Seminar über Teilchen- und Kerntheorie — Feldtheorie auf dem Gitter

Die Gruppe SU(N) und nicht-abelche Eichtheorien

Patrick Fritzsch
fritzsch@uni-muenster.de

02.02.2003

Zusammenfassung

Dieser Übersichtsartikel orientiert sich an meinem Folien-Vortrag im Seminar über Teilchen- und Kerntheorie des WS 02/03 vom 22 Januar 2003. Er ist als Einführung gedacht und nicht für tiefergehende Studien geeignet. Für diese möchte ich ausdrücklich auf die angeführte Literatur verweisen, die natürlich um viele weitere Bücher hätte ergänzt werden können.

Zunächst werde ich wie im Vortrag anhand von Beispielen eine Motivation für die anschließende Darstellung der unitären Gruppe bringen und dann auf die spezielle unitäre Gruppe eingehen. Hiernach gehe ich zu nicht-abelschen Eichtheorien über, die ich nur unter $SU(N)$-Transformationen betrachten werde, da wegen der allgemeingültigen Produktzerlegung $U(N) = SU(N) \bigotimes U(1)$ immer der abelsche ($U(1)$-) Anteil abgespalten werden kann und schon im Vortrag über abelsche Eichtheorien zur Sprache kam.

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Die Gruppe SU(N)

Mit der Quantentheorie I Vorlesung sollte jedem die folgenden drei unitären Operatoren geläufig sein, welche die Schrödingersche Wellenfunktion bzw. deren Skalarprodukt im Hilbertraum unter den Transformationen

$$\psi'(\vec{x},t) = \widehat{U}\psi(\vec{x},t)$$

invariant lassen. Dazu zählt die

- räumliche Translation $\widehat{U} = \exp(-\mathrm{i}\,\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}})$
- räumliche Rotation $\widehat{U} = \exp(-\mathrm{i}\,\vec{\phi}\cdot\hat{\vec{L}})$
- zeitliche Translation $\widehat{U} = \exp(\,\mathrm{i}\,\tau\cdot\hat{H})$.

Hier und im folgenden habe ich der Übersichtlickeit halber die natürlichen Einheiten ($\hbar = 1$ und $c = 1$) benutzt. Eine Gemeinsamkeit dieser drei Operatoren ist ihre Struktur, die Darstellung des Operators als komplexe Exponentialreihe von hermiteschen Operatoren $(\vec{p}, \vec{L}, H)$ mit reellen Parametern $(\vec{a}, \vec{\phi}, \tau)$. Jede dieser Transformationen ist unitär

$$U^{-1} = U^{\dagger} = (U^*)^T$$

und nach den Parametern differenzierbar. Außerdem ist mit jedem Erhaltungssatz

$$\left[\widehat{H}, \widehat{U}\right] = 0$$

eine Symmetrie des durch den Hamiltonoperator $\widehat{H} \neq \widehat{H}(t)$ beschriebenen Systems verknüpft (Stichwort Noether-Theorem).
Das wichtigste jedoch ist, dass die durch die reellen Parameter gegebene Menge aller räuml. Translationen, räuml. Rotationen bzw. zeitl. Translationen je eine Gruppe bilden.

1 Die Definition einer Gruppe

Eine Menge $\mathcal{G}$ von Elementen $a, b, c, \ldots$ bildet zusammen mit einer Verknüpfung $'\circ'$ eine Gruppe, wenn für alle Elemente $a, b, c, \ldots \in \mathcal{G}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- **Abgeschlossenheit:**
$$a \circ b \in \mathcal{G}$$
- **Assoziativität:**
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
- **Neutrales Element $e \in \mathcal{G}$:**
$$e \circ a = a \circ e = a$$
- **Inverses Element $a^{-1} \in \mathcal{G}$:**
$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$$

Das Inverse zu jedem Element muss dabei genauso wie das Neutrale Element eindeutig bestimmt sein.
Die Gruppenverknüpfung wird auch oft als Gruppenprodukt oder einfach als Produkt bezeichnet und man schreibt ab statt $a \circ b$. Die kleinste Realisierung einer Gruppe ist damit $\mathcal{G} = \{1\}$ mit Multiplikation bzw. $\mathcal{G} = \{0\}$ mit Addition als Verknüpfung. Beispiele für größere Gruppen bzgl. Addition sind $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Auch die Menge aller regulären, also invertierbaren $N \times N$-Matrizen über den reellen oder komplexen Zahlen bilden bzgl. der Matrixmultiplikation eine Gruppe. Sie werden als allgemein lineare (*general linear*) Gruppe bezeichnet durch $GL(N,\mathbb{R})$ bzw. $GL(N,\mathbb{C})$.

Desweiteren gibt es bestimmte Eigenschaften, die Gruppen aufweisen können. So ist eine Gruppe

- **abelsch**, wenn alle Gruppenelemente untereinander vertauschen, d.h.
$$a \circ b = b \circ a$$
ansonsten nennt man sie **nicht-abelsch**. Beispiel: $\mathbb{Z}$ bzw. $GL(N,\mathbb{R})$
- **kontinuierlich**, wenn die Gruppenelemente von einem oder mehreren kontinuierlich veränderlichen Parametern x_i abhängen
$$\mathcal{G} = \{a(\{x_i\}), b(\{x_i\}), \cdots\}$$
und **kontinuierlich verbunden**, wenn man zusätzlich von einem beliebigen Element durch Variation der Parameter zu jedem andern Element gelangen kann
- **kompakt**, wenn es in jeder Folge eine unendliche Teilfolge a_n von Elementen gibt, die gegen einen Grenzelement a konvergiert, das ebenso zur Gruppe gehört

Desweiteren können zwei Gruppen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ **isomorph** zueinander sein, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige Abbildung existiert, die bzgl. der Gruppenmultiplikation erhalten bleibt:

$$\underbrace{a'b'}_{\text{Produkt in } \mathcal{G}'} = (\underbrace{ab}_{\text{Produkt in } \mathcal{G}})'$$

Hat man zwei zueinander isomorphe Gruppen, so besitzen diese die gleiche Struktur.

