Seminar zur Gitterfeldtheorie
QCD auf dem Gitter

Dirk Homeier

29. Januar 2003

1 Zielsetzung

Nachdem in den vorangegangenen Vorträgen zunächst die Fermionen und die abelsche Eichtheorie auf dem Gitter eingeführt und im letzten Vortrag allgemeine Eigenschaften der nicht-abelschen Eichtheorien und der Gruppe SU(N) besprochen wurden, sind wir nun in der Lage, nach der Quantenelektrodynamik (QED) auch die Quantenchromodynamik (QCD) für das Gitter zu formulieren. Die Arbeit verläuft dabei nahezu analog zum Fall der QED: Als erster Schritt wird die Fermionenwirkung eichinvariant formuliert, und dann eine Form für den kinetischen Teil der Wirkung des reinen Eichfeldes gefunden. Der Hauptteil der Arbeit liegt dann im weiteren darin zu beweisen, daß die definierte Gitterwirkung für kleine Gitterabstände gegen die gewünschte Wirkung im Kontinuum konvergiert. Erst dann werden wir von der allgemeinen Eichgruppe SU(N) zur QCD, also zur Gruppe SU(3) übergehen. Kurz besprochen werden dann noch die Probleme, die auftreten, wenn man über die Gruppenmannigfaltigkeit von SU(3) integrieren muß (Haarsches Maß). Und letztendlich werden der Kontinuumslimes noch etwas genauer betrachtet und wichtige Konsequenzen für die Parameter der Theorie entdeckt (Renormierungsgruppe).

2 Die Wirkung

Wie beschrieben geht es zunächst darum, die Gitterwirkung für die Fermionen zu finden.

2.1 Fermionenanteil

Da wir hier die Eichgruppe SU(N) betrachten wollen, bestehen die Fermionenfelder nun aus N Komponenten:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}^1, \bar{\psi}^2, \ldots, \bar{\psi}^N)$$

Für die Fermionenwirkung wählen wir die bereits bewährte Wilson-Variante:

$$\begin{aligned} S_F \quad &= \quad (\hat{M}_0 + 4r) \sum_n \sum_{a=1}^{N} \bar{\psi}^a(n)\psi^a(n) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \sum_{a=1}^{N} [\bar{\psi}^a(n)(r-\gamma_\mu)\psi^a(n+\hat{\mu}) + \bar{\psi}^a(n+\hat{\mu})(r+\gamma_\mu)\psi^a(n)], \end{aligned}$$

in völliger Analogie zur QED. Der einzige Unterschied besteht in den beiden Summen über a, d.h. dem internen Freiheitsgrad im Isovektorraum der Fermionen. Ich möchte darauf hinweisen, daß die Größen $\psi, \hat{M}_0$ bereits solche Potenzen des Gitterabstands enthalten, daß sie dimensionslos sind. Das vereinfacht die Form der Wirkung, muß jedoch beim Übergang zum Kontinuum beachtet werden.
Obige Wirkung ist natürlich noch nicht eichinvariant. Um das zu erreichen, definieren wir wieder Linkvariablen $U_\mu(n)$. Es ist hier wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Linkvariablen selbst Elemente der Eichgruppe darstellen. Dies läßt sich am einfachsten einsehen, wenn man sich die Aufgabe der Links vor Augen führt: Sie sollen das interne Koordinatensystem des Isovektorraums an der Stelle $n+\hat{\mu}$ so drehen, daß es mit dem Koordinatensystem an der Stelle n vergleichbar ist. Es gilt daher:

$$U_\mu(n) \in \mathbf{SU(N)},$$

dementsprechend gilt die Darstellung

$$U_\mu(n) = e^{i\phi_\mu(n)}.$$

Im Fall der QED war $\phi_\mu(n)$ nur eine Zahl, dies ist hier nicht mehr so. $\phi_\mu(n)$ ist nun Element der Lie-Algebra von SU(N), und speziell eine hermitesche $N \times N$-Matrix. Wie auch bei der QED führen wir über

$$\phi_\mu(n) = g_0 a A_\mu(n)$$

das Eichfeld $A_\mu(n)$ ein. Nach Einfügen der Linkvariablen sieht die Wirkung so aus:

$$\begin{aligned} S_F &= (\hat{M}_0 + 4r)\sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}[\bar{\psi}(n)(r-\gamma_\mu)U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) + \bar{\psi}(n+\hat{\mu})(r+\gamma_\mu)U_\mu^+(n)\psi(n)]. \end{aligned}$$

