Einführung in den Symmetriebegriff und gruppentheoretische Grundlagen

Stephanie Artmeier WS 10/11

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Symmetrien spielen in verschiedenen Bereichen der Physik eine große Rolle. Sie erleichtern uns z.B. Berechnungen (Kraft – Durchbiegung, Transformationen von Koordinaten). Zudem gibt es den Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetrie / Invarianz. Diese Beziehung wird auch als Noether-Theorem bezeichnet (nach der deutschen Mathematikerin Emmy Noether).
Physikalische Symmetrien schränken mögliche Theorien ein und haben dementsprechend Konsequenzen für physikalische Systeme.

In der Physik ist es hilfreich ähnliche Objekte in Gruppen zusammen zu fassen. Aus diesem Grunde ist es nicht notwendig für jedes einzelne Objekt Eigenschaften, Gesetze, Verhaltensweisen etc. zu definieren. Sie werden in sinnvolle Gruppen zusammengefasst und können dann als ein Element behandelt werden.

2 Gruppen

<u>Definition</u>: Eine Gruppe G besteht aus einem Satz von g Elementen A, B, C, ..., die vier grundlegende Postulate erfüllen müssen. (Greiner / Müller)

1. Eine Verknüpfung von Elementen aus der Gruppe G ergibt ein eindeutiges Element, dass auch zur Gruppe G gehört.
   $$C = AB$$
   Diese Verknüpfung nennt man „Multiplikation“ und AB das Produkt von A und B.
   Im Allgemeinen ist die Reihenfolge der Faktoren A und B von Bedeutung.
   $$AB \neq BA$$
2. Die „Multiplikation“ von Elementen der Gruppe G sind assoziativ.
   $$A(BC) = (AB)C$$
3. Es gibt ein Gruppenelement E, das die Eigenschaft hat, dass die „Multiplikation“ mit diesem Element E immer den anderen Faktor R ergibt.
   $$RE = ER = R$$
   Dieses Element E wird als „Einselement“ oder „Identität“ bezeichnet. Jede Gruppe kann nur ein einziges Einselement haben.
4. Für jedes Element R der Gruppe G existiert ein „inverses“ oder „reziprokes“ Element R^{-1}, so dass die „Multiplikation“ dieser beiden Elemente das Einselement E ergibt. Daher ist auch das Element R^{-1} ein Element der Gruppe G.
   $$RR^{-1} = R^{-1}R = E$$

<u>Ordnung einer Gruppe</u>

Als Ordnung g einer Gruppe G wird die Zahl der Elemente, einschließlich des Einselementes E, dieser Gruppe bezeichnet. Die Ordnung kann folgende Werte annehmen:

- g = endlich: endliche Gruppen
- g = abzählbar unendlich: unendliche Gruppen
- g = nicht abzählbar unendlich: kontinuierliche Gruppen

<u>Abelsche Gruppen</u>

Können Elemente einer Gruppe bei der „Multiplikation“ vertauscht werden, dann wird so eine Gruppe abelsch genannt.

$$AB = BA$$

Alle zyklischen Gruppen und Gruppen bei denen die Ordnung g eine Primzahl ist, sind auf jeden Fall abelsch.

<u>Untergruppe</u>

Eine Untergruppe H ist ein Teil der Gruppe G, deren Elemente wiederum eine Gruppe bilden, die eine weitere „Eigenschaft“ gemeinsam haben.

Klassen - Nebenklasse
Eine Gruppe G setzt sich aus Klassen K_i zusammen.

$$\sum_i g_i = g$$

Nebenklassen sind Klassen einer Untergruppe H von einer Gruppe G.