2 Lie-Gruppen

Unter einer Lie-Gruppe versteht man eine kontinuierliche Gruppe, deren Elemente $g(\vec{\alpha})$ analytisch von den Gruppenparametern $\vec{\alpha}$ abhängen.

Im übrigen können die Gruppenelemente auch noch von weiteren nicht zu dieser Gruppe gehörenden Parametern abhängen, die für die Betrachtung hier jedoch unerheblich sind.

Bezeichnet n die Dimension der Lie-Gruppe, so gibt es n linear unabhängige reelle Parameter α^i und die Gruppe ist eine n-dim. reelle Mannigfaltigkeit mit einer Topologie und die Gruppenmultiplikation sowie die Bildung des Inversen sind analytische Abbildungen. Aufgrund dessen, kann man ein **infinitesimales Gruppenelement** schreiben als Entwicklung bis zur 1. Ordnung:

$$g(\delta\vec{\alpha}) = g(0) + \left.\frac{\partial g(\vec{\alpha})}{\partial\alpha^\mu}\right|_{\vec{\alpha}=0} \delta\alpha^\mu$$

mit $\mu = 1, 2, \ldots, n$ und Summenkonvention. Mit der Konvention $g(0) = \mathbb{1}$ definiert man

$$g(\delta\vec{\alpha}) =: \mathbb{1} + \mathrm{i}X_\mu\delta\alpha^\mu$$

und erhält durch Vergleich die **Erzeugenden** oder **Generatoren** der Gruppe

$$X_\mu = -\mathrm{i} \cdot \left.\frac{\partial g(\vec{\alpha})}{\partial\alpha^\mu}\right|_{\vec{\alpha}=0}$$

Durch den vollständigen Satz dieser X_μ ist die Gruppenstruktur eindeutig festgelegt. Jedes Gruppenelement $g(\vec{\alpha})$ ist eindeutig durch $\vec{\alpha}$ festgelegt. Wenn wir nun den Weg vom Ursprung $g(0) = \mathbb{1}$ zu einem beliebigen Element $g(\vec{\alpha})$ in N Teilstücke zerlegen, so wird $\vec{\alpha}/N = \delta\vec{\alpha}$ für hinreichend großes N sicherlich infinitesimal und wir können für ein endliches Gruppenelement

$$g(\vec{\alpha}) = (g(\delta\alpha))^N$$

schreiben. Dies ist aber nichts anderes als

$$g(\vec{\alpha}) = \left(g(\frac{\vec{\alpha}}{N})\right)^N = \left(\mathbb{1} + \frac{\mathrm{i}\alpha^\mu X_\mu}{N}\right)^N \quad ,$$

also im Limes $N \to \infty$ eine Darstellung der Exponentialreihe, wodurch wir jedes **endliche Gruppenelement** durch

$$g(\vec{\alpha}) = \exp(\mathrm{i}\alpha^\mu X_\mu) = \exp(\mathrm{i}\vec{\alpha}\vec{X})$$

identifizieren können. $\vec{\alpha}\vec{X}$ ist eine einfache Schreibkonvention für $\alpha^\mu X_\mu$. Hieran sehen wir aber auch, dass die α^μ so etwas wie Koordinaten auf der Gruppenmannigfaltigkeit zur Basis $\{X_\mu\}$ sind.

Zu jeder Lie-Gruppe gibt es eine **Lie-Algebra**, das ist ein Vektorraum, ausgestattet mit einem Klammer-Operator $[*, \star]$, auch Lie-Klammer oder Lie-Produkt genannt, mit den definierenden Eigenschaften:

- **Antikommutativität:**

$$[X_\mu, X_\nu] = -[X_\nu, X_\mu]$$

- **Bilinearität:**

$$[\alpha X_\mu + \beta X_\nu, X_\rho] = \alpha [X_\mu, X_\rho] + \beta [X_\nu, X_\rho]$$

- **Jacobi-Identität:**

$$[X_\mu, [X_\nu, X_\rho]] + [X_\nu, [X_\rho, X_\mu]] + [X_\rho, [X_\mu, X_\nu]] = 0$$

Bis zu diesem Punkt sind die Gruppenelemente noch recht abstrakt, weshalb wir im folgenden eine spezielle Darstellung betrachten werden. In der Gruppentheorie versteht man unter einer **Darstellung** D der Gruppe $\mathcal{G}$ auf einem linearen Vektorraum V einen Homomorphismus

$$D : \mathcal{G} \to GL(V) \qquad g \mapsto D(g) : V \to V$$

mit

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G}$$

d.h. dass jedem Gruppenelement g eine Matrix über V zugeordnet wird. Die notwendige Bedingung für die Existenz des Inversen Elements lässt daher nur invertierbare Matrizen, also aus $GL(V)$ zu. Außerdem überträgt sich über die Produkterhaltung

$$D(e) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad D(g^{-1}) = D(g)^{-1} \quad .$$

Die abstrakten Gruppenelemente können also in der entsprechenden Darstellung immer als Matrizen realisiert werden. Diese stellen dann ihrerseits lineare Operatoren auf V dar.
Die in der Quantenmechanik wichtigste Gruppe ist die unitäre Transformationsgruppe, die ich nun in Matrix-Darstellung betrachten möchte.

