Seminarvortrag
Fermionische Funktionalintegrale

Christian Schmidt

11.12.2002

1 Einleitung

Im vorhergehenden Vortrag wurde das Skalarfeld behandelt, das relativ einfach und daher als Einführung gut geeignet ist. Es ist jedoch unphysikalisch, da es keine fundamentalen Teilchen mit Spin 0 gibt. Eine wichtige, in der Natur vorkommenden Art von Teilchen sind *Fermionen*, zu denen z.B. mit Elektronen und Quarks die Grundbausteine der Materie gehören. Daher ist es für viele Fragen (wie z.B. die Berechnung von Streuquerschnitten in der QED oder QCD) wichtig, sich mit den Eigenschaften dieser Teilchen und der entsprechenden Felder zu befassen. Dieser Vortrag soll daher einige Besonderheiten der feldtheoretischen Beschreibung von Fermionen und Ansätze für eine Gitterbeschreibung vorstellen.

2 Grassmann-Algebren

2.1 Antikommutatoren

In der Feldtheorie werden Fermionenfelder durch *antikommutierende* Feldoperatoren beschrieben, d.h.

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0.$$

Wir gezeigt wurde, sind in der Funktionalintegralmethode keine Operatoren nötig, was gerade die Stärke dieses Ansatzes ist. Dies führt nun aber zu einem Problem, da die Feldgrössen dieselben Antikommutatoren erfüllen müssen, um Fermionen zu beschreiben, aber klassische Grössen statt dessen *kommutieren*. Die Lösung liegt darin, die Feldgrössen axiomatisch als Generatoren einer sog. *Grassmann-Algebra* aufzufassen. Diese wird gerade durch die Antikommutatoren definiert, d.h. für die Generatoren C_i gilt:

$$\{C_i, C_j\} = C_iC_j + C_jC_i = 0,$$

und als direkte Konsequenz

$$C_i^2 = 0.$$

2.2 Rechenregeln und ein zweidimensionales Beispiel

Zur Einführung soll zunächst eine zweidimensionale Grassmann-Algebra mit den Generatoren C_1 und C_2 betrachtet werden. Eine beliebige Funktion dieser Generatoren kann nun, wie aus der Analysis gewohnt, als Reihe entwickelt werden. Das besondere ist jetzt, dass diese Reihe hier keine in den Generatoren quadratischen (oder höheren) Terme enthalten kann, da diese, wie oben gesehen, stets verschwinden. Man erhält also in unserem Beispiel

$$f(C_1, C_2) = a_0 + a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_1 C_2.$$

Die *Ableitung* nach einem der Generatoren wird durch die Koeffizienten des Generators in der Reihenentwicklung definiert, wobei in allen Termen der Reihenentwicklung der entsprechende Generator nach links gebracht wird:

$$\frac{\partial f}{\partial C_1} = a_1 + a_3 C_2.$$

Alternativ kann man den Generator in allen Termen ganz nach rechts bringen, womit man die Rechtsableitung

$$\frac{\overleftarrow{\partial} f}{\partial C_1} = a_1 - a_3 C_2$$

erhält. Die *Integrations*-Regeln über eine Grassmann-Variable werden durch die beiden Axiome

$$\int \mathrm{d}C_i = 0 \qquad \text{und} \qquad \int \mathrm{d}C_i \, C_i = 1$$

vollständig festgelegt. Integrationsgrenzen werden nicht definiert und sind auch nicht nötig. Die erste Regel kann dadurch nahegelgt werden, dass die Infinitesimale $\mathrm{d}C_i$ die gleichen Antikommutatoren wie die Generatoren erfüllen müssen und auch mit diesen antikommutieren, also

$$\{\mathrm{d}C_i, \mathrm{d}C_j\} = \{\mathrm{d}C_i, C_i\} = 0.$$

Damit erhält man

$$\left(\int \mathrm{d}C_i\right)^2 = \int \mathrm{d}C_i \, \mathrm{d}C_j = -\int \mathrm{d}C_j \, \mathrm{d}C_i = -\left(\int \mathrm{d}C_i\right)^2 = 0.$$

Anwendung auf die Funktion f ergibt

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}C_1 f &= a_0 \int \mathrm{d}C_1 + a_1 \int \mathrm{d}C_1 \, C_1 - a_2 C_2 \int \mathrm{d}C_1 + a_3 C_2 \int \mathrm{d}C_1 \, C_1 \\ &= a_1 + a_3 C_2 \end{aligned}$$

Man erhält also durch Ableitung nach einem Grassmann-Generator das gleiche wie durch Integration über diesen Generator.