Hier versteht sich die Summe über den internen Parameter als implizit, sozusagen als Skalarprodukt im Isovektorraum. Zur Erinnerung sei nochmal die Definition von U^+ erwähnt:

$$U_\mu^+(n) = U_{-\mu}(n+\hat{\mu}).$$

Durch diese Einfügung der Linkvariablen ist die Fermionenwirkung offensichtlich eichinvariant, denn unter einer beliebigen Eichtransformation G gilt:

$$\begin{aligned} \psi(n) &\longrightarrow G(n)\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) &\longrightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \\ U_\mu(n) &\longrightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n+\hat{\mu}) \\ U_\mu^+(n) &\longrightarrow G(n+\hat{\mu})U_\mu^+(n)G^{-1}(n) \end{aligned}$$

Es fehlt uns allerdings noch der Wirkungsanteil durch den Term des reinen Eichfeldes.

2.2 Kinetischer Anteil des Eichfeldes an der Wirkung

Wiederum völlig analog zum Vorgehen bei der QED definieren wir auch im Fall der SU(N) sog. Plakettenvariablen:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^+(n+\hat{\nu})U_\nu^+(n).$$

Dies ist formal die gleiche Definition wie im Fall des abelschen Eichfeldes. Dort spielte allerdings die Reihenfolge der Linkvariablen in obiger Gleichung natürlich keine Rolle, hier ist das anders.
Die Plakette ist als Produkt von Elementen von SU(N) natürlich selbst wieder ein Element von SU(N), ist also speziell auch wieder als Exponentialfunktion eines Elementes der Lie-Algebra von SU(N) darstellbar:

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{ig_0 a^2 f_{\mu\nu}(n)}.$$

In der Definition der Wirkung für das reine Eichfeld sind wir sehr frei, wir können daher festlegen:

$$S_G = c\mathbf{Tr} \sum_{n;\mu<\nu} [1 - \frac{1}{2}(U_{\mu\nu}(n) + U^+_{\mu\nu}(n))],$$

wobei c eine bislang willkürliche Konstante ist, die wir im folgenden festzulegen haben. Die Spurbildung erfolgt über den neuen, internen Parameter des Isovektorraums. Die scheinbar aus der Luft gegriffene Definition von S_G wird sich im Kontinuumslimes $a \to 0$ als sinnvoll erweisen.

2.3 Der Kontinuumslimes der Wirkung

Die Frage, die uns jetzt zu beschäftigen hat, lautet: Geht die obige Gitterwirkung im Übergang $a \to 0$ auch in die erhoffte Wirkung im Kontinuumsfall, hergeleitet im vorangegangenen Vortrag, über? Zerteilen wir die Aufgabe wieder in zwei Anteile: Den Fermionenanteil, und den reinen Eichanteil. Dann können wir die erste Antwort direkt geben:

$$S_F \to S_F^{(\mathbf{kont.})} \ f.\ a \to 0 \quad \surd$$

Warum ist das so einfach? Für kleine a können wir die Linkvariablen sicher zur 1. Ordnung in a entwickeln und das in die Fermionenwirkung einsetzen. Man sieht, daß dann die A_μ nur bis zur Ordnung 1 auftreten, es also dann keine Rolle mehr spielt, ob sie kommutieren oder nicht. Die Rechnung ist damit formal identisch mit der, die wir im abelschen Fall bereits einmal durchgeführt haben.
Bleibt der Grenzübergang für S_G, der uns leider nicht so leicht gemacht wird. Als erstes kümmern wir uns um die zunächst nur sehr abstrakt definierte Größe $f_{\mu\nu}$:

2.3.1 Lemma:

Im Kontinuumslimes geht $f_{\mu\nu}(n)$ in den Feldtensor $F_{\mu\nu}(x)$, definiert im vorangegangenen Vortrag, über.
BEWEIS: Entwickeln wir zunächst den Exponenten der Linkvariablen nach Potenzen von a. Es gilt:

$$\phi_\mu(n+\nu) \approx \phi_\mu(n) + a\partial_\nu \phi_\mu(n)$$

Die Ableitung ist dabei zunächst ein Differenzoperator, um dessen genaue Gestalt wir uns hier nicht zu sorgen brauchen, der aber im Grenzübergang in die richtige partielle Ableitung übergeht. Drücken wir ϕ durch A aus, erhalten wir:

$$\phi_\mu(n+\nu) \approx g_0 a A_\mu(n) + g_0 a^2 \partial_\nu A_\mu(n).$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in die Definition der Plakettenvariable ein:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n) U_\nu(n+\hat{\mu}) U^+_\mu(n+\hat{\nu}) U^+_\nu(n) \\ &\approx e^{ig_0 a A_\mu(n)} e^{ig_0 a A_\nu(n) + ig_0 a^2 \partial_\mu A_\nu(n)} * \\ &\quad * e^{-ig_0 a A_\mu(n) - ig_0 a^2 \partial_\nu A_\mu(n)} e^{-ig_0 a A_\nu(n)} \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, verwenden wir die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots},$$

und zwar gleich mehrfach hintereinander. Dabei betrachten wir aber nur Terme bis zur zweiten Ordnung in a! Mit wenig Aufwand erhalten wir so:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &\approx e^{ig_0 a^2(\partial_\mu A_\nu(n)-\partial_\nu A_\mu(n)+ig_0[A_\mu(n),A_\nu(n)])} \\ &= e^{ig_0 a^2 f_{\mu\nu}(n)} \end{aligned}$$

Wir sehen also:

$$f_{\mu\nu} \to \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}$$

Die letzte Gleichheit ist ein Ergebnis des vorangegangenen Vortrags. □

Wir können uns nun daran machen, die Konvergenz der Wirkung des reinen Eichfeldes zu beweisen. Wir beginnen damit, die Plakettenvariablen (diesmal direkt) nach Potenzen von a zu entwickeln, und zwar bis zur Ordnung 4.

$$U_{\mu\nu}(n) \approx 1 + ig_0 a^2 f_{\mu\nu}(n) - \frac{g_0^2 a^4}{2} f_{\mu\nu}(n) f_{\mu\nu}(n)$$

$$U_{\mu\nu}^{+}(n) \approx 1 - ig_0 a^2 f_{\mu\nu}(n) - \frac{g_0^2 a^4}{2} f_{\mu\nu}(n) f_{\mu\nu}(n)$$

Es ist dabei zu beachten, daß beim Term $f_{\mu\nu}(n)f_{\mu\nu}(n)$ nicht über μ oder ν summiert wird! Zur Einsteinschen Summenkonvention kehren wir erst später zurück. Setzen wir die obigen Ausdrücke in die Wirkung ein, und ersetzen wir:

$$\sum_{\mu<\nu} \to \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}$$

(was wir dürfen, denn für kleine a ist $f_{\mu\nu}$ antisymmetrisch in μ, ν), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_G &\approx c\mathbf{Tr}\frac{1}{2}\sum_{n;\mu,\nu}[1 - \frac{1}{2}(2 - g_0^2 a^4 f_{\mu\nu}(n) f_{\mu\nu}(n))] \\ &= c\frac{g_0^2}{2} * \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\sum_n a^4 \sum_{\mu,\nu} f_{\mu\nu}(n) f_{\mu\nu}(n) \end{aligned}$$

Erinnern wir uns nun daran, daß für $a \to 0$ auch folgendes gilt:

$$\sum_n a^4 \to \int d^4x,$$

$$f_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu},$$

so nimmt unser Ausdruck schon fast die gewünschte Form an. Nun kehren wir auch zur Einsteinschen Summenkonvention zurück, was sich darin äußert, daß wir die Summe über μ und ν einfach weglassen. Den lästigen Vorfaktor werden wir los, indem wir

$$c = \frac{2}{g_0^2}$$

setzen. Unser Ergebnis lautet dann:

$$S_G \to \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = S_G^{(kont.)}$$

Wir können somit davon ausgehen, daß die von uns definierte Gitterwirkung auch Sinn macht.

3 Übergang zur QCD

Der Übergang von der allgemeinen Eichgruppe SU(N) zur QCD ist nun denkbar einfach: Wir setzen $N = 3$. Die Eichgruppe der QCD ist somit $SU(3)_C$, wobei das C für "colour" steht. Damit verbindet sich die Vorstellung, daß Quarks in den drei verschiedenen "Farbladungen" rot, grün und blau vorkommen; eine Eichtransformation stellt eine Transformation in diesem Farbraum dar. Das hat nichts mit den Flavours der Quarks, also up, down,... zu tun. Tatsächlich muß man, will man die Wirkung der QCD vollständig aufschreiben, über die Flavours summieren. Man kann allerdings eine näherungsweise Symmetrie in den Flavours, zwischen up- und down-Quarks aufgrund der fast gleichen Masse betrachten. Man erhielte dann die Eichgruppe SU(2), oder genauer $SU(2)_F$. Die Erhaltungsgröße ist der berühmte Isospin. Die Flavour-Symmetrie ist aber eine globale, keine Eichsymmetrie.

Die Gruppe SU(3) hat acht Generatoren, denen acht Sorten Gluonen entsprechen. Eine Darstellung dieser Generatoren sind die Gell-Mann-Matrizen λ^B, wobei B von 1 bis 8 läuft. Jedes beliebige Element der Lie-Algebra von SU(3), zum Beispiel das Eichfeld, läßt sich nach den Gell-Mann-Matrizen entwickeln:

$$A_\mu = \sum_{B=1}^{8} A_\mu^B(n) \frac{\lambda^B}{2}$$

Das hat Vorteile in konkreten Rechnungen, da die Gell-Mann-Matrizen ein paar bequeme Eigenschaften, zum Beispiel die Spur betreffend, erfüllen. Man sieht an dieser Darstellung jedenfalls, daß wir es mit einer 8-parametrigen Gruppe zu tun haben.

Leider schließen sich daran auch direkt Probleme an. In der Formel für das erzeugende Funktional hat man ja über die Plakettenvariable zu integrieren. Was soll es heißen, über eine Gruppenmannigfaltigkeit zu integrieren? Die Antwort liegt auf der Hand: Man integriert über den Parameterraum. Nennen wir die Parameter α_l^B (das ist der B-te Parameter der l-ten Plakette), dann lautet das Integrationsmaß allgemein:

$$DU = \prod_l \prod_{B=1}^{8} J(\{\alpha_l^B\}) d\alpha_l^B.$$

DU wird auch als Haarsches Maß bezeichnet. J ist die Jacobi-Determinante, die man noch zu finden hat. Es ist dies, mit einigem Aufwand, möglich, aber nicht sehr instruktiv. Sie hat die Eigenschaft, daß auch das Integrationsmaß, um das wir uns bisher nicht gekümmert haben, eichinvariant wird.

4 Kontinuumslimes und Renormierungsgruppe

Man kann sich nun die Frage stellen, ob durch das oben gezeigte Konvergenzverhalten der Wirkung und des Integrationsmaßes der Kontinuumslimes schon vollständig beschrieben wird. Leider ist dies nicht der Fall. Es ist absolut nicht offensichtlich, daß zum korrekten Übergang noch etwas anderes gehört, nämlich das Divergieren eine Korrelationslänge. Wieso ist das so?

Als Korrelationslänge bezeichnen wir die Länge auf dem Gitter, über die eine Änderung an einem bestimmten Gitterpunkt Wirkung auf andere Gitterpunkte hat. Nehmen wir einmal an, wir hätten eine bestimmte Länge auf dem Gitter, zum Beispiel den mittleren Abstand von Quark und Antiquark im Meson, berechnet, und betrachten nun den Grenzübergang $a \to 0$. Da sich nur a ändert, bleibt der Abstand zwischen Quark und Antiquark, gemessen in Einheiten des Gitterabstands, gleich. Der Gitterabstand verschwindet aber, also auch der Quark-Antiquark-Abstand, gemessen in jeder physikalischen Einheit! Soll der Abstand in physikalischen Einheiten konstant bleiben, muß für kleiner werdendes a die Zahl der Gitterabstände, über die die physikalischen Effekte reichen, größer werden, im Grenzfall divergieren. Das ist gemeint, wenn von einem Divergieren der Korrelationslänge gesprochen wird. Man könnte auch sagen: Durch das Divergieren der Korrelationslänge verliert das System beim Grenzübergang die Eigenschaften des Gitters. Das Divergieren einer Korrelationslänge kennt man auch aus einem anderen, wenn auch verwandten Gebiet: Dem der Phasenübergänge in der statistischen Physik. Die Verwandtschaft drückt sich über die formale Entsprechung

$$\text{erzeugendes Funktional} \leftrightarrow \text{Partitionsfunktion}$$

aus. Also entspricht eine physikalisch sinnvolle Quantenfeldtheorie einem statistischen System, das genau am kritischen Punkt vorliegt.
Ein einfacher Fall liegt vor, wenn die Theorie eine Masse enthält. Die Korrelationslänge zweier Pionen zum Beispiel verhält sich wie

$$\langle \pi(x)\pi(y) \rangle \sim e^{-am_\pi r},$$

wobei r hier in Einheiten des Gitterabstandes gemessen wird. Man kann daher die Korrelationslänge wie folgt definieren:

$$\xi = \frac{1}{am}.$$

Hier sei m die physikalische Masse der Theorie, also eine Konstante. Daß ξ im Kontinuumslimes divergiert, ist offensichtlich.
Anders sieht die Sache bei einer reinen Eichtheorie aus, die a priori keine Masse enthält. (Hat man erstmal eine Korrelationslänge gefunden, kann man allerdings über obige Gleichung eine Masse für die reine Eichtheorie definieren; im Fall der QCD trägt sie den Namen "Glueballmasse", da nur Gluonen und keine Fermionen eingehen.)
Wie kann man im Fall der reinen Eichtheorie die Korrelationslänge zum Divergieren bringen? Die einzige Größe, die man von außen verändern kann, ist die Kopplungskonstante g_0. Also muß ξ eine Funktion von g_0 sein! Wir nennen den Wert von g_0, für den ξ divergiert, g_0^*:

$$\xi(g_0) \to \infty \quad f. \quad g_0 \to g_0^*.$$

Was wir früher für einen beliebigen Parameter hielten, können wir also gar nicht frei wählen! g_0 muß an den Gitterabstand angepaßt werden, um zu einer vernünftigen Theorie zu führen!
Überlegen wir uns einmal, was beim Kontinuumslimes mit einer physikalisch sinnvollen Observablen passieren kann. Sie könnte zum Beispiel divergieren! Das ist natürlich unerwünscht. In einer sinnvollen Theorie muß jede Observable endlich bleiben, ja mehr noch: Sie sollte, wenn a hinreichend klein ist, von a unabhängig werden. Nennen wir die Observable $O(a, g_0)$, dann sollte die totale Ableitung von O nach a verschwinden. Schreiben wir das als Formel, und multiplizieren wir mit a, so erhalten wir die sog. Renormierungsgruppengleichung:

$$\left[a\frac{\partial}{\partial a} - \beta(g_0)\frac{\partial}{\partial g_0}\right] O(a, g_0) = 0,$$

wobei $\beta(g_0) = -a\frac{\partial g_0}{\partial a}$. Diese Funktion trägt den Namen "Callan-Symanzik-β-Funktion". Sie hängt nicht von der Observablen ab. Es sollte klar sein, daß unser Problem, wie die Kopplungskonstante an den Gitterabstand anzupassen ist, durch Kenntnis der β-Funktion gelöst wäre; denn dann erhielte man $g_0(a)$ durch Integration. In der Praxis geht man so vor: Man löst die Renormierungsgruppengleichung für irgendeine Observable Ordnung für Ordnung als Exponentialreihe in g_0, und erhält so auch $\beta(g_0)$ als Summe von Termen steigender Ordnung in g_0. Man erhält auf diese Weise:

$$\beta = -\beta_0 g_0^3 - \beta_1 g_0^5 + \ldots,$$

mit

$$\beta_0 = \frac{11}{3} N \frac{1}{16\pi^2}.$$

Im Fall der QCD ist natürlich $N = 3$. In erster Näherung gilt also:

$$a\frac{\partial g_0}{\partial a} = \beta_0 g_0^3.$$

Nun kann g_0 nicht negativ sein. Das kann man nicht direkt sehen; der Grund liegt darin: Wäre es tatsächlich negativ, so könnte man keinen Zustand niedrigster Energie, also kein Vakuum, für die Theorie finden! Ein Vakuum muß aber natürlich von jeder physikalisch sinnvollen Theorie beschrieben werden. a und β_0 sind auch positiv, somit also auch $\frac{\partial g_0}{\partial a}$. Unser erstes Ergebnis lautet daher: Wird der Gitterabstand kleiner, so auch die Kopplung des Feldes. Explizite Integration ergibt ein erstaunliches Ergebnis: Für $a \to 0$ geht auch g_0 gegen Null! Heißt das, daß Kopplung und reines Eichfeld beim Kontinuumslimes völlig verschwinden? Nicht unbedingt. Man entkommt diesem Schluß, wenn man annimmt, daß Effekte, die beliebig kleine räumliche Details, somit beliebig hohe Energien (die experimentell eh nicht zugängig sind) betreffen, eine andere Physik aufweisen als die QCD. Eine Theorie für beliebig hohe Energien müßte also tatsächlich modifiziert werden.

5 Literatur

- Quantum Fields on a Lattice, Montvay/Münster, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1994
- Lattice Gauge Theories, Rothe, World Scientific, 1992
- Lattice Gauge Theory - A Short Primer, Münster/Walzl, www.arxiv.org/hep-lat/0012005
- Introduction To Lattice QCD, Gupta, www.arxiv.org/hep-lat/9807028