

Zusammenfassung des Seminarvortrags  
**Skalensymmetrie**

Marcel Rothering

6. Februar 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Skalensymmetrie in der klassischen Physik</b>	<b>5</b>
2.1 Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	5
2.2 Der Virialsatz . . . . .	7
<b>3 Skalensymmetrie in der Teilchenphysik</b>	<b>9</b>
3.1 Der Einteilchen-Hamiltonoperator . . . . .	9
3.2 Skalensymmetrie in der Feldtheorie . . . . .	10
3.3 Die tiefinelastische Elektron-Proton Streuung . . . . .	11
<b>4 Selbstähnlichkeit und Fraktale</b>	<b>13</b>
4.1 Selbstähnliche Funktionen . . . . .	13
4.2 Fraktale . . . . .	14
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>16</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Am Anfang einer Skalensymmetrie steht eine Skalentransformation. Bei der hier verwendeten Skalentransformation wird jede Abmessung mit dem gleichen positiven Faktor  $a$  multipliziert. In Abb. 1.1 ist die Transformation für Längenabmessungen schematisch dargestellt. Man erkennt, dass Längen um den Faktor  $a$ , Flächen um  $a^2$  und Volumina um den Faktor  $a^3$  gewachsen sind.

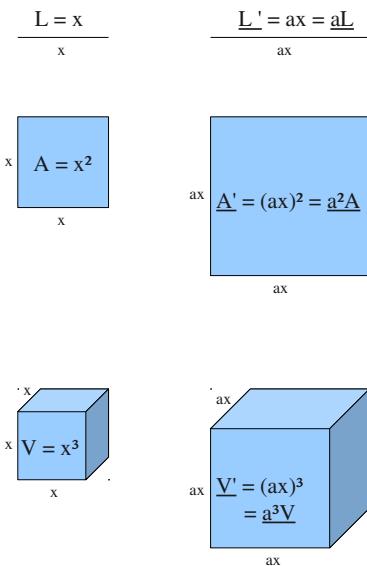


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung einer Skalentransformation.

Als erstes Beispiel wird die newtonsche Bewegungsgleichung für Planeten betrachtet.

$$m_i \ddot{\vec{r}_i} = G \sum_{j \neq i} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}$$

Nun werden alle Längenabmessungen mit der positiven Konstante  $a$  skaliert. Dadurch ergeben

sich die Transformationen:

$$\begin{aligned}
 \rho \cdot V = m_i &\rightarrow m'_i = a^3 m_i \\
 \vec{r}_i &\rightarrow \vec{r}'_i = a \vec{r}_i \\
 \dot{\vec{r}}_i &\rightarrow \dot{\vec{r}}'_i = a \dot{\vec{r}}_i \\
 \ddot{\vec{r}}_i &\rightarrow \ddot{\vec{r}}'_i = a \ddot{\vec{r}}_i
 \end{aligned}$$

Setzt man die skalierten Größen in die Bewegungsgleichung ein, ergibt sich auf beiden Seiten der konstante Faktor  $a^4$ . Dieser lässt sich *kürzen*. Das bedeutet, dass die beiden Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Nur aufgrund dieser ist das originale System vom umskaliertem nicht zu unterscheiden.

Führt man am System jedoch Messungen durch, die dimensionsbehaftete Naturkonstanten enthalten, lassen sich die Systeme unterscheiden. Bei der Lichtlaufzeitmessung zwischen den Planeten kommt man aufgrund der konstanten Lichtgeschwindigkeit  $c$  zu unterschiedlichen Ergebnissen. Betrachtet man unsere Erde und skaliert diese um einen Faktor  $a > 110$ , finden Kernreaktionen statt und die Systeme werden unterscheidbar.