2.3 Einige wichtige Integrale

Als Vorbereitung auf die später benötigten Funktionalintegrale wird nun eine 2N-dimensionale Grassmann-Algebra mit den Generatoren $\eta_1 \ldots \eta_N$, $\bar{\eta}_1 \ldots \bar{\eta}_N$ betrachtet. Die Gründe für diese Bezeichnung werden später klar werden. Nun soll das Integral

$$\int \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\eta}_l \, \mathrm{d}\eta_l \; e^{-\sum_{ij} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j}$$

berechnet werden. Dazu wird zunächst die Summe umsortiert (da jeweils zwei Generatoren vorkommen, ändern sich die Vorzeichen nicht) und dann die Funktionalgleichung der e-Funktion benutzt. Man erhält

$$\int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta) \prod_{i,j=1}^{N} (1 - \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j)\,,$$

wobei hier und im folgenden

$$\mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta) = \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\eta}_l \, \mathrm{d}\eta_l$$

als Abkürzung benutzt wird. Die quadratischen und höheren Terme fallen weg, deswegen kann das i-Produkt aus dem vorherigen Ausdruck folgendermassen ausgeschrieben werden:

$$\int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta) \left(1 - \sum_{i_1} \bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1}\right) \ldots \left(1 - \sum_{i_N} \bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}\right).$$

Da bei der Integration alle Terme wegfallen, in denen jeder Generator nicht genau einmal vorkommt (s.o.), ist dies äquivalent zu

$$\int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta) \sum_{i_1 \ldots i_N} \eta_{i_1} \bar{\eta}_1 \eta_{i_2} \bar{\eta}_2 \ldots \eta_{i_N} \bar{\eta}_N \, A_{1i_1} \, A_{2i_2} \ldots A_{Ni_N}.$$

In diesem Ausdruck entstanden durch Vertauschen von je zwei Grassmann-Generatoren überall positive Vorzeichen. Das Produkt verhält sich aufgrund der Antikommutator-Relationen der Generatoren total antisymmetrisch bei Austausch von je zwei Indizes, daher kann es mit Hilfe des N-dimensionalen Levi-Cevita-Symbols ausgedrückt werden:

$$\int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta)\, \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \ldots \eta_N \bar{\eta}_N \sum_{i_1 \ldots i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N} \, A_{1i_1} \, A_{2i_2} \ldots A_{Ni_N}$$

Die Summe enthält jetzt genau die Definition der Determinante von A, so dass man das Endergebnis

$$\int \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}\bar{\eta}_l \, \mathrm{d}\eta_l \; e^{-\sum_{ij} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} \; = \; \det A$$

erhält. Durch Variablentransformation der Form

$$\eta_i' = \eta_i - \sum_k A_{ik}^{-1} \rho_k$$

kann dieses Ergebnis nun auch zur Berechnung des *Erzeugenden Funktionals*

$$\begin{aligned} Z[\rho, \bar{\rho}] &= \int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta)\, e^{-\sum_{ij} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j + \sum_i (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \eta_i)} \\ &= \det A \, e^{\sum_{ij} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j} \end{aligned}$$

benutzt werden. Im letzten Vortrag kam bereits das Erzeugende Funktional für Bosonen

$$Z_0[J] = \frac{(2\pi)^{(N/2)}}{\sqrt{\det M}} e^{\frac{1}{2} \sum_{ij} J_i M_{ij}^{-1} J_j}$$

vor, das sich vor allem dadurch unterscheidet, dass die Determinante dort im Nenner steht (der Faktor 1/2 und die Wurzel resultieren daraus, dass im Gegensatz zum fermionischen Feld dort ungeladene Teilchen angenommen wurden).
Der Name "erzeugendes Funktional" stammt daher, dass die für die Berechnung der Feldpropagatoren benötigten Integrale durch Ableitung nach den Generatoren berechnet werden können:

$$\begin{aligned} & \int \mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta)\,\eta_{i_1}\ldots\eta_{i_l}\bar{\eta}_{i'_1}\ldots\bar{\eta}_{i'_l}\,e^{-\sum_{ij}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j} \\ = & \left[\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{i_l}}\,Z[\rho,\bar{\rho}]\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_1}}\cdots\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_l}}\right]_{\rho=\bar{\rho}=0} \\ = & (-1)^{l(l+1)/2}\,(\det A)\sum_{\mathrm{Perm}}(-1)^{\sigma P} A^{-}_{i_1 i_{P(1)}}1\ldots A^{-}_{i_l i_{P(l)}}1 \end{aligned}$$

Für die wichtige 2-Punkt Korrelations-Funktion folgt damit als Spezialfall (mit l=1)

$$\begin{aligned} <\eta_i\bar{\eta}_j> &= \frac{\mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta)\;\eta_i\bar{\eta}_j e^{\sum_{ij}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j}}{\mathrm{D}\,(\bar{\eta}\eta)\;e^{\sum_{ij}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j}} \\ &= \frac{(detA)\,A^{-1}_{ij}}{(detA)} = A^{-1}_{ij} \end{aligned}$$

3 Pfadintegrale und das Dirac-Feld

Die im letzten Vortrag behandelten skalaren Bosonen werden durch die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\Box + M^2)\,\phi(x) = 0$$

beschrieben. Die entsprechende Gleichung für Fermionen ist die *Dirac-Gleichung*

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\,\psi(x) = 0.$$

Dabei ist $\psi(x)$ ein 4-komponentiges Spinor-Feld, und γ^μ sind 4x4-Matrizen, die die Antikommutatoren

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

erfüllen. Die Bewegungsgleichung (und die entsprechende für den adjungierten Spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$) folgt aus der Varianz der Wirkung

$$S_F[\psi,\bar{\psi}] = \int \mathrm{d}^4x\,\bar{\psi}(x)\;(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\;\psi(x)$$

bezüglich $\psi(x)$ (bzw $\bar{\psi}(x)$). Die Greenschen Funktionen (mit dem fermionischen Vakuum Ω und dem Zeitordnungs-Operator T) erhält man aus dieser Wirkung durch

$$\begin{aligned} & <\Omega|T\,\{\psi_{\alpha_1}(x_1)\ldots\psi_{\alpha_n}(x_n)\,\bar{\psi}_{\beta_1}(y_1)\ldots\bar{\psi}_{\beta_n}(y_n)\}\,|\Omega> \\ = & \frac{\int \mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi\,\psi_\alpha(x)\ldots\bar{\psi}_\beta(y)\ldots e^{iS_F}}{\int \mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi\,e^{iS_F}}. \end{aligned}$$

Beim Übergang zu imaginärer Zeit (mit euklidischer Metrik) wird daraus

$$< \psi_\alpha(x)\ldots\bar{\psi}_\beta(y)\ldots >= \frac{\int \mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi\, \psi_\alpha(x)\ldots\bar{\psi}_\beta(y)\ldots e^{-S_F^{eukl}}}{\int \mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi\, e^{-S_F^{eukl}}}.$$

Im euklidischen Raum macht es Sinn, die γ-Matrizen durch vier neue γ^E mit

$$\left\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\right\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

zu ersetzen, da statt der Lorentz-Gruppe nun die 4-dimensionale Rotationsgruppe vorliegt. Eine mögliche Wahl ist z.B.

$$\gamma_4^E = \gamma_0, \quad \gamma_i^E = -i\gamma^i.$$

Die euklidische Wirkung für Fermionen lässt sich dann in der folgenden Form schreiben:

$$S_F^{(eukl)} = \int \mathrm{d}^4x\, \bar{\psi}(x)\left(\gamma_\mu^E\partial_\mu + M\right)\psi(x)$$

