Das von-Neumann-Theorem

Ein Verbot jeglicher Theorie versteckter Parameter !?

Inhalt

1. Die Idee verborgener Variablen
2. John von Neumann
    2.1 Lebenslauf
    2.2 Arbeitsgebiete
3. Das von-Neumann-Theorem
    3.1 Axiome
    3.2 Beweisannahmen
    3.3 Beweisschluss
    3.4 Reaktionen auf das Theorem
4. Gegenbeispiele und Kritik
    4.1 konkretes Spin-1/2-Modell
    4.2 einfacher Datensatz

1. Die Idee verborgener Variablen

- Quantentheorie: Zustand eines Systems wird durch einen Zustandsvektor Ψ beschrieben, der von einem Satz von Variablen abhängt
- Wahrscheinlichkeit für die Messung einer bestimmten Observablen ist meistens weder 0 noch 1

→ es gibt einen Satz möglicher Messergebnisse mit spezifischer Wahrscheinlichkeit

→ Messergebnisse nicht eindeutig determiniert

- Kopenhagener Deutung: Zustandsvektor ist genauest mögliche Beschreibung des Systems

→ in der Natur sind grundsätzlich nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich

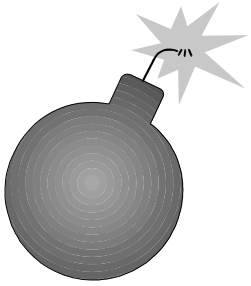
→ die Natur ist nicht-deterministisch

- Fragen:
  - Ist dies die korrekte Interpretation?
  - Gibt es genauere / vollständigere Beschreibung des Systems?
  - Ist ein deterministisches Ergebnis von Messungen möglich?
- Beispiel: Neutronenzerfall
  - ∅ Lebensdauer ≈ 1000 s
  - Einzelfälle: viel längere / kürzere Lebensdauer
- Quantentheorie (QT):
  - Zerfall = spontaner Vorgang
  - keine Erklärung der Ursachen
  - akausale Naturbeschreibung
  - Frage nach Ursachen wird als unwissenschaftlich betrachtet
- „Gegner“:
  - unvollständiges Wissen kann zu detaillierter Kenntnis der Ursachen ausgebaut werden

- QT: Erklärung der gemittelten Eigenschaften von Materie (wie klassische Thermodynamik)
- Systemeigenschaften, die individuelles Verhalten erklären bleiben unberücksichtigt
- Ursachen der Einzelresultate: verborgene Variablen
- Ziel: kausal vervollständigte QT

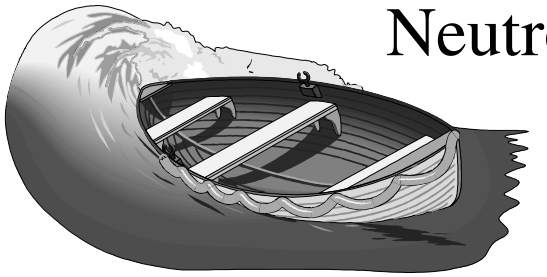
• 2 Arten (lokaler) VV: interne / externe

(1) Innere Struktur der Teilchen



Neutronen: gleichartige Bomben mit verschieden eingestellten Zeitzündern

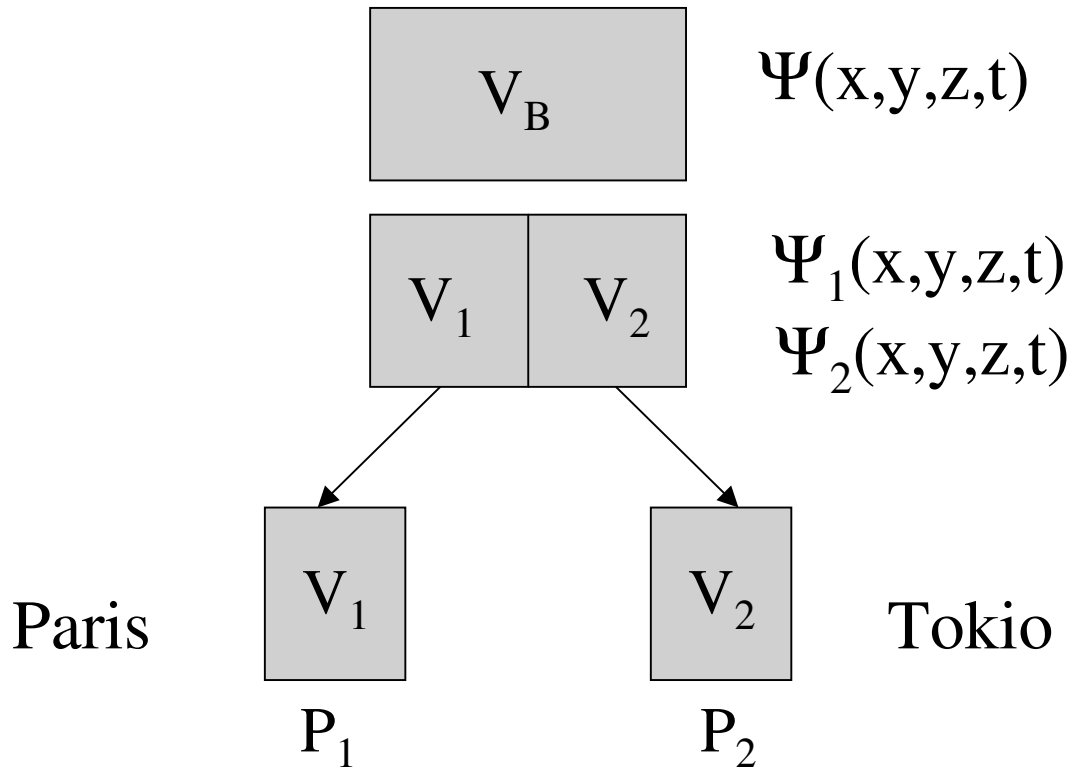
(2) Vakuumfluktuationen in kleinem Bereich um die Teilchen



Neutronen: identische, schlecht gebaute Boote auf hoher See, zerbrechen beim Auftreffen auf eine hohe Welle

- lokale Theorien: Verhalten des Systems zu bestimmten Zeitpunkt unabhängig von gleichzeitiger Existenz/ Verhalten von Materie/ Energie/ Vakuumschwankungen außerhalb einer kