$SO(3)$ und $SU(2)$

Schriftliche Ausarbeitung des Vortrags vom 24. November 2010
im Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Patrick Steppeler[1]

27. November 2010

[1] p.steppeler@online.de

Inhaltsverzeichnis

1 Die Drehgruppe $SO(3, \mathbb{R}^3)$

1.1 Definition und Eigenschaften

Die *spezielle orthogonale Gruppe im Dreidimensionalen* wird kurz als $SO(3)$ bezeichnet. Es handelt sich hierbei um die Gruppe der Drehungen. In diesem Abschnitt wird die $SO(3)$ zunächst im $\mathbb{R}^3$ eingeführt. Wir schreiben daher $SO(3, \mathbb{R}^3)$ und definieren die Drehgruppe wie folgt:

> *„Unter der Drehgruppe verstehen wir die Gruppe der homogenen linearen Transformationen*
> $$\vec{x}' = R\vec{x} \tag{1}$$
> *eines euklidischen dreidimensionalen Raumes in sich, welche Längen invariant lassen und Richtungen nicht ändern."* (Sexl/Urbantke)

Ein Vektor $\vec{x}$ wird durch Multiplikation mit einer Rotations- oder Drehmatrix R in einen Vektor $\vec{x}'$ überführt. Aus dieser Definition, d.h. insbesondere den unterstrichenen Forderungen, lassen sich direkt zwei wesentliche mathematische Eigenschaften der Drehmatrizen R ableiten.

1. **Längen bleiben invariant**

   Im dreidimensionalen euklidischen Raum sind die Längen über das zugehörige Skalarprodukt definiert. Wir erhalten

   $$\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle \overset{!}{=} \langle\vec{x}'|\vec{x}'\rangle = \langle R\vec{x}|R\vec{x}\rangle = \langle R^\dagger R\vec{x}|\vec{x}\rangle. \tag{2}$$

   Hierbei ist $R^\dagger$ die zu R adjungierte Matrix. Im $\mathbb{R}^3$ entspricht dieser gerade der transponierten Matrix R^T. Wenn $\mathbb{1}$ das Einheitselement bezeichnet gilt demnach

   $$R^T R = RR^T = \mathbb{1}. \tag{3}$$

   In Komponentenschreibweise lesen wir

   $$R^T_{ij} R_{jk} = R_{ji} R_{jk} = \delta_{ik} \tag{4}$$

   ab. Das bedeutet, dass die Spalten von R eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2. **Richtungen werden nicht geändert**

   Diese Aussage mag zunächst überraschend erscheinen. Wird ein Vektor gedreht, ändert er natürlich seine Richtung. Gemeint ist, dass Richtungen untereinander, d.h. von zwei Vektoren eingeschlossene Winkel, erhalten bleiben. Konkret wird dies an der *Orientierung* einer Basis festgemacht. Es wird zwischen Rechtssystemen (RS) und Linkssystemen (LS) unterschieden. Diese besitzen die Eigenschaften

   $$RS : \vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} \times \vec{e_3}) > 0 \quad \text{und} \quad LS : \vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} \times \vec{e_3}) < 0, \tag{5}$$

   wobei $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Für eine orientierungstreue oder richtungserhaltende Abbildung gilt dann, dass ein Rechtssystem stets in ein Rechtssystem übergeht und ein Linkssystem immer in ein Linkssystem. Wir betrachten jetzt die kartesische Orthonormalbasis $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ des $\mathbb{R}^3$.

   $$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

   Hiermit folgt

$$c = \vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} \times \vec{e_3}) = 1. \tag{7}$$

Die kartesische Orthonormalbasis ist ein Rechtssystem. Für das rotierte System erhalten wir

$$c' = \vec{e_1}' \cdot (\vec{e_2}' \times \vec{e_3}') = \begin{pmatrix} R_{11} \\ R_{21} \\ R_{31} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} R_{12} \\ R_{22} \\ R_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{23} \\ R_{33} \end{pmatrix} \right), \tag{8}$$

also gerade ein Spatprodukt der Spaltenvektoren von R. Nach (4) handelt es sich hierbei ebenfalls um eine Orthonormalbasis. Daraus folgt

$$c' = \pm 1. \tag{9}$$

Aufgrund der Orientierungstreue kommt jedoch nur $c' = +1$ in Betracht. Desweiteren entspricht das Spatprodukt in (8) gerade der Determinante von R. Wir erhalten folglich als zweite wichtige Eigenschaft

$$\det R = +1. \tag{10}$$

Längenerhaltende Abbildungen mit $\det R = -1$ bilden die Gruppe der Spiegelungen.

1.2 Darstellungen im $\mathbb{R}^3$

Wir werden uns jetzt der Frage widmen, wie die Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ konkret aussehen bzw. wie man diese konstruiert. Dazu sei zunächst erwähnt, dass man zwischen aktiven und passiven Drehungen unterscheidet. Bei einer aktiven Drehung wird das Objekt selbst gedreht, bei einer passiven Drehung das Koordinatensystem (Laborsystem). Eine (zweidimensionale) aktive Drehung um ϕ entspricht einer passiven Drehung um $-\phi$. Im Folgenden werden nur aktive Transformationen betrachtet. Im Wesentlichen gibt es zwei Verfahren, um eine dreidimensionale Drehmatrix zu konstruieren.

1. **Parametrisierung über Euler-Winkel**

   Die Idee hierbei besteht darin, die dreidimensionale Drehung durch drei ebene Drehungen zu ersetzen. Wir veranschaulichen[1] den Sachverhalt mithilfe von Abbildung 1.

   In blau ist die Ausrichtung des Objektes vor der Drehung zu sehen, die rote Position wird nach der Drehung eingenommen. Die grün eingezeichnete Schnittachse der neuen und alten xy-Ebene bezeichnet man als Knotenlinie. Die dreidimensionale Drehung lässt sich dann wie folgt parametrisieren:

   (a) Rotiere um α um die z-Achse.
   (b) Rotiere um β um die x'-Achse (die neue x-Achse, d.h. die Knotenlinie).
   (c) Rotiere um γ um die z''-Achse (die neue z-Achse).

[1] Eine animierte Darstellung findet sich auf der englischsprachigen Wikipedia unter http://en.wikipedia.org/wiki/File:Euler2.gif

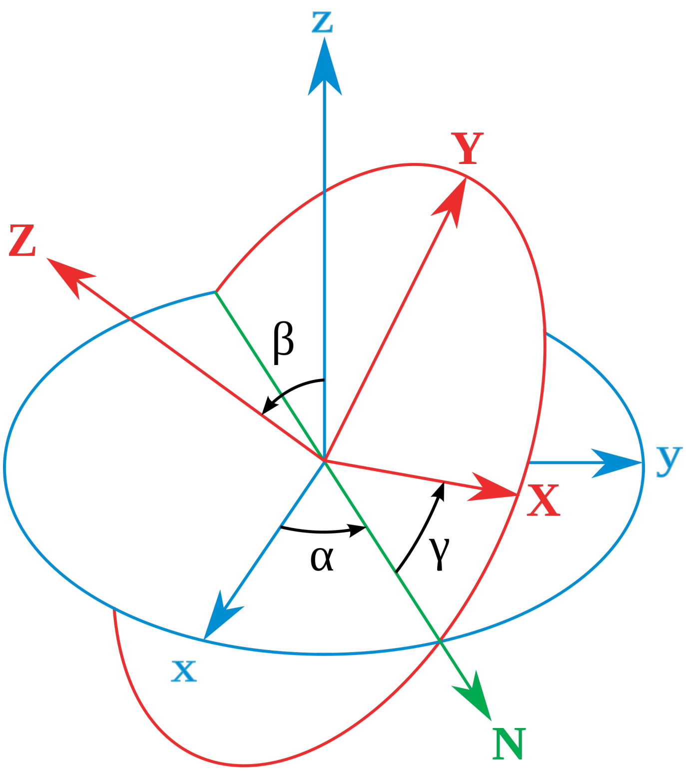

Abbildung 1: Parametrisierung über Euler-Winkel nach der $zx'z''$-Konvention (Quelle: Wikipedia)

Die Drehmatrix $R(\alpha,\beta,\gamma)$ ergibt sich dann als Produkt der drei ebenen Drehmatrizen.

$$\begin{aligned} R(\alpha,\beta,\gamma) &= D_{z''}(\gamma) D_{x'}(\beta) D_z(\alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Oben genanntes Vorgehen bezeichnet man als $zx'z''$-Konvention. Diese wird in der Mechanik starrer Körper verwendet. Es gibt jedoch noch elf weitere, per se gleichwertige Konventionen. In der Luftfahrt hat sich beispielsweise die $zy'x''$-Konvention etabliert.

2. **Rodrigues-Formel**

Die Rodrigues-Formel beschreibt eine dreidimensionale Drehung eines Vektors $\vec{x}$ um einen Drehvektor $\vec{\alpha}$ mit Drehwinkel $\alpha = |\vec{\alpha}|$. Auch hier erhält man drei Parameter für die Drehung, in Kugelkoordinaten wären diese $(r = \alpha, \theta, \phi)$. In Komponentenschreibweise lautet die Rodrigues-Formel

$$x'_\mu = x_\mu \cos\alpha + \frac{x_\nu \alpha_\nu}{\alpha^2} \alpha_\mu (1 - \cos\alpha) + \epsilon_{\mu\lambda\nu} \alpha_\lambda x_\nu \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \quad (12)$$

wobei $\epsilon_{\mu\lambda\nu}$ der Levi-Civita-Tensor ist. Eine Herleitung der Gleichung findet sich im Anhang. Nach (1) muss

$$x'_\mu = R_{\mu\nu} x_\nu \quad (13)$$

erfüllt sein. Hiermit lassen sich direkt die Einträge $R_{\mu\nu}$ der Drehmatrix ablesen.

$$R_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \cos\alpha + \frac{\alpha_\nu}{\alpha^2}\alpha_\mu(1 - \cos\alpha) + \epsilon_{\mu\lambda\nu}\alpha_\lambda \frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{14}$$

Zuletzt sei noch gesondert auf den Fall einer infinitesimalen Drehung eingegangen, d.h. den Fall $\alpha \ll 1$. In erster Näherung geht (12) dann in

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_{\mu\lambda\nu}\alpha_\lambda x_\nu \tag{15}$$

über.

1.3 Infinitesimale Transformationen

Um das Verständnis der $SO(3)$ zu vertiefen, empfiehlt es sich, die *infinitesimalen Transformationen* näher zu untersuchen, d.h. den Fall infinitesimaler Drehwinkel α. Eine derartige Drehung verändert den Vektor $\vec{x}$ nur minimal, die zugehörige Transformation weicht nur geringfügig vom Einheitsoperator ab. Deshalb wählen wir

$$R = \mathbb{1} + \Omega \tag{16}$$

als Ansatz, wobei Ω infinitesimal sein soll. Hieraus lässt sich mithilfe von (3) direkt eine wichtige Forderung für Ω gewinnen.

$$\mathbb{1} \overset{!}{=} R^T R = (\mathbb{1} + \Omega^T)(\mathbb{1} + \Omega) = \mathbb{1} + \Omega + \Omega^T + O(\Omega^2). \tag{17}$$

In erster Ordnung muss demnach

$$\Omega = -\Omega^T \tag{18}$$

erfüllt sein, d.h. Ω muss *antisymmetrisch* sein. Eine antisymmetrische dreidimensionale Matrix hat drei freie Koeffizienten, Ω lässt sich allgemein schreiben als

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{\alpha}\vec{\Lambda}. \tag{19}$$

Im letzten Schritt wurde dabei das Matrizentripel

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

eingeführt. Dieses Tripel besitzt die Eigenschaft

$$\Lambda_{\lambda\mu\nu} = -\epsilon_{\lambda\mu\nu} = \epsilon_{\mu\lambda\nu}. \tag{21}$$

Wir überprüfen nun, ob der Ansatz (16) sinnvoll war.

$$x'_\mu = R_{\mu\nu}x_\nu \overset{!}{=} (\delta_{\mu\nu} + \Omega_{\mu\nu})x_\nu = (\delta_{\mu\nu} + \alpha_\lambda\Lambda_{\lambda\mu\nu})x_\nu = x_\mu + \epsilon_{\mu\lambda\nu}\alpha_\lambda x_\nu \equiv (15). \tag{22}$$

Wir erhalten dasselbe Ergebnis wie zuvor. Die bisherigen Überlegungen bezogen sich lediglich auf infinitesimale Drehungen. Drehungen um einen endlichen Vektor $\vec{\alpha}$ können jedoch aus infinitesimalen Drehungen zusammengesetzt werden, wie folgende Herleitung zeigt.

$$R(\vec{\alpha}) = R(\frac{\vec{\alpha}}{2})R(\frac{\vec{\alpha}}{2}) = ... = [R(\frac{\vec{\alpha}}{N})]^N. \tag{23}$$

Sei nun N so groß, dass die Rotation um $\frac{\vec{\alpha}}{N}$ in erster Näherung als infinitesimal aufgefasst werden kann. Dann folgt

$$R(\vec{\alpha}) \approx [\mathbb{1} + \frac{\vec{\alpha}}{N}\vec{\Lambda}]^N \approx \exp\vec{\alpha}\vec{\Lambda}. \tag{24}$$

1.4 Lie-Algebra von $SO(3, \mathbb{R}^3)$

Wir betrachten jetzt den reellen dreidimensionalen Vektorraum D der Drehungen und wollen in diesem eine Algebra konstruieren. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass jede Drehung mithilfe von $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ dargestellt werden kann. $\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\}$ ist folglich eine Basis von D. Man bezeichnet die Λ_i in diesem Kontext als *Erzeugende* oder *Generatoren* der Algebra. Sie sind antisymmetrisch.

Offensichtlich sind Linearkombinationen der Λ_i wiederum $\in D$. Anders verhält es sich jedoch mit Produkten, diese führen aus D hinaus. Beispielsweise gilt

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Diese Matrix ist nicht antisymmetrisch und somit $\notin D$. Für zwei antisymmetrische Matrizen $A = -A^T$ und $B = -B^T$ gilt jedoch allgemein, dass der Kommutator

$$[A, B] = AB - BA \tag{26}$$

wiederum antisymmetrisch ist.

$$[A, B]^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B]. \tag{27}$$

Somit ist $[\Lambda_\mu, \Lambda_\nu] \in D$ und es lässt sich mit dem Kommutator eine sogenannte *Lie-Algebra* über D aufbauen. Konkret findet man

$$[\Lambda_\mu, \Lambda_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \Lambda_\lambda, \tag{28}$$

was sich anhand von (20) direkt überprüfen lässt. In diesem Fall ist der Kommutator die Verknüpfung und $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ der Strukturtensor der Lie-Algebra.

1.5 Lie-Algebra von $SO(3)$ – Allgemeine Darstellung

Bisher haben wir uns lediglich mit $SO(3, \mathbb{R}^3)$ befasst. Der zugeordnete Vektorraum war der dreidimensionale euklidische Raum. Die Drehgruppe lässt sich jedoch auch in anderen Räumen darstellen. Im Folgenden wird ein nicht weiter festgelegter Vektorraum V gewählt. Es sei $g(\tau) \in SO(3)$ eine einparametrige Untergruppe von $SO(3)$ (z.B. eine Drehung um eine feste Achse) mit $g(0) = \mathbb{1}$, $\tau \in \mathbb{R}$ und $T_{g(\tau)}$ eine zugehörige Darstellung in V. Dann gilt für infinitesimale τ

$$T_{g(\tau)} = \mathbb{1} + \tau t \quad \text{mit} \quad t = \frac{\partial}{\partial \tau} T_{g(\tau)} \mid_{\tau=0} . \tag{29}$$

Es wird der Umstand ausgenutzt, dass Lie-Gruppen (wie hier die Drehungen) differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind. Anstelle der Generatoren $\{\Lambda_\mu\}$ treten jetzt die Generatoren aller einparametrigen Untergruppen $\{t_\mu\}$. Es lässt sich zeigen, dass diese Generatoren wiederum einen Vektorraum bilden, wobei

$$[t_\mu, t_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\lambda} t_\lambda \tag{30}$$

erfüllt ist. Das bedeutet, dass obige Vertauschungsrelation in allen Darstellungen von $SO(3)$ erfüllt ist. Zum Abschluss dieses Kapitels kommen wir zur Definition eines *Casimiroperators*. Ein Casimiroperator C besteht aus einer Kombination der Generatoren $\{t_\mu\}$ und kommutiert mit diesen, d.h.

$$[C, t_\mu] = 0 : \forall \mu. \tag{31}$$

Im vorliegenden Fall ist

$$C = \vec{t}^2 = \sum_\mu t_\mu^2 \tag{32}$$

ein Casimiroperator. Für Casimiroperatoren gilt darüber hinaus das *Lemma von Schur*. Dieses besagt, dass jeder Casimiroperator ein Vielfaches von $\mathbb{1}$ ist, wenn der zugehörige Vektorraum V irreduzibel ist, was im Falle von $SO(3)$ typischerweise gegeben ist.

2 Unitäre Darstellungen von $SO(3)$

2.1 $SO(3)$ im Hilbertraum

Wir wechseln nun zum Vektorraum der Quantentheorie, anstelle des $\mathbb{R}^3$ tritt nun der Hilbertraum $\mathbb{H}$. Ein wichtiger Unterschied zum $\mathbb{R}^3$ besteht in der Unitarität von $\mathbb{H}$. Längen sollen wie gehabt unter $SO(3)$ invariant bleiben. Anstelle von (3) tritt dann

$$T^\dagger T = TT^\dagger = \mathbb{1}, \tag{33}$$

wobei T eine Darstellung von $SO(3)$ in $\mathbb{H}$ ist. Für eine einparametrige Gruppe nach 1.5 lässt sich T als

$$T = \mathbb{1} + \tau t_\mu \tag{34}$$

schreiben. Sei $x \in \mathbb{H}$. Dann liefert die Längeninvarianz für die infinitesimalen Generatoren $\{t_\mu\}$

$$\langle x|x\rangle = \langle(\mathbb{1} + \tau t_\mu)x|(\mathbb{1} + \tau t_\mu)x\rangle = \langle x|x\rangle + \tau\langle t_\mu x|x\rangle + \tau\langle x|t_\mu x\rangle + O(t_\mu^2). \tag{35}$$

In erster Ordnung erhalten wir

$$0 = \langle t_\mu x|x\rangle + \langle x|t_\mu x\rangle, \tag{36}$$

was bedeutet, dass die t_μ antihermitesch sind. Wir definieren nun den hermiteschen Operator

$$J_\mu \equiv it_\mu, \tag{37}$$

für den die Vertauschungsrelation

$$[J_\mu, J_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\lambda}J_\lambda \tag{38}$$

gilt. Welche konkrete Form haben diese $\{J_\mu\}$ in $\mathbb{H}$? Um dieses Darstellungsproblem zu lösen, analysiert man das Eigenwertspektrum zu einem der J_μ, typischerweise zu J_3. Es sei $x_m \in \mathbb{H}$ eine Eigenfunktion zu J_3 mit Eigenwert m, d.h. es gelte

$$J_3 x_m = m x_m. \tag{39}$$

Zudem ist bekannt, dass J^2 ein Casimiroperator ist. Da die zugehörige Darstellung irreduzibel ist, hat dieser nach dem Lemma von Schur die Form

$$J^2 = k\mathbb{1}, \tag{40}$$

wobei k eine Konstante ist. Als nächstes definiert man üblicherweise

$$J_\pm \equiv J_1 \pm iJ_2. \tag{41}$$

Die dargelegten Ansätze zum Eigenwertproblem von J_3, sowie die Lösung selbst sollten bekannt sein. Es handelt sich hierbei um die Drehimpulsalgebra, die üblicherweise in der Grundvorlesung zur Quantentheorie behandelt wird[2]. Tatsächlich lässt sich zeigen[3], dass

$$\vec{J} = \frac{\hat{\vec{L}}}{\hbar} \tag{42}$$

gilt, wobei $\hat{\vec{L}}$ der quantenmechanische Drehimpulsoperator ist. Wir fahren an dieser Stelle mit den Ergebnissen fort. Für J^2 und J_3 erhält man letztlich die Matrixdarstellungen

[2] Eine detaillierte Rechnung hierzu findet sich beispielsweise in „Grundkurs Theoretische Physik 5/2“von Wolfgang Nolting im Kapitel 5.

[3] Vergleiche dazu den Seminarvortrag von Alexander Kölker.

$$J^2 = j(j+1)\mathbb{1} \quad \text{und} \quad J_3 = \begin{pmatrix} j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -j \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Hierbei ist j entweder halb- oder ganzzahlig. Die Dimensionalität der Darstellung beträgt $2j+1$. Mit der Definition

$$\rho_\pm(m) =_+ \sqrt{j(j+1) \mp m - m^2} \tag{44}$$

lassen sich die Matrizen für J_+ und J_- als

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \rho_+(j-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \rho_+(j-1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \rho_+(-j) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

und

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \rho_-(j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_-(j-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho_-(-j+1) \end{pmatrix} \tag{46}$$

aufschreiben. Hieraus lassen sich über (41) J_1 und J_2 ableiten. Für $j = 1/2$ erhält man $J_i = \sigma_i/2$, wobei die σ_i gerade die zweidimensionalen Pauli-Matrizen sind.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Diese Matrizen spielen bei der Beschreibung des Spins eine tragende Rolle.

2.2 $SU(2)$ und die Darstellung endlicher Drehungen

Wir betrachten jetzt den Fall einer endlichen Drehung für $j = 1/2$ im Hilbertraum. Der Übergang von einer infinitesimalen zu einer endlichen Transformation erfolgt wie in 1.3 besprochen. Wenn

$$T = \mathbb{1} + \vec{\alpha}\vec{t} = \mathbb{1} - i\vec{\alpha}\vec{J} \tag{48}$$

die Darstellung einer infinitesimalen Drehung ist, so lautet die zugehörige endliche Drehung

$$U(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha}\vec{J}). \tag{49}$$

Diese Exponentialfunktion von Matrizen lässt sich auswerten und man gelangt zu

$$U(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha/2 - in_3 \sin\alpha/2 & -i(n_1 - in_2)\sin\alpha/2 \\ -i(n_1 + in_2)\sin\alpha/2 & \cos\alpha/2 + in_3\sin\alpha/2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{\alpha} = \alpha\vec{n} \quad \text{und} \quad |\vec{n}| = 1. \tag{50}$$

Dies ist die Darstellungsmatrix endlicher Drehungen in der Spinordarstellung, was gerade der $SU(2)$ entspricht. Die Matrix ist komplexwertig. Wie zuvor gilt

$$\det U(\vec{\alpha}) = 1. \tag{51}$$

Eine Besonderheit ergibt sich allerdings wenn man eine Rotation um 2π betrachtet. Bei der $S0(3)$ erhält man hier, wie man es intuitiv erwarten würde, die Einheit. Im Falle der $SU(2)$ gilt jedoch

$$U(\pi\vec{n})U(\pi\vec{n}) = U(2\pi\vec{n}) = -\mathbb{1}. \tag{52}$$

Der Spin geht demnach erst nach einer Drehung um 4π in sich selbst über.

A Herleitung der Rodrigues-Formel

Gegeben sei ein Einheitsvektor $\vec{k}$ ($|\vec{k}| = k = 1$) um den der Vektor $\vec{v}$ um einen Winkel ϑ gedreht werden soll. Zur Herleitung betrachten wir o.B.d.A. ein Koordinatensystem in dem $\vec{k}$ parallel zur z-Achse verläuft und $\vec{v}$ in der xz-Ebene liegt. Die Situation ist in Abbildung 2 dargestellt.

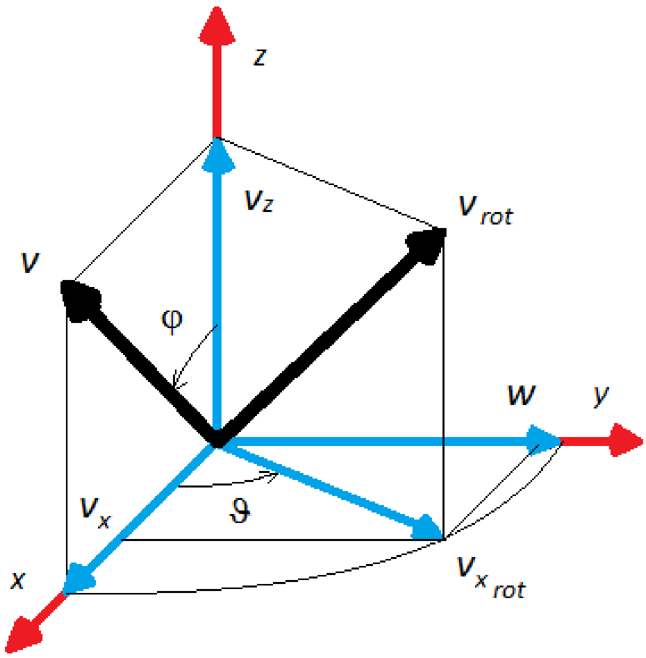

Abbildung 2: Zur Herleitung der Rodrigues-Formel (Quelle: Wikipedia)

Die Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{k}$ definieren wir als

$$\vec{v}_z = (\vec{k} \cdot \vec{v})\vec{k}. \tag{53}$$

Analog ergibt sich die Projektion von $\vec{v}$ auf die xy-Ebene zu

$$\vec{v}_x = \vec{v} - \vec{v}_z. \tag{54}$$

Desweiteren definieren wir $\vec{w}$ als

$$\vec{w} = \vec{k} \times \vec{v}. \tag{55}$$

Nach dieser Konstruktion haben $\vec{v}_x$ und $\vec{w}$ dieselbe Länge.

$$\begin{aligned} w &= |\vec{k}||\vec{v}|\sin(\varphi) = v\sin(\varphi) && (56) \\ v_x &= |\vec{v} - \vec{v}_z| = |\vec{v} - (\vec{k}\cdot\vec{v})\vec{k}| \\ &= |\vec{v} - kv\cos(\varphi)\vec{k}| = \sqrt{v^2 - 2kv\cos(\varphi)\vec{v}\vec{k} + v^2\cos^2(\varphi)} \\ &= v\sqrt{1 - 2\cos^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)} = v\sin(\varphi) && (57) \end{aligned}$$

Demnach erhält man $\vec{w}$ indem man $\vec{v}_x$ um 90° rotiert. Hiermit lässt sich jetzt die Projektion des rotierten Vektors $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ auf die xy-Ebene, nämlich $\vec{v}_{x_{\mathrm{rot}}}$, bestimmen. Es gilt

$$\vec{v}_{x_{\mathrm{rot}}} = \vec{v}_x \cos\vartheta + \vec{w}\sin\vartheta = (\vec{v} - (\vec{k}\cdot\vec{v})\vec{k})\cos\vartheta + (\vec{k}\times\vec{v})\sin\vartheta. \tag{58}$$

Der Anteil von $\vec{v}$ parallel zur Drehachse wird von der Drehung nicht affektiert. Wir erhalten den rotierten Vektor $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ als Summe aus $\vec{v}_{x_{\mathrm{rot}}}$ und $\vec{v}_z$.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{\mathrm{rot}} &= \vec{v}_{x\ \mathrm{rot}} + \vec{v}_z \\
&= (\vec{v} - (\vec{k}\cdot\vec{v})\vec{k})\cos\vartheta + (\vec{k}\times\vec{v})\sin\vartheta + (\vec{k}\cdot\vec{v})\vec{k} \\
&= \vec{v}\cos\theta + (\vec{k}\times\vec{v})\sin\theta + \vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{v})(1-\cos\theta).
\end{aligned} \tag{59}$$

Ersetzt man hier ϑ durch α, den Drehvektor $\vec{k}$ durch $\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$,den zu rotierenden Vektor $\vec{v}$ durch $\vec{x}$ und betrachtet man die Gleichung in Komponentenschreibweise so erhält man gerade (12).

□

B Mathematisches Begriffsschema

Abschließend sei an dieser Stelle eine Übersicht über die Zusammenhänge und mathematischen Eigenschaften der behandelten Gruppen gegeben. $M(n;K)$ bezeichne eine n-dimensionale Matrix über dem Körper K.

- Die Menge $GL(n;K) = \{A \in M(n;K) : A \text{ ist invertierbar}\}$ bezeichnet man als *allgemeine lineare Gruppe.*
- Die Menge $O(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{R}) : A^{-1} = A^T\}$ ist eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe, die *orthogonale Gruppe.*
- Die Menge $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe, die *spezielle orthogonale Gruppe.*
- Die Menge $U(n) = \{A \in GL(n;\mathbb{C}) : A^{-1} = A^\dagger\}$ ist Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe, die *unitäre Gruppe.*
- Die Menge $SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe der unitären Gruppe, die *spezielle unitären Gruppe.*