4 Gitter-Formulierung

Beim Übergang zum Gitter werden aus den kontinuierlichen Feldintegralen diskrete Integrale über alle Gitterplätze (und Spinorkomponenten):

$$\mathrm{D}\bar{\psi}\mathrm{D}\psi \rightarrow \prod_{\alpha,n}\mathrm{d}\bar{\psi}_\alpha(na)\prod_{\beta,m}\mathrm{d}\bar{\psi}_\beta(ma)$$

Als Variablen verwendet man dimensionslose Größen:

$$M \rightarrow \tfrac{1}{a}\hat{M} \qquad \bar{\psi}_\alpha(x) \rightarrow \tfrac{1}{a^{3/2}}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)$$

$$\psi_\alpha(x) \rightarrow \tfrac{1}{a^{3/2}}\hat{\psi}_\alpha(n) \qquad \partial_\mu\psi(x) \rightarrow \tfrac{1}{a^{5/2}}\hat{\partial}_\mu\hat{\psi}(n)$$

Der Faktor $a^{3/2}$ bei den Dirac-Spinoren folgt daraus, dass die Wirkung dimensionslos sein muss (für $\hbar$=1). Die Ableitung im Gitter wird als symmetrischer Differenzenquotient definiert:

$$\hat{\partial}_\mu\hat{\psi}_\alpha(n) = \frac{1}{2}\left[\hat{\psi}_\alpha(n+\hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n-\hat{\mu})\right].$$

Dabei ist $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor in die Richtung der Ableitung. Die Gitterwirkung ist nun

$$S_F = \sum_{\alpha,n,\beta,m}\hat{\bar{\psi}}_\alpha(n)\,K_{\alpha\beta}(n,m)\,\hat{\psi}_\beta(m)$$

mit

$$K_{\alpha\beta}(n,m) = \sum_\mu \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\left[\delta_{m,n+\hat{\mu}} - \delta_{m,n-\hat{\mu}}\right] + \hat{M}\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta}$$

Die diskreten Feldgrößen sind Grassmann-Variablen, so dass man analog zum skalaren Feld für die 2-Punkt Korrelationsfunktion

$$\langle\hat{\psi}_\alpha(n)\hat{\bar{\psi}}_\beta(m)\rangle = K_{\alpha\beta}^{-1}(n,m)$$

erhält (Rechnung siehe oben). Der Kontinuumslimes davon ist

$$\begin{aligned}
\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle &= \lim_{a\to 0}\frac{1}{a^3}K^{-1}_{\alpha\beta}(n,m) \\
&= \ldots \\
&= \lim_{a\to 0}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\left[-i\sum_\mu\gamma_\mu\tilde{p}_\mu+M\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu\tilde{p}_\mu^2+M^2}e^{ip(x-y)}
\end{aligned}$$

mit

$$\tilde{p}_\mu=\frac{1}{a}\sin(p_\mu a).$$

5 Doppler

5.1 Problemstellung

Die korrekte 2-Punkt Korrelationsfunktion hat die Form

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle=\frac{\left[-i\sum_\mu\gamma_\mu p_\mu+M\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu p_\mu^2+M^2}e^{ip(x-y)},$$

statt $\tilde{p}_\mu$ steht dort also nur p_μ. Dieses Ergebnis folgt jedoch nicht aus der obigen Gitterrechnung. Bei der Integration in der Grenzübergangsformel (s.o.) erzeugen diejenigen p_μ-Bereiche den größten Beitrag, bei denen der Nenner möglichst klein wird. Dies ist an den Nullstellen von $\tilde{p}_\mu$ der Fall. Die Funktion $\sin(p_\mu a)$ verschwindet sowohl in der Mitte ($p_\mu=0$) als auch am Rand ($p_\mu=\pm\pi/a$) der Brillouin-Zone. Die Nullstelle in der Mitte ist die erwünschte, da hier $p_\mu\sim\tilde{p}_\mu$ ist und daher das richtige Ergebnis entsteht. Die Nullstelle am Rand dagegen ist unphysikalisch und wird als *Doppler* bezeichnet, da sich auf diese Weise für jede Dimension die Anzahl der scheinbar vorhandenen Teilchen verdoppelt. In der 4-dimensionalen euklidischen Raumzeit liegen also neben dem einen erwünschten 15 unerwünschte zusätzliche Teilchen vor.