3 Die Gruppe U(N)

$$\mathbf{U(N)} = \left\{ U \in \mathbf{GL(N}, \mathbb{C}) \middle| U^{-1} = U^\dagger \right\}$$

Die Gruppe $U(N)$ ist also die Menge aller invertierbaren, unitären $(N \times N)$-Matrizen über $\mathbb{C}$. $U(N)$ ist eine kompakte lineare Lie-Gruppe. Ihr Rang entspricht dem Rang einer invertierbaren Matrix aus $GL(N, \mathbb{C})$, also N. Zur Parametrisierung einer solchen Matrix werden daher $2N^2$ Parameter benötigt. Die Unitäritätsbedingung $(UU^\dagger = \mathbb{1})$ liefert zusätzlich N^2 Nebenbedingungen, also folgt $\dim(U(N)) = N^2$. Damit kann jede Matrix aus $U(N)$ nach N^2 linear unabhängigen Basismatrizen entwickelt werden. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} 1 &= \det \mathbb{1} &&= \det(U^\dagger U) \\ &= \det U^\dagger \det U &&= (\det U)^* \det U \\ &= |\det U|^2 \end{aligned}$$

so erkennen wir, dass immer

$$\det U = e^{\mathrm{i}\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

gilt. Elemente von Lie-Gruppen können wie wir gesehen haben immer als Exponentialreihe geschrieben werden, d.h. in Matrix-Darstellung der Gruppe:

$$U = \exp(\mathrm{i}\Lambda) = \exp(\mathrm{i}\lambda^r t_r)$$

mit Summation über $r = 1, 2, ..., N^2$. Die λ^r sind also die Komponenten von Λ bzgl. der Basis $\{t_r\}$, womit die λ^r als die Parameter und die t_r als die Generatoren der Gruppe $U(N)$ in Matrix-Darstellung identifiziert sind. Aus der Unitarität von U folgt die Hermitezität von Λ bzw. Antihermitezität für $\mathrm{i}\Lambda$. Nun benutzt man i.a. die Basiszerlegung

$$\{t_r\} = \{t_1, t_2, ..., t_{N^2-1}, \mathbb{1}\} = \{t_a, \mathbb{1}\}$$

und erhält

$$\Lambda = \lambda^a t_a + \lambda \mathbb{1}$$

bzw. nach Einsetzen

$$\begin{aligned} U &= \exp(\mathrm{i}\lambda^a t_a)\ \exp(\mathrm{i}\lambda \mathbb{1}) \\ &= \exp(\mathrm{i}\lambda^a t_a)\ \cdot\ e^{\mathrm{i}\lambda} \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da Λ und $\lambda \mathbb{1}$ hermitesch sind, muss dies auch für die Summe $\lambda^a t_a$ gelten. Die einzelnen t_a können hermitesch gewählt werden, müssen dies jedoch nicht solange die Summe $\lambda^a t_a$ hermitesch ist. Betrachten wir nochmals die Determinante unter Beachtung von

$$\det e^A = e^{\mathrm{Sp} A}$$

so erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \det(U) &= \det(e^{\mathrm{i}\lambda^a t_a}) \cdot \det(e^{\mathrm{i}\lambda} \mathbb{1}) \\ &= e^{\mathrm{i}\lambda^a \mathrm{Sp}(t_a)} \cdot e^{\mathrm{i}\lambda N} \det(\mathbb{1}) \\ &= e^{\mathrm{i}\lambda^a \mathrm{Sp}(t_a)} \cdot e^{\mathrm{i}\lambda N} \\ &\overset{!}{=} e^{\mathrm{i}\gamma} \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\gamma = \lambda N$ wählen und erhalten die Bedingung

$$e^{\mathrm{i}\lambda^a \mathrm{Sp}(t_a)} = +1 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Sp}(t_a) = 0 \quad .$$

Dadurch ist es möglich die Gruppe $U(N)$ als Produktgruppe

$$\mathbf{U(N)} = \mathbf{SU(N)} \otimes \mathbf{U(1)}$$

darzustellen, indem man einfach von den Basismatrizen die Einheitsmatrix herausgreift und nach obigem Schema λ mit γ/N bzw. $\gamma/\mathrm{Sp}(\mathbb{1})$ identifiziert. Dies ist dann der $U(1)$-Anteil, der wegen $\dim U(1) = 1$ die abelsche Untergruppe von $U(N)$ bildet.
Der verbleibende $SU(N)$-Anteil wird daher von $\dim(SU(N)) = N^2 - 1$ linear unabhängigen, spurlosen Matrizen gebildet. Wir wissen desweiteren, dass für $N \geq 2$ die Darstellungsmatrizen i.a. nicht kommutieren und sehen, dass die "Nicht-Abelzität" von $U(N)$ aus der von $SU(N)$ resultiert.
Damit kommen wir nun zum Hauptthema des ersten Teils, der nach dem eben gesagten die Hauptrolle in einer nicht-abelschen Eichtheorie spielen wird.

4 Die Gruppe SU(N)

$$\mathbf{SU(N)} = \left\{ U \in \mathbf{U(N)} \middle| \det U = +1 \right\}$$

Zu dieser Gruppe gehören also alle unitären Transformationen mit Determinante +1. Damit haben wir eine weitere Nebenbedingung für $SU(N)$, die den Rang und die Dimension von $U(N)$ um eins erniedrigt, also

$$\mathrm{Rg}(SU(N)) = N - 1$$

und

$$\dim(SU(N)) = N^2 - 1 \quad .$$

Die Darstellung einer Matrix aus $SU(N)$ ist gegeben durch

$$\boxed{U = \exp(\mathrm{i}\lambda^a t_a)}$$

mit den spurfreien Generatoren t_a, welche allesamt hermitesch gewählt werden können.

Eine sehr einfache Wahl der Basis für $SU(N)$ wurde von Cartan und Weyl gegeben und soll hier kurz skizziert werden. Aufgrund der Spurfreiheit der Generatoren können $(N-1)$ linear unabhängige **Diagonalmatrizen** gewählt werden. Sie haben für $n = 2, \ldots, N$ die allgemeine Form

$$\boldsymbol{D_{n^2-1}} = \sqrt{\tfrac{2}{n^2-n}} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}_{n-1} & & \mathbf{0} & \\ & -(n-1) & & \\ \mathbf{0} & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Es verbleiben $(N^2-1) - (N-1) = N(N-1)$ weitere Basismatrizen zur Wahl. $N(N-1)$ ist gerade die Anzahl der Nebendiagonalelemente, womit wir als verbleibende Basis die sogenannten **Leitergeneratoren**

$$\boldsymbol{E_{ij}} = (E_{ij})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn} \quad \text{für} \quad i \neq j$$

wählen können, deren einziger nichtverschwindender Eintrag eine 1 an der Stelle (i,j) ist. Der Nachteil an dieser Wahl ist, dass diese Leitergeneratoren nicht hermitesch sind. Aus ihnen kann man aber durch Symmetriesierung die entsprechende Anzahl von hermiteschen Generatoren erzeugen durch

$$\boldsymbol{R_{ij}} = E_{ij} + E_{ji}$$

und

$$\boldsymbol{I_{ij}} = -\mathrm{i}\,(E_{ij} - E_{ji}) \quad .$$

An einem Beispiel erkennt man dies am deutlichsten:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$I_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 & \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

oder

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$I_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

In R_{12} bzw. in I_{12} sind in der linken oberen Ecke die Pauli-Matrizen σ_1 bzw. σ_2 zu erkennen, die als Basis der $SU(2)$ zur Beschreibung des Spins dienen.

Wir haben gesehen, dass zu jeder Lie-Gruppe eine Lie-Algebra für die Generatoren gehört. In Matrix-Darstellung entspricht der Lie-Klammer der Kommutator, den ich jetzt für die Basis mit spurfreien, hermiteschen Generatoren t_a betrachten möchte. Ist auch der Kommutator hermitesch?

$$\begin{aligned} \underline{[t_a, t_b]^\dagger} &= (t_a t_b)^\dagger - (t_b t_a)^\dagger \\ &= t_b{}^\dagger t_a{}^\dagger - t_a{}^\dagger t_b{}^\dagger \\ &= t_b t_a - t_a t_b \qquad = \underline{-[t_a, t_b]} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist der Kommutator der Generatoren antihermitesch. Er wird aber hermitesch durch den Vorfaktor i oder 1/i. Ist der Kommutator auch spurfrei ?

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Sp}([t_a, t_b])} &= \mathrm{Sp}(t_a t_b) - \mathrm{Sp}(t_b t_a) \\ &= \mathrm{Sp}(t_a t_b) - \mathrm{Sp}(t_a t_b) \quad = \underline{0} \end{aligned}$$

Wir stellen damit fest, dass der Kommutator mit dem Vorfaktor 1/i hermitesch und spurfrei ist, was bedeutet dass wir ihn wieder nach den hermitesch und spurfreien Generatoren entwickeln oder darstellen können:

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\,[t_a, t_b] = f_{ab}{}^c t_c$$

oder

$$\boxed{[t_a, t_b] = \mathrm{i} f_{ab}{}^c t_c} \quad .$$

Die Generatoren sind damit geschlossen unter Kommutation, wie es für eine LIE-Algebra zu erwarten ist. Die reellen Koeffizienten $f_{ab}{}^c$ heißen **Strukturkonstanten** der Gruppe, denn sie legen die Struktur der Gruppe eindeutig fest. Analog zur LIE-Algebra folgt hier durch den Kommutator die Antisymmetrie der Strukturkonstanten

$$f_{ab}{}^c = -f_{ba}{}^c$$

und die JACOBI-Identität

$$f_{bc}{}^d f_{ad}{}^e + f_{ca}{}^d f_{bd}{}^e + f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e = 0 \quad .$$

Oft betrachtet man auch noch den Antikommutator, der nach analoger Rechnung hermitesch, jedoch nicht spurfrei ist, denn

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Sp}(\{t_a, t_b\})} &= \mathrm{Sp}(t_a t_b) + \mathrm{Sp}(t_b t_a) \\
&= \mathrm{Sp}(t_a t_b) + \mathrm{Sp}(t_a t_b) \\
&= 2\,\mathrm{Sp}(t_a t_b) \qquad \neq \underline{0}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle definieren wir mit

$$2\,\mathrm{Sp}(t_a t_b) =: N \cdot c_{ab}$$

die symmetrischen Konstanten c_{ab}. Berechnen wir jetzt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sp}(\{t_a, t_b\} - c_{ab}\mathbb{1}) = \\
&\quad = \mathrm{Sp}(\{t_a, t_b\}) - c_{ab}\,\mathrm{Sp}(\mathbb{1}) \\
&\quad = 2\,\mathrm{Sp}(t_a t_b) - c_{ab} N \\
&\quad = N c_{ab} - c_{ab} N \qquad = 0
\end{aligned}$$

so haben wir einen hermiteschen, spurfreien Ausdruck gefunden. Entwickeln wir diesen nach den Basismatrizen der LIE-Algebra durch $d_{ab}{}^c t_c$ so erhalten wir nach Umformen den Antikommutator zu

$$\boxed{\{t_a, t_b\} = c_{ab}\mathbb{1} + d_{ab}{}^c\, t_c}$$

Die reellen konstanten c_{ab} und $d_{ab}{}^c$ sind wie der Antikommutator symmetrisch bzgl. der Indizes (ab). Wie können wir nun diese Konstanten und die Strukturkonstanten berechnen? Am besten wählt man dafür die schon aufgeführte Basis nach CARTAN-WEYL mit der Definition der c_{ab} und erhält

$$\mathrm{Sp}(t_a t_b) = 2\delta_{ab}$$

Diese Gleichung ist eine spezielle Normierung der Matrizen. Die gebräuchlichere ist jedoch

$$\mathrm{Sp}(t_a t_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

Man erhält sie aus der Letzteren durch Skalierung der angegebenen Basismatrizen mit 1/2, also $t_a \to t_a/2$. In dieser Normierung gilt somit

$$c_{ab} = \frac{1}{N}\delta_{ab}$$

Als nächstes möchte ich zeigen, wie man aus den so normierten Basismatrizen die Strukturkonstanten erhält. Mit Hilfe von $[t_a, t_b] = \mathrm{i} f_{ab}{}^d t_d$ betrachten wir dazu

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Sp}([t_a, t_b]\, t_c)} &= \mathrm{Sp}(\mathrm{i} f_{ab}{}^d t_d t_c) \\
&= \mathrm{i} f_{ab}{}^d \cdot \mathrm{Sp}(t_d t_c) \\
&= \mathrm{i} f_{ab}{}^d \cdot \delta_{dc}/2 \\
&= \underline{\mathrm{i}/2 f_{abc}}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Kommutatorrelation benutzt, die Konstanten $\mathrm{i} f_{ab}{}^d$ bei Spurbildung herausgenommen, die Normierung verarbeitet und schließlich den oberen Index heruntergezogen. Einfaches Umformen liefert die Strukturkonstanten zu

$$f_{abc} = f_{ab}{}^c = -2\mathrm{i}\,\mathrm{Sp}([t_a, t_b]\, t_c)$$

Sie sind daher total antisymmetrisch. Hier sehen wir, dass kein Unterschied zwischen dem letzten oberen bzw. unteren Index besteht. In der Literatur findet man beide Schreibweisen. Um zu sehen, über welchen Index summmiert wird ziehe ich es aber vor obere und untere Indizes zu verwenden. Die analoge Rechnung für die verbleibenden Konstanten führt auf

$$d_{abc} = d_{ab}{}^c = 2\,\mathrm{Sp}(\{t_a, t_b\}\, t_c)$$

welche total symmetrisch bzgl. Indexvertauschung sind.

4.1 Beispiel SU(2)

Die Basis der SU(2) bilden die PAULI-Matrizen $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Sie erhält man direkt aus der oben dargestellten Basis der $SU(N)$ für $N = 2$ in der Notationreihenfolge (R_{12}, I_{12}, D_3). Die einzigen Leiteroperatoren sind:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq E_{12}$$

und

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \doteq E_{21}$$

mit den bekannten Beziehungen

$$\sigma_1 = \sigma_+ + \sigma_- \quad \text{und} \quad \sigma_1 = -\mathrm{i}(\sigma_+ - \sigma_-)$$

Mit diesen Basismatrizen lautet die LIE-Algebra:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\, \varepsilon_{ij}{}^k \sigma_k$$

mit dem total antisymmetrischen Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} und

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$$

d.h. die Konstanten d_{abc} verschwinden allesamt. In der Physik wird zur Beschreibung des Spins eine andere Basis benutzt, die Spinbasis $S_j = \frac{1}{2}\sigma_j$, die der schon erwähnten Normierung

$$\mathrm{Sp}(S_a S_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$$

folgt. Mit ihr hat die LIE-Algebra folgende Form:

$$[S_i, S_j] = \mathrm{i}\, \varepsilon_{ij}{}^k S_k$$

$$\{S_i, S_j\} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbb{1}$$

In dieser Form können wir dann den bekannten unitären Spinoperator direkt hinschreiben:

$$U_S(\vec{\alpha}) = e^{-\mathrm{i}\,\vec{\alpha}\vec{S}}$$

mit $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$.

4.2 Beispiel SU(3)

Die Dimension dieser Gruppe ist $3^2 - 1$ und verlangt daher 8 Generatoren. Diese Generatoren sind

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und nach unserem alten Schema $(R_{12}, I_{12}, D_3, R_{13}, I_{13}, R_{23}, I_{23}, D_8)$. Die Generatoren der $SU(3)$ heißen GELL-MANN-Matrizen. Die LIE-Algebra lautet

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2\mathrm{i}\, f_{ij}{}^k \lambda_k$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij}\mathbb{1} + 2d_{ab}{}^c \lambda_k$$

beziehungsweise

$$[F_i, F_j] = \mathrm{i}\, f_{ij}{}^k F_k$$

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\mathbb{1} + d_{ab}{}^c F_k$$

mit $F_j = \frac{1}{2}\lambda_j$ und der unitären Transformation

$$U_F(\vec{\phi}) = e^{-\mathrm{i}\,\vec{\phi}\vec{F}}$$

Die Strukturkonstanten sind total antisymmetrisch und von ihnen sind lediglich neun unabhängig. Auch die $d_{ab}{}^c$ sind total symmetrisch und es gibt 16 voneinander unabhängige. Alle anderen gehen durch Permutationen auseinander hervor oder verschwinden.

4.3 Bemerkungen

Für jede Gruppe, die eine treue Matrix-Darstellung besitzt, d.h. der oben gegebene Homomorphismus D ist injektiv:

$$a \neq b \quad \Rightarrow \quad D(a) \neq D(b) \qquad \forall a, b \in \mathcal{G} \qquad ,$$

lässt sich ein Abstand d (oder eine Metrik) definieren durch

$$d^2(a,b) := \sum_{i,j} |D(a)_{ij} - D(b)_{ij}|^2 \quad .$$

Außerdem kann man auf bestimmten Gruppen Integration betreiben, insbesondere auf LIE-Gruppen. Ein Satz besagt, dass für jede kompakte LIE-Gruppe das Gruppenvolumen

$$V = \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\mu_L(g)$$

existiert. Das Integral auf einer Gruppenmannigfaltigkeit bezeichnet man als HAAR-Integral und das Maß $\mathrm{d}\mu_L$ als linksinvariantes HAAR-Maß. Beispiel: $\mathcal{G} = U(1) = \{e^{\mathrm{i}\theta} | \, 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$$\mathrm{d}\mu_L(g(\theta)) = \mathrm{d}\theta$$

und damit

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Um das Kapitel über $SU(N)$ nun zum Abschluss zu bringen, möchte ich noch auf folgende Artikel hinweisen:

- *arXiv:math-ph/0205016* `Generalized Euler Angle Paramterization for SU(N)`
- *arXiv:math-ph/0210057* `Generalized Euler Angle Parameterization for U(N) with Applications to SU(N) Coset Volume Measures`

Darin wird ausgehend von der Fundamentalbasis der $SU(N)$ eine allgemeine Euler Winkel Parametrisierung abgeleitet. Darüber hinaus wird auch das entsprechende Haar-Maß und Gruppenvolumen entwickelt.

Teil II
Nicht-abelsche Eichtheorien

Ausgangspunkt ist die Lagrange-Dichte des **Dirac-Feldes**:

$$\boxed{\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \overline{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi}$$

Sie ist reell, invariant unter Lorentz-Transformationen und invariant bzgl. Spinor-Transformationen. Unter der Annahme, dass ein Fermion N interne Freiheitsgrade haben könnte, verallgemeinern wir den Dirac-Spinor ψ wie folgt:

$$\psi = (\psi_r) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{\psi} = (\overline{\psi}^r) = \begin{pmatrix} \overline{\psi}^1 & \cdots & \overline{\psi}^N \end{pmatrix}$$

Damit haben wir es nicht mit einem Dirac-Feld ψ, sondern mit N Dirac-Feldern ψ_r der gleichen Masse zu tun. Die zugehörige Lagrange-Dichte schreibt sich dann als

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \sum_{r=1}^{N} \mathcal{L}(\psi_r, \partial_\mu \psi_r)$$

und wir können die Felder ψ_r als Komponenten eines Superfeldes auffassen.

5 Eichtransformationen

Physikalischen Prinzipien folgend sollten wir nun auch Invarianz bzgl. internen Symmetrietransformationen fordern, d.h. Transformationen der Art

$$\boxed{\begin{aligned} \psi'(x) &= U\psi(x) &&= \exp(\,\mathrm{i}g\Lambda)\;\psi(x) \\ \overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x)U^{-1} &&= \psi(x)\;\exp(-\mathrm{i}g\Lambda) \end{aligned}}$$

welche die Komponenten des Superfeldes untereinander transformiert, also nur auf die N internen Freiheitsgrade wirkt. Dies können nur Transformationen aus $U(N)$ sein ($U^{-1} = U^\dagger$). Da wir nur am nicht-abelschen Fall interessiert sind und die Gruppe $U(N)$ in $U(1)$ und $SU(N)$ zerfällt, beschränke ich mich im folgenden auf die $SU(N)$-Transformationen. Die abelsche $U(1)$ würde uns auf die QED führen, die Gegenstand des letzten Vortrags war. Die skalare Größe g wird **Kopplungskonstante** der Wechselwirkung genannt. In der QED entspricht diese der Elementarladung e.
Wie in unseren Überlegungen zur Gruppe

$SU(N)$ ist Λ hermitesch und spurfrei, d.h. Element der $SU(N)$-LIE-Algebra mit der Basiszerlegung

$$\Lambda = \lambda^a t_a$$

Die oben definierten Transformationen des raumzeitabhängigen Superfeldes ψ sind für alle Raumzeitpunkte x von derselben Art, d.h. es handelt sich um **globale Eichtransformationen** U. Physikalisch lässt sich eine globale Transformation, d.h. eine gleichzeitige Eichtransformation von ψ in allen Raumzeit-Punkt nicht erreichen und es ist sinnvoller bzw. physikalischer **lokale Eichtransformationen** zu betrachten. Damit sind die Gruppenparameter als raumzeitabhängig zu betrachten

$$\lambda^a \to \lambda^a = \lambda^a(x) \quad \Rightarrow \quad U \to U = U(x)$$

Welche Auswirkungen hat das auf die Lagrange-Dichte ?

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \overline{\psi}' \, (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m) \, \psi' \\
&= \overline{\psi} \, U^\dagger (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m) U \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, \mathrm{i}\gamma^\mu \, U^\dagger \partial_\mu (U \, \psi) - \overline{\psi} U^\dagger m U \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, \mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu (\psi) + \overline{\psi} \, \mathrm{i}\gamma^\mu \, U^\dagger \partial_\mu (U) \, \psi \\
&\quad - \overline{\psi} \, m \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m) \, \psi + \overline{\psi} \, \mathrm{i}\gamma^\mu \, U^\dagger \, \partial_\mu (U) \, \psi \\
&\neq \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Die so definierte Dichte ist also nicht invariant unter lokalen Eichtransformationen. Das Problem ist die partielle Ableitung, die auf einen inhomogenen Term führt, denn der Massenterm transformiert sich korrekt. Um dieses Problem zu beheben führen wir zunächst formal die eichkovariante Ableitung D_μ ein, von der wir verlangen, dass sie sich korrekt transformiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \overline{\psi}' \, (\mathrm{i}\gamma^\mu D'_\mu - m) \, \psi' \\
&= \overline{\psi} \, U^\dagger (\mathrm{i}\gamma^\mu D'_\mu - m) U \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu U^\dagger D'_\mu U - m) \, \psi \\
&\overset{!}{=} \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m) \, \psi \\
&= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Wir fordern also

$$U^\dagger D'_\mu U = D_\mu$$

bzw.

$$\boxed{D'_\mu = U D_\mu U^\dagger}$$

Wie könnte ein vernünftiger Ansatz zur Lösung aussehen? Globale Eichtransformationen drehen den in jedem Raumzeit-Punkt angehefteten Gruppenvektor (ψ_r) simultan um den gleichen Betrag, da $\lambda = \text{const.} \; \forall x$. Bei lokalen Eichtransformationen hingegen erfahren die (ψ_r) in verschiedenen Punkten auch unterschiedliche Drehungen, d.h. die Koordinatenbasis transformiert sich in jedem Punkt anders. Wie in der allgemeinen Relativitätstheorie führt man daher einen linearen Zusammenhang ein, der uns erlaubt Vektoren in verschiedenen Punkten durch Paralleltransport zu vergleichen. Dadurch sind auch Eichtheorien geometrische Theorien und mit Hilfe der Differentialgeometrie bzw. der Theorie der Faserbündel behandelbar. In der Eichtheorie wird der lin. Zusammenhang als **Eichfeld** A_μ bezeichnet, das zusätzlich zum Raumzeit-Index auch noch zur LIE-Algebra der Gruppe gehört. Die eichkovariante Ableitung hat dann die Form

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}g A_\mu}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$(D_\mu)_a{}^b = \delta_a{}^b \partial_\mu - \mathrm{i}g (A_\mu)_a{}^b$$

in der sie auf den N-komponentigen Vektor ψ_b wirkt. Diese Form macht einen Vergleich mit der ART am einfachsten, denn dort wirkt auf einen Vektor X_ν folgende Kovariante Ableitung

$$(D_\mu)_\rho{}^\nu = \delta_\rho{}^\nu \partial_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\rho}$$

und die Ähnlichkeit wird offensichtlich. Jetzt fehlt nur das Transformationsverhalten des Eichfeldes. Es ist

$$\begin{aligned}
& D'_\mu = U D_\mu U^\dagger \\
\Leftrightarrow \quad & (\partial_\mu - \mathrm{i}g A_\mu)' = U (\partial_\mu - \mathrm{i}g A_\mu) U^\dagger \\
\Leftrightarrow \quad & \partial_\mu - \mathrm{i}g A'_\mu = \partial_\mu + U \partial_\mu (U^\dagger) - \mathrm{i}g \, U A_\mu U^\dagger
\end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{A'_\mu = U A_\mu U^\dagger + \tfrac{\mathrm{i}}{g} U \partial_\mu (U^\dagger)}$$

Auch hier tritt wie beim Christoffel-Symbol neben dem homogenen Transformationsterm ein inhomogener Term auf.

Betrachten wir nochmals die Lagrange-Dichte mit der eichkovarianten Ableitung:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m) \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu + g\gamma^\mu A_\mu - m) \, \psi \\
&= \overline{\psi} \, (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m) \, \psi + g \overline{\psi} \, \gamma^\mu A_\mu \, \psi
\end{aligned}$$

so erkennen wir den zusätzlichen Term mit den Eichfeldern. In Komponentenschreibweise ist dies genau

$$g\overline{\psi}\,\gamma^\mu A_\mu{}^a t_a\,\psi =: g j^\mu{}_a A_\mu{}^a$$

mit der Definition des Eichstromes

$$j^\mu{}_a = \overline{\psi}\,\gamma^\mu t_a\,\psi$$

Damit beschreibt der durch die eichkov. Ableitung entstandene Term eine $\vec{j}$-$\vec{A}$-Kopplung, also eine Wechselwirkung mit einem äußeren Feld. Die Ersetzung der partiellen Ableitung durch die Eichkovariante führt damit einen Potentialterm ein, wodurch die Lagrange-Dichte kein abgeschlossenes System mehr beschreibt, denn es fehlt ein kinetischer Term für die Eichfelder. Ein solcher kann jedoch nicht von den N^2-1 Eichfeldern allein abhängen, denn diese transformieren sich inhomogen. Wir führen dazu nun den Feldstärketensor

$$\boxed{F_{\mu\nu} := \tfrac{\mathrm{i}}{g}\,[D_\mu, D_\nu]}$$

ein, der sich offensichtlich wie die eichkov. Ableitung transformiert. Außerdem gehört er zur LIE-Algebra der Gruppe. Einsetzen der eichkov. Ableitung