Lagrange-Theorem
Der Quotienten aus der Ordnung h der Untergruppe H und die Ordnung g der (Original-) Gruppe G ergibt eine natürliche Zahl.

$$\frac{g}{h} \in \mathbb{N}$$

Isomorphie
Können Elemente von einer Gruppe G eindeutig einem Element einer anderen Gruppe G' zugeordnet werden, dann sind die beiden Gruppen isomorph zueinander. Auch bei der „Multiplikation" zweier Elemente aus einer Gruppe G kann eine „Multiplikation" aus der Gruppe G' zugeordnet werden.

$$R \Leftrightarrow R' \quad \text{bzw.} \quad S \Leftrightarrow S' \quad \text{und} \quad RS \Leftrightarrow R'S'$$

Homomorphie
Wenn mehrere Elemente aus einer Gruppe G einem Element einer anderen Gruppe G' zugeordnet werden kann, dann ist die Gruppe G homomorph zu der Gruppe G'. Dies gilt auch für die „Multiplikation" von Elementen.

$$\left\{R_1^{(a)}, R_2^{(a)}, \ldots\right\} \Leftrightarrow R'_a \quad \text{bzw.} \quad \left\{R_1^{(b)}, R_2^{(b)}, \ldots\right\} \Leftrightarrow R'_b$$

$$R_i^{(a)} R_j^{(b)} \Leftrightarrow R'_a R'_b$$

2.1 Beispiel gleichseitiges Dreieck

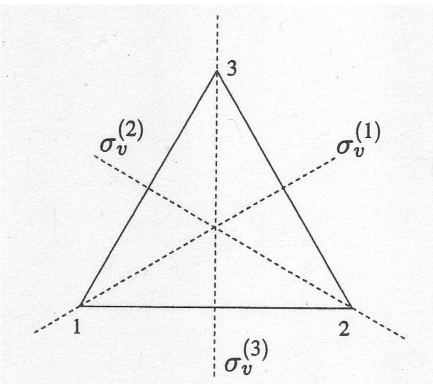

Abb. 1: Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks (Gruppe C_{3v}) [Greiner / Müller]

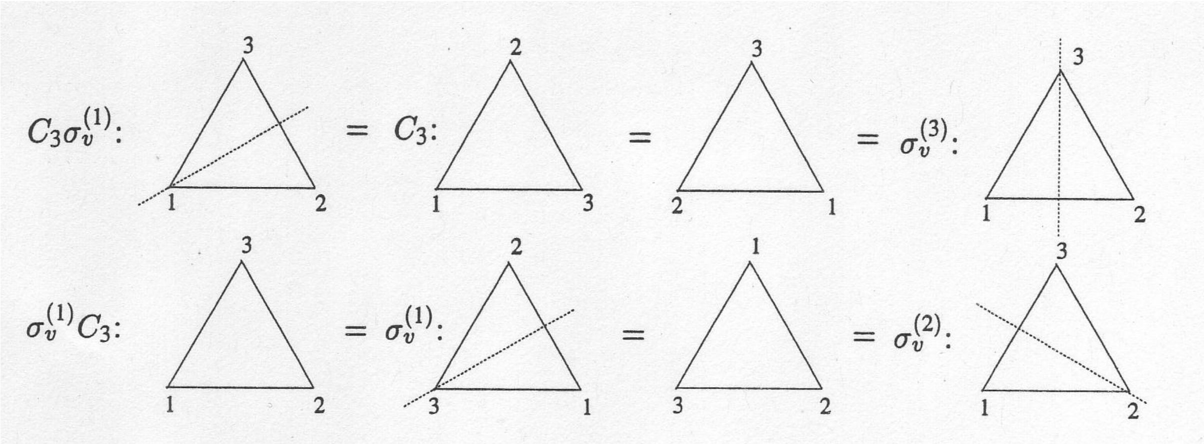

Abb. 2: Symmetrieoperationen der Gruppe C_{3v} [Greiner / Müller]

<u>Gruppentafel</u>

C_{3v}	E	C_3	C_3^2	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$
E	$\mathbf{E}$	$\mathbf{C_3}$	$\mathbf{C_3^2}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$
C_3	$\mathbf{C_3}$	$\mathbf{C_3^2}$	$\mathbf{E}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$
C_3^2	$\mathbf{C_3^2}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{C_3}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$
$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$	E	C_3	C_3^2
$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(2)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$	C_3^2	E	C_3
$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(3)}$	$\sigma_v^{(1)}$	$\sigma_v^{(2)}$	C_3	C_3^2	E

<u>Ordnung</u>: $g = 6$

<u>Untergruppe</u>: z.B. blaue Elemente in der Gruppentafel (s.o.)
Ordnung der Untergruppe: $h = 3$

