

Thermodynamische Aspekte des Standardmodells der Kosmologie

Tim Rehm

13. November 2013

1 Einleitung

Das Universum entstand nach heutigen Vorstellungen mit dem Urknall. Alle Materie war zu diesem Zeitpunkt in einem winzig kleinen Punkt komprimiert, einer Singularität. Von dort aus dehnte es sich immer weiter aus und kühlte dabei ab. Dieser Prozess findet bis heute statt und wird dies nach neuesten Erkenntnissen auch bis in alle Ewigkeit tun.

Die Energie der einzelnen Elementarteilchen war anfangs sehr groß, so dass sie allesamt relativistisch in einem Plasma vorlagen, das Universum war strahlungsdominiert. Durch Stöße und Reaktionen untereinander war gewährleistet, dass alle Teilchen die gleiche Temperatur besaßen. Erst im Zuge der Abkühlung kam es vor, dass einzelne Teilchen nichtrelativistisch wurden oder aus dem Plasma auskoppelten.

Die Beschreibung des frühen Universums gelingt mithilfe der Thermodynamik. Solange hohe Wechselwirkungsraten der Teilchen untereinander vorherrschen kann die Gleichgewichtsthermodynamik verwendet werden. Für das Nicht-Gleichgewicht muss dagegen die kompliziertere Boltzmann-Gleichung herangezogen werden. Im Rahmen dieser Zusammenfassung sollen einige interessante, mit Thermodynamik beschreibbare Aspekte des frühen Universums beleuchtet werden.

2 Thermodynamische Größen

Drei wichtige thermodynamische Größen für die folgenden Betrachtungen sind die *Teilchendichte* n , die *Energiedichte* ρ und der *Druck* p . Diese werden für ein System aus einer einzelnen Teilchensorte wie folgt berechnet:

$$n(\vec{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{p}) d\vec{p} \quad (1)$$

$$\rho(\vec{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{p}) f(\vec{p}) d\vec{p} \quad (2)$$

$$p(\vec{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\vec{p}|^2}{3E(\vec{p})} f(\vec{p}) d\vec{p} \quad (3)$$

Hierbei steht g für die Anzahl der inneren Freiheitsgrade des Teilchen. $f(\vec{p})$ ist die Verteilungsfunktion der Teilchen. Hierbei handelt es sich um die bekannte Fermi-Dirac-Statistik (FD) für Fermionen und die Bose-Einstein-Statistik (BE) für Bosonen

$$f_{FD}(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right) + 1} \quad (4)$$

$$f_{BE}(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right) - 1} \quad (5)$$

Hierbei ist T die Temperatur der Teilchen und μ ihr chemisches Potenzial. Besonders interessant sind die Lösungen dieser Integrale für den relativistischen Grenzfall, in dem $T \gg m$ gilt und weiterhin $T \gg \mu$ angenommen wird. Weiterhin lassen sie sich einfach für den nichtrelativistischen Fall lösen, in dem $m \gg T$ gilt. Die Lösungen sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Spezies	Teilchendichte n	Energiedichte ρ	Druck p
Fermionen, relativistisch	$\frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$	$\frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4$	$\frac{\rho}{3}$
Bosonen, relativistisch	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$	$\frac{\pi^2}{30} g T^4$	$\frac{\rho}{3}$
Nichtrelativistisch	$g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m-\mu}{T}\right)$	mn	mT

Tab. 1: Ergebnisse für n , ρ und p für relativistische Fermionen und Bosonen sowie für nichtrelativistische Teilchen.