5.2 Wilson-Fermionen

Um dieses Problem zu lösen, gibt es verschiedene Ansätze. Eine Möglichkeit ist es, die Wirkung so abzuändern, dass die zusätzlichen Nullstellen verschwinden. Ein Beispiel ist die *Wilson-Wirkung*

$$S_F^{(w)}=S_F-\frac{r}{2}\sum_n\hat{\bar{\psi}}(n)\hat{\Box}\,\hat{\psi}(n),$$

wobei $\hat{\Box}$ die Gitterentsprechung des Laplace-Operators und r ein beliebiger Parameter ist (der meistens $=1$ gewählt wird). In diesem Fall geht jedoch die chirale Symmetrie der Wirkung (für $M\to 0$) verloren. Diese für viele Fragen wichtige Eigenschaft bedeutet, dass die ursprüngliche Wirkung invariant unter den Transformationen

$$\psi\to e^{i\theta}\psi,\quad \bar{\psi}\to e^{-i\theta}\bar{\psi}$$

und

$$\psi\to e^{i\theta\gamma_5}\psi,\quad \bar{\psi}\to\bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5}$$

ist, wobei $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$. Nach dem *Nilson-Ninomiya-Theorem* ist es unmöglich, die Wirkung so abzuändern, dass die Doppler verschwinden, die chirale Symmetrie jedoch erhalten bleibt.

Falls es bei dem zu untersuchenden Problem nicht auf die chirale Symmetrie ankommt, ist die Wilson-Wirkung jedoch durchaus ein sinnvolles Mittel. Nach einiger Rechnung erhält man aus ihr die 2-Punkt Funktion

$$\langle\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\rangle = \lim_{a\to 0}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{\left[-i\sum_\mu \gamma_\mu\tilde{p}_\mu + M(p)\right]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M(p)^2}\,e^{ip(x-y)}$$

mit der impulsabhängigen Masse

$$M(p) = M + \frac{2r}{a}\sum_\mu \sin^2(p_\mu a/2).$$

Diese Masse (und damit der Nenner) divergiert an den Rändern der Brillouin-Zone für $a\to 0$, so dass die Doppler wie gewünscht verschwinden.

5.3 Staggered Fermionen

Eine weitere Möglichkeit, dass Doppler-Problem zu beseitigen, sind die sog. *Staggered Fermionen*, also "übereinandergelegte" Fermionen. Diese Methode soll hier jedoch nur kurz skizziert werden. Die Grundidee ist, dass durch Halbierung der Brillouin-Zone die Nullstellen am ursprünglichen Rand wegfallen. Wie aus der Festkörper-Physik bekannt ist, bedeutet dies, dass der effektive Gitterabstand verdoppelt werden muss. An jeder Ecke eines Gitter-Hyperwürfels muss also ein anderer Freiheitsgrad vorliegen. In vier Dimensionen benötigt man daher 16 Komponenten, der Dirac-Spinor besitzt jedoch nur 4 Komponenten, so dass man 4 verschiedene Fermionen (z.B. Quark-Flavors) gleichzeitig behandeln muss.

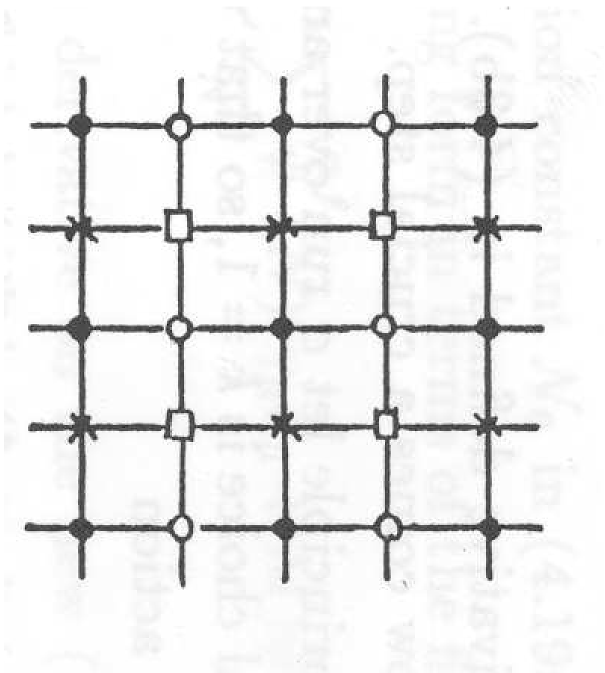

Abbildung 1: Beispiel mit 4 Freiheitsgraden in 2 Dimensionen

6 verwendete Folien mit Zusammenfassung

Skalarfeld	**Dirac-Feld**

Erzeugende Funktionale:

$$Z[J] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{nm} J_n M^{-1}_{nm} J_m} \qquad\qquad Z[\rho\bar\rho] = \det A\, e^{\sum_{ij}\bar\rho_i A^{-1}_{ij}\rho_j}$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\Box + M^2)\phi(x) = 0$$

Dirac-Gleichung:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x) = 0$$

Feldwirkung (im Minkowski-Raum):

$$S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\phi(x)(\Box + M^2)\phi(x) \qquad\qquad S_F = \int \mathrm{d}^4x\,\bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi(x)$$

Zweipunkt-Funktionen:

$$< \phi(x)\phi(y) > \;= \frac{\int \mathrm{D}\phi\,\phi(x)\phi(y)e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathrm{D}\phi\, e^{-S_E[\phi]}} \qquad\qquad < \psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y) > \;= \frac{\int \mathrm{D}\bar\psi \mathrm{D}\psi\,\psi_\alpha(x)\bar\psi_\beta(y)e^{-S_E}}{\int \mathrm{D}\bar\psi\mathrm{D}\psi\, e^{-S_E}}$$

Euklidische Feldwirkung:

$$S_E = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\phi(x)(-\Box + M^2)\phi(x) \qquad\qquad S_F^{(eu)} = \int \mathrm{d}^4x\,\bar\psi(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu + M)\psi(x)$$

Euklidische Gitterwirkung:

$$S_E = \frac{1}{2}\sum_{n,m}\hat\phi_n\, K_{nm}\,\hat\phi_m \qquad\qquad S_F^{(eu)} = \sum_{n,m,\alpha,\beta}\bar{\hat\psi}_\alpha(n)\, K_{\alpha,\beta}(n,m)\,\hat\psi_\beta(m)$$

mit

$$K_{n,m} = -\sum_{\hat\mu>0}\left[\delta_{n+\hat\mu,m} + \delta_{n-\hat\mu,m} - 2\delta_{nm}\right] + \hat M^2\delta_{nm} \quad \text{(Skalarfeld)}$$

$$K_{\alpha,\beta}(n,m) = \sum_\mu \tfrac{1}{2}\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\beta}\left[\delta_{m,n+\hat\mu} - \delta_{m,n-\hat\mu}\right] + \hat M\,\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta} \quad \text{(Spinorfeld)}$$

Skalarfeld

Dirac-Feld

Gitter-Zweipunktfunktionen:

$$< \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m >= K^{-1}_{nm}$$

$$< \hat{\psi}_\alpha(n) \bar{\hat{\psi}}_\beta(m) >= K^{-1}_{\alpha\beta}(n,m)$$

im Kontinuumslimes (a→0):

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{\sum_\mu \tilde{k}_\mu^2 + M^2}$$

$$\tilde{k}_\mu = \tfrac{2}{a} \sin \tfrac{k_\mu a}{2}$$

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[-i\gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M^2} e^{ip(x-y)}$$

mit

$$\tilde{p}_\mu = \tfrac{1}{a} \sin(p_\mu a)$$

Wilson-Fermionen

Gitterwirkung:

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\hat{\psi}}(n) \hat{\Box} \hat{\psi}(n)$$

Zweipunkt-Funktion (Kontinuumslimes):

$$< \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) >= \lim_{a\to 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{[-i\gamma_\mu \tilde{p}_\mu + M]_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2 + M(p)^2} e^{ip(x-y)}$$

mit der (impulsabhängigen) Masse

$$M(P) = M + \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2 \frac{p_\mu a}{2}$$