<u>Klasse:</u>

$$g_1 = \{E\}$$

$$g_2 = \{C_3, C_3^2\}$$

$$g_3 = \{\sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}\}$$

<u>Lagrange-Theorem</u> ist bei der Beispiel-Untergruppe erfüllt. $\frac{g}{h} = \frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$

2.2 Darstellung von Gruppen

Unter der Darstellung von Gruppen werden isomorphe oder homomorphe Abbildungen einer Gruppe auf einen Vektorraum verstanden. Die Gruppenelemente R werden bei endlich dimensionalen Räumen durch Transformationen in quadratische Matrizen Γ(R) und Produkte aus Gruppenelementen durch Matrixprodukte Γ(R) Γ(S) dargestellt.
Eine getreue Darstellung ist, wenn die Gruppe G isomorph zu der Matrix Γ ist. Die triviale Darstellung ist eine homomorphe Abbildung der Gruppe G auf die Zahl 1. Aus diesem Grunde wird diese Darstellung auch „Einsdarstellung“ oder „Einheitsdarstellung“ genannt.

Äquivalente Darstellung

Falls es eine Matrix M gibt, die für alle Elemente R aus der Gruppe G gilt und $\Gamma'(\mathrm{R}) = \mathrm{M}^{-1}\Gamma(\mathrm{R})\mathrm{M}$ ist, dann sind die beiden Darstellungen Γ und Γ’ äquivalent zueinander.

Die Matrix M und die Darstellungsmatrizen Γ und Γ’ haben von ihrer Funktion nichts gemeinsam.

Reduzibilität

Kann die äquivalente Darstellung in Form einer gleichartigen Blockdiagonaldarstellung beschrieben werden, wird diese Darstellung reduzibel genannt. Die Matrizen $\Gamma^{(i)}(\mathrm{R})$ auf den Diagonalen haben dabei eine niedrigere Dimension.

$$\Gamma'(\mathrm{R}) = \mathrm{M}^{-1}\Gamma(\mathrm{R})\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \Gamma^{(1)}(\mathrm{R}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \Gamma^{(2)}(\mathrm{R}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \Gamma^{(3)}(\mathrm{R}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die reduzierten Matrizen sind selber wieder Darstellungen von der Gruppe G. Darstellungen können durch die reduzierten Darstellungen zusammengesetzt werden.

$$\Gamma = \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} + \dots$$

Kann eine Darstellung nicht mehr reduziert werden, wird die Darstellung irreduzibel genannt.

2.3 Lie-Gruppe

Eine Lie-Gruppe ist eine analytische reelle oder komplexe Mannigfaltigkeit[1] die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt.
Eigenschaften der Lie-Gruppe sind:

- die Gruppe ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit
- Die Abbildungen $G \to G$, $g \to g^{-1}$ und G x $G \to G$, $(g, \tilde{g}) \mapsto g * g$ sind differenzierbar.

Sie werden aus diesen Gründen zur Untersuchung von Symmetrien in Differentialgleichungen verwendet.

[1] Eine Mannigfaltigkeit ist im lokalen ein gewöhnlicher Euklidischer Raum $\mathbf{R}^n$.

Beispiel für eine Lie-Gruppe:
Die Lie-Gruppe umfasst alle Drehungen einer Ebene um einen fest ausgezeichneten Punkt, der in dieser Ebene liegt. Diese Drehungen bilden zusammen eine Gruppe, da sich jede dieser Drehungen eindeutig durch einen Winkel zwischen 0° und 360° bzw. zwischen 0 und 2π beschreiben lässt. Zudem sind diese Drehungen auch ein Kontinuum, da sich kleine Winkeldrehungen kaum voneinander unterscheiden lassen, können sie kontinuierlich ineinander überführt werden. („Drehsymmetrie")
Damit ist eine Lie-Gruppe eine Gruppe, die ein Kontinuum bzw. ein stetig zusammenhängendes Ganzes bildet.