Man unterteilt die dimensionsbehafteten Größen in drei Ebenen. Es entsteht folgende Hierarchie:

### 1. Die Schrödinger-Gleichung

Dimensionsbehaftete Konstanten:  $\hbar, m_e, e$   
 $\rightarrow a_B = \hbar/(m_e e)^2, t_B$  und  $E_B$

### 2. Hinzunahme der SRT

Neue dimensionsbehaftete Konstante:  $c$   
 $\rightarrow \alpha = e^2/(\hbar c), \mu_B, \lambda_C = \alpha a_B, r_e = \alpha e, e_{Pl} = \sqrt{\hbar c}$

### 3. Planck-Skala ( $G$ )

Neue dimensionsbehaftete Konstante:  $G$   
 $\rightarrow l_{Pl} = \sqrt{\hbar G} \approx 10^{-35} \text{ m}, t_{Pl}$  und  $m_{Pl}$

Für jede Ebene resultieren aus den Konstanten charakteristische Längen-, Massen-, Ladung- oder Zeitgrößen, wie zum Beispiel der bohrsche Radius  $a_B$ . Die Planck-Ebene vereinigt die Quanten- und Relativitätstheorie mit der Gravitation.

## Kapitel 2

# Skalensymmetrie in der klassischen Physik

### 2.1 Mechanische Ähnlichkeit

In der klassischen Physik ist der Begriff der *Mechanischen Ähnlichkeit* äquivalent zum Begriff Skalensymmetrie.

Als Ausgangspunkt wird die Langrangefunktion  $L = T - V$  betrachtet. Sie wird mit dem Faktor  $a$  skaliert. Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind dann äquivalent.

$$\begin{aligned} L = T - V &\quad \rightarrow \quad L' = aL = aT - aV \\ \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \end{aligned}$$

Die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $V$  müssen beide mit dem gleichen Faktor skaliert werden, damit Skalensymmetrie in der Bewegungsgleichung vorliegen kann.

Man macht die Annahme, dass das Potential  $V$  eine homogene Funktion der Koordinaten ist.

$$V(a\vec{r}_1, \dots, a\vec{r}_n) = a^k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

Bei einer Skalierung der Längenabmessungen bzw. der Koordinaten  $\vec{r}_i$  verändert sich das Potential nur um einen konstanten Faktor  $a^k$ , wobei  $k$  der Homogenitätsgrad der Funktion  $V$  ist. Für das harmonische Oszillator Potential ist der Homogenitätsgrad  $k = 2$ .

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \rightarrow \quad V(ax) = a^2 V(x)$$

Nun führt man folgende Transformation der Raum- und Zeitkoordinate durch:

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = a\vec{r}_i \quad \text{und} \quad t \rightarrow t' = bt$$

Zwischen den skalierten und unskalierten Energien ergibt sich dadurch folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}'_i) &= a^k V(\vec{r}_i) \\ T(\vec{r}'_i, t') \sim \left( \frac{\partial(a\vec{r}_i)}{\partial(bt)} \right)^2 &\rightarrow T(\vec{r}'_i, t') = \frac{a^2}{b^2} T(\vec{r}_i, t) \end{aligned}$$

Damit Skalensymmetrie vorliegt, darf die Lagrangefunktion  $L'$  sich nur um einen konstanten Faktor von  $L$  unterscheiden.

$$L' = T' - V' = \frac{a^2}{b^2} T - a^k V \stackrel{!}{=} \lambda L$$

Dadurch ergibt sich eine Bedingung für die Beziehung zwischen der Skalierung der Raum- und Zeitkoordinaten:

$$\frac{a^2}{b^2} \stackrel{!}{=} a^k \quad \text{bzw.} \quad b \stackrel{!}{=} a^{1-\frac{k}{2}}$$

Mit dieser Transformation erhält man äquivalente Bewegungsgleichungen. Die Lösungen  $\vec{r}(t)$  und  $\vec{r}'(t')$  beschreiben ähnliche Bahnen. Damit kann man ein Verhältnis von Zeitdifferenzen für äquivalente Bahnen angeben:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \left( \frac{l'}{l} \right)^{1-\frac{k}{2}}$$

Die Größen  $l$  und  $l'$  sind Längenabmessungen. Es lassen sich auch Verhältnisse für die Geschwindigkeiten, Energien und Drehmomente ableiten:

$$\frac{\Delta v'}{\Delta v} = \frac{\partial_t l'}{\partial_t l} = \left( \frac{l'}{l} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{\Delta E'}{\Delta E} = \left( \frac{l'}{l} \right)^k \quad \text{und} \quad \frac{\Delta M'}{\Delta M} = \left( \frac{l'}{l} \right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Ohne die Bewegungsgleichung explizit zu lösen, kann man nun Eigenschaften des Systems feststellen. Man muss nur den Homogenitätsgrad  $k$  des Potentials  $V$  kennen. Dies lässt sich am besten durch drei Beispiele verdeutlichen.

### 1. Freier Fall

Homogenes Kraftfeld  $\rightarrow V(h) = mgh \rightarrow k = 1$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

Die Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Anfangshöhen.

Löst man die Bewegungsgleichung kommt man zum gleichen Ergebnis:  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .

### 2. Harmonischer Oszillatator

$V(x) \sim x^2 \rightarrow k = 2$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = 1$$

Die Umlaufzeiten sind unabhängig von der Amplitude. Die Lösung der Bewegungsgleichung liefert den gleichen Zusammenhang:  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

### 3. Gravitations- oder Coulomb-Potential

$$V(r_{ij}) \sim \frac{1}{r_{ij}} \rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Dieser Zusammenhang liefert das dritte keplersche Gesetz. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Abstände.

## 2.2 Der Virialsatz

Damit der Virialsatz gilt, müssen zwei Bedingungen für das physikalische System erfüllt sein. Das Potential muss homogene Funktion vom Grad  $k$  sein und die Bewegung muss in einem begrenzten Raumbereich ablaufen. Der Virialsatz gibt dann einen einfachen Zusammenhang zwischen den zeitlichen Mittelwerten der potentiellen und kinetischen Energie an.

Für die Herleitung wird der Eulersche Satz über homogene Funktionen verwendet:

$$k \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i \Leftrightarrow k \cdot f(\vec{r}) = (\vec{\nabla} f(\vec{x})) \cdot \vec{r}$$

Außerdem benötigt man den zeitlichen Mittelwert einer Funktion:

$$\langle f(t) \rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$$

Falls  $f(t)$  die Ableitung einer beschränkten Funktion ist, verschwindet der Mittelwert:

$$\langle f(t) \rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0$$

Die kinetische Energie  $T$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $v$  ist homogene Funktion vom Grad  $k = 2$ , da  $T \sim v^2$ . Dies ergibt mit den Satz von Euler:

$$2T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial v_i} v_i$$

Mit dem Zusammenhang  $\frac{\partial T}{\partial v_i} = p_i$ , der zeitlichen Ableitung und der Produktregel kommt man zu dem Ergebnis:

$$2T = \sum_i p_i v_i = \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i r_i \right)}_{\textcircled{1}} - \sum_i r_i \dot{p}_i$$

Nun bildet man den zeitlichen Mittelwert von der rechten und linken Seite der Gleichung. Der zeitliche Mittelwert des Terms  $\textcircled{1}$  verschwindet, da  $pr$  nach Voraussetzung beschränkt ist.

$$\rightarrow 2\langle T \rangle_t = - \sum_i \langle r_i \dot{p}_i \rangle$$

Zuletzt benutzt man den Zusammenhang  $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}V$  und wendet wieder den Satz von Euler an:

$$\rightarrow 2\langle T \rangle_t = - \sum_i \langle r_i \dot{p}_i \rangle = \sum_i \langle \frac{\partial V}{\partial r_i} r_i \rangle = k \langle V \rangle_t$$

Für die Gesamtenergie gilt:  $\langle T \rangle_t + \langle V \rangle_t = \langle E \rangle_t = E$ . Somit kommt man zu einem einfachen Zusammenhang zwischen den zeitlichen Mittelwerten der potentiellen und kinetischen Energie:

$$\langle V \rangle_t = \frac{2}{k+2} E$$

$$\langle T \rangle_t = \frac{k}{k+2} E$$

Um die Aussage des Resultats zu demonstrieren werden wieder Beispiele aufgeführt:

### 1. Der Harmonische Oszillator

Homogenitätsgrad  $k = 2$

$$\langle T \rangle_t = \langle V \rangle_t = \frac{1}{2} E$$

Mittelwerte der Energien fallen zusammen.

### 2. Gravitations- oder Coulomb-Potential

Homogenitätsgrad  $k = -1$

$$2\langle T \rangle_t = -\langle V \rangle_t \quad \rightarrow E = -\langle T \rangle_t$$

Bewegung nur im begrenzten Raumbereich falls  $E < 0$

# Kapitel 3

## Skalensymmetrie in der Teilchenphysik

### 3.1 Der Einteilchen-Hamiltonoperator

Zunächst wird der Einteilchen-Hamiltonoperator betrachtet. Dieser lässt sich allgemein wie folgt schreiben.

$$\mathcal{H} \sim p^n + ar^{-n}$$

Dabei ist  $a$  eine dimensionslose positive Konstante. Dieser Hamiltonoperator ist invariant unter der Zeittranslation  $t \rightarrow t' = t + \tau$ . Mit dem Noether-Theorem folgt aus dieser Symmetrie die Erhaltung der Energie  $E$ .

