kann mit Gl.(6.10) substituiert werden:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \\ &= {}_0D_t^{1-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \right) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung wird im nächsten Schritt bezüglich \mathbf{z} und s partiell integriert. Aufgrund der Integrationsgrenze 0 erhält man bei der Integration über s den Ausdruck ${}_0D_t^{1-\alpha} \int d\mathbf{z} h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; 0, t) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, 0)$ als Randterm. Dieser Term wird folgendermassen diskutiert: Die Anfangsverteilung der Oboukhov-Lösung ist gewöhnlich $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, 0) = \delta(\mathbf{z})\delta(\mathbf{u})$, der Randterm wird damit zu ${}_0D_t^{1-\alpha} h(0, \mathbf{x}; 0, t)\delta(\mathbf{u})$. Macht man nun die Annahme, dass $h(0, \mathbf{x}; s, t) = \delta(\mathbf{x})h(s, t)$ gilt, mit der Verteilung $h(s, t)$ des inversen Levy-Prozesses, so folgt direkt ${}_0D_t^{1-\alpha} h(0, t)\delta(\mathbf{u}) = 0$ (siehe Gl.(5.77)) und dieser Randterm kann für die weiteren Betrachtungen ausser Acht gelassen werden.

Nach partieller Integration wirken die partiellen Ableitungen in Gl.(6.13) nur noch auf $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$, das die folgende fraktionale Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right) h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) = -{}_0D_t^{1-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \right) h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) \quad . \quad (6.14)$$

Wie bereits mehrfach diskutiert wurde, können Gleichungen mit fraktionalen Zeitableitungen im Laplace-Raum einfacher gelöst werden. Bezeichnet man die Laplace-Transformierte des Integralkerns mit $\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) := \mathcal{L}\{h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)\}$, so führt die Laplace-Transformation von Gl.(6.14) auf eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) - h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; 0, s) \\ &= -\lambda^{1-\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \right) \tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) \\ & \quad + \left(\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \right) [{}_0D_t^{-\alpha} h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)]_{t=0} \quad . \end{aligned} \quad (6.15)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite entsteht durch die Transformation der gewöhnliche Zeitableitung, die im fraktionalen Differentialoperator enthalten ist (siehe Anhang). Typischerweise wird $[{}_0D_t^{-\alpha} h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)]_{t=0} = 0$ gesetzt. Der Randterm auf der linken Seite wird aufgrund der Annahme $\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; 0, s) \sim \delta(s)$ nicht weiter berücksichtigt. Schliesslich ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} + \lambda^{\alpha-1} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right\} \tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) = -\lambda^{\alpha} \tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) \quad . \quad (6.16)$$

Für lineare partielle Differentialgleichungen dieses Typs kann mit der Methode der Charakteristiken eine Lösung systematisch bestimmt werden, falls diese existiert. Dieses Verfahren soll im Weiteren ausgeführt werden. Wählt man als Parameter der Charakteristiken die Variable s , so schreibt sich Gl.(6.16) als

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \tilde{h}(\mathbf{z}(s), \mathbf{x}(s); \lambda, s) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial s} + \frac{d\mathbf{z}(s)}{ds} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} + \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right\} \tilde{h}(\mathbf{z}(s), \mathbf{x}(s); \lambda, s) \\ &= -\lambda^{\alpha} \tilde{h}(\mathbf{z}(s), \mathbf{x}(s); \lambda, s) \quad . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Diese Differentialgleichung hat die Lösung:

$$\tilde{h}(\mathbf{z}(s), \mathbf{x}(s); \lambda, s) = \tilde{h}(\mathbf{z}(0), \mathbf{x}(0); \lambda, 0) e^{-\lambda^{\alpha} s} \quad . \quad (6.18)$$

Die Gleichungen der Charakteristiken $\mathbf{z}(s)$, $\mathbf{x}(s)$ ergeben sich aus gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}(s)}{ds} &= \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \mathbf{z}(s) = \mathbf{u}s + \mathbf{z}_0 \quad , \\ \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} &= \lambda^{\alpha-1} \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(s) = \lambda^{\alpha-1} \mathbf{u}s + \mathbf{x}_0 \quad . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Als Anfangsbedingung $\tilde{h}(\mathbf{z}(0), \mathbf{x}(0); 0, \lambda) = \tilde{h}(\mathbf{z}_0, \mathbf{x}_0; 0, \lambda)$ wird eine scharfe Verteilung bei \mathbf{x}_0 gewählt. Für die λ -Abhängigkeit wird die spezielle Wahl $\lambda^{\alpha-1}$ getroffen, um mit den Grenzfällen konsistent zu sein (siehe unten). Setzt man $\mathbf{z}_0 = 0$ ergibt sich folgender Anfangswert:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\mathbf{z}_0, \mathbf{x}_0; 0, \lambda) &= \delta(\mathbf{x}_0) \lambda^{\alpha-1} \\ &= \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z}) \lambda^{\alpha-1} \quad . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Damit erhält man als Lösung der Differentialgleichung Gl.(6.16) den Kern der Integraltransformation Gl.(6.9) im Laplace-Raum:

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) &= \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z}) \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha s} \\ &= \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z}) \tilde{h}(s, \lambda) \quad .\end{aligned}\quad (6.21)$$

Im letzten Schritt wurde die Laplace-Transformierte von $h(s, t)$ substituiert: $\mathcal{L}\{h(s, t)\} = \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha s}$ (siehe Gl.(5.39)).

Formal wäre die inverse Laplace-Transformierte von Gl.(6.21):

$$h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) = \mathcal{L}^{-1}\{\delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z})\} * h(s, t) \quad . \quad (6.22)$$

Der Stern bezeichnet eine Faltung bezüglich t . Aufgrund der λ -Abhängigkeit der δ -Funktion ist es schwierig, einen geschlossenen Ausdruck für die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}\{\delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z})\}$ anzugeben. Die exakte Form von $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$ bleibt damit offen.

Da allerdings Laplace-Rücktransformation und Integration vertauschen, kann ein Ausdruck für die Laplace-Transformierte der gesuchten Lösung $\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \lambda) := \mathcal{L}\{f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)\}$ angegeben werden:

$$\tilde{f}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds \tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \quad . \quad (6.23)$$

Viele Größen können somit zuerst im Laplace-Raum berechnet und dann — falls möglich — rücktransformiert werden. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann mit Hilfe des Integralkerns $\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda)$ die Lösung des erweiterten Oboukhov-Modells weitgehend charakterisiert werden.