3 Symmetrie

allgemeine Definition: Symmetrie, regelmäßige Anordnung der Teile einer Gesamtheit, so dass eine harmonische Gestalt entsteht. (Encarta)

physikalische Definitionen:

- Symmetrie, wenn ein System im Verlauf von Operationen, z.B. bei Umkehr der Zeitrichtung und einer Raum-Zeit-Verschiebung, unverändert bleibt
- Symmetrien, die sich auf die physikalischen Erhaltungssätze beziehen (Encarta)

Symmetrie kann als Gruppe (siehe oben) gesehen werden, wobei die unterschiedlichen Symmetriearten (z.B. Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen) Untergruppen bilden. Symmetrie bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Objekte unter Berücksichtigung von Symmetrietransformationen wieder diese Objekte ergeben müssen.
Die verschiedenen Symmetrietransformationen können nicht beliebig in eine Gruppe gesteckt werden. Bestimme Kombinationen von Transformationen erzwingen weitere Symmetrietransformationen (z.B. Spiegelsymmetrie an zwei aufeinander senkrecht stehenden Geraden → Drehsymmetrie um 180°).

3.1 <u>Erhaltungssätze – Noether-Theorem</u>

Transformationen, die Bewegungsgleichungen eines Systems unverändert lassen, definieren eine Symmetrie eines physikalischen Systems. Diese Symmetrie kann sowohl in der klassischen als auch in der Quantenphysik mit dem Lagrange- oder Hamilton-Formalismus beschrieben werden.
„Wenn die Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen invariant unter einer Koordinatentransformation t, $\vec{q} \rightarrow t'(t),\ \vec{q}'(\vec{q},t)$ sind, so resultiert daraus die Existenz eines Integrals der Bewegung, also einer Erhaltungsgröße." [Wagner]

Beispiel: isoliertes, nichtrelativistisches physikalisches System mit zwei Teilchen, die durch ein vom Relativabstand abhängiges Potential wechselwirken

kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$

potentielle Energie: $V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

Die Bewegungsgleichungen für diese beiden Teilchen können mit den folgen Gleichungen beschrieben werden.

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\nabla_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\nabla_2 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Wird der Ursprung des Koordinatensystem um einen konstanten Vektor $(-\vec{a})$ verschoben, d.h. das Koordinatensystem wird transformiert, folgt für die Koordinaten.

$$\vec{r}_1 \to r_1' = \vec{r}_1 + \vec{a}$$

$$\vec{r}_2 \to r_2' = \vec{r}_2 + \vec{a}$$

Durch diese Koordinatentransformation ändern sie die Bewegungsgleichungen nicht, da sich das Potential dieses Zwei-Teilchen-Systems nicht ändert.

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \to V(\vec{r}_1 + \vec{a} - \vec{r}_2 - \vec{a}) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Dieses System ist invariant gegenüber einer räumlichen Verschiebung des Ursprung seines Koordinatensystems. Damit ist das Zwei-Teilchen-System symmetrisch, da nach der Transformation die selben Bewegungsgleichungen herauskommen.

Aus dem Potential kann man sehen, dass die Gesamtkraft, die auf das Zwei-Teilchen-System wirkt, verschwindet.

Mit $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_2}\right)$ folgt $\vec{F}_{ges} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\nabla_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \nabla_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$.

Für den Gesamtimpuls des Systems ergibt sich daraus

$$\frac{d\vec{P}_{ges}}{dt} = \vec{F}_{ges} = 0$$

Da der Gesamtimpuls eine Konstante ergibt, die zeit- und ortsunabhängig ist, bleibt der Gesamtimpuls erhalten. → **Erhaltungsgröße**

Hieraus lässt sich folgern, dass symmetrische Systeme unter einer räumlichen Transformation impulserhaltend sind.

Auch für andere Invarianzen eines Systems können Zusammenhänge zwischen der Transformation und einer Erhaltungsgröße gezeigt werden.

Transformation	Erhaltungsgröße im System
räumliche Transformation	Impuls
zeitliche Transformation	Energie
räumliche Rotation	Drehimpuls

4 Abbildungsverzeichnis

5 Quellenverzeichnis

A. Das, T. Ferbel: *Kern- und Teilchenphysik*, Spektrum, Heidelberg, 1995, S. 203-226

H. Genz, R. Decker: *Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik*, Vieweg, Braunschweig, 1991, S. 1-72
W. Greiner, B. Müller: *Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien*, Harri Deutsch, Frankfurt, 1990, S. 1-72

M. Wagner: *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg, Stuttgart, 1998, S.7-35