

# Die Robertson-Walker-Metrik und die Friedmann-Gleichung

Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 02.11.2011

Markus Michael

## 1 Einleitung

Im Anschluss an den vorangegangenen Vortrag zu den historischen Entwicklung und den Grundlagen der modernen Kosmologie soll auf den folgenden Seiten das wichtige theoretische Grundgerüst, die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) Albert Einsteins, und insbesondere die sich daraus ergebende Robertson-Walker-Metrik sowie die Friedmann-Gleichung näher beleuchtet werden. Aus ihnen ergeben sich entscheidende Folgerungen über Vergangenheit und Zukunft unseres Universums. Im historischen Abriss des ersten Vortrages war angeklungen, dass die Entwicklung der ART so etwas wie eine Initialzündung für die moderne Kosmologie bedeutet und sie sehr wesentlich zum tieferen Verständnis unseres Universums beigetragen hat. Die grundlegenden Züge dieser fundamentalen Theorie stehen deshalb am Anfang dieser Ausarbeitung.

## 2 Die Allgemeine Relativitätstheorie

### 2.1 Grundlegende Konzepte und Größen

Mit der Aufstellung der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) im Jahre 1905 durch Albert Einstein war bereits das Verständnis von Raum und Zeit revidiert worden. Vom Verständnis der Zeit als absoluter Größe musste Abstand genommen werden, und eine gewisse Vermischung der Begriffe Raum und Zeit spiegelt sich in der Definition der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit wider. 1915 gelang es Einstein dann in der Allgemeinen Relativitätstheorie, das Relativitätsprinzip noch zu erweitern und die Gravitation in die Theorie mit einzubeziehen. Im Rahmen der ART wird die Raumzeit mathematisch abstrakt beschrieben als Riemannscher Raum (d. h., eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, für die sich im Tangentialraum eines jeden Punktes durch Einführung einer Metrik die Länge von Vektoren definieren lässt), der im Allgemeinen auch eine Krümmung aufweisen kann. Die Krümmung des Raumes, die auf die vorhandene Massen- und Energiedichte (gemäß der Äquivalenz von Energie und Masse) zurückzuführen ist und sich aus dieser bestimmt, ersetzt in der Theorie die Newtonsche Gravitation. Es ist demnach die Raumkrümmung, die beispielsweise die Bahnen der Himmelskörper festlegt. Dieses Konzept ist grundlegend verschieden von der Newtonschen Theorie, in der die Gravitation durch eine instantane, attraktive Kraft beschrieben wird, die zwei Massendichten aufeinander ausüben.

Fundamentales Konzept der ART ist das sog. EINSTEINSCHES ÄQUIVALENZPRINZIP:

*In einem Gravitationsfeld kann in jedem Weltpunkt ein lokales Inertialsystem gewählt werden, in dem alle physikalischen Gesetze wie in der SRT gelten.*

Damit die Gesetze der SRT gelten, dürfen im Bezugssystem keine Gravitationseffekte vorhanden sein, letztere müssen durch eine entsprechende Koordinatentransformation eliminiert werden. Das Äquivalenzprinzip fordert nun, dass dies immer möglich ist. Als Beispiel sei ein Bezugssystem im (lokal homogenen) Gravitationsfeld der Erde gegeben. Durch die Transformation in ein frei fallendes Bezugssystem verschwinden in diesem die gravitativen Effekte, ein darin ruhender Beobachter fühlt sich schwerelos. Insbesondere könnte ein Beobachter in einem abgeschlossenen, frei fallenden System nicht feststellen, ob er frei fällt oder schlichtweg kein Gravitationsfeld vorliegt. Mathematischer formuliert bedeutet das, dass man den gekrümmten Raum stets lokal durch einen flachen Raum, den entsprechenden Tangentialraum, ersetzen kann. Bei geschickter Wahl von Koordinaten ist dann die kovariante Ableitung gleich partiellen Ableitung im flachen Raum und die Gesetze nehmen ihre speziell-relativistische Form an. Entsprechende Koordinaten werden auch lokal geodätische Koordinaten genannt.

Das Raumzeitintervall oder Linienelement im Riemannschen Raum ist formal in der bekannten Form definiert:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (1)$$

Der Unterschied zum Minkowski-Linienelement besteht darin, dass der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  ortsabhängig ist. Nach dem Äquivalenzprinzip kann er aber immer lokal auf die Form  $\eta_{\mu\nu}$  gebracht werden, so dass  $ds^2 = dt^2 - d\vec{x}^2$  gilt.

Als weitere wichtige Größen seien der *Krümmungstensor*

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta}), \quad (2)$$

der die Krümmung des Raumes beschreibt und hier aus Gründen der Vereinfachung nur in seiner lokal geodätischen Form angegeben ist, seine Verjüngung, der *Ricci-Tensor*

$$R_{\nu\alpha} = R^\mu_{\nu\alpha\mu} \quad (3)$$

und der *Krümmungsskalar*

$$\mathcal{R} = g^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha}, \quad (4)$$

die weitere Verjüngung des Ricci-Tensors mit dem metrischen Tensor, angeführt. Die genaue Definition dieser Größen wird in dieser Ausarbeitung nicht von größerem Belang sein. Wichtig ist die Feststellung, dass sie sich allesamt aus zweiten Ableitungen des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  berechnen.

Zuletzt sei noch der *Energie-Impuls-Tensor*  $T_{\mu\nu}$  genannt, der eine symmetrische Form hat und aus Energieerhaltungsgründen divergenzfrei sein muss. (Es handelt sich hier um die sogenannte kovariante Divergenz im gekrümmten Raum, auf deren genaue Bedeutung nicht näher eingegangen wird.)

## 2.2 Die Feldgleichungen

In diesem Abschnitt sollen die wichtigen, von Einstein aufgestellten Feldgleichungen motiviert werden. Gesucht ist ein Zusammenhang, der die Wechselwirkung von der Raumkrümmung mit der im Raum vorhandenen Massen- und Energiedichte beschreibt. Im Wesentlichen müssen an diesen drei sinnvolle Forderungen gestellt werden:

1. Die Feldgleichungen sollen das Äquivalenzprinzip und das allgemeine Relativitätsprinzip erfüllen und müssen daher als kovariante Tensorgleichungen formuliert werden, damit sie beim Wechsel des Bezugssystems die gleiche Form behalten.
2. Die Quelle des Gravitationsfeldes soll der symmetrische Energie-Impuls-Tensor der gesamten im Raum enthaltenen Materie- und Feldverteilung sein.
3. Die resultierenden Gleichungen sollen partielle Differentialgleichungen maximal zweiter Ordnung in  $g_{\mu\nu}$  sein, der metrischen Tensor hat den Charakter einer Potentialfunktion. Insbesondere soll sich im Newtonschen Grenzfall, d. h. für schwache Gravitationsfelder, die bekannte Poissongleichung für die Massendichte ergeben.

Als allgemeinen Ansatz wählt man eine Tensorgleichung der Form

$$X^{\mu\nu} = aT^{\mu\nu}. \quad (5)$$

Rechts steht der symmetrische und divergenzfreie Energie-Impuls-Tensor, multipliziert mit einer Konstanten  $a$ . Linkerhand findet sich der unbekannte Tensor  $X^{\mu\nu}$ , der ebenfalls symmetrisch und divergenzfrei sein muss. Außerdem soll er aus dem metrischen Tensor und dessen Ableitungen gebildet werden. Man kann zeigen, dass der einzige Tensor, der sich für diese Anforderungen konstruieren lässt, der Einstein-Tensor

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R} \quad (6)$$

ist. Die Konstante  $a$  wird so gewählt, dass sich im Newtonschen Grenzfall die richtige Gleichung ergibt. Somit sind die Feldgleichungen durch

$$\boxed{G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}} \quad (7)$$

gegeben.  $G$  ist hierin die Newtonsche Gravitationskonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

### 2.3 Die kosmologische Konstante

Die obigen Forderungen an die Form der Feldgleichungen legen diese nicht eindeutig fest, denn es können im Prinzip noch weitere divergenzfreie und symmetrische Tensoren addiert werden. Eine einfache Möglichkeit bietet der metrische Tensor, der im Rahmen der ART genau diese Anforderungen erfüllt. Gleichung (7) erweitert sich dann zu

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (8)$$

$\Lambda$  wird kosmische Konstante genannt. Sie wurde von Einstein ursprünglich eingeführt, um statische Lösungen der Feldgleichungen zu ermöglichen, da er an ein statisches Universum glaubte. Nach der Entdeckung der Expansion des Universums durch Edwin Hubble in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts verwarf Einstein die Konstante wieder. Heute geht man allerdings davon aus, dass es tatsächlich eine nicht verschwindende kosmologische Konstante geben muss.

Den zusätzlichen Term in (8) interpretiert man als Ergänzung zu  $T^{\mu\nu}$ . Im Vakuum, wenn  $T^{\mu\nu} = 0$  gilt, verschwindet der Term mit der Konstanten nicht. Daher misst man ihm die

Bedeutung einer Vakuumsenergiedichte bei. Eine vergleichbare Energiedichte im Vakuum sagt auch die Quantenfeldtheorie als Ergebnis von Vakuumfluktuationen voraus. Quantitative Abschätzungen liegen aber unzählige Größenordnungen (etwa 120!) von dem durch Experimente eingeschränkten Wertebereich entfernt. Experimentelle Abschätzungen beruhen auf der Tatsache, dass für nicht allzu weit entfernte Himmelskörper die Newtonsche Theorie sehr gut mit den Beobachtungen übereinstimmt und die Konstante wenn überhaupt nur einen sehr kleinen Wert annehmen darf:

$$|\Lambda| \leq 10^{-56} \text{ cm}^{-2}. \quad (9)$$

Mit den so aufgestellten Feldgleichungen war zwar die theoretische Beschreibung des Universums gefunden, aber eine wirkliche Aussage über das Verhalten unseres Kosmos lässt sich natürlich nur durch Lösen der besagten Gleichungen gewinnen. Und dies ist mit mehreren Problemen verbunden: Die Feldgleichungen weisen eine komplizierte Struktur auf. Raumkrümmung und Materie bzw. Energie beeinflussen sich wechselseitig, insbesondere tritt der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$  auf beiden Seiten der Gleichung auf. Eine allgemeine Lösung kann daher nicht gefunden werden. Gleichzeitig muss die Zusammensetzung des Universums bekannt sein, der Materie- und Energieinhalt schlagen sich im Energie-Impuls-Tensor nieder. Durch Annahme von Symmetrien lassen sich dennoch einige wenige exakte Lösungen finden. Ein Beispiel ist die sog. Schwarzschild-Metrik, für die man von einer kugelsymmetrischen Massenverteilung im Koordinatenursprung ausgeht und schließlich die Feldgleichungen im Vakuum außerhalb dieser Verteilung löst. Einen ähnlichen Ansatz wählt die Robertson-Walker-Metrik (oft auch Friedmann-Robertson-Walker-Metrik), die im folgenden Abschnitt ausführlicher diskutiert werden soll.

## 3 Die Robertson-Walker-Metrik

### 3.1 Herleitung und Motivation

Die Grundidee für eine Vereinfachungen der Feldgleichungen ist das KOSMOLOGISCHE PRINZIP:

*Das beobachtbare Universum ist homogen und isotrop.*

Diese Aussage ist erfahrungsgemäß in unserer Umwelt nicht zutreffend, und selbst der mit den Augen beobachtete Kosmos scheint weder homogen noch isotrop zu sein. Allerdings trifft die Aussage auf kosmologischen Skalen sehr wohl zu. Unser Hubble-Volumen (definiert durch die Hubble-Länge, auf die später noch eingegangen wird) entspricht grob dem für uns beobachtbaren Universum, für das wir Isotropie und Homogenität annehmen können. Angenommen, das Universum wäre außerhalb dieses Volumens inhomogen, dann kann man die Zeit, die die Inhomogenität zur Ausbreitung durch unser Hubble-Volumen bräuchte, mit der Durchquerungsdauer eines Lichtstrahls abschätzen, die immerhin etwa 10 Milliarden Jahre beträgt. Es ist also offenbar das Kosmologische Prinzip eine berechnete Annahme.

Zur Herleitung der Metrik gehen wir zunächst über den zweidimensionalen Fall, der eine euklidische Anschauung besitzt. Gegeben sei eine  $\mathbb{S}^2$ -Sphäre mit Radius  $R$ , deren kartesische Koordinaten folgende Beziehung erfüllen:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (10)$$

Da die  $S^2$ -Sphäre genau genommen nur eine Fläche ist, lässt sich eine der Koordinaten durch den obigen Zusammenhang eliminieren. Es ist

$$x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \quad \text{und} \quad dx_3 = -\frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}. \quad (11)$$

Für das räumliche Linienelement  $d\vec{x}$  erhalten wir somit

$$d\vec{x}^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (12)$$

An dieser Stelle führt man nun ebene Polarkoordinaten (nicht etwa Kugelkoordinaten) ein, die Transformationsvorschrift lautet:

$$x_1 = r' \cos \vartheta, \quad x_2 = r' \sin \vartheta. \quad (13)$$

Das Linienelement hat dann die folgende Form:

$$d\vec{x}^2 = \frac{R^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} + r'^2 d\vartheta^2 \stackrel{r = \frac{r'}{R}}{=} R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\vartheta^2 \right\}, \quad (14)$$

wobei im letzten Schritt das dimensionslose  $r \in [0,1]$  eingeführt wurde. Eine Veranschaulichung der Koordinaten findet sich in Abbildung 1.

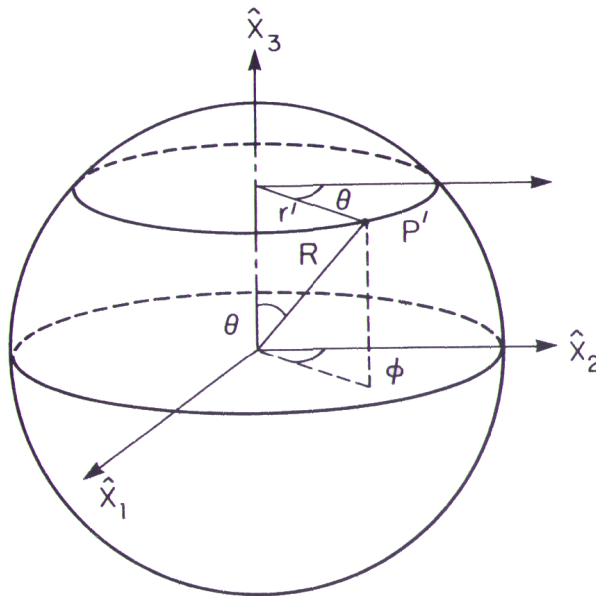


Abbildung 1: Ein Punkt  $P'$  auf der Kugeloberfläche, charakterisiert durch  $(r',\theta)$  sowie durch  $(\theta,\phi)$  (Kugelkoordinaten). [1]

(14) beschreibt das Linienelement auf einem zweidimensionalen geschlossenen Raum mit konstanter positiver Krümmung, also eine Kugeloberfläche. Die Ersetzung  $R \rightarrow iR$  liefert entsprechend mit

$$d\vec{x}^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\vartheta^2 \right\}, \quad (15)$$

das Linienelement auf einem offenen zweidimensionalen Raum negativer Krümmung, einer hyperbolischen Fläche. Schließlich erhält man für  $R \rightarrow \infty$  einen zweidimensionalen, flachen Raum mit dem Linienelement

$$d\vec{x}^2 = R^2(dr^2 + r^2 d\vartheta^2). \quad (16)$$

Die drei Fälle des offenen, flachen und geschlossenen Raumes sind in Abbildung 2 dargestellt.

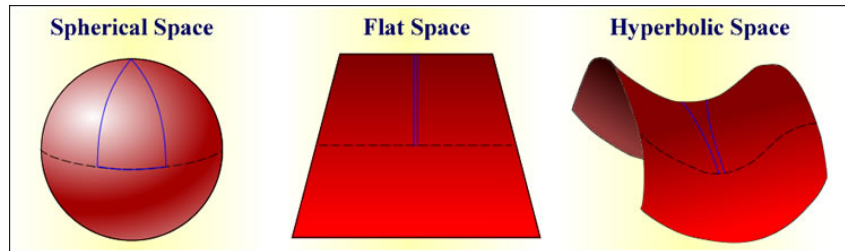


Abbildung 2: Abgeschlossener, flacher und offener, isotroper Raum in zwei Dimensionen. [4]

Für einen dreidimensionalen Raum, beispielsweise eine  $\mathbb{S}^3$ -Sphäre, geht man auf die gleiche Art und Weise vor. Ausgehend von 4 kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , und  $x_4$  eliminiert man die vierte Koordinate durch die (10) entsprechende Bedingung. Später führt man statt ebener Polarkoordinaten nun sphärische Polarkoordinaten ein und findet

$$d\vec{x} = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \right\}. \quad (17)$$

Durch die zusätzliche Dimension wird ein weiterer Raumwinkel ( $\phi$ ) notwendig. Der Parameter  $k = -1, 0, +1$  gibt an, ob ein geschlossener ( $k = +1$ ), flacher ( $k = 0$ ) oder offener Raum ( $k = -1$ ) vorliegt.

Unter Einbeziehung der Zeit erhält man schließlich das vollständige Linienelement der Robertson-Walker-Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \right\} \quad (18)$$

Die zeitliche Veränderlichkeit der räumlichen Koordinaten wird einzig von  $R(t)$  bestimmt, dem jetzt die Bedeutung eines zeitabhängigen Skalierungsfaktor zukommt. Aufgrund der Symmetrie und der Homogenität des Raumes darf er nicht von den übrigen Koordinaten abhängen.  $(r, \vartheta, \phi)$  sind skalar und bleiben von der Skalierung unberührt. Man spricht auch von mitbewegten Koordinaten eines mitbewegten Koordinatensystems (comoving frame).  $t$  entspricht der Eigenzeit eines ebenfalls mitbewegten Beobachters. Die Gestalt des metrischen Tensors kann man einfach ablesen:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R^2(t)r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (19)$$

In einem nächsten Schritt müsste nun diese Metrik in die Feldgleichungen eingesetzt werden, um Bestimmungsgleichungen für  $R(t)$  zu erhalten. Bevor dies getan wird, sollen einige Zusammenhänge vorgestellt werden, auf die man schon ohne explizite Kenntnis von  $R(t)$  schließen kann.

## 3.2 Erste Anwendungen

### 3.2.1 Lichtausbreitung

Analog zur SRT gilt im Rahmen der ART für die Linien der Lichtausbreitung, die sog. Lichtgeodäten,  $ds^2 = 0$ . Ein bei  $r_H = 0$  zu  $t = 0$  in Richtung eines bei  $r_0 = 0$  ruhenden Beobachters ausgesandter Lichtstrahl beschreibt in seiner geodätischen Bewegung Großkreise mit  $\vartheta, \phi = \text{const.}$ . Aus (18) entnimmt man direkt, dass in diesem Fall

$$c \cdot dt = R(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \frac{c \cdot dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (20)$$

den Zusammenhang für die Lichtausbreitung liefert. Zur Erinnerung: In der Minkowski-Raumzeit folgte aus  $ds^2 = 0$  einfach  $c dt = d\vec{x}$ , was dann in zwei Dimensionen den Lichtkegel ergab.

Betrachtet man von  $r_0 = 0$  aus einen mitbewegten Stern bei  $r_1 = r$ , der also ebenfalls im comoving frame ruht, so sieht man, dass sich das rechte Integral in (20) nicht ändert. Auf diese Weise ist ein unveränderlicher, skalarer Abstand in den skalaren, mitbewegten Koordinaten definiert, den man auch als "comoving distance" bezeichnet. Multiplizieren wir diesen mit dem Skalierungsfaktor  $R(t)$ , so erhalten wir einen zeitveränderlichen Abstand  $d_H$ , auch "proper distance" genannt, der sich sehr wohl mit der Skalierung ändert und dem Abstand entspricht, den man mit einer Messlatte messen würde:

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \frac{R(t) dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = R(t) \cdot \int_0^t \frac{c \cdot dt'}{R(t')} \quad (21)$$

Konvergiert dieser Ausdruck für endliches  $t$ , so ist unser Vergangenheitslichtkegel beschränkt, da das ausgesandte Licht in dem endlichen Alter des Universums nur eine endliche Strecke zurückgelegt haben kann. Die Grenze des am weitesten entfernten Punktes, von dem uns noch Licht erreichen kann, nennt man Teilchenhorizont.

### 3.2.2 Teilchenbewegung

Im Folgenden soll die Bewegung eines massebehafteten Teilchens im Rahmen der Robertson-Walker-Metrik untersucht werden. Das Teilchen befinde sich im freien Fall, führe also eine geodätische Bewegung aus. Letztere wird durch die Geodätengleichung beschrieben:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho = 0 \quad (22)$$

Mit  $u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$  ist analog zur SRT die Weltgeschwindigkeit eines Weltpunktes definiert, auf die Bedeutung der Christoffel-Symbole  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  soll wiederum nicht eingegangen werden. Sie werden aus der Metrik bestimmt, und mit entsprechender Ersetzung liest sich die  $\mu = 0$ -Komponente der Geodätengleichung wie folgt:

$$\frac{du^0}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}|^2 = 0 \quad (23)$$

Aus der Verjüngung der Weltgeschwindigkeit resultiert

$$(u^0)^2 - |\vec{u}|^2 = c^2 \quad \text{und somit} \quad u^0 du^0 = |\vec{u}| d|\vec{u}|. \quad (24)$$

Dieses in (23) eingesetzt liefert

$$\frac{1}{u^0} \frac{d|\vec{u}|}{ds} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}| = 0, \quad (25)$$

und unter Berücksichtigung von  $u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{c \cdot dt}{ds}$  ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d|\vec{u}|}{ds} \frac{ds}{dt} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}| &= \frac{1}{c} \frac{d|\vec{u}|}{dt} + \frac{\dot{R}}{R} |\vec{u}| = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{R}}{R} &= -c \cdot \frac{\dot{|\vec{u}|}}{|\vec{u}|}. \end{aligned} \quad (26)$$

Letzteres lässt sich aufintegrieren, und es findet sich

$$|\vec{u}| \propto R^{-1}. \quad (27)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten ist  $|\vec{u}| \approx |\vec{v}|$ , und für einen Beobachter, der anfänglich ( $t_0$ ) eine Geschwindigkeit  $|\vec{v}_0|$  bzgl. des mitbewegten Systems besitzt, gilt zur Zeit  $t_1$ :

$$|\vec{v}_1| \approx |\vec{v}_0| \frac{R(t_0)}{R(t_1)}, \quad (28)$$

d. h. er wird bei wachsendem  $R(t)$  irgendwann im comoving frame zur Ruhe kommen.

### 3.2.3 Rotverschiebung

Eine wichtige Größe in der Astronomie ist die der kosmischen Rotverschiebung aufgrund der Expansion des Universums. Im Hubbleschen Gesetz (s. Abschnitt 3.2.4) wird der wichtige Zusammenhang zwischen der Rotverschiebung und Entfernung von Sternen und Galaxien festgelegt. Auf diese Weise kann die deutlich leichter zu vermessende Rotverschiebung zur Entfernungsbestimmung verwandt werden. Wie die kosmische Rotverschiebung mit dem Skalierungsfaktor  $R(t)$  zusammenhängt, soll hier kurz auf zwei verschiedene Wege hergeleitet werden.

Im Teilchenbild des Lichts hat jedes Photon einen Impuls  $p = \frac{h}{\lambda}$ . Man kann nun zeigen, dass, genau wie der Betrag der Geschwindigkeit, der Impulsbetrag antiproportional zum Skalierungsfaktor ist. Somit folgt  $\lambda \propto R$  und man erhält direkt:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (29)$$

Hierin ist  $z$  die eigentliche Rotverschiebung.

Für die Herleitung im Wellenbild geht man von einer Lichtaussendung bei  $r_1, t_1$  und der Detektion bei  $r_0 = 0, t_0$  aus. Das Licht bewegt sich auf einer Lichtgeodäten mit  $ds^2 = 0$  und es gilt die bereits bekannte Gleichung (20). Quelle und Detektor ruhen im comoving frame, so dass das rechte Integral in (20) wiederum unveränderlich ist. Das linke Integral über die Zeit muss demnach unabhängig vom jeweiligen Zeitpunkt des Aussendens den gleichen Wert ergeben. Dies gilt insbesondere auch für zwei aufeinanderfolgende Wellenberge, die den Abstand einer Periodendauer,  $T$ , haben:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \stackrel{!}{=} \int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{c \cdot dt}{R(t)} = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \quad (30)$$



Da der Integrand identisch ist, wurden im zweiten Schritt einfach die Integrationsgrenzen umgestellt. Um das Integral zu lösen, macht man nun die Annahme, dass sich  $R(t)$  in der kurzen Zeit einer Periodendauer nicht verändert. Damit kann der Skalierungsfaktor aus dem Integral gezogen werden, und es ergibt sich das bekannte Ergebnis:

$$\frac{c \cdot T_1}{R(t_1)} = \frac{c \cdot T_0}{R(t_0)} \quad \overset{\lambda \approx cT}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \quad (31)$$

### 3.2.4 Hubblesches Gesetz

Auch das Hubblesche Gesetz lässt sich (zumindest näherungsweise) ohne explizite Kenntnis von  $R(t)$  ableiten. Wie bereits erwähnt, stellt es den in der Praxis sehr wichtigen Zusammenhang zwischen der Entfernung eines entfernten Objekts und der Rotverschiebung des von ihm ausgesandten Lichts aufgrund der Expansion des Raumes her. Die vollständige Herleitung ist etwas länglich und wird deshalb ausgespart. Als Ansatz dient eine Taylorentwicklung der rechten Seite von Gleichung (31), die man um die Zeit  $t_0$  entwickelt:

$$\frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{R(t_1)}{R_0} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (32)$$

Von nun an soll der Index "0" anzeigen, dass es sich um die entsprechende Größe zum gegenwärtigen Zeitpunkt  $t_0$  handelt. Die in (32) eingeführten Hilfsgrößen sind die Hubble-Konstante

$$H_0 \equiv \frac{\dot{R}_0}{R_0} \quad (33)$$

und der sog. Abbremsparameter

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}_0}{R_0 \cdot H_0^2} \quad (34)$$

Das Inverse der Hubble-Konstanten wird Hubble-Zeit genannt, ihr Wert beträgt nach experimenteller Bestimmung

$$H_0^{-1} = 9,78 \cdot 10^9 h^{-1} \text{ y.} \quad (35)$$

Hierin ist  $h$  ein in der Kosmologie üblicher Unsicherheitsfaktor, der der Ungenauigkeit des bestimmten Wertes von  $H_0$  Rechnung trägt. Den Schätzungen zufolge liegt er zwischen 0,5 und 0,75.

Die Taylorentwicklung in (31) gilt für kleine  $t_1 - t_0$ , also für nicht zu weit entfernte Himmelskörper und somit für kleine Rotverschiebungen  $z$ .

Für die weitere Herleitung des Gesetzes werden mit weiteren Entwicklungen die Gleichung für den Abstand  $d$  genähert und die Zeitvariablen eliminiert, um dann eine Gleichung für den Abstand in Abhängigkeit von  $z$  zu erlangen. Das Ergebnis ist schließlich

$$H_0 d = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \quad \text{für } z \ll 1. \quad (36)$$

Im Fall  $q_0 = 1$  ergibt sich der lineare Zusammenhang, der als Hubblesches Gesetz bekannt ist. Eine exakte Formel kann später mithilfe der Friedmann-Gleichung gefunden werden und sei hier noch zum Vergleich mit angeben:

$$H_0 d = q_0^{-2} \left[ z q_0 + (q_0 - 1) \left( \sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right) \right] \quad (37)$$

Für kleine  $z$  geht (37) in (36) über. Die Bezeichnung "exakt" ist natürlich auf das verwendete Modell bezogen, (37) stellt nicht notwendigerweise die der Realität entsprechende Lösung dar. Man kann durch Messungen und eventuelle Abweichungen auf die Güte der gemachten Annahmen (insbesondere die des Kosmologischen Prinzips) schließen.

## 4 Die Friedmann-Gleichung

### 4.1 Aufstellen der Gleichung

Nachdem wir bei den bisherigen Betrachtungen allein von der Form der Metrik ausgegangen sind, sollen nun anhand der Einsteinschen Feldgleichungen endlich genauere Aussagen über den Skalierungsfaktor  $R(t)$  und somit über die Entwicklung unseres Universums im Rahmen dieses Modells gemacht werden. Gleichung (8) sei hier nochmals mit kovarianten Tensoren angegeben:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (38)$$

Die linke Seite der Gleichung ist bereits bekannt, sie kann wie in Abschnitt 2 beschrieben aus der Metrik bestimmt werden. Die nicht verschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors sind

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{R}(t)}{Rt} \quad \text{und} \quad R_{ij} = -\frac{2}{c^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{ij}, \quad (39)$$

wobei  $g_{ij}$  die  $3 \times 3$ -Untermatrix der räumlichen Koordinaten des metrischen Tensors ist. Der Krümmungsskalar ist durch

$$\mathcal{R} = -\frac{6}{c^2} \left[ \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] \quad (40)$$

gegeben.

Als nächstes muss die genaue Gestalt der rechten Seite der Feldgleichungen, insbesondere des Energie-Impuls-Tensors, festgelegt werden. Die vorgegebene Symmetrie des Problems, d. h. die Gleichberechtigung aller Raumrichtungen fordert, dass dieser Tensor symmetrisch sein muss. Als Ansatz wählt man den Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit,

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho c^2, -p, -p, -p). \quad (41)$$

Die vorkommenden Größen sind die Energiedichte  $\rho c^2$  und der Druck  $p$ , der, wie sich später zeigen wird, Materie-, Strahlungs- oder sogar Vakuumsdruck entsprechen kann. In der rein kontravarianten Form liest sich der Tensor dann

$$T^{\mu\nu} = g^{\nu\alpha} T_{\alpha}^{\mu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p(1-kr^2)}{R^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2 R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 R^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Dass die Divergenzfreiheit des Tensors einer Energieerhaltung entspricht, ist bereits weiter oben erwähnt worden. Die Nullkomponente der verschwindenden Divergenz des Energie-Impuls-Tensors in der obigen Form liefert direkt

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 R^3) &= -pd(R^3) \\ dU &= -pdV. \end{aligned} \quad (43)$$

Die zweite Zeile entspricht dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik bei einer adiabatischen Zustandsänderung ( $\delta Q = 0$ ), mit dem der darüberstehende Ausdruck eng verwandt zu sein scheint. Tatsächlich findet man auf der linken Seite eine Energiedichte, multipliziert mit einem Volumen, und rechts den Druck  $p$  multipliziert mit einem Volumenelement. Eine einfache Zustandsgleichung bestimmt noch den Zusammenhang zwischen  $\rho$  und  $p$ :

$$p = \omega \rho c^2, \quad (44)$$

mit einer zeitunabhängigen Konstanten  $\omega$ . Diese sehr simple Form hat sich für die im Kosmos wesentlich auftretenden Dichten bewährt. Aus dem ersten Hauptsatz, Gleichung (43), findet man durch explizites Aufstellen der Differentiale, dass

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)}, \quad (45)$$

ein Verhalten, das wir später noch ausnutzen werden. Der genaue Wert für  $\omega$  hängt von der jeweils betrachteten Dichte ab. Man unterscheidet im Wesentlichen zwischen:

- Materie (auch druckfreie Materie oder kosmologischer Staub), die dadurch charakterisiert ist, dass die thermische Geschwindigkeit der Teilchen gegenüber der Lichtgeschwindigkeit vernachlässigbar ist, und insbesondere  $p \ll \rho c^2$ . Dann gilt

$$p_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto R^{-3}. \quad (46)$$

- Strahlung, für die die thermische Geschwindigkeit der masselosen oder beinahe masselosen Teilchen gleich der Lichtgeschwindigkeit ist (beispielsweise CMB-Strahlung), mit

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho \propto R^{-4}. \quad (47)$$

- Vakuum, für das der Druck negativ wird,

$$p_v = -\rho_v c^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = -1 \quad \Rightarrow \quad \rho \propto \text{const.} \quad (48)$$

Die Abhängigkeit der Dichten vom Skalierungsfaktor  $R$  lassen darauf schließen, dass im früheren Universum die Strahlung dominiert hat, und erst später die schwächer durch die Expansion abfallende Materiedichte. Ungeklärt bleibt an dieser Stelle der Einfluss der Vakuumsenergiedichte.

Mit diesen Vorbereitungen ergibt sich schließlich als 00-Komponente der Einsteinschen Feldgleichungen (38) die *Friedmann-Gleichung*:

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}} \quad (49)$$

Die Friedmann-Gleichung ist also eine im Allgemeinen nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung in  $R$ . Die räumlichen  $ii$ -Komponenten der Feldgleichungen ergeben jeweils einen zweiten Zusammenhang,

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p + \Lambda c^2. \quad (50)$$

Als dritte Gleichung dieses Kanons wird häufig die der Energieerhaltung, (43), angegeben. Insgesamt handelt es sich allerdings nur um zwei unabhängige Zusammenhänge, da der jeweils dritte über die sog. Bianchi-Identitäten aus den anderen erhalten werden kann. Als zweite unabhängige Gleichung gibt man gerne die Differenz von (49) und (50) an:

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \varrho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}} \quad (51)$$

Betrachtet man letzteres zunächst für verschwindendes  $\Lambda$ , so stellt man fest, dass  $\ddot{R}$  immer negativ gewesen ist, falls  $\varrho$  und  $p$  immer größer Null waren. Damit ist  $\dot{R}$  für alle Zeit eine fallende Funktion. Weiter beobachten wir, dass  $\dot{R} > 0$ , d. h., dass das Universum expandiert. Dann aber hätte sich das Universum seit jeher ausgedehnt, und es muss einen Nullpunkt gegeben haben, bei dem die Gleichungen singularär werden. Es findet sich hier also eine erste Andeutung für den Big Bang als Ursprung des Kosmos. Eine Extrapolation der Lösung über diesen Punkt hinaus ist im Rahmen der klassischen ART nicht möglich.

## 4.2 Zukunftsszenarien: Die Entwicklung des Skalenfaktors

Um das Verhalten der Lösungen der Friedmann-Gleichung zu studieren, stellt man diese zunächst um und definiert einige neue Größen. Aus (49) wird

$$\frac{kc^2}{H^2 R^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \varrho + \frac{\Lambda c^2}{3H^2} - 1 \equiv \frac{\varrho_m}{\varrho_c} + \frac{\varrho_v}{\varrho_c} - 1 \equiv \Omega_m + \Omega_{\text{vac}} - 1. \quad (52)$$

Die erste Gleichheit ist nichts weiter als die Friedmann-Gleichung, die mit  $H^{-2}$  multipliziert wurde und daher dimensionslos ist. Den Vorfaktor von  $\varrho$  definiert man als  $\varrho_c^{-1}$ , wobei  $\varrho_c$  eine kritische Dichte darstellt.  $\varrho$  selbst wird in  $\varrho_m$  umbenannt, da es die Materie- und Strahlungsdichte des Universums repräsentiert, im Gegensatz zu  $\varrho_v$ , das für die Vakuumsenergiedichte steht und aus dem Term mit der kosmologischen Konstanten durch Abtrennen von  $\varrho_c$  erhalten wird. Die beiden dimensionslosen Dichtequotienten nennt man  $\Omega_m$  für die Massendichte und  $\Omega_{\text{vac}}$  für die Vakuumsenergiedichte. Sie geben das Verhältnis der entsprechenden Dichte zur kritischen Wert  $\varrho_c$  an.

Das Verhalten von  $R(t)$  für  $\Lambda = 0$  (also  $\Omega_{\text{vac}} = 0$ ) und verschiedene  $k$  ist in Abbildung 3 illustriert.

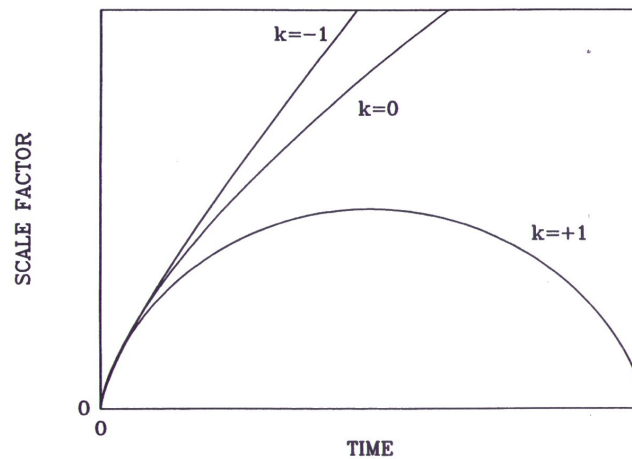


Abbildung 3: Zeitliches Verhalten des Skalenfaktors  $R(t)$  für  $\Lambda = 0$ . [1]

An dieser Stelle sei an die Herleitung der Robertson-Walker-Metrik und die Bedeutung der unterschiedlichen Werte für  $k$  erinnert.  $k = +1$  entspricht einem geschlossenen Raum und offenbar einem solchen Universum, das irgendwann seine größte Ausdehnung erfährt und danach infolge der Gravitation wieder kollabiert. Der Fall des offenen Raumes,  $k = -1$ , kommt einem beschleunigt expandierenden Universum gleich. Die Grenze zwischen kollabierenden und sich beschleunigt ausdehnenden Universen bildet der Fall  $k = 0$ , die nicht vollständig abgebildete Kurve geht dann asymptotisch gegen einen konstanten Wert. Bei  $\Lambda = 0$  tritt das genau dann ein, wenn die Materie- und Strahlungsdichte  $\rho_m$  gleich der kritischen Dichte  $\rho_c$  ist, also  $\Omega_m = 1$  gilt. Übersteigt  $\rho_m$  den kritischen Wert, so handelt es sich um ein kollabierendes Universum.

Anhand von Gleichung (52) können noch weitere Szenarien, insbesondere solche mit nicht-verschwindender kosmologischer Konstanten, analysiert werden. Entscheidend dabei ist die Frage, ob  $\Lambda$  positiv oder negativ ist, also eine gravitative oder antigravitative Wirkung hat. In der Regel wird  $\Lambda > 0$  angenommen. Ist  $\Omega_m < 1$ , so hängt es von der Vakuumsenergiedichte  $\Omega_{\text{vac}}$  ab, ob  $k$  ein positives oder negatives Vorzeichen bekommt. Liegt  $\rho_v$  über der kritischen Dichte ( $\Omega_{\text{vac}} > 1$ ), so führt dies ebenfalls zu einem Kollaps.

### 4.3 Der Abbremsparameter $q_0$ in der Friedmanngleichung

Im Zuge der Herleitung des Hubbleschen Gesetzes hatten wir den Quotienten  $R(t_1)/R_0$  um  $t_0$  entwickelt (s. (32)) und dabei die Größe

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0 H_0^2} = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0} \cdot \left(\frac{\dot{R}_0}{R_0}\right)^{-2} \quad (53)$$

eingeführt. Die Bezeichnung ‘‘Abbremsparameter’’ soll an dieser Stelle noch etwas mehr begründet werden. Betrachtet man besonders den zweiten Ausdruck für  $q_0$ , so fällt auf, dass die beiden Quotienten genau den Größen entsprechen, die durch die Friedmann-Gleichung (49) und den als zweite unabhängige Gleichung gewählten Zusammenhang (51) bestimmt sind. Durch Dividieren dieser beiden Gleichungen (bei  $\Lambda = 0$ ) erhält man

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} \left(1 + \frac{3p}{\rho}\right) = \frac{\Omega_0}{2} (1 + 3\omega). \quad (54)$$

$\Omega_0$  steht für  $\rho_0/\rho_c$  und beschreibt die heutige Dichte von Materie, Strahlung oder Vakuumsenergie im Universum. Man unterscheidet folgende drei Fälle:

- Das materiedominierte Modell. Für die druckfreie Materie gilt  $\omega = 0$  und es ergibt sich  $q_0 = \frac{\Omega_0}{2}$ , was einer verzögerten Expansion entspricht.
- Das strahlungsdominierte Modell. Wegen  $\omega = \frac{1}{3}$  ist  $q_0 = \Omega_0$ , es liegt ebenfalls abgebremste Ausdehnung vor.
- Das vakuumdominierte Modell: Es ist  $\omega = -1$  und daher  $q_0 = -\Omega_0$ . Der negative Abbremsparameter entspricht einer beschleunigten Expansion.

Nach den heutigen Messungen geht man von einem vakuumdominierten Universum aus. Offensichtlich stellt die Vakuumsenergie (oder auch dunkle Energie) etwa 70% des Inhalts des gesamten Universums.

#### 4.4 Vergangenheitsszenarien: Das Alter des Universums

Die durch die Friedmann-Gleichung beschriebene Skalierungsdynamik lässt nicht nur Aussagen über das zukünftige Universum zu, sondern erlaubt auch Analysen für vergangene Zeiten  $t$ . Ein interessanter Aspekt dabei ist das Alter unseres Universums, das man durch Aufintegration von (49) berechnen, bzw. in Abhängigkeit von anderen kosmologischen Parametern angeben kann. Eine Vereinfachung der Gleichung erreicht man durch Ausnutzen des bereits bekannten Skalenverhaltens der Dichten.

Im Fall von Materie ergab sich aus der Kombination von Energieerhaltung und der Zustandsgleichung  $\rho \propto R^{-3}$ . Dies gestattet es uns, die zeitabhängige Materiedichte durch ihren heutigen Wert auszudrücken:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \quad (55)$$

Nach Elimination von  $\rho$  und einigen weiteren Umstellungen nimmt die Friedmann-Gleichung die folgende Form an:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{R_0}{R}. \quad (56)$$

Für ein strahlungsdominiertes Universum würde  $\rho \propto R^{-4}$  gelten, so dass die Elimination von  $\rho$  auf

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \quad (57)$$

führen würde. Diese beiden Zusammenhänge kann man als Gleichungen für  $\dot{R}$  in Abhängigkeit von  $R$  sehen. Das Alter des Universums liefert eine einfache Aufintegration nach Trennung der Variablen:

$$t = \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R}'} \quad (58)$$

Die resultierenden Integrale lassen sich exakt lösen, jedoch sind die ausgeschriebenen Ergebnisse länglich und werden hier ausgespart. Stattdessen sind in Abbildung 4 die Ergebnisse für das materiedominierte und das strahlungsdominierte Modell graphisch dargestellt. Das Alter des Universums ist demnach eine fallende Funktion der Dichte. Eine größere  $\Omega_0$  entspricht einer größeren Abbremsung (s. auch den vorangehenden Abschnitt) und demnach einer schnelleren Expansion des frühen Universums. Das strahlungsdominierte Universum ist bei gleicher, nicht verschwindender Dichte jünger als das materiedominierte Universum. Diese Beobachtung deckt sich mit dem größeren Abbremsparameter. Besonders gekennzeichnet ist der Punkt  $\Omega_0 = 1$ . Ruft man sich Gleichung (52) in Erinnerung, so findet man, dass dies wegen  $\Omega_{\text{vac}} = 0$  dem Fall  $k = 0$ , also einem flachen Raum, gleichkommt. Das materiedominierte Modell hätte dann das Alter  $\frac{2}{3}H_0$ , das strahlungsdominierte Modell ein Alter von  $\frac{1}{2}H_0$ . Besagter Fall stellt das Einstein-Sitter-Modell dar, das in der Kosmologie lange Zeit das bevorzugte war, nicht zuletzt, weil man mit der kosmologischen Konstante nicht recht etwas anzufangen wusste und  $k = 0$  die Gleichungen angenehm vereinfacht. Allerdings ist das resultierende Alter des Universums jünger als das

einiger (später beobachteter) Sternhaufen, so dass wohl noch Korrekturen vorzunehmen sind.