6.2.2 Grenzfälle

Zunächst ist anhand Gl.(6.21) ersichtlich, dass die Annahmen, die auf Gl.(6.16) führten, bestätigt werden. Die erste Annahme bezieht sich auf $\tilde{h}(0, \mathbf{x}; s, t)$. Im Laplace-Raum gilt die Beziehung $\tilde{h}(0, \mathbf{x}; s, \lambda) = \delta(\mathbf{x}) \tilde{h}(s, \lambda)$, d.h. es gilt gerade $h(0, \mathbf{x}; s, t) = \delta(\mathbf{x}) h(s, t)$. Die zweite Annahme war $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, 0) \sim \delta(s)$. Sie wird dadurch bestätigt, dass $h(s, 0) = \delta(s)$ ist (siehe Gl.(5.26)) und damit $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, 0) = \mathcal{L}^{-1}\{\delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z})\} * \delta(s) \sim \delta(s)$ wird.

Darüberhinaus muss $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ für die entsprechenden Grenzfälle sowohl in die Lösung des gewöhnlichen Oboukhov-Modells, als auch in die Lösung der fraktionalen Diffusionsgleichung übergehen.

Zum einen bedeutet dies, dass für $\alpha \rightarrow 1$ gelten soll: $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \rightarrow f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z} = \mathbf{x}, s = t)$. Betrachtet man den Integralkern, so sieht man, dass $\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda)$ für diesen Grenzfall in folgenden Ausdruck übergeht:

$$\tilde{h}_1(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) e^{-\lambda s} \quad . \quad (6.24)$$

Die Rücktransformation kann jetzt direkt durchgeführt werden und ergibt:

$$h_1(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(t - s) \quad . \quad (6.25)$$

Also führt die Transformation Gl.(6.9) gerade auf die Oboukhov-Lösung $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$.

Der zweite Grenzfall bezieht sich auf die Verteilung $f(\mathbf{u}, t)$ als Lösung der fraktionalen Diffusionsgleichung. Hierzu muss die Integration von $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ über \mathbf{x} unter Zuhilfenahme von Gl.(6.23) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z}) \quad & \tilde{h}(s, \lambda) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \\ & = \int_0^{\infty} ds \tilde{h}(s, \lambda) f_1(\mathbf{u}, s) \quad .(6.26) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist die Laplace-Transformierte der Lösung $f(\mathbf{u}, t)$ der fraktionalen Diffusionsgleichung.

Die Übereinstimmung in diesem letzten Grenzfall wird letztendlich über die Wahl des Terms $\lambda^{\alpha-1}$ in der Anfangsbedingung Gl.(6.20) erreicht, der mit $\tilde{h}(0, \lambda)$ identisch ist. Diese Wahl ist ebenso grundlegend für die Verifikation der anderen Annahmen. Eine Interpretation ist wohl entsprechend derjenigen für $h(0, t)$ im Zusammenhang mit CTRWs zu sehen.

6.2.3 Die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$

Anhand des Grenzfalles der fraktionalen Diffusionsgleichung ist ersichtlich, dass die Lösungen $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ aus Gl.(6.9) stets normiert sind: Die Integration über \mathbf{x} führt auf die normierte Verteilung $f(\mathbf{u}, t)$. Also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{u} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{u} f(\mathbf{u}, t) = 1 \quad . \quad (6.27)$$

Zudem ist $\tilde{h}(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, \lambda)$ stets positiv und damit auch $h(\mathbf{z}, \mathbf{x}; s, t)$ und $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$.

Die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ wird im Folgenden formal bestimmt. Im ersten Schritt berechnet man über die Transformation Gl.(6.23) die Laplace-Transformierte von $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ ²:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{z} \int_0^{\infty} ds \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1} \mathbf{z}) \tilde{h}(s, \lambda) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \\ &= \int_0^{\infty} ds \lambda^{3-3\alpha} \tilde{h}(s, \lambda) f_1(\mathbf{u}, \lambda^{1-\alpha} \mathbf{x}, s) \quad . \quad (6.28) \end{aligned}$$

Hier taucht die Verteilung $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s)$ des gewöhnlichen Oboukhov-Modells auf, die explizit angegeben werden kann:

$$f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) = N(s) \exp \left\{ -\frac{\mathbf{u}^2}{s} - \frac{3\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}}{s^2} - \frac{3\mathbf{z}^2}{s^3} \right\} \quad . \quad (6.29)$$

²Hierzu werden $d = 3$ Dimensionen angenommen.

Daraus ergibt sich für die Rücktransformation von $f_1(\mathbf{u}, \lambda^{1-\alpha}\mathbf{x}, s)$:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\{f_1(\mathbf{u}, \lambda^{1-\alpha}\mathbf{x}, s)\} \\
&= N(s) e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{s}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\exp\left\{-\frac{3\lambda^{1-\alpha}\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{s^2} - \frac{3\lambda^{2-2\alpha}\mathbf{x}^2}{s^3}\right\}\right\} \\
&= N(s) e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{s}} \left(\frac{s^2}{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s^3}{3\mathbf{x}^2}\right)^{\frac{1}{2-2\alpha}} \\
&\quad \left\{L_{1-\alpha}\left(\left(\frac{s^2}{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} t\right) * L_{2-2\alpha}\left(\left(\frac{s^3}{3\mathbf{x}^2}\right)^{\frac{1}{2-2\alpha}} t\right)\right\} \quad .(6.30)
\end{aligned}$$

Da die einseitige Levy-Verteilung im Laplace Raum als $\mathcal{L}\{L_\alpha(t)\} = e^{-\lambda^\alpha s}$ gegeben ist (siehe Abschnitt 5.2) taucht hier das Faltungsintegral über zwei skalierte Levy-Verteilungen auf.

Damit lässt sich $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = & {}_0D_t^{3-3\alpha} \int_0^\infty ds N(s) e^{-\frac{\mathbf{u}^2}{s}} \left(\frac{s^2}{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{s^2}{3\mathbf{x}^2}\right)^{\frac{1}{2-2\alpha}} \\
& \left\{h(s, t) * L_{1-\alpha}\left(\left(\frac{s^2}{3\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} t\right) * L_{2-2\alpha}\left(\left(\frac{s^2}{3\mathbf{x}^2}\right)^{\frac{1}{2-2\alpha}} t\right)\right\} . \quad (6.31)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist ein rein formaler Ausdruck. Eine Möglichkeit, dennoch mehr Informationen über die Verteilung zu bekommen, besteht in der Bestimmung der Momente.