Um vom Einteilchensystem auf ein Mehrteilchensystem überzugehen muss man die Werte für die Teilchendichte, Energiedichte und Druck für alle enthaltenen Teilchensorten aufsummieren. Dabei lässt sich die gute Näherung anwenden, dass nur relativistische Teilchen zum Gesamtwert beitragen:

$$\rho_{ges} = \sum_i \rho_i = \sum_{i=Fer} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_i T_i^4 + \sum_{j=Bos} \frac{\pi^2}{30} g_j T_j^4 \quad (6)$$

$$= \frac{\pi^2}{30} T^4 \left(\sum_{i=Fer} \frac{7}{8} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4 \right) = \frac{\pi^2}{30} T^4 \cdot g_{eff} \quad (7)$$

Zuletzt wurde der effektive Freiheitsgrad g_{eff} eingeführt, welche später noch von großer Bedeutung sein wird. Der eingeführte Quotient aus $T_{i/j}$ und T berücksichtigt, dass eine Teilchensorte unter Umständen eine andere Temperatur als das restliche Plasma innehaben kann.

3 Entropie

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Entropie und werden zeigen, dass diese in einem mitbewegten Volumen V konstant ist. Wir beginnen mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik, der sich in den folgenden zwei Formen schreiben lässt:

$$TdS = d(\rho V) + pdV = d[(\rho + p)V] - Vdp \quad (8)$$

Nach dem Satz von Schwarz müssen die partiellen zweiten Ableitungen einander entsprechen:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial p}{\partial T} \right) - \frac{\rho + p}{T^2} = \frac{1}{T} \frac{\partial \rho}{\partial T} \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow dp = \frac{\rho + p}{T} dT \quad (11)$$

Wir setzen diese Beziehung für dp in die rechte Form des 2. Hauptsatzes ein und erhalten so durch Umformen und Integration einen Ausdruck für die Entropie S :

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - \frac{V}{T} \frac{\rho + p}{T} dT \quad (12)$$

$$= d \left[\frac{(\rho + p)V}{T} + \text{const.} \right] \quad (13)$$

$$\Rightarrow S = \frac{(\rho + p)V}{T} + \text{const.} \quad (14)$$

Um zu zeigen, dass S im Volumen V konstant ist, verwenden wir eine bekannte Beziehung aus der Robertson-Walker-Metrik. Im weiteren setzen wir wiederum Gleichung (11) ein und teilen noch durch die Temperatur T :

$$V \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} [(\rho + p)V] \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{T} \frac{d}{dt} [(\rho + p)V] - \frac{V}{T} \frac{\rho + p}{T} \frac{dT}{dt} \quad (16)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{V}{T} (\rho + p) + \text{const.} \right] = \frac{dS}{dt} \quad (17)$$

Nachdem wir die Konstanz der Entropie gezeigt haben, definieren wir uns noch für weitere Zwecke die Entropiedichte s als die Entropie pro Volumen:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{\rho + p}{T} = \frac{2\pi^2}{45} g_{eff}^s T^3 \quad (18)$$

$$\text{mit } g_{eff}^s = \frac{7}{8} \cdot \sum_{i=Fer} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^3 \quad (19)$$

Die Schreibweise mit dem neu eingeführten, effektiven Freiheitsgrad der Entropie g_{eff}^s gilt dabei wiederum näherungsweise, wenn nur relativistische Teilchen beitragen.

Die Entropiedichte lässt sich in Relation zur Photonendichte schreiben. Photonen haben zwei innere Freiheitsgrade, so dass mit der Beziehung aus Tabelle 1 gilt:

$$n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2T^3 \quad (20)$$

Umgeformt nach der Temperatur und eingesetzt in die Entropiedichte ergibt sich der Zusammenhang:

$$s = \frac{\pi^4}{45\zeta(3)} g_{eff}^s n_\gamma \quad (21)$$

4 Effektive Freiheitsgrade

Bevor wir uns den effektiven Freiheitsgraden $_{eff}$ bzw. g_{eff}^s zuwenden, betrachten wir die inneren Freiheitsgrade der Teilchen des Standardmodells. Dieses ist in Abbildung 2 zu sehen.