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \tfrac{\mathrm{i}}{g}\,[D_\mu, D_\nu] \\
&= \tfrac{\mathrm{i}}{g}\,[\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu, \partial_\nu - \mathrm{i}gA_\nu] \\
&= \tfrac{\mathrm{i}}{g}\,\{(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)(\partial_\nu - \mathrm{i}gA_\nu) - \\
&\qquad -(\partial_\nu - \mathrm{i}gA_\nu)(\partial_\mu - \mathrm{i}gA_\mu)\} \\
&= \tfrac{\mathrm{i}}{g}\,\{\partial_\mu\partial_\nu - \mathrm{i}g\partial_\mu(A_\nu) - \mathrm{i}gA_\nu\partial_\mu - \\
&\qquad -\mathrm{i}gA_\mu\partial_\nu + (\mathrm{i}g)^2 A_\mu A_\nu \\
&\quad -(\partial_\nu\partial_\mu - \mathrm{i}g\partial_\nu(A_\mu) - \mathrm{i}gA_\mu\partial_\nu - \\
&\qquad -\mathrm{i}gA_\nu\partial_\mu + (\mathrm{i}g)^2 A_\nu A_\mu)\} \\
&= \partial_\mu(A_\nu) - \partial_\nu(A_\mu) - \mathrm{i}g\,[A_\mu, A_\nu]
\end{aligned}$$

liefert den Feldstärketensor zu

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \mathrm{i}g\,[A_\mu, A_\nu]}$$

Er ist damit vollständig durch die Eichfelder bestimmt und eignet sich als kinetischer Term in der Lagrange-Dichte. Wir erkennen desweiteren, dass sich der Feldstärketensor im Falle einer abelschen Theorie (Kommutator verschwindet) auf den der QED reduziert. Um einen skalaren kinetischen Term für die Lagrange-Dichte zu erhalten, muss der Feldstärketensor jedoch bzgl. seiner Raumzeit-Indizes kontrahiert und die Spur bzgl. seines LIE-Algebra-Charakters gebildet werden. In unserer Normierung ist er dann gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

und die Lagrange-Dichte des abgeschlossenen Systems lautet:

$$\boxed{\mathcal{L} = \overline{\psi}\,(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m)\,\psi - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}$$

Wie wir im ersten Kapitel gesehen haben, erfüllen Lie-Algebra wertige Größen die Jacobi-Identität, somit auch die eichkovariante Ableitung, also gilt mit der Definition des Feldstärketensors

$$[D_\mu, F_{\nu\rho}] + [D_\nu, F_{\rho\mu}] + [D_\rho, F_{\mu\nu}] = 0$$

Dies ist die homogene YANG-MILLS-Gleichung (oder homogene Maxwell-Gl.). Sie ist eigentlich keine Gleichung, sondern eine **Identität**, die für jede LIE-Gruppe gegeben ist.

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass der Ausdruck $D_\mu F_{\nu\rho}$ selbst nicht eichkovariant ist. Weitere Überlegungen führen darauf, dass die explizite Gestalt der eichkovarianten Ableitung (allgemein durch $\mathcal{D}$ bezeichnet) davon abhängig ist, worauf sie wirkt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu\psi &= \partial_\mu\psi - \mathrm{i}gA_\mu\psi \\
\mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho} &= \partial_\mu F_{\nu\rho} - \mathrm{i}g\,[A_\mu, F_{\nu\rho}]
\end{aligned}$$

Die homogene Yang-Mills-Gleichung lautet entsprechend

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu F_{\nu\rho} + \mathcal{D}_\nu F_{\rho\mu} + \mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} = 0}$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für die Eichfelder erhält man dann die inhomogenen Yang-Mills-Gleichungen, auf die ich aber nicht mehr eingehen werde. Außerdem ergeben sich entsprechend dem NOETHER-Theorem weitere Erhaltungssätze.

Literatur

[1] **H. Dehnen:** `Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen`
Vorlesungsskript, Uni Konstanz 2002,
http://kaluza.physik.uni-konstanz.de/DE/quanten.ps

sehr ausführliche Darstellung: Hamilton Prinzip für Felder, Rel. E-Dyn/QM, QED, Yang-Mills-Theorie, S-W–/G-S-W–Theorie, QCD, GUT und ART

[2] **W. Greiner:** `Band 5: Quantenmechanik 2 - Symmetrien`
Verlag Harri Deutsch, 1990

Gruppentheorie in der Quantenmechanik, sehr umfangreich mit vorgerechneten Bsp.en

[3] **Becher, Böhm, Joos:** `Eichtheorien`
Teubner Studienbücher Physik, Stuttgart 1981

anschauliche Einführung in die Elementarteilchenphysik mit geometrischer Darstellung einer Eichtheorie

[4] **C. Falter, W.Ludwig:** `Symmetries in Physics`
Springer-Series in Solid-State Sciences 64, 1988

Untertitel: Gruppentheorie angewendet auf physikalische Probleme; reich an Bsp.en

[5] **G. Roepstorff:** `Einführung in die Quantenfeldtheorie`
Vorlesungsskript, RWTH Aachen,
http://bibsrv.physik.rwth-aachen.de/Skripte/Roepstorff/QFT.WS00/skript.ps.gz

[6] **R. Starkl:** `Materie - Feld - Struktur`
Vieweg Theoretische Physik, Braunschweig 1998

Untertitel: Repetitorium der theoretischen Physik

[7] **T. Cheng, L. Li:** `Gauge theory of elementary particle physics`
1984

gute Einführung in die Gruppentheorie mit ausführlicher Darstellung von SU(2) + SU(3)

[8] **S. Weinberg:** `The Quantum Theorie Of Fields, Vol I`
Cambridge University Press, 1995

[9] **S. Weinberg:** `The Quantum Theorie Of Fields, Vol II`
Cambridge University Press, 1996

[10] **T. Kugo:** `Eichtheorie`
Springer, 1997

[11] **O. Nachtmann:** `Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte`
Vieweg, 1986