6.2.4 Momente des erweiterten Oboukhov-Modells

Für die Momente des erweiterten Oboukhov-Modells lässt sich ausgehend von Gl.(6.23) eine allgemeine Gleichung herleiten, die für beliebige Ordnungen gültig ist.

Die einzeitigen Momente $\langle \mathbf{x}^n(t) \mathbf{u}^m(t) \rangle$ sind folgendermassen definiert:

$$\langle \mathbf{x}^n(t) \mathbf{u}^m(t) \rangle = \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{u} \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{x} \mathbf{x}^n \mathbf{u}^m f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad . \quad (6.32)$$

Daraus ergibt sich im Laplace-Raum mit Hilfe von Gl.(6.23) und Gl.(6.21):

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}\{\langle \mathbf{x}^n(t) \mathbf{u}^m(t) \rangle\} \\
&= \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{u} \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{z} \int_0^\infty ds \delta(\mathbf{x} - \lambda^{\alpha-1}\mathbf{z}) \tilde{h}(s, \lambda) \mathbf{x}^n \mathbf{u}^m f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \\
&= \lambda^{(\alpha-1)n} \int_0^\infty ds \tilde{h}(s, \lambda) \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{u} \int_{-\infty}^\infty d\mathbf{z} \mathbf{z}^n \mathbf{u}^m f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) \quad . \quad (6.33)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Integration über die δ -Funktion durchgeführt. Hier tauchen gerade die Momente des gewöhnlichen Oboukhov-Modells auf:

$\int d\mathbf{u} \int d\mathbf{z} \mathbf{z}^n \mathbf{u}^m f_1(\mathbf{u}, \mathbf{z}, s) = \langle \mathbf{z}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle$. Die Rücktransformation von Gl.(6.33) lautet damit:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^n(t) \mathbf{u}^m(t) \rangle &= {}_0D_t^{(\alpha-1)n} \int_0^\infty ds h(s, t) \langle \mathbf{z}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle \\ &= {}_0D_t^{(\alpha-1)n} \langle \mathbf{z}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle \end{aligned} \quad (6.34)$$

Die Momente des erweiterten Oboukhov-Modells erhält man demnach aus den gewöhnlichen Momenten $\langle \mathbf{z}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle$ durch Mittelung über $s(t)$ und fraktionale Integration über t . Da $\langle \mathbf{z}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle$ die Form einfacher Polynome in s hat, tauchen hier einfach die einzeitigen Momente des inversen Prozesses $s(t)$ auf (siehe Abschnitt 5.3.1), über die fraktional integriert wird. Diese Rechnungen können im Laplace-Raum stets elementar ausgeführt werden.

Diesen Zusammenhang sieht man z.B. bei den Momenten zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}^2(s) \rangle &= s & \rightarrow & \langle \mathbf{u}^2(t) \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \\ \langle \mathbf{z}^2(s) \rangle &= \frac{1}{3} s^3 & \rightarrow & \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle = \frac{2}{\Gamma(\alpha+3)} t^{\alpha+2}, \\ \langle \mathbf{z}(s) \mathbf{u}(s) \rangle &= \frac{1}{2} s^2 & \rightarrow & \langle \mathbf{x}(t) \mathbf{u}(t) \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Hier ist ersichtlich, dass der Grenzfall des Oboukhov-Modells jeweils erfüllt ist. Das Verhalten der Teilchengeschwindigkeit ist in diesem erweiterten Modell subdiffusiv entsprechend der fraktionalen Diffusionsgleichung. Das mittlere Abstandsquadrat des Teilchens skaliert mit geringerer Ordnung als nach dem Richardson-Gesetz erwartet wird.

6.3 Gekoppelte Langevin-Gleichungen

In diesem Abschnitt werden mögliche stochastische Realisierungen der heuristischen Erweiterung des Oboukhov-Modells untersucht. Gegenüber der Beschreibung über eine fraktionale Fokker-Planck-Gleichung haben stochastische Differentialgleichungen den Vorteil, dass sie nicht auf die einzeitige Verteilung beschränkt sind und dementsprechend mehr Informationen über den Prozess enthalten. Sie bieten darüberhinaus die Möglichkeit, den stochastischen Prozess direkt zu simulieren und aus den numerischen Daten die Verteilung zu bestimmen. Im Hinblick auf die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts könnte so die unbekannte Lösung simuliert und experimentellen Daten gegenübergestellt werden. Nicht zuletzt wäre erst mit einer komplementären stochastischen Formulierung eine vollständige Erweiterung des Oboukhov-Modells gegeben.

Geht man von dem einfachen Oboukhov-Modell aus, dem ein gewöhnlicher Wiener-Prozess zugrundeliegt, so legen die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels eine Formulierung durch gekoppelte Langevin-Gleichungen nahe. Dabei stehen allerdings mehrere Möglichkeiten offen, wie in das Modell von

Fogedby eine zusätzliche Variable eingeführt werden kann. Hier werden zwei Ansätze dazu näher betrachtet und mit den Resultaten des vorangegangenen Abschnitts verglichen.

6.3.1 Der Prozess $\mathbf{X}(s)$

Gegenstand der Betrachtung ist nach wie vor ein Lagrange-Teilchen, das sich in einer turbulenten Strömung mitbewegt. Entsprechend Kapitel 5 wird das Verhalten der Geschwindigkeit des Teilchens durch einen subdiffusiven CTRW beschrieben. Eine naheliegende Erweiterung von Fogedbys-Modell um eine zusätzliche Ortsvariable wäre dadurch gegeben, dass \mathbf{X} ebenfalls als ein Prozess in der Eigenzeit s angesehen wird, dessen Änderung durch $\mathbf{U}(s)$ gegeben ist. Ort und Geschwindigkeit des Teilchens werden dann durch folgende Langevin-Gleichungen beschrieben:

$$\frac{d\mathbf{X}(s)}{ds} = \mathbf{U}(s) \quad , \quad \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds} = \vec{\eta}(s) \quad , \quad \frac{dt(s)}{ds} = \tau(s) \quad . \quad (6.36)$$

Die stochastischen Variablen $\vec{\eta}(s)$ und $\tau(s)$ haben die in Abschnitt 5.1 spezifizierten Eigenschaften. Nun können die Ergebnisse aus Kapitel 5 direkt übertragen werden. Die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ ist mit Hilfe des inversen Prozesses $s(t)$ gegeben:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{U}(s)) \delta(s - s(t)) \rangle \quad , \quad (6.37)$$

und kann als Integraltransformation geschrieben werden:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \int_0^\infty ds h(s, t) f_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}, s) \quad . \quad (6.38)$$

Hier ist $h(s, t)$ die einzeitige Verteilung des Prozesses $s(t)$ und $f_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}, s)$ ist die Verteilung des gewöhnlichen Oboukhov-Modells. Damit kann analog zum Vorgehen in Abschnitt 5.4.1 eine fraktionale Entwicklungsgleichung für $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ hergeleitet werden:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + {}_0 D_t^{1-\alpha} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \right\} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = {}_0 D_t^{1-\alpha} \Delta_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad . \quad (6.39)$$

Diese Gleichung ist also die zum stochastischen Prozess (6.36) korrespondierende fraktionale Fokker-Planck-Gleichung und hat die Lösung Gl.(6.38). Im Grenzfall $\alpha \rightarrow 1$ geht diese FFPG wie erwartet in die Fokker-Planck-Gleichung des einfachen Oboukhov-Modells über.

Mit diesen Ergebnissen können die gekoppelten Langevin-Gleichungen (6.36) offensichtlich nicht der heuristischen Erweiterung des Oboukhov-Modells (6.8) zugrundeliegen. Entsprechend kann diese Erweiterung keine Lösung in der Form von Gl.(6.38) haben.

Zur Vollständigkeit werden noch die Momente des Modells (6.36) angegeben. Allgemein gilt hierfür der Zusammenhang:

$$\langle \mathbf{x}^n(t) \mathbf{u}^m(t) \rangle = \int_0^\infty ds h(s, t) \langle \mathbf{x}^n(s) \mathbf{u}^m(s) \rangle \quad . \quad (6.40)$$

Die charakteristischen Abstandskquadrate zeigen somit folgendes Verhalten:

$$\langle \mathbf{x}^2(t) \rangle \sim t^{3\alpha} \quad , \quad \langle \mathbf{u}^2(t) \rangle \sim t^\alpha \quad . \quad (6.41)$$

Obwohl es nicht von vorneherein ausgeschlossen ist, den Prozess (6.36) zur Beschreibung physikalischer Systeme anzuwenden, ist das grundlegende Problem darin die Beziehung zwischen Ort und Geschwindigkeit. Beide Grössen sind über die Eigenzeitvariable s verknüpft und nicht über die physikalische Zeit t . Als Konsequenz davon ist hier die zeitliche Änderung des Ortes \mathbf{X} nicht durch die Geschwindigkeit $\mathbf{U}(t)$ gegeben. Dieser Zusammenhang muss aber erfüllt sein, um tatsächlich Ort und Geschwindigkeit des Teilchens zu erfassen.

6.3.2 Der Prozess $\mathbf{X}(t)$

Eine physikalisch sinnvolle Erweiterung von Fogedbys-Modell im Geschwindigkeitsraum wäre erst realisiert, wenn die Ableitung von \mathbf{X} nach t durch die Geschwindigkeit $\mathbf{U}(s(t))$ ausgedrückt wird. Ort und Geschwindigkeit des Teilchens werden also durch folgende Langevin-Gleichungen beschrieben:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{U}(s(t)) \quad , \quad \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds} = \vec{\eta}(s) \quad , \quad \frac{dt(s)}{ds} = \tau(s) \quad . \quad (6.42)$$

Mit Hilfe des inversen Prozesses $s(t)$ lautet dann die Verteilung $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$:

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)) \delta(\mathbf{u} - \mathbf{U}(s)) \delta(s - s(t)) \rangle \quad . \quad (6.43)$$

Hier ist der Prozess $\mathbf{X}(t)$ sowohl vom Prozess $\mathbf{U}(s)$, als auch vom inversen Prozess $s(t)$ abhängig. Daher faktorisiert $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ nicht in einzelne Erwartungswerte. Eine weitere Vorgehensweise analog zu Kapitel 5 ist daher nicht möglich und die explizite Form von $f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ muss mit anderen Methoden bestimmt werden. Die Verbindung zur FFPG des erweiterten Oboukhov-Modells kann alternativ durch Vergleich der Momente untersucht werden. Diese sind für die Erweiterung vollständig bekannt (siehe Gl.(6.34)).

Aus den Langevin-Gleichungen (6.42) des hier betrachteten Modells können ebenfalls Momente beliebiger Ordnung berechnet werden. Das zweite Geschwindigkeitsmoment lautet:

$$\langle \mathbf{u}^2(t) \rangle = \langle \langle \mathbf{u}(s) \mathbf{u}(s) \rangle \rangle = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \quad . \quad (6.44)$$

Für die Berechnung des zweiten Ortsmoments benötigt man die mehrzeitigen Momente des fraktionalen Diffusionsprozesses, der das Verhalten der Geschwindigkeit beschreibt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}^2(t) \rangle &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle \mathbf{u}(t') \mathbf{u}(t'') \rangle \\ &= \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \{ \Theta(t'' - t') \langle s(t') \rangle + \Theta(t' - t'') \langle s(t'') \rangle \} \\ &= \frac{2}{\Gamma(\alpha + 3)} t^{\alpha+2} \quad . \end{aligned} \quad (6.45)$$

Hier wurde Gl.(5.105) verwendet.

In entsprechender Weise ergibt sich das gemischte Moment $\langle \mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) \rangle$:

$$\langle \mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 2)} t^{\alpha+1} \quad . \quad (6.46)$$

Man sieht, dass die zweiten Momente der Langevin-Gleichungen (6.42) exakt mit den Ergebnissen übereinstimmen, die man aus Gl.(6.34) berechnet. Könnte man die Übereinstimmung der allgemeinen Momente $\langle \mathbf{x}^n(t)\mathbf{u}^m(t) \rangle$ zeigen, so wäre damit nachgewiesen, dass das Modell (6.42) der FFPG (6.8) als stochastische Realisierung zugrundeliegt.

Ein Vergleich mit Gl.(6.34) zeigt, dass dazu folgende Relation bewiesen werden muss:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{(\alpha-1)n} &< \int_0^s ds_1 \cdots \int_0^s ds_n \langle \mathbf{u}(s_1) \cdots \mathbf{u}(s_n) \mathbf{u}^m(s) \rangle \rangle \\ &= \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^t dt_n \langle \langle \mathbf{u}(s_1) \cdots \mathbf{u}(s_n) \mathbf{u}^m(s) \rangle \rangle \quad . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Das Auftreten der mehrfachen Momente des Prozesses $s(t)$ auf der rechten Seite macht die Rechnungen für höhere Ordnungen allerdings sehr aufwendig, wenn es überhaupt möglich ist, diese höheren Momente geschlossen anzugeben. Die allgemeine Gültigkeit der Gl.(6.47) kann daher nur vermutet werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine bestimmte Klasse Nichtmarkovscher Prozesse unter dem Gesichtspunkt der aktuellen Entwicklungen in der Turbulenzforschung untersucht. Ausgehend von den einzeitigen Geschwindigkeitsstatistiken eines Lagrange-Teilchens, die über einen CTRW erfolgreich beschrieben werden können, wurden zwei mögliche Erweiterungen betrachtet. Zum einen mehrzeitige Verbundverteilungen, die notwendig sind, um den Nichtmarkovschen CTRW vollständig zu charakterisieren und daher auch von grundlegendem theoretischen Interesse sind, zum anderen einzeitige Verbundverteilungen für Ort und Geschwindigkeit des Teilchens.

Der CTRW wurde hierzu auf der Grundlage eines Systems gekoppelter Langevin-Gleichungen beschrieben, das sowohl die bekannten Ergebnisse für die einzeitigen Verteilungen reproduzieren kann, als auch eine direkte Erweiterung auf mehrere Zeiten zulässt. In diesem Modell von Fogedby nehmen die Verteilungen des CTRWs unmittelbar die Form einer Integraltransformation an. Der Integralkern ist die Verteilung des inversen stabilen Lévy-Prozesses, der für die Nichtmarkoveigenschaften des CTRWs verantwortlich ist. Damit ist auch die Interpretation des subdiffusiven stochastischen Prozesses klar: Der Prozess $X(s(t))$ kann als ein Markovprozess in der Eigenzeit s angesehen werden, der in die physikalische Zeit t transformiert wird:

$$f(\{x_i, t_i\}) = \int_0^\infty ds_1 \cdots \int_0^\infty ds_N h(\{s_i, t_i\}) f_1(\{x_i, s_i\}) \quad .$$

Für die Verteilung $f(\{x_i, t_i\})$ des CTRWs kann eine fraktionale Entwicklungsgleichung abgeleitet werden:

$$\left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right) f(\{x_i, t_i\}) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{1-\alpha} L(\{x_i\}) f(\{x_i, t_i\}) + b.c. \quad .(7.1)$$

Im Fall der einzeitigen Verteilung wurden diese beiden Ergebnisse in der Literatur bereits ausführlich behandelt. Das hier beschriebene Vorgehen besitzt indes mehrere Vorteile. Die Lösung kann auf der Grundlage der gekoppelten Prozesse klar interpretiert werden und ermöglicht die einfache Herleitung

einer fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung. In der Tat wurde ein allgemeines Schema vorgestellt, nach dem fraktionale Entwicklungsgleichungen einheitlich abgeleitet werden können: Der zugrundeliegende Markovprozess wird über den Prozess $X(s)$ festgelegt, die Eigenschaften von $t(s)$ sind für das Auftreten des fraktionalen Differentialoperators verantwortlich. Letztendlich kann der fraktionale Charakter der Gleichungen direkt auf den verallgemeinerten Grenzwertsatz zurückgeführt werden.

Die gekoppelten Langevin-Gleichungen ermöglichen sogar den Übergang zu einer Pfadintegraldarstellung des CTRWs. Weitere wichtige Ergebnisse des Kapitels 5 sind die Rekursionsrelationen für die Momente des Prozesses $s(t)$ zusammen mit den daraus folgenden Momenten des gekoppelten Prozesses. Die mathematische Struktur der mehrzeitigen Verteilungen wurde erläutert. Eine mögliche Verbindung der mehrzeitigen fraktionalen Diffusionsgleichung zu einer verallgemeinerten Mastergleichung wurde gezogen und eine Interpretation der auftretenden Terme im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsbilanz vorgeschlagen. Daran zeigt sich, dass die bisher in der Literatur betrachtete einzeitige Mastergleichung den Nichtmarkovschen CTRW nicht ausreichend beschreiben kann. Auch wenn eine analytisch geschlossene Form des Integralkerns für mehrere Zeiten nicht angegeben werden konnte, wurde der stochastische Prozess $X(s(t))$ mit den hier gezeigten Ausführungen dennoch vollständig charakterisiert.

In Bezug auf Turbulenz-Modelle, die Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens berücksichtigen, wird unter Vorbehalt der Gültigkeit von Gl.(6.47) eine heuristische Erweiterung des Oboukhov-Modells in folgender Form vorgeschlagen:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{U}(s(t)) \quad , \quad \frac{d\mathbf{U}(s)}{ds} = \vec{\eta}(s) \quad , \quad \frac{dt(s)}{ds} = \tau(s) \quad ,$$

mit der korrespondierenden fraktionalen Fokker-Planck-Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = {}_0 D_t^{1-\alpha} \Delta_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad .$$

Statistiken für Ort und Geschwindigkeit eines Lagrange-Teilchens wurden in Experimenten bislang noch nicht bestimmt. Das obige Modell macht daher erste Voraussagen über mögliche Ergebnisse. Ein Vergleich mit experimentellen Daten kann dabei über die berechneten Momente oder eine Simulation der Langevin-Gleichungen erfolgen.

Letztendlich kann erst das Experiment oder eine direkte numerische Simulation Aufschluss darüber geben, ob die mehrzeitigen statistischen Größen und das erweiterte Oboukhov-Modell dazu geeignet sind, die anomalen Statistiken eines Lagrange-Teilchens zu beschreiben.

Anhang A

Fourier- und Laplace-Transformationen

Integraltransformationen stellen ein wichtiges Hilfsmittel zur Behandlung partieller Differentialgleichungen dar. Hier sollen die wichtigsten Eigenschaften der Fourier- und Laplace-Transformation kurz vorgestellt werden. Für eine weitergehende Behandlung wird auf [Arfk] verwiesen.

A.1 Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : x \rightarrow k$ einer Funktion $F(x)$ ist definiert als:

$$\hat{F}(k) = \mathcal{F}\{F(x)\} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ikx} dx \quad . \quad (\text{A.1})$$

Unter geeigneten Annahmen über F ist die Fourier-Rücktransformation dann gegeben durch:

$$F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{F}(k)\} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k) e^{ikx} dk \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die Fourier-Transformation stellt eine bijektive Abbildung dar, die jeder Funktion F ihre Fouriertransformierte \hat{F} zuordnet. Alle Fouriertransformierten bilden definitionsgemäss den Fourier-Raum.

Als wichtige Eigenschaft dieser Transformation gehen Differentiationen in Multiplikationen über und umgekehrt. Genauer gelten die Beziehungen:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} F(x) \right\} = (ik)^n \hat{F}(k) \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{d^n}{dk^n} \hat{F}(k) \right\} = (-ix)^n F(x) \quad . \quad (\text{A.4})$$

Der Faltungssatz lautet:

$$\mathcal{F}\{F(x) * G(x)\} = \hat{F}(k) \hat{G}(k) \quad . \quad (\text{A.5})$$

wobei die Faltung $F(x) * G(x)$ zweier Funktionen gegeben ist durch:

$$F(x) * G(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x')G(x-x')dx' \quad . \quad (\text{A.6})$$

A.2 Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L} : t \rightarrow \lambda$ einer für $t \geq 0$ definierten Funktion $F(t)$ ist folgendermassen definiert:

$$\tilde{F}(\lambda) = \mathcal{L}\{F(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F(t) dt \quad . \quad (\text{A.7})$$

Die Laplace-Transformierte $\tilde{F}(\lambda)$ ist für diejenige λ definiert, für die das Integral existiert.

Die inverse Laplace-Transformation hat eine Darstellung als komplexes Kurvenintegral und wird zur Bestimmung der Rücktransformation gewöhnlich nicht herangezogen. Stattdessen kann festgelegt werden, dass eine Funktion $F(t)$ die inverse Laplace-Transformierte einer Funktion $\tilde{F}(\lambda)$ ist, falls $\tilde{F}(\lambda)$ die Laplace-Transformierte von $F(t)$ ist. Dann schreibt man $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{F}(\lambda)\}$. Die Ableitungsregeln lauten hier:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}F(t)\right\} &= \lambda^n \tilde{F}(\lambda) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{n-1-j} \frac{d^j F}{dt^j}(0) \quad , \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^k}{d\lambda^k}\tilde{F}(\lambda)\right\} &= (-t)^k F(t) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Im Vergleich zur Fourier-Transformation bleiben bei der Transformation in den Laplace-Raum Randterme stehen.

Es gilt der Verschiebungssatz:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}F(t)\} = \tilde{F}(\lambda + a) \quad . \quad (\text{A.9})$$

und der Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\{F(t) * G(t)\} = \tilde{F}(\lambda) \tilde{G}(\lambda) \quad , \quad (\text{A.10})$$

wobei hier die Faltung zweier Funktionen $F(t) * G(t)$ gegeben ist durch:

$$F(t) * G(t) := \int_0^t F(t-t')G(t')dt' \quad . \quad (\text{A.11})$$

Bei den Rechnungen in den Kapiteln 5 und 6 wird häufig mit der Laplace-Transformierten von t^β gerechnet, wobei β eine reelle Zahl > -1 ist:

$$\mathcal{L}\{t^\beta\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta+1}} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Darüberhinaus gilt die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} F(t_1) \delta(t_2 - t_1) &= \int_0^\infty dt_1 e^{-t_1(\lambda_1 + \lambda_2)} F(t_1) \\ &= \tilde{F}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad , \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

die zur Berechnung der inversen Laplace-Transformation der in Kapitel 5 häufig auftretenden Funktionen $\tilde{F}(\lambda_1 + \lambda_2)$ verwendet wird.

Anhang B

Fraktionale Differentialoperatoren

Der fraktionale Riemann-Liouville-Integraloperator ${}_0D_t^{-\alpha}$ ist definiert durch die Verallgemeinerung der Cauchy-Formel auf reelle Ordnungen α :

$${}_0D_t^{-\alpha}F(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{F(t')}{(t-t')^{1-\alpha}} dt' = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * F(t) \quad , \quad (\text{B.1})$$

wobei $*$ eine Laplace-Faltung bezeichnet (siehe Gl.(A.11)). Folglich führt eine Laplace-Transformation auf folgende Darstellung von Gl.(B.1):

$$\mathcal{L}\{{}_0D_t^{-\alpha}F(t)\} = \lambda^{-\alpha} \tilde{F}(\lambda) \quad . \quad (\text{B.2})$$

Aus Gl.(B.1) ergibt sich der fraktionale Riemann-Liouville Differentialoperator ${}_0D_t^{1-\alpha}F(t)$ durch partielle Ableitung nach t :

$${}_0D_t^{1-\alpha}F(t) := \frac{\partial}{\partial t} {}_0D_t^{-\alpha}F(t) \quad . \quad (\text{B.3})$$

Als Konvention wird verwendet, dass ${}_0D_t^p$ für $p > 0$ eine fraktionale Ableitung und für $p < 0$ ein fraktionales Integral bezeichnet. Für $p = 0$ gilt: ${}_0D_t^0F(t) = F(t)$.

Die Erweiterung des fraktionalen Differentialoperators auf zwei Zeiten t_1, t_2 ergibt sich entsprechend dem einzeitigen Fall. Zunächst wird das fraktionale Integral über zwei Zeiten definiert als:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) := \mathcal{L}^{-1} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \tilde{F}(\lambda_1, \lambda_2) \right\} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Zusätzlich gilt nach Gl.(A.13):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_1^{\alpha-1} \delta(t_2 - t_1) \\ &= \int_0^\infty dt_1 e^{-t_1(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_1^{\alpha-1} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)^{-\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

In physikalischer Zeit ist der fraktionale Integraloperator Gl.(B.4) also gegeben durch einen Ausdruck, der eine zweifache Laplace-Faltung bezüglich t_1 und t_2 enthält (bezeichnet mit $**$):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_1^{\alpha-1} \delta(t_2 - t_1) ** F(t_2, t_1) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} dt'_1 \int_0^{t_2} dt'_2 t_1'^{\alpha-1} \delta(t'_2 - t'_1) F(t_2 - t'_2, t_1 - t'_1) \quad . \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Mit Hilfe einer Fallunterscheidung $t_2 > t_1$, $t_1 > t_2$ kann eine der beiden Integrationen ausgeführt werden. Daraus ergibt sich die Darstellung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\text{Min}(t_1, t_2)} dt' t'^{\alpha-1} F(t_1 - t', t_2 - t') \quad . \quad (\text{B.7})$$

Für den fraktionalen Differentialoperator folgt entsprechend Gl.(B.3):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{1-\alpha} F(t_2, t_1) := \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} F(t_1, t_2) \quad (\text{B.8})$$

Im allgemeinen Fall von N -Zeiten nimmt der fraktionale Integraloperator die Form einer N -fachen Faltung an:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{-\alpha} F(t_1, \dots, t_N) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_1^{\alpha-1} \delta(t_N - t_{N-1}) \dots \delta(t_2 - t_1) * \dots * F(t_1, \dots, t_N) \quad , \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

mit zugehöriger Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L} \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} \right)^{-\alpha} F(t_1, \dots, t_N) \right\} = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^{-\alpha} \tilde{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Anhang C

Berechnung der Momente

Das Moment zweiter Ordnung aus Abschnitt 5.3.2 hat mit Hilfe des fraktionalen Integraloperators die Form (siehe Gl.(5.62)):

$$\langle s(t_1)s(t_2) \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \{ \langle s(t_1) \rangle + \langle s(t_2) \rangle \} \quad .$$

Mit den Ergebnissen aus B entspricht dieser Ausdruck einem zweifachen Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} \langle s(t_1)s(t_2) \rangle = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} dt'_1 \int_0^{t_2} dt'_2 t'^{\alpha-1}_1 \delta(t'_2 - t'_1) \\ & \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1 - t'_1)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t'_2)^\alpha \right\} \quad .(C.1) \end{aligned}$$

Nach einer Fallunterscheidung $t_2 > t_1$ bzw. $t_1 > t_2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle s(t_1)s(t_2) \rangle = & \Theta(t_2 - t_1) \left\{ \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} t_1^{2\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} (t_2 - t')^\alpha \right\} \\ & + \Theta(t_1 - t_2) \left\{ \frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} t_2^{2\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{t_2} dt' t'^{\alpha-1} (t_1 - t')^\alpha \right\} .(C.2) \end{aligned}$$

Die Integrale können mit **Maple** berechnet werden und führen auf die hypergeometrische Funktion $F(a, b; c; z)$:

$$\int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} (t_2 - t')^\alpha = \frac{1}{\alpha} t_1^\alpha t_2^\alpha F\left(\alpha, -\alpha; \alpha+1; \frac{t_1}{t_2}\right) \quad . \quad (C.3)$$

Anhang D

Randterme der mehrzeitigen Verbundverteilung

Ausgehend von Gl.(5.89) kann der Randterm $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ aus Abschnitt 5.4.2 berechnet werden. Zunächst führt man die inverse Laplace-Transformation dieser Gleichung durch:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) = & \left({}_0D_{t_2}^{-\alpha} - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} \right) L(x_2) f(x_2, t_2) \delta(x_1) \\ & + \left(1 - \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} h(0, t_2) \right) \delta(x_2) \delta(x_1) \quad . \quad (\text{D.1}) \end{aligned}$$

Der explizite Ausdruck des fraktionalen Integraloperators Gl.(B.6) ermöglicht es jetzt, Gl.(D.1) auszuwerten. Nach einer Fallunterscheidung $t_2 < t_1$ bzw. $t_1 < t_2$ ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} f(x_2, t_2) = & \Theta(t_1 - t_2) {}_0D_{t_2}^{-\alpha} f(x_2, t_2) \\ & + \Theta(t_2 - t_1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} dt' t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t'). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^{-\alpha} h(0, t_2) = & \Theta(t_1 - t_2) 1 \\ & + \Theta(t_2 - t_1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} (t_2 - t')^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Das Ergebnis für die Randbedingung $g_1(x_1, x_2, t_1, t_2)$ ist also Gl.(5.90):

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, t_1, t_2) = \Theta(t_2 - t_1) \{ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(x_2) \int_{t_1}^{t_2} dt' t'^{\alpha-1} f(x_2, t_2 - t') \delta(x_1) \\ & + (1 - \Phi(t_2, t_1)) \delta(x_2) \delta(x_1) \} \quad , \quad (\text{D.4}) \end{aligned}$$

mit der Funktion

$$\begin{aligned}
 \Phi(t_2, t_1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_1} dt' t'^{\alpha-1} (t_2 - t')^{-\alpha} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^\alpha F\left(\alpha, -\alpha; \alpha+1; \frac{t_1}{t_2}\right) \quad . \quad (\text{D.5})
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [Abra] M. Abramowitz und C.A. Stegun 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover.
- [Arfk] G.B. Arfken und H. Weber 2001. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press.
- [AM04] A.K. Aringazin und M.I. Mazhitov 2004. *Stochastic Models of Lagrangian Acceleration of Fluid Particle in Developed Turbulence*. arXiv: cond-mat/0408018v3.
- [BMK00] E. Barkai, R. Metzler, und J. Klafter 2000. *From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation*. Phys. Rev. E 61, 132.
- [Ba01] E. Barkai 2001. *Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application*. Phys. Rev. E 63, 046118.
- [Batc1] G.K. Batchelor 1953. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge.
- [Batc2] G.K. Batchelor 1970. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge.
- [Be01] C. Beck 2001. *Dynamical Foundations of Nonextensive Statistical Mechanics*. Phys. Rev. Lett. 87, 180601.
- [Be02] C. Beck 2002. *Lagrangian acceleration statistics in turbulent flows*. arXiv: cond-mat/0212566v1.
- [BBCLT04] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, und F. Toschi 2004. *Lagrangian statistics in fully developed turbulence*. arXiv: nlin.CD/0402032v1.
- [BBCDLT04] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B.J. Devenish, A. Lanotte, und F. Toschi 2004. *Multifractal statistics of Lagrangian velocity and acceleration in turbulence*. arXiv: nlin.CD/0403020v1.
- [BG90] J.P. Bouchaud und A. Georges 1990. *Anomalous Diffusion in Disordered Media: Statistical Mechanisms, Models and Physical Applications*. Phys. Rep. 195, 127.