Die 6 Quarks haben jeweils 2 Spinfreiheitsgrade, 3 Farben und jeweils ein Antiteilchen, so dass wir auf $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ Freiheitsgrade insgesamt kommen. Elektron, Myon und Tauon haben 2 Spins und ebenfalls Antiteilchen, so dass wir hier auf eine Summe von $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ kommen. Bei den Neutrinos muss man unterscheiden, ob man von Dirac- oder Majorana-Neutrinos ausgeht. In jedem Fall gibt es 3 Stück, die jeweils zwei Spinfreiheitsgrade haben. Dirac-Neutrinos haben zusätzlich ein Antiteilchen, während Majorana-Neutrinos ihre eigenen Antiteilchen sind. Dies macht in der Summe daher entweder 12 oder 6 Freiheitsgrade. Wir werden im folgenden von Majorana-Neutrinos ausgehen.

Bei den Bosonen haben wir das Photon, welches 2 Polarisations-Freiheitsgrade besitzt. Die 8 Gluonen haben ebenfalls je 2 Freiheitsgrade, so dass dies in der Summe 16 ergibt. Die W- und Z-Bosonen haben jeweils 3 Freiheitsgrade und das Higgs-Boson einen, in der Summe sind dies 10. Damit kommen wir auf insgesamt 90 Freiheitsgrade bei den Fermionen und 28 bei den Bosonen.

Drei Generationen
der Materie (Fermionen)

	I	II	III		
Masse	2,4 MeV	1,27 GeV	171,2 GeV	0	? GeV
Ladung	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
Name	u up	c charm	t top	γ Photon	H Higgs Boson
	4,8 MeV	104 MeV	4,2 GeV	0	
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
Quarks	d down	s strange	b bottom	g Gluon	
	<2,2 eV	<0,17 MeV	<15,5 MeV	91,2 GeV	
	0	0	0	0	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	ν_e Elektron- Neutrino	ν_μ Myon- Neutrino	ν_τ Tau- Neutrino	Z⁰ Z Boson	
	0,511 MeV	105,7 MeV	1,777 GeV	80,4 GeV	
	-1	-1	-1	± 1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
Leptonen	e Elektron	μ Myon	τ Tau	W[±] W Boson	Eichbosonen

Abb. 1: Das Standardmodell der Teilchenphysik mit den Fermionen (Quarks und Leptonen) und den Bosonen (Eichbosonen und Higgs). [4]

In den Gleichungen (7) und (19) hatten wir die effektiven Freiheitsgrade eingeführt:

$$g_{eff} = \frac{7}{8} \cdot \sum_{i=Fer} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4 \quad (22)$$

$$g_{eff}^s = \frac{7}{8} \cdot \sum_{i=Fer} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^3 \quad (23)$$

In guter Näherung tragen wieder nur die relativistischen Teilchen bei. Die Entwicklung der Freiheitsgrade in Abhängigkeit der Temperatur (und damit dem Alter) des Universums ist in Abbildung 2 zu sehen. Solange die Temperaturen der relativistischen Teilchen gleich sind, liegen die beiden Kurven übereinander. Einige wichtige Bereiche in den Kurven sind folgende:

- $T < 100 \text{ keV}$: Nur noch die Photonen und die Neutrinos sind relativistisch. Die Neutrinos haben eine abweichende Temperatur, was zu $g_{eff} = 3,36$ und $g_{eff}^s = 3,91$ führt.
- $1 \text{ MeV} < T < 20 \text{ MeV}$: Photonen und Neutrinos haben die gleiche Temperatur, und zusätzlich sind noch Elektron und Positron relativistisch: $g_{eff}^{(s)} = 2 + \frac{7}{8}(6 + 4) = 10,75$.
- $T \approx 200 \text{ MeV}$: Der starke Abfall von $g_{eff}^{(s)}$ wird dadurch verursacht, dass die Quarks zu Hadronen werden und sich dadurch die Freiheitsgrade stark verringern.
- $T > 300 \text{ GeV}$: Alle Teilchen des Standardmodells sind relativistisch: $g_{eff}^{(s)} = 28 + \frac{7}{8} \cdot 90 = 106,75$