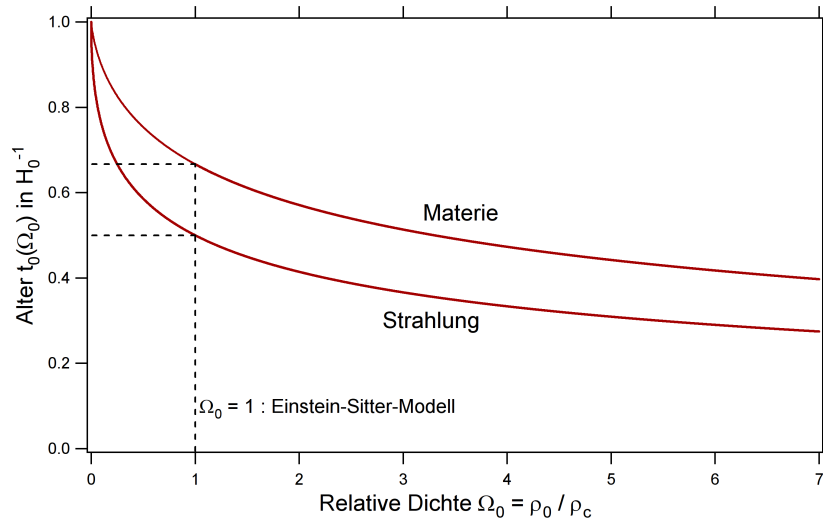


Abbildung 4: Das Alter des Universums in Hubblezeiten, abhängig von der heutigen Materie- oder Strahlungsdichte (bei  $\Lambda = 0$ ).

Eine mögliche Korrektur ist die Berücksichtigung der kosmologischen Konstanten, wodurch der Effekt der Vakuumsenergie mit einbezogen wird. Man weiß heutzutage, dass das Universum in etwa flach sein muss, also  $k = 0$  oder auch  $\Omega_m + \Omega_{vac} = 1$ . Die Abhängigkeit der beiden Dichten führt auf einen einfachen Zusammenhang für das Alter:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1 - \Omega_0)^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - \Omega_0}}{\sqrt{\Omega_0}} \right] \tag{59}$$

Für die graphische Veranschaulichung sei auf Abbildung 5 verwiesen.

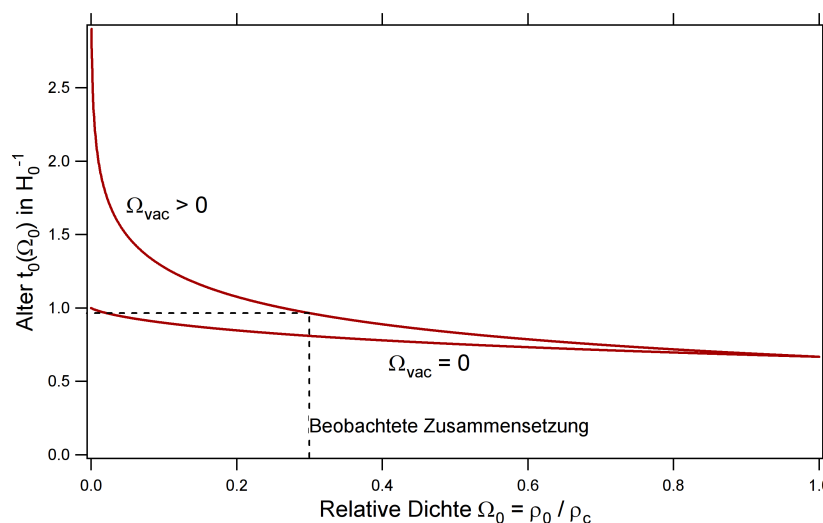


Abbildung 5: Das Alter des Universums in Hubblezeiten, abhängig von der heutigen Materiedichte (bei  $\Omega_m + \Omega_{vac} = 1$ ).

Die untere Kurve entspricht dem Kurvenabschnitt von  $\Omega_0 \in [0, 1]$  des materiedominierten

Kosmos wie in Abbildung 4 ( $\Lambda = 0$ ). Bei nicht verschwindender kosmologischer Konstante erhält man die obere Kurve aus (59), also ein deutlich älteres Universum.

Aktuell gibt man die drei wesentlichen kosmologischen Parameter  $h$ ,  $\Omega_m$  und  $\Omega_{\text{vac}}$  etwa wie folgt an:

$$\boxed{\Omega_m \approx 0,3 \quad \Omega_{\text{vac}} \approx 0,7 \quad h \approx 0,7} \quad (60)$$

Damit kann man, wie in Abbildung 5 angedeutet, das Alter unseres Universums zu

$$t_0 \approx 0,96 \cdot H_0^{-1} \approx 13,41 \cdot 10^9 \text{ y} \quad (61)$$

ermitteln. Zum Vergleich: Eine jüngere Auswertung von Beobachtungen (März 2010) ergab

$$t_0 = 13,75 \cdot 10^9 \text{ y}, \quad (62)$$

was “nur” etwa 300 Millionen Jahre neben dem berechneten Wert liegt.

## 5 Schlussfolgerungen

Es war bereits eingangs angeklungen, dass es grundlegender Vereinfachungen bedarf, um aus den Einsteinschen Feldgleichungen eine analytische Lösung zu gewinnen. Das Kosmologische Prinzip stellt eine solche (durch entsprechende Beobachtungen gerechtfertigte) Vereinfachung dar, und liefert über die resultierende Robertson-Walker-Metrik wichtige Gesetzmäßigkeiten zur Rotverschiebung und deren Zusammenhang mit der Entfernung von Lichtquellen. Von entscheidender Bedeutung sind auch die im Rahmen der Analyse der Friedmann-Gleichung gemachten Aussagen zum Ursprung und zum Expansionsverhalten unseres Universums. Da es sich um eine Näherung handelt, ist nicht zu erwarten, dass man quantitativ exakte Ergebnisse erzielt, aber die qualitativen Vorhersagen sind durchaus bedeutsam: Man entnimmt den Gleichungen, dass es zu Beginn der Zeit einen singulären Punkt gegeben haben muss, und auch, dass es eines großen Anteils an unsichtbarer Vakuumsenergie (dunkle Energie) bedarf, um die gegenwärtige beschleunigte Expansion zu erklären. Möchte man das Alter des Universums exakter bestimmen, als das im vorherigen Abschnitt gelungen ist, so muss man die sich im Laufe der Zeit verändernde Zusammensetzung des Kosmos stärker berücksichtigen. Die unterschiedlichen Epochen des frühen Universums waren durch verschiedene Energieformen dominiert. Diese Entwicklung wird in den folgenden Vorträgen noch genauer untersucht werden.

## Literatur

- [1] E.W. Kolb, M.S. Turner, *The early universe*, Addison Wesley (1991)
- [2] P. Schneider, *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie*, 141-176, Springer Heidelberg, korrigierter Nachdruck (2008)
- [3] U.E. Schröder, *Gravitation*, Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage (2011)
- [4] Swinburn Astronomy Online, <http://astronomy.swin.edu.au/>, 01.11.2011