Er ist auch invariant unter der folgenden Skalentransformation:

$$t \rightarrow \rho t \quad r(t) \rightarrow \rho^{-\frac{1}{n}}r(\rho t) \quad p(t) \rightarrow \rho^{\frac{1}{n}}p(\rho t)$$

Setzt man die skalierten Größen in den Hamiltonoperator ein, hat sich dieser lediglich um den konstanten Faktor  $\rho$  verändert. Auch diese Invarianz liefert mit dem Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße. Die Konstante der Bewegung:

$$D = -\frac{1}{n}(pr) + Et$$

Im nicht-relativistischen Fall ist die kinetische Energie  $T$  proportional zu  $p^2$ . Somit ist  $n = 2$ , damit Skalensymmetrie vorliegt. Das bedeutet, dass das Potential  $V$  proportional zu  $r^{-2}$  sein muss. Solche Potentiale haben jedoch keine physikalische Bedeutung. Daher ist im nicht-relativistischen Fall die Skaleninvarianz eher unbrauchbar.

Anders ist es beim relativistischen Fall. Es gilt hier folgende Proportionalität der kinetischen Energie:

$$T \sim \sqrt{(p^2 + m_0^2)}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Konstanten zu  $c = 1 = \hbar$  gewählt wurden.

Ist nun entweder die Ruheenergie vernachlässigbar klein gegen die kinetische Energie oder das

Teilchen ist masselos, dann ist  $T \sim p$ . Falls nun Skaleninvarianz vorliegen soll, muss das Potential mit  $r^{-1}$  gehen. Diese Potentiale haben eine physikalische Bedeutung. Zum Beispiel das Coulomb- oder Yukawapotential. Im hochenergetischen Bereich oder bei masselosen Teilchen ergibt sich aufgrund der Skalensymmetrie eine neue Erhaltungsgröße, die Konstante der Bewegung  $D$ .

### 3.2 Skalensymmetrie in der Feldtheorie

In der Feldtheorie reicht der Einteilchen-Hamiltonoperator nicht aus. Hier befasst man sich mit der Lagragedichte:

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

Aus dieser ergibt sich mit der modifizierten Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung des Feldes  $\phi$ :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0$$

Damit Skaleninvarianz vorliegt, darf die Lagragedichte keine dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten enthalten. Genau dann kann die Feldgleichung invariant unter der Skalentransformation

$$\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x} \quad \phi(\mathbf{x}) \rightarrow \lambda^{-\Delta} \phi(\lambda \mathbf{x})$$

sein. Die Variable  $\mathbf{x}$  ist der Vierervektor und  $\Delta = \frac{d-2}{2}$  ist die sogenannte Skalendimension. Es folgen einige Beispiele skaleninvarianter Lagragedichten.

#### 1. Freie Maxwellgleichungen - Photon

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ \rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\mu &= 0 \quad \text{mit } \partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \partial_t, \vec{\nabla} \right) \end{aligned}$$

Die Skalentransformation mit  $\Delta = 0$  ändert die Feldgleichung nicht. Falls  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  Lösung des Systems ist, so ist auch  $\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x})$ . Lösung.

#### 2. Klassische skalare Feldtheorie - Spin = 0

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \\ \rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi &= 0 \quad \text{Klein-Gordon-Gl.} \end{aligned}$$

Hier liegt Skalensymmetrie vor, falls  $m = 0$  oder  $T \gg m_0$ . Falls die Theorie nicht masselos ist, gibt es einen Symmetriebruch, da Längen- und Massendimension antiproportional zueinander sind:  $L = \frac{1}{m}$ .

### 3. Masselose $\phi^4$ -Theorie

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - \frac{g}{4} (\phi^* \phi)^2 \\ &\rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + g \phi^3 = 0\end{aligned}$$

Die vorherigen Beispiele waren lineare Differentialgleichungen und somit musste  $\Delta = 0$  gewählt werden. Bei dieser Theorie gilt Skaleninvarianz falls  $\Delta = 1$  ist.

Diese Bewegungsgleichung ist die einfachste Feldtheorie mit einer Selbstwechselwirkung und es sind im Gegensatz zu realistischeren Modellen exakte mathematische Aussagen möglich. Die Kopplungskonstante  $g$  muss dimensionslos sein.

Mit der Skalentransformation und dem Noether-Theorem folgt der Dilatationsstrom:

$$D^\mu(\mathbf{x}) = x_\nu \Theta^{\mu\nu}(\mathbf{x})$$

Der Strom ist erhalten, falls die Theorie skaleninvariant ist. Das ist vergleichbar mit der Kontinuitätsgleichung bei der Ladungserhaltung  $\partial_\mu J^\mu = 0$ . Die Konstante der Bewegung ergibt sich dann wie folgt:

$$D = \int d^3x D^0(\mathbf{x})$$

Die Skalentransformation wird auch Dilatation genannt und bildet zusammen mit der Poincaré Gruppe die große konforme Gruppe mit den Generatoren:

$$\begin{aligned}\text{Lorentzgenerator: } M_{\mu\nu} &\equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \\ \text{Translationsgenerator: } P_\mu &\equiv -i\partial_\mu \\ \text{Dilatationsgenerator: } D &\equiv -ix_\mu \partial^\mu \\ \text{Spez. konf. Transformation: } K_\mu &\equiv i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial^\nu)\end{aligned}$$

### 3.3 Die tiefinelastische Elektron-Proton Streuung

Es wurde gezeigt, dass bei hoher kinetischer Energie der Teilchen näherungsweise Skalensymmetrie vorliegt. Dies führt zu der Betrachtung der tiefinelastischen Elektron-Proton Streuung. In Abb. 3.1 ist dieser Streuprozess schematisch dargestellt.

Relevant bei Streuprozessen ist der sogenannte Wirkungsquerschnitt. In diesem Fall lässt er sich wie folgt darstellen:

$$\sigma_{DIS} \sim \sigma_{Mott} \left[ \frac{M_P}{\nu} F_2(q^2, x) + 2F_1 \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)^2 \right]$$

Dabei ist  $\nu$  die Energie des virtuellen Photons,  $q^2$  ist der Viererimpulsübertrag und  $F_i$  sind Strukturfunktionen, welche proportional zur Fouriertransformierten der Ladungsverteilungen

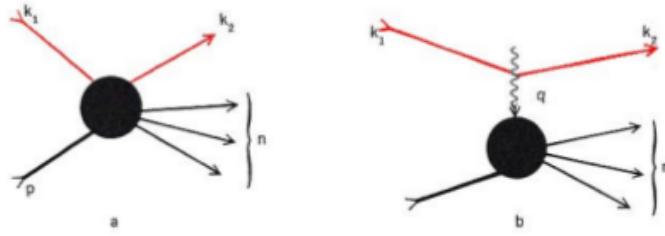


Abbildung 3.1: [1] Schematische Darstellung des Streuprozesses.

sind.

Nun führt man die dimensionlose Bjorkensche Skalenvariable  $x = \frac{q^2}{2M_p \nu}$  ein. Bjorken stellte nun folgende Hypothese auf:

$$F_1(x, q^2) = \lim_{W \rightarrow \infty} F_1(x)$$

$$F_2(x, q^2) = \lim_{W \rightarrow \infty} F_2(x)$$

Das bedeutet, dass bei hohen Massenschwerpunktsenergien die Formfaktoren nur noch von dem Verhältnis  $x$  abhängen. Dieses läuft bei hohen Energien gegen einen konstanten Wert und würde die Streuung an Punktteilchen bedeuten.

Bjorkens Hypothese wurde am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) experimentell nachgewiesen, wie in Abb. 3.2 zu sehen ist. Somit wurden die ersten Hinweise auf die punktförmigen

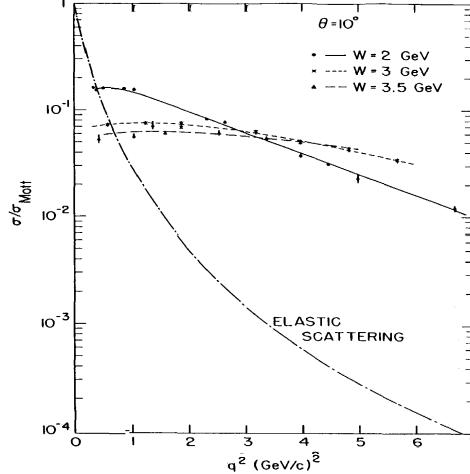


Abbildung 3.2: [2] SLAC-Messwerte.

Konstituenten des Protons geliefert.

## Kapitel 4

# Selbstähnlichkeit und Fraktale

Als selbstähnlich bezeichnet man Objekte, Körper, Gegenstände, Funktionen, ... die nach Skalentransformation dieselben oder ähnliche Strukturen aufweisen.

### 4.1 Selbstähnliche Funktionen

Als Ausgangspunkt wird die selbstähnliche Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -g \cdot x(t) \quad \text{mit } g > 0$$

betrachtet. Diese wird durch die Funktion  $x(t) = x_0 e^{-gt}$  gelöst. Führt man bei der Lösungsfunktion die Skalentransformation

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \tilde{x}(t) = ax(t/b)$$

durch, stellt man fest, dass die transformierte Funktion nur Lösung derselben Differentialgleichung ist, falls  $b = 1$  ist. Die Zeit  $t' = 1/g$  ist ausgezeichnet.

Nun wird eine leicht veränderte Differentialgleichung betrachtet:

$$\dot{x}(t) = -g \cdot x(t)^k \text{ mit } k \neq 1$$

Eine spezielle Lösung dieser nichtlinearen Gleichung für  $k = 3$  ist:

$$x_\infty(t) = (2g \cdot t)^{-\frac{1}{2}}$$

Führt man nun die Koordinatentransformation

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \tilde{x}_\infty(t) = b^{\frac{1}{1-k}} x(t/b)$$

durch, wird die Lösung in sich selbst überführt:

$$\begin{aligned} x_\infty(t) \quad \rightarrow \quad \tilde{x}_\infty(t) &= b^{-\frac{1}{2}} x_\infty(t/b) \\ &= b^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2gt}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} = x_\infty(t) \end{aligned}$$

Funktionen, welche die Gleichung  $x(bt) = b^\kappa x(t)$  erfüllen, heißen selbstähnlich. Sie besitzen die gleichen Eigenschaften, wie gleiche Extremwerte, Nullstellen und Wendepunkte. In Abb. 4.1 ist die logarithmische Spirale als Beispiel einer selbstähnlichen Funktion zu sehen. Diese lässt sich in Polarkoordinaten wie folgt darstellen:

$$r(\varphi) = ae^{k\varphi}$$

Die Funktion ist invariant unter der Streckung  $e^{kb}$  bei zusätzlicher Drehung um  $b$ .

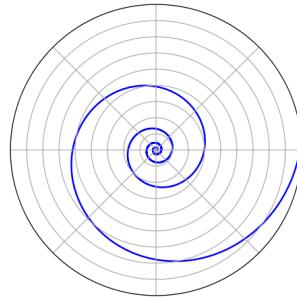


Abbildung 4.1: [3] Logaritmische Spirale.

## 4.2 Fraktale

Fraktale sind natürliche oder künstliche Objekte mit einem hohen Grad an Selbstähnlichkeit. Sie sind für einen diskreten Satz von Skalenfaktoren  $b$  invariant und besitzen somit keine strenge Skalensymmetrie.

In Abbildung 4.2 sind die Mandelbrotmenge und die Koch-Kurve als bekannte Fraktale dargestellt.

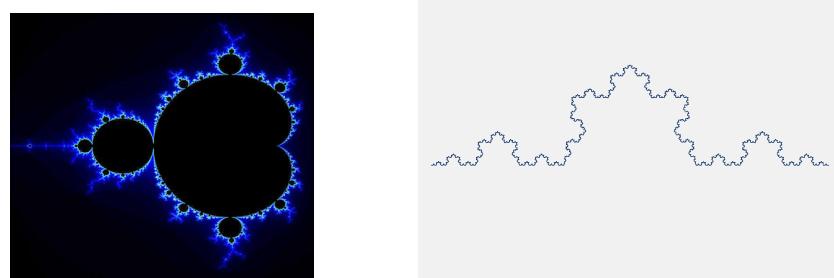


Abbildung 4.2: [4] Mandelbrot-Menge, Koch-Kurve.

### Die Koch-Kurve

Die Koch-Kurve ist eine überall stetige, doch nirgends differenzierbare Kurve. Für die Konstruktion wird eine beliebig lange Strecke in drei gleich lange Strecken unterteilt und über der mittleren Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Nach zweimaliger Anwendung dieser Vorschrift entsteht das Bild in Abb. 4.3. Die Koch-Kurve ist das Ergebnis des Grenzwertes des

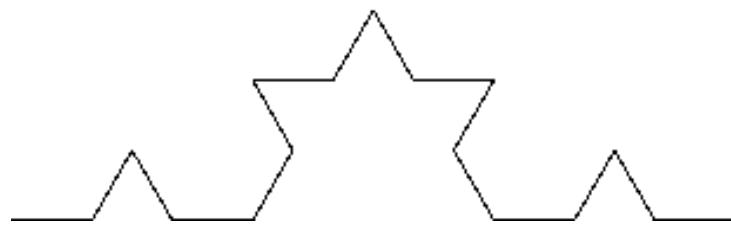


Abbildung 4.3: [4] Konstruktion der Koch-Kurve.

iterativen Prozesses. Somit sind alle Darstellungen der Kurve nur Näherungen.

Die Kurve wächst pro Iteration um den Faktor  $4/3$ . Sie ist also unendlich lang, hat jedoch einen begrenzten Flächeninhalt. Da die Koch-Kurve ein rein mathematisches Objekt ist, weist sie keine elementare Feinstruktur auf. Sie besitzt die diskreten Skalenfaktoren  $b = \frac{1}{3^n}$  und die Ähnlichkeitsdimension  $D = 1,26$ , welche sich wie folgt berechnet:

$$D = \frac{\log N}{\log m}$$

$N$  ist die Anzahl der Kopien und  $m$  der Verkleinerungsfaktor. Ein Quadrat hat die Ähnlichkeitsdimension  $D = 2$ . Für einen Kreis ist diese Dimension nicht definiert, da der Kreis nicht aus kleineren Kopien seiner selbst besteht.

In Abb. 4.4 sind zwei Fraktale aus der Natur zu sehen. Da Objekte aus der Natur elementare Feinstruktur besitzen, haben natürliche Fraktale nur ungefähr drei bis fünf selbstähnliche Stufen.



Abbildung 4.4: [7] Romanesco, [8] Farn.

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

Insgesamt ist Skalensymmetrie sehr nützlich und erleichtert einem die Arbeit bei der Berechnung bestimmter physikalischer Systeme. Aufgrund der Naturkonstanten, die bestimmte Längen, Massen, usw auszeichnen, liegt oftmals nur Näherungsweise Skaleninvarianz vor.

In der klassischen Physik wurden nützliche Aussagen getroffen, ohne die Bewegungsgleichung explizit zu lösen. Es ist lediglich nötig, den Homogenitätsgrad  $k$  des Potentials zu kennen. Außerdem wurde der Virialsatz hergeleitet.

In der Teilchenphysik weisen masselose Feldtheorien Skalensymmetrie auf oder aber auch Teilchen im hochenergetischen Bereich.

Es gibt selbstähnliche Funktionen, die dieselben Eigenschaften besitzen. Fraktale besitzen einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit, sind jedoch nicht streng selbstähnlich.

## Literaturverzeichnis

- 1 Roman Jackiw. Introducing scale symmetry. *Physics Today*, 25(1): 23-27, Jan 1972.
- 2 [http://www.scholarpedia.org/article/Bjorken\\_scaling](http://www.scholarpedia.org/article/Bjorken_scaling)
- 3 [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Logarithmic\\_Spiral.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Logarithmic_Spiral.svg)
- 4 <http://www.natur-struktur.ch/fraktale/images/>
- 5 <http://de.wikipedia.org/wiki/Blumenkohl>
- 6 <http://www.fraktalwelt.de/myhome/images/farn.gif>
- 7 Dirk Sandbrink. Zusammenfassung Skalensymmetrie. 2008.
- 8 Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 1 - Klassische Mechanik*. Springer-Verlag, 2004.
- 9 Cornelius von Westenholz. Scale symmetry and virial theorem. 1978.