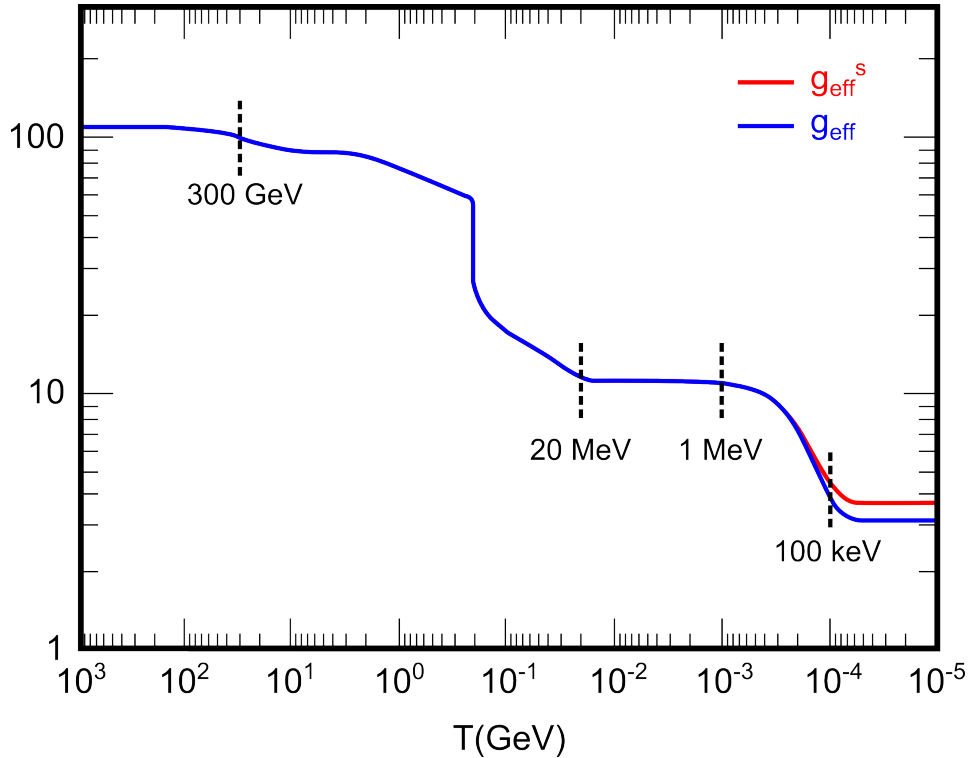


Abb. 2: Die effektiven Freiheitsgrade g_{eff} bzw. g_{eff}^s in Abhängigkeit der Temperatur. [1]

5 Temperatur und Zeit

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen der Temperatur und dem Alter des Universums herleiten. Hierzu gehen wir von der Friedmann-Gleichung aus:

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{R^2} \quad (24)$$

R ist der Skalenfaktor, G die Gravitationskonstante, ρ die bereits bekannte Energiedichte, und k der Krümmungsfaktor. Im strahlungsdominierten Universum gilt:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_{eff} T^4 \propto \frac{1}{R^4} \quad (25)$$

Für kleine Werte des Skalenfaktors R können wir den zweiten Term der Friedmann-Gleichung in guter Näherung weglassen, da dieser nur proportional zu R^{-2} ist. Im strahlungsdominierten Universum ist der Skalenfaktor weiterhin proportional zur Wurzel aus der Zeit, womit für den Hubble-Parameter H gilt:

$$R = C\sqrt{t}, \quad \dot{R} = \frac{C}{2\sqrt{t}} \Rightarrow H = \frac{1}{2t} \quad (26)$$

Setzen wir diesen Ausdruck sowie die Energiedichte in die Friedmann-Gleichung ein, erhalten wir nach Umformen den gewünschten Ausdruck, mit der Planck-Masse m_{pl} :

$$\frac{1}{2t} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = 1,66\sqrt{g_{eff}} \frac{T^2}{m_{pl}} \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow t = 0,30 \frac{m_{pl}}{\sqrt{g_{eff}} T^2} \quad (28)$$

6 Entkopplung von Teilchen

Haben die verschiedenen Teilchensorten im Plasma hohe Wechselwirkungsraten Γ , so liegt ein thermisches Gleichgewicht vor. Fällt die Rate unter einen Grenzwert, so stoßen die Teilchen nur noch sehr selten und verlassen das Gleichgewicht. Als Abschätzung für diesen Grenzwert kann man den Hubble-Parameter H annehmen. Wird $\Gamma < H$, so kommen die Reaktionen zum Erliegen, da sich das Universum so schnell ausdehnt, dass die Teilchen kaum noch aufeinandertreffen.