- [CGH90] B. Castaing, Y. Gagne, und E.J. Hopfinger 1990. *Velocity Probability Density Functions of High Reynolds Number Turbulence*. Physica D 46, 177.
- [CRLMPA03] L. Chevillard, S.G. Roux, E. Leveque, N. Mordant, J.F. Pinton, und A. Arneodo 2003. *Lagrangian Velocity Statistics in Turbulent Flows: Effects of Dissipation*. Phys. Rev. Lett. 91, 214502.
- [Co96] A.Compte 1996. *Stochastic Foundations of Fractional Dynamics*. Phys. Rev. E 53, 4191.
- [FGV01] G. Falkovich, K. Gawedzki, und M. Vergassola 2001. *Particles and Fields in Fluid Turbulence*. Rev. Mod. Phys. 73, 797.
- [Fo94] H.C. Fogedby 1994. *Langevin equations for continuous time Lévy flights*. Phys. Rev. E 50, 1657.
- [FP97] R. Friedrich und J. Peinke 1997. *Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation*. Phys. Rev. Lett. 78.
- [Fr02] R. Friedrich 2002. *Lagrangian Probability Distributions of Turbulent Flows*. arXiv: physics/0207015v1.
- [Fr03] R. Friedrich 2003. *Statistics of Lagrangian Velocities in Turbulent Flows*. Phys. Rev. Lett. 90, 084501.
- [PF85] U. Frisch und G. Parisi 1985. *On the singularity structure of fully developed turbulence*. S.84 in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics*, North-Holland.
- [Fr95] U. Frisch 1995. *Turbulence*. Cambridge.
- [Gard] C.W. Gardiner 2004. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Berlin.
- [GnKo] B.V. Gnedenko und A.N. Kolmogorov 1954 *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Addison-Wesley Reading, MA.
- [GK03] T. Gotoh und R.H. Kraichnan 2003. *Turbulence and Tsallis Statistics*. arXiv: nlin.CD/0305040v1.
- [K41] A.N. Kolmogorov 1941. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 30.
- [K62] A.N. Kolmogorov 1962. *A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds numbers*. J. Fluid Mech. 13, 82.
- [LVCAB01] A. La Porta, G. Voth, A.M. Crawford, J. Alexander, und E. Bodenschatz 2001. *Fluid particle accelerations in fully developed turbulence*. Nature 409, 1017 (2001)

- [Lu69] T.S. Lundgren 1969. *Distribution functions in the statistical theory of turbulence*. Phys. Fluids 10, 969.
- [McCo] W.D. McComb 1990. *The Physics of Fluid Turbulence*. Oxford.
- [MBK99] R. Metzler, E. Barkai, und J. Klafter 1999. *Anomalous Diffusion and Relaxation close to Thermal Equilibrium: A Fractional Fokker-Planck-Equation Approach*. Phys. Rev. Lett. 82, 3563.
- [MK00] R. Metzler und J. Klafter 2000. *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*. Phys. Rep. 339,1.
- [MoYa] A.S. Monin und A.M. Yaglom 1971/1975. *Statistical Fluid Mechanics* Volume 1/2. MIT Press.
- [WM65] E.W. Montroll und G.H. Weiss 1965. *Random Walks on Lattices II*. J. Math. Phys. 6, 167.
- [Ob59] A.M. Oboukhov 1959. *Description of Turbulence in Terms of Lagrangian Variables*. Adv. Geophys. 6, 113.
- [NTGT02] T. Nishikawa, Z. Toroczka, C. Grebogi, und T. Tél 2002. *Finite-size effects on active chaotic advection*. Phys. Rev. E 65, 026216.
- [Ob62] A.M. Oboukhov 1962. *Some specific features of atmospheric turbulence*. J. Fluid Mech. 13, 77.
- [MMMP01] N. Mordant, P. Metz, O. Michel, und J.F. Pinton 2001. *Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence*. Phys. Rev. Lett. 87, 214501.
- [MDLAP02] N. Mordant, J. Delour, E. Leveque, A. Arneodo, und J.F. Pinton 2002. *Long time correlations in Lagrangian dynamics: a key to intermittency in turbulence*. arXiv: physics/0206013v1.
- [Podl] I. Podlubny 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press.
- [Pope] S.B. Pope 2000. *Turbulent Flows*. Cambridge.
- [RPFCC02] Ch. Renner, J. Peinke, R. Friedrich, O. Chanal, und B. Chabaud 2002. *Universality of Small Scale Turbulence*. Phys. Rev. Lett 89, 124502.
- [Ri26] L.F. Richardson 1926. *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*. Proc. R. Soc. London A 110, 709.
- [Risk] H. Risken 1998. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin.
- [SLDYL01] D. Schertzer, M. Larcheveque, J. Duan, V.V. Yanovsky, und S. Lovejoy 2001. *Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Lévy stable noises*. J. Math. Phys. 42, 1.

- [SW89] W.R. Schneider und W. Wyss 1989. J. Math. Phys. 30, 134.
- [SS00] B.I. Shraiman und E.D. Siggia 2000. *Scalar Turbulence*. Nature 405.
- [Ta21] G.I. Taylor 1921. *Diffusion by continuous movements*. Proc. London Math. Soc. 20, 196.
- [Ts88] C. Tsallis 1988. *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. J. Stat. Phys. 52, 479.
- [UL69] F.R. Ulinich, B.Y. Lyubimov 1969. *Statistical theory of turbulence of an incompressible fluid at large Reynolds numbers*. Zh. Exper. Teor. Fiz. 55, 951.
- [YCST99] V.V. Yanovsky, A.V. Chechkin, D. Schertzer, und A.V. Tur 1999. *Lévy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation*. Physica A 282, 293.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Rudolf Friedrich für die interessante Themenstellung und die stets freundliche und hilfsbereite Betreuung meiner Arbeit.

Der Arbeitsgruppe am Institut für Theoretische Physik danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Für das Korrekturlesen und viele Ratschläge danke ich Till Frank, Rafaela Hillerbrand, Oliver Kamps und David Kleinhans.

Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für die fortwährende Unterstützung.

Erklärung zur Diplomarbeit:

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Oktober 2004