

Ising Modell I - Grundlagen und Lösung in einer Dimension

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

MSc Physik

5. Dezember 2011

Patrick Hamers

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Grundlagen	1
3 Lösung des Ising-Modells	2
3.1 Lösung ohne externes Magnetfeld	2
3.2 Lösung mit externem Magnetfeld	3
4 Thermodynamik des Ising-Modells	5
5 Weitere Deutungen des Ising-Modells	10
6 Schlussbetrachtung	11

1 Einleitung

Das Ising-Modell ist ein theoretisches Modell zur Beschreibung des Ferromagnetismusses. Entwickelt wurde es ursprünglich von WILHELM LENZ im Jahre 1920, detaillierter ausgearbeitet hat es aber ERNST ISING um 1924 im Rahmen seiner Doktorarbeit, die von LENZ betreut wurde. Das Ising-Modell kann als Spezialfall des sogenannten n -Vektor-Modells aufgefasst werden. Darin werden die Gitterpunkte eines d -dimensionalen Gitters mit n -dimensionalen Vektoren besetzt. ISING beschränkte sich in seiner Arbeit auf eine eindimensionale Spinkette, deren Spins die skalaren Ausrichtungen ± 1 annehmen konnten (dies entspräche dem n -Vektor-Modell mit $d = 1$, $n = 1$). Die Spinkette kann sich dabei in einem externem Magnetfeld befinden. ISING fand heraus, dass es im eindimensionalen Fall keinen Phasenübergang von der paramagnetischen zur ferromagnetischen Phase bei endlichen Temperaturen gibt. Enttäuscht über dieses Ergebnis postulierte er, dass auch für höhere Raumdimensionen des Modells (quadratisches Spingitter mit $d = 2$, kubisches Spingitter mit $d = 3$) kein Phasenübergang bei endlichen Temperaturen auftritt. Dieses Postulat konnte von LARS ONSAGER widerlegt werden, der 1944 das zweidimensionale Ising-Modell ohne externes Magnetfeld exakt löste und dabei einen Phasenübergang beobachtete.

Das Ising-Modell ist heute eines der am häufigsten untersuchten Modelle der statistischen Physik mit weitreichenden Anwendungsmöglichkeiten. So lassen sich z.B. Flüssigkeiten mit dem (Ising-)Gittergas-Modell untersuchen.

Im Folgenden wird das Ising-Modell sowohl mit als auch ohne externes Feld in einer Dimension gelöst und die Thermodynamik des Modells genauer untersucht.

2 Grundlagen

Der Hamiltonoperator des Ising-Modells ist gegeben durch

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - B \sum_i S_i, \quad J_{ij} > 0, \quad (1)$$

wobei J_{ij} die Kopplungskonstante zwischen zwei Spins S_i und S_j darstellt und mit B das Magnetfeld bezeichnet ist. Direkt ablesbar aus dem Hamiltonoperator ist, dass J für $J > 0$ gleichgerichtete Spins energetisch bevorzugt und dass der Spin die einzige Variable ist¹. Dabei beschreibt der erste Term die Spin-Spin-Wechselwirkung und der zweite Term den Einfluss eines externen Magnetfelds. Weiterhin kann generell eine Wechselwirkung zwischen zwei beliebig weit entfernten Spins betrachtet werden. Dies unterbindet man jedoch meist mit der Näherung, dass die Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn stattfindet (siehe Abb. 1).

¹Wählt man $J < 0$ würde kein ferromagnetisches, sondern ein antiferromagnetisches System beschrieben.

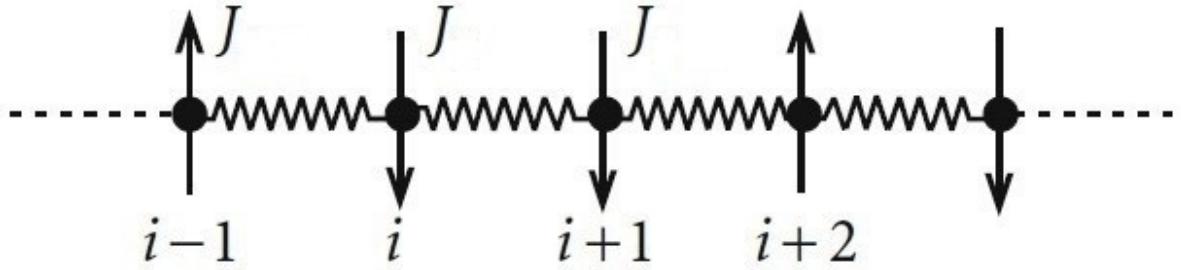


Abbildung 1: Modell der linearen Spinkette mit isotroper Wechselwirkung und nächster-Nachbar-Wechselwirkung (entnommen aus [Nol05]).

Geht man zudem von einem isotropen Gitter aus, sei die Kopplung also zwischen jedem Spinpaar gleich ($J_{ij} \equiv J$), kann der Hamiltonoperator ohne externes Feld wie folgt vereinfacht werden

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1}. \quad (2)$$

Dieser Hamiltonoperator kann nun zur exakten Berechnung der Zustandssumme angesetzt werden.

3 Lösung des Ising-Modells

3.1 Lösung ohne externes Magnetfeld

Wir betrachten zunächst den Fall ohne externes Magnetfeld. Unter Berücksichtigung der Wechselwirkung nächster Nachbarn und der Annahme eines isotropen Gitters ist der Hamiltonoperator gegeben durch

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} \quad (3)$$

und die kanonische Zustandssumme durch

$$Z_N = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \cdots \sum_{S_N} \exp \left(\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} \right), \quad (4)$$

Für die Berechnung von Z_N gibt es allgemein unterschiedliche Möglichkeiten. Wir wollen hier eine Berechnung mittels Rekursion anwenden und fügen dafür ein $(N + 1)$ -tes Glied an Z_N an

$$Z_{N+1} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \cdots \sum_{S_N} \exp \left(\beta J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} \right) \sum_{S_{N+1}} \exp (\beta J S_N S_{N+1}). \quad (5)$$

Für das zusätzliche Glied ergibt sich leicht

$$\sum_{S_{N+1}}^{\pm 1} \exp(\beta J S_N S_{N+1}) = 2 \cosh(\beta J S_N) = 2 \cosh(\beta J), \quad (6)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass der cosh eine gerade Funktion ist.
Für die Zustandssumme ergibt sich damit die Rekursionsformel

$$Z_{N+1} = Z_1 2^N \cosh^N(\beta J), \quad (7)$$

wobei Z_1 die Zustandssumme eines Spins beschreibt. Da ein einzelner Spin keine nächsten Nachbarn hat und deshalb nicht wechselwirkt, ergibt sich

$$Z_1 = \sum_{S_i} e^0 = 2.$$

Die Zustandssumme nimmt damit die folgende Gestalt an

$$Z_N(T) = 2^N \cosh^{N-1}(\beta J). \quad (8)$$

3.2 Lösung mit externem Magnetfeld

Das Ising-Modell mit externem Magnetfeld kann mithilfe der von LARS ONSAGER 1944 entwickelten Transfermatrix-Methode exakt gelöst werden. Dabei wird neben den bereits geforderten Randbedingungen (Isotropie des Gitters, nächste-Nachbar-Wechselwirkung) zusätzlich die periodische Randbedingung $S_{N+1} = S_1$ gefordert, die also den N -ten Spin an den ersten Spin koppelt; es entsteht ein geschlossener Spin-Ring (siehe Abb. 2).

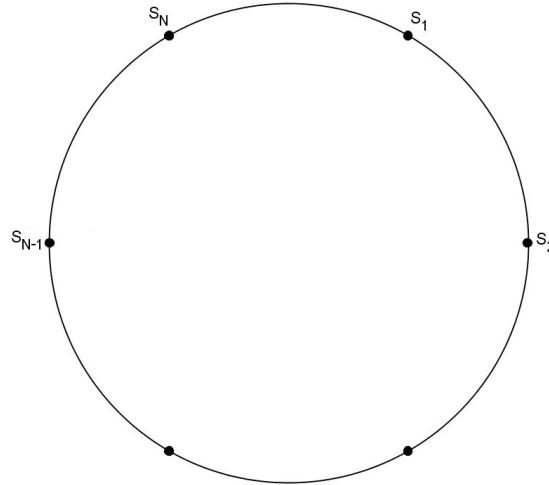


Abbildung 2: Skizzierte Darstellung der periodischen Randbedingung $S_{N+1} = S_1$, die die zuerst offene Spinkette (siehe Abb. 1) zu einem Ring schließt.

Diese periodische Randbedingung erleichtert die Berechnug der Zustandssumme erheblich im Zusammenhang mit der Transfermatrix-Methode. Wie sinnvoll sie jedoch ist, lässt sich erst nach Berechnung der Zustandssumme mit externem Feld sagen. Der Hamiltonoperator des Ising-Modells mit externem Magnetfeld lautet

$$H = \sum_{i=1}^N (-J S_i S_{i+1} - B S_i) \quad (9)$$

und die kanonische Zustandssumme ist gegeben durch

$$Z_N = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \cdots \sum_{S_N} \exp \left(\beta \sum_{i=1}^N \left[J S_i S_{i+1} + \frac{1}{2} B (S_i + S_{i+1}) \right] \right), \quad (10)$$

wobei im Term mit externem Feld B die Summation über zwei Spins läuft und mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ normiert wird, was später rechnerische Vorteile bietet. Zur Lösung dieser Zustandssumme definieren wir eine Transfermatrix P , die der folgenden Bedinung genügen soll

$$\langle S | P | S' \rangle = e^{\beta(JSS' + \frac{1}{2}B(S+S'))}, \quad S, S' = \pm 1. \quad (11)$$

Die einzelnen Elemente der Transfermatrix können durch Einsetzen der möglichen Spinwerte bestimmt werden und es ergibt sich für die gesamte Transfermatrix

$$P = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-B)} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Aufgrund der Definitionsgleichung von P können wir die Zustandssumme wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} Z_N &= \sum_{S_1} \sum_{S_2} \cdots \sum_{S_N} \langle S_1 | P | S_2 \rangle \langle S_2 | P | S_3 \rangle \cdots \langle S_N | P | S_1 \rangle \\ &= \sum_{S_1} \langle S_1 | P^N | S_1 \rangle \\ &= \text{Sp } P^N, \end{aligned}$$

wobei Sp die Spur bezeichnet. Dabei wurde die periodische Randbedingung ($S_{N+1} = S_1$) ausgenutzt und im ersten Schritt eingesetzt.

Der gewonnene Ausdruck $Z_N = \text{Sp } P^N$ kann noch weiter aufgelöst werden. Nutzt man aus, dass P symmetrisch und diagonalisierbar ist, zu jeder diagonalisierbaren Matrix A eine Matrix B existiert, sodass $P = B^{-1}AB$, wobei A Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Elementen, und die Spur unter zyklischer Vertauschung invariant bleibt, ergibt sich

$$Z_N = E_+^N + E_-^N \quad (13)$$

mit den Eigenwerten E_+ und E_- der Transfermatrix P . Diese können über $\det(P - E_\pm \mathbf{1}) = 0$ bestimmt werden zu

$$E_\pm = e^{\beta J} \left[\cosh(\beta B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta J} \sinh(2\beta J)} \right]. \quad (14)$$

In Voraussicht auf den thermodynamischen Limes schreiben wir Gl. (13) um zu

$$Z_N(B, T) = E_+^N \left[1 + \left(\frac{E_-}{E_+} \right)^N \right]. \quad (15)$$

Da für alle Feldstärken B $E_+ > E_-$ gilt, kann im therm. Limes $N \rightarrow \infty$ E_- vernachlässigt werden. Für die Zustandssumme ergibt sich damit der finale Ausdruck

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_N(B, T) = E_+^N = e^{\beta J N} \left[\cosh(\beta B) + \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta J} \sinh(2\beta J)} \right]^N. \quad (16)$$

Um, wie am Anfang dieses Abschnittes beschrieben, die Sinnhaftigkeit der geforderten periodischen Randbedingung zu untersuchen, wird in Gl.(16) das Magnetfeld zu 0 gesetzt und der resultierende Term mit der Zustandssumme ohne externes Feld (Gl. (8)) verglichen. Dabei ergibt sich

$$Z_N(0, T) = 2^N \cosh^N(\beta J) [1 + \tanh^N(\beta J)]. \quad (17)$$

Im thermodynamischen Limes geht dieser Ausdruck über in

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_N(0, T) = 2^N \cosh^N(\beta J) \quad \text{für} \quad T \neq 0. \quad (18)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der Zustandssumme ohne externes Feld (8) bis auf eine Potenz des Cosinus Hyperbolicus überein, welche gerade durch die periodische Randbedingung zustande kommt, da über ein zusätzliches Spinaar summiert wird. Die Äquivalenz der Zustandssummen bekräftigt damit die Wahl der periodischen Randbedingungen.

4 Thermodynamik des Ising-Modells

Mit der Berechnung der Zustandssummen (8) und (16) und lässt sich der Übergang zur Thermodynamik machen. Für das thermodynamische Potential der freien Energie F ergibt sich mit

$$F = -k_B T \ln Z \quad (19)$$

leicht

$$F = F = -N k_B T \ln (2 \cosh(\beta J)) \quad (20)$$

ohne externes Magnetfeld und

$$F(B, T) = -N \left(J + k_B T \left[\cosh(\beta B) + \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta J} \sinh^2(2\beta J)} \right] \right) \quad (21)$$

mit eingeschaltetem Magnetfeld. Setzt man in Gl. (21) $B = 0$ und betrachtet das Ergebnis im thermodynamischen Limes, erhält man

$$\begin{aligned} F(0, T) &= -N k_B T [\ln (2 \cosh(\beta J)) + \ln (1 + \tanh^N(\beta J))] \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} -N k_B T \ln (2 \cosh(\beta J)). \end{aligned} \quad (22)$$

Dieser Ausdruck stimmt exakt mit der Freien Energie des Ising-Modells ohne externes Feld (20) überein und bestätigt damit erneut die Wahl der periodischen Randbedingungen.

Aufschluss über einen möglichen Phasenübergang von der paramagnetischen zur ferromagnetischen Phase kann über die Magnetisierung gewonnen werden. Zeigt sich hier eine sogenannte spontane Magnetisierung M

$$M(T) = \langle S \rangle , \quad (23)$$

wobei $\langle S \rangle$ den Gesamtspinerwartungswert beschreibt, findet ein Phasenübergang statt.

Zur Berechnung der Magnetisierung ohne externes Magnetfeld betrachten wir zunächst die Spinkorrelation $\Gamma(j) = \langle S_i S_{i+j} \rangle$. Diese gibt an, wie stark die Korrelation zweier Spins im Abstand j zueinander ist.

$$\begin{aligned} \Gamma(j) &= \langle S_i S_{i+j} \rangle \\ &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S_i\}} (S_i S_{i+j}) \exp \left[\sum_{m=1}^{N-1} \beta J S_m S_{m+1} \right] \\ &= \frac{1}{Z_N} \sum_{\{S_i\}} (S_i S_{i+1})(S_{i+1} S_{i+2}) \cdots (S_{i+j-1} S_{i+j}) \exp [\dots] \\ &= \frac{1}{Z_N} \frac{\partial^j}{\partial(\beta J)^j} Z_N \\ &= \frac{1}{Z_N} \left(\frac{\partial}{\partial(\beta J)} Z_N \right)^j \\ &= \tanh^j(\beta J) . \end{aligned} \quad (24)$$

Zu erkennen ist, dass mit größer werdendem Abstand j die Korrelation abnimmt, bis im Grenzfall $j \rightarrow \infty$ die Spins schließlich unkorreliert sind (siehe Abb. 3), es gilt also $\langle S_i S_{i+j} \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle S_i \rangle \langle S_{i+j} \rangle$.

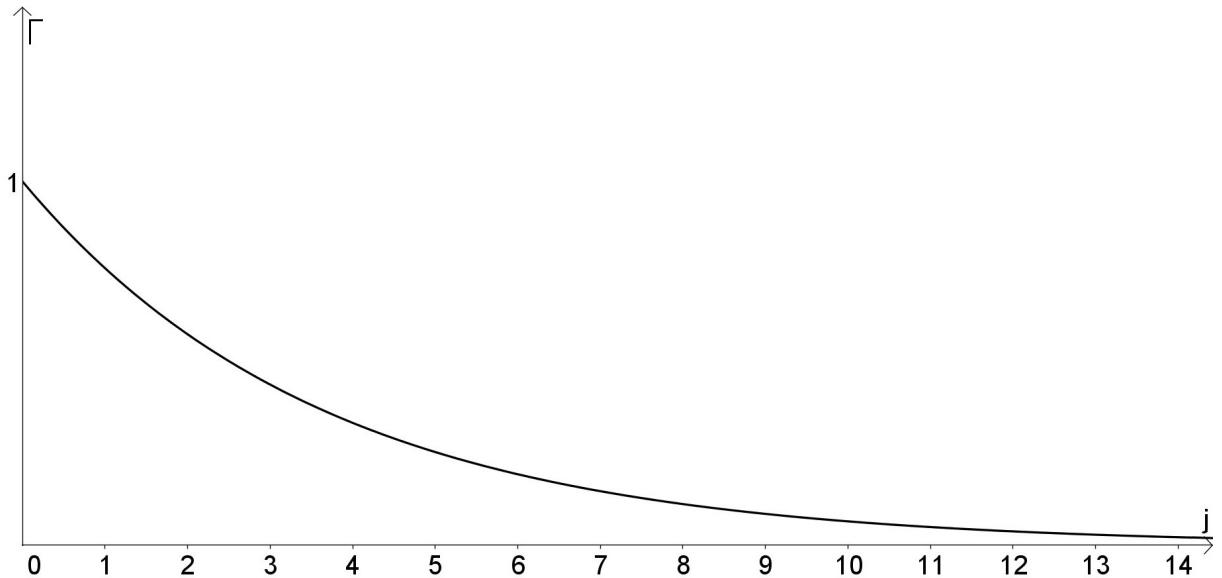


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Spinkorrelation $\Gamma(j)$ zweier Spins abhängig von deren Abstand j zueinander.

Da ein isotropes Gitter angenommen wurde ist zudem der Spinerwartungswert eines jeden Spins S_k gleich: $\langle S_k \rangle = \langle S \rangle$. Damit ergibt sich $\langle S_i S_{i+j} \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle S_i \rangle \langle S_{i+j} \rangle = \langle S \rangle^2$. Dieses Ergebnis lässt sich nun ausnutzen, um die Magnetisierung zu bestimmen (siehe auch Abb. 4):

$$\begin{aligned} M^2(T) &= \langle S \rangle^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_i S_j \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \tanh^j(\beta J) \\ \Rightarrow M(T) &= \begin{cases} 0 & \text{für } T > 0 \\ 1 & \text{für } T = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

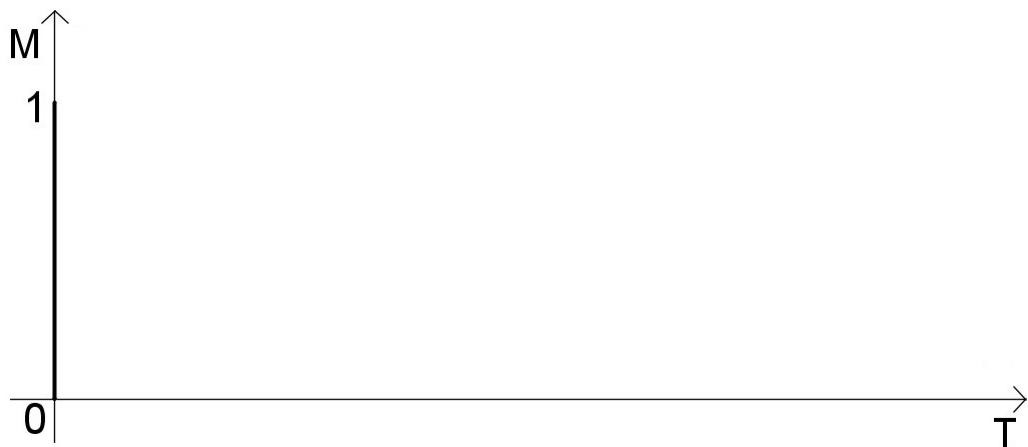


Abbildung 4: Spontane Magnetisierung des Ising-Modells ohne externes Magnetfeld.

Erst bei $T = 0$ K tritt eine spontane Magnetisierung auf. Bei endlichen Temperaturen weist das Ising-Modell ohne externes Magnetfeld also **keinen** Phasenübergang auf.

Um die Magnetisierung mit externem Magnetfeld zu bestimmen, greifen wir auf die Relation

$$M = -\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{F}{k_B T} \right) \quad (26)$$

zurück und mit (21) ergibt sich

$$M(B, T) = N \frac{\sinh(\beta B)}{\cosh(\beta B) + \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta J} \sinh(2\beta J)}}. \quad (27)$$

In der folgenden Abbildung 5 ist der Verlauf von $M(B, T)$ dargestellt.

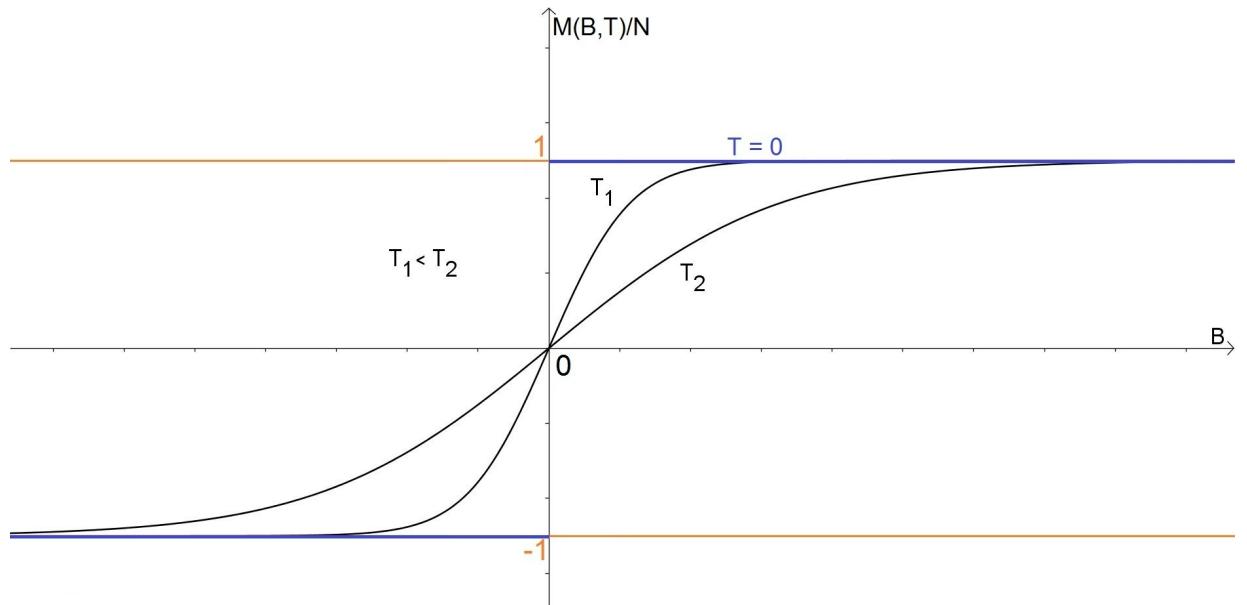


Abbildung 5: Spontane Magnetisierung des Ising-Modells mit externem Magnetfeld.

Zu erkennen ist, dass, wie beim Fall ohne Feld, bei keiner endlichen Temperatur eine Restmagnetisierung vorhanden bleibt. Erst bei $T = 0$ K wäre dies der Fall.

Das Ising-Modell in einer Dimension zeigt also keinen Phasenübergang bei endlichen Temperaturen.

Die Tatsache, dass bei $T = 0$ K eine spontane Magnetisierung vorhanden ist, kann durch die Suszeptibilität χ auch anderweitig bestätigt werden. Diese sollte dafür an der kritischen Temperatur $T = 0$ K divergieren. Zur Berechnung von χ für den Fall ohne externes

Magnetfeld nutzen wir das Fluktuations-Dissipations-Theorem:

$$\begin{aligned}
 \chi_T(B=0) &= \beta\mu_0^2 \sum (\Gamma(j) - M^2) \\
 &= \beta\mu_0^2 \sum_{i,j} (\langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle) \\
 &= \beta\mu_0^2 \sum_j \tanh^j(\beta J) \\
 &= \frac{\beta\mu_0^2}{1 - \tanh(\beta J)}. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Graphisch sieht der Verlauf der inversen Suszeptibilität χ^{-1} wie folgt aus:

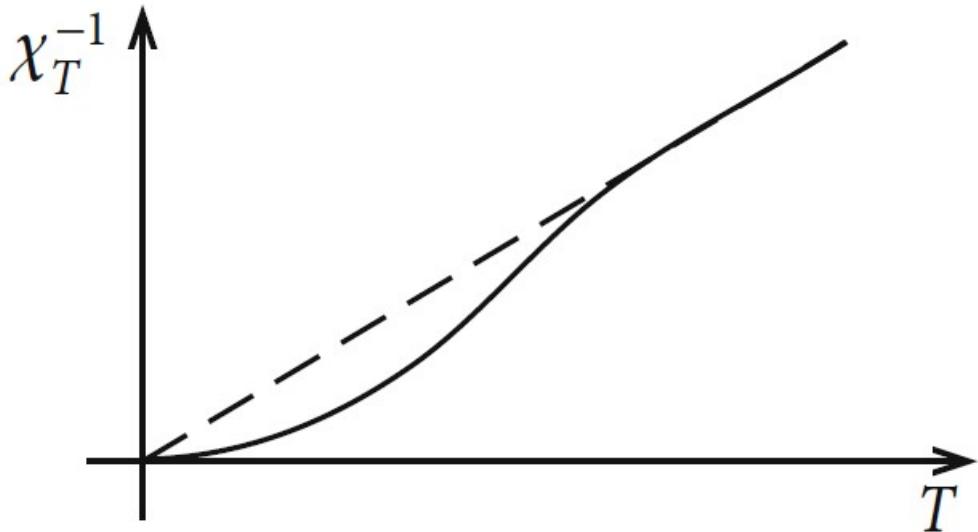


Abbildung 6: Inverse Suszeptibilität χ^{-1} für das feldlose Ising-Modell (entnommen aus [Nol05]).

Deutlich zu erkennen ist die Divergenz von χ bei $T = 0$ K. Weiterhin verläuft $\chi \propto \frac{1}{T}$ für große Temperaturen. Die Suszeptibilität erfüllt damit das CURIE-Gesetz $\chi_T = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T = \frac{C}{T}$ mit der Curie-Konstanten C .

Zuletzt überprüfen wir, ob das Ising-Modell den dritten Hauptsatz der Thermodynamik $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ erfüllt. Dazu berechnen wir

$$S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \tag{29}$$

und es ergibt sich

$$S = Nk_B (\ln[2 \cosh(\beta J)] - \beta J \tanh(\beta J)). \tag{30}$$

Dieser Ausdruck der Entropie verschwindet im Grenzfall $T \rightarrow 0$, sodass der das Ising-Modell den dritten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt.

5 Weitere Deutungen des Ising-Modells

Das Ising-Modell kann leicht auf weitere, nicht ausschließlich magnetische Modelle angewendet werden. So können beispielsweise binäre Legierungen mit dem Ising-Modell untersucht werden. Dabei können die Gitterpunkte entweder mit Molekülen des Typs A ($S_i = +1$) oder Molekülen des Typs B ($S_i = -1$) besetzt sein. Für eine positive Kopplung J wird die Gruppierung gleichartiger Moleküle bevorzugt. Ein möglicher Phasenübergang kann damit z.B. in Form von Kondensation bzw. Ausflockung der einen Molekülsorte aus der anderen oder allgemein zwischen Mischung und Trennung der beiden Molekülsorten beobachtet werden. Anwendung findet das Modell der binären Legierungen z.B. bei Gas-Fluid-Gemischen.

Eine weitere Deutung des Ising-Modells ist das sogenannte Gittergas, welches zur Beschreibung von Flüssigkeiten angesetzt werden kann. Dabei ist das Volumen V in A molekulargroße Zellen unterteilt und die Moleküle des Systems wechselwirken über ein *hard-core*-Potential. Beim Gittergas können die Gitterplätze entweder besetzt ($S_i = 1$) oder unbesetzt ($S_i = -1$) sein. In der Praxis substituiert man häufiger jedoch $e_i = \frac{1}{2}(S_i + 1)$, damit besetzte Plätze mit einer $+1$ und unbesetzte Plätze mit einer 0 gewertet werden können. Zudem lässt sich so die Gesamtzahl der untersuchten Teilchen bestimmen durch

$$N = \sum_i e_i. \quad (31)$$

Die Zustandssumme des Gittergases hat damit die Form

$$Z_G = \sum_{\{e_j\}} {}^*\exp \left[\beta J \sum_{i,j} e_i e_j \right], \quad (32)$$

wobei das $(*)$ an der Summe bedeutet, dass bei der Summation die Nebenbedingung $\sum_{j=1}^N e_j$ beachtet werden muss. Dies verkompliziert die Berechnung, jedoch kann dem einfach entgegengewirkt werden, indem man den Übergang zur großkanonischen Zustandssumme macht, in der die Summation über alle Besetzungszustände direkt enthalten ist:

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \exp \left[\beta J \sum_{i,j} e_i e_j \right], \quad z = e^{\beta \mu}. \quad (33)$$

z beschreibt dabei die Fugazität und μ das chemische Potential.

Durch umformen der großkanonischen Zustandssumme des Gittergases erhält man

$$\mathcal{Z} = \sum_{\{e_j\}} \exp \left[\ln z \sum_{i=1}^N e_i + \beta J \sum_{i,j} e_i e_j \right], \quad (34)$$

was der Zustandssumme des Ising-Modells für ferromagnetische Systeme

$$Z_{\text{Ising}} = \sum_{\{S_i\}} \exp \left[B \sum_{i=1}^N S_i + \beta J \sum_{i,j} S_i S_j \right] \quad (35)$$

bereits sehr ähnlich sieht. Über die Substitution $e_i e_j = \frac{1}{4} S_i S_j + \frac{1}{4}(S_i + S_j) + \frac{1}{4}$ kann \mathcal{Z} schließlich auf eine ähnliche Form wie Z_{Ising} gebracht werden.

Es sei angemerkt, dass dieser Zusammenhang zwischen einem Fluid-Modell und einem magnetischen Modell kein Zufall ist. In der Tat lassen sich viele Gemeinsamkeiten und Äquivalenzen zwischen Fluid- und magnetischen Modellen aufzeigen, auf welche an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen werden soll.

6 Schlussbetrachtung

Das Ising-Modell wurde in einer Dimension sowohl mit als auch ohne externes Magnetfeld B exakt gelöst. Die Wahl der periodischen Randbedingungen für den Fall mit Feld wurde im Vergleich der beiden ermittelten Zustandssummen Z_N positiv bestätigt. Der Übergang zur Thermodynamik über die Zustandssumme wurde durchgeführt und verschiedenste thermodynamische Größen berechnet. Dabei galt der spontanen Magnetisierung M besonderes Augenmerk, da an ihr ein Phasenübergang von der paramagnetischen zur ferromagnetischen Phase zu beobachten wäre. Für den eindimensionalen Fall konnte gezeigt werden, dass kein Phasenübergang bei endlichen Temperaturen möglich ist. Dies gilt sowohl mit als auch ohne externem Feld. Das Divergieren der Suszeptibilität χ am kritischen Punkt T_c (kritische Temperatur) bestätigt dieses Ergebnis. Weiterhin erfüllt das Ising-Modell den dritten Hauptsatz der Thermodynamik, wie anhand der Entropie S gezeigt werden konnte. Neben der Beschreibung magnetischer Systeme eignet sich das Ising-Modell auch zur Beschreibung von Fluiden und vielen weiteren Modellen, was anhand des Gittergases kurz erläutert wurde.

Literatur

- [Bru67] **S. Brush**: *History of the Lenz-Ising Model*, Revies of Modern Physics, Band 39, (1967)
- [Hua64] **K. Huang**: *Statistische Mechanik - Dritter Band*, (John Wiley & Sons, Inc., New York 1964)
- [Nol05] **W. Nolting**: *Grundkurs Theoretische Physik 6 - Statistische Physik*, 5. Aufl, (Springer, Berlin 2005)
- [Röm94] **H. Römer, T. Filk**: *Statistische Mechanik*, (VCH, Weinheim 1994)
- [Sha89] **A. Shaukat**: *Path Integral Method, Lattice Gauge Theory and Critical Phenomena*, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1989)
- [Sta71] **E. Stanley**: *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, (Oxford University Press, New York 1971)