Die Temperatur der entkoppelten Teilchen wird durch die Expansion ständig rotverschoben. Hierbei muss man zwischen relativistischen und nichtrelativistischen Teilchen unterscheiden:

$$T = T_D \frac{R_D}{R} \propto R^{-1} \quad (\text{Relativistisch}) \quad (29)$$

$$T = T_D \frac{R_D^2}{R^2} \propto R^{-2} \quad (\text{Nichtrelativistisch}) \quad (30)$$

Hierbei steht D für "Decoupling", also der jeweilige Wert zum Zeitpunkt des Entkoppelns der Teilchen. Wie wir bereits gesehen haben ist die Entropie S im Plasma erhalten, woraus wir dessen Abhängigkeit von der Temperatur ablesen können:

$$S = \frac{2\pi^2}{45} g_{eff}^s T^3 R^3 = const. \quad \Rightarrow \quad T \propto (g_{eff}^s)^{-\frac{1}{3}} R^{-1} \quad (31)$$

Ist der effektive Freiheitsgrad konstant, so nimmt die Temperatur des Plasma daher genau so wie die Temperatur entkoppelter, relativistischer Teilchen mit R^{-1} ab.

Wir betrachten den Vorgang der Entkopplung der Neutrinos. Die Reaktionsrate der Neutrinos ist wie folgt gegeben:

$$\Gamma = n \cdot v \cdot \sigma \quad \propto \quad g_{eff} T^3 \cdot c \cdot G_F^2 T^2 \quad (32)$$

Hierbei ist σ der Wirkungsquerschnitt und $v \approx c$ die Geschwindigkeit der Neutrinos. Fordern wir $\Gamma = H$, so ergibt sich für die Entkopplungstemperatur:

$$\frac{\Gamma}{H} \propto g_{eff} G_F^2 T^3 m_{pl} \stackrel{!}{=} 1 \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow T \approx 4 \text{ MeV} \quad (34)$$

Bei dieser Temperatur sind außer den Neutrinos nur das Photon und Elektron und Positron relativistisch. Der effektive Freiheitsgrad ändert sich das nächste Mal dann, wenn Elektron und Positron entkoppeln, bis dahin haben die Neutrinos trotz des Entkoppelns noch die gleiche Temperatur wie das Plasma. Das Entkoppeln von e^\pm geschieht bei einer Temperatur von 1 MeV, da die Photonen dann nicht mehr genug Energie haben, um ein Elektron-Positron-Paar zu erzeugen. Beim Entkoppeln geben die Teilchen Energie an die Photonen ab, da die Entropie konstant bleiben muss, sich aber g_{eff}^s ändert:

$$(g_{eff}^s T^3)_{vorher} = (g_{eff}^s T^3)_{nachher} \quad (35)$$

$$\Rightarrow T_{nach} = \left(\frac{(g_{eff}^s)_{vor}}{(g_{eff}^s)_{nach}} \right)^{\frac{1}{3}} T_{vor} = \left(\frac{11/2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} T_{vor} \quad (36)$$

Der Freiheitsgrad vor dem Entkoppeln setzte sich dabei aus Photon und e^\pm zusammen, nach dem Entkoppeln sind nur noch die Photonen vorhanden. Die Temperatur vor dem Entkoppeln entspricht der Temperatur der Neutrinos, die nach dem Entkoppeln jener der Photonen. Hieraus ergibt sich die Beziehung:

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \quad (37)$$

Die heutige Temperatur des Photonenhintergrund beträgt 2,73 K, womit ein Neutrino-Hintergrund mit 1,95 K postuliert wird! Mit diesen Kenntnissen lassen sich auch die Werte der Freiheitsgrade zum heutigen Zeitpunkt berechnen:

$$g_{eff} = \frac{7}{8} \cdot \sum_{i=Fer} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4 = \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} + 2 = 3,36 \quad (38)$$

$$g_{eff}^s = \frac{7}{8} \cdot \sum_{i=Fer} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \sum_{j=Bos} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^3 = \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} + 2 = 3,91 \quad (39)$$

7 Boltzmann-Gleichung

Beim Entkoppeln verlassen die Teilchen das Gleichgewicht und können daher nicht mehr mit der Gleichgewichtsthermodynamik behandelt werden. Stattdessen wird die Boltzmann-Gleichung verwendet, dessen allgemeine Form wie folgt aussieht:

$$\hat{L}f(\vec{v}, \vec{x}) = \left\{ \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_v + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v \right\} f(\vec{v}, \vec{x}) = \mathbf{C}f(\vec{v}, \vec{x}) \quad (40)$$

Dabei ist f die Verteilungsfunktion der Teilchen, L der Liouville-Operator, welcher die Änderung des Phasenraumvolumens beschreibt, und C der Kollisionsoperator, welcher Stöße und Reaktionen zwischen den Teilchen beschreibt. In der Robertson-Walker-Metrik und unter Verwendung der Definition der Teilchendichte lässt sich die Gleichung wie folgt schreiben:

$$\frac{dn}{dt} + 3nH = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \frac{1}{E} \mathbf{C}f(\vec{v}, \vec{x}) \quad (41)$$

Der erste Term beschreibt die Änderung der Teilchendichte, während der zweite die Expansion des Universums berücksichtigt. Wenn wir nur ein Teilchen Ψ betrachten, welche als einzige Reaktion die Annihilation mit ihrem Antiteilchen $\Psi + \bar{\Psi} \leftrightarrow X + \bar{X}$ vornehmen, so können wir die rechte Seite der Gleichung so umschreiben:

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} \frac{1}{E} \mathbf{C}f(\vec{v}, \vec{x}) = - \int d\Pi_\Psi d\Pi_{\bar{\Psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} \cdot (2\pi)^4 \quad (42)$$

$$\cdot \delta(p_\Psi + p_{\bar{\Psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \cdot |M|^2 (f_\Psi f_{\bar{\Psi}} - f_X f_{\bar{X}}) \quad (43)$$

$$\text{mit } d\Pi = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}}{2E} \quad (44)$$

Die Delta-Funktion sorgt für die Energie- und Impulserhaltung. M ist das Matrixelement, welches den Wirkungsquerschnitt für die Reaktion beinhaltet, und f_Ψ ist die Phasenraumdichte vom Teilchen Ψ .

Weitere mögliche Annahmen sind, dass Ψ und sein Antiteilchen symmetrisch vorhanden sind, die CP-Erhaltung gewahrt ist und dass für das Teilchen X weitere Zerfallskanäle vorhanden sind, so dass die Hinreaktion des Teilchens Ψ deutlich wahrscheinlicher als die Rückreaktion ist. Mit diesen Annahmen lässt sich die Boltzmann-Gleichung weiter umschreiben:

$$\frac{dn_\Psi}{dt} + 3n_\Psi H = - \langle \sigma v \rangle [n_\Psi^2 - (n_\Psi^{eq})^2] \quad (45)$$

σ ist hier der Wirkungsquerschnitt und v die Teilchengeschwindigkeit. n_Ψ^{eq} ist die Gleichgewichtsteilchendichte. Dies ist die Teilchendichte, welche bei der Temperatur T vorliegt, wenn die Teilchen nicht entkoppelt sind, während n_Ψ die tatsächliche Teilchendichte beschreibt. Durch Einführung neuer Variablen gelangt man auf die folgende Form:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{- \langle \sigma v \rangle s}{x \cdot H} \cdot (Y^2 - Y_{eq}^2) \quad (46)$$

$$\text{mit } Y = \frac{n_\Psi}{s}, \quad x = \frac{m}{T} \quad (47)$$

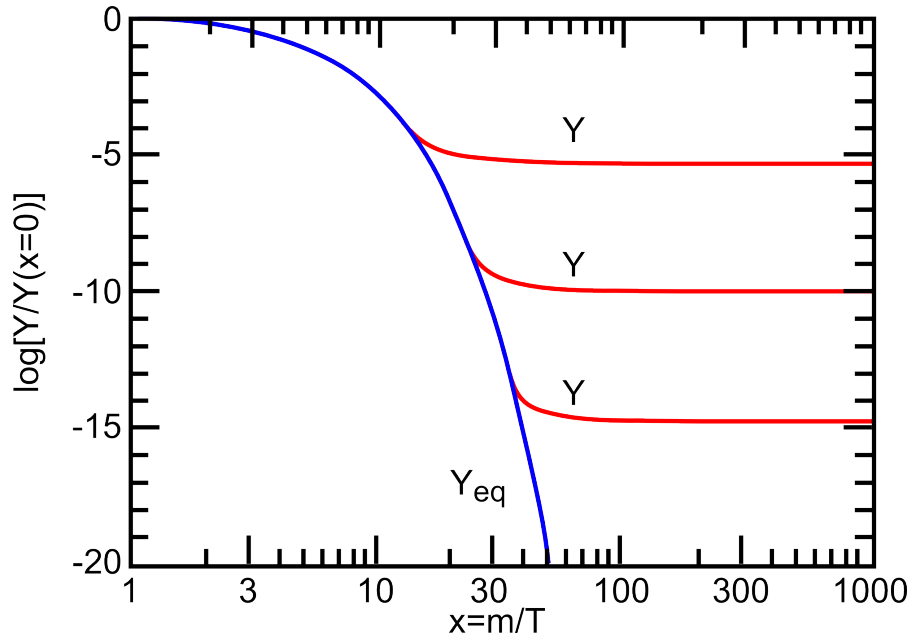


Abb. 3: Ausfrieren einer nichtrelativistischen Teilchenspezies. [1]

Y ist hier die Teilchenzahl, dessen Änderung in Abhängigkeit der Variablen x auf der linken Seite steht. Durch Identifizierung der Reaktionsrate $\Gamma = \langle \sigma v \rangle s$ und weiterem Umformen kommen wir auf die finale Form:

$$\frac{x}{Y_{eq}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma}{H} \left[\left(\frac{Y}{Y_{eq}} \right)^2 - 1 \right] \quad (48)$$

Wir betrachten Abbildung 3. Die Teilchenzahl unserer - als nichtrelativistisch angenommener - Spezies Ψ nimmt im Laufe der Zeit exponentiell ab (blaue Kurve). Kommt es allerdings irgendwann zum Entkoppeln der Teilchen und damit auch zum Erliegen der Annihilationsreaktionen, so strebt die Teilchenzahl nach Gleichung (48) gegen einen festen Wert (rote Kurve). Dieser ist stark abhängig vom Entkopplungszeitpunkt, wie man in der Abbildung erkennen kann.

Man bezeichnet die Teilchen, die nichtrelativistisch ausfrieren, als kalte Relikte. Ein Beispiel hierfür sind die Nukleonen. Relativistisch ausgefrorene Teilchen wie die Neutrinos werden dagegen heiße Relikte genannt.

8 Literatur

- [1] Kolb, Turner: *The Early Universe (Chapters 3 and 5)*, Addison-Wesley 1993.
- [2] Bergström, Goobar: *Cosmology and Particle Astrophysics (Chapter 8)*, Springer 1998.
- [3] Roos: *Introduction to Cosmology (Chapter 5)*, Wiley 2003.
- [4] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg, 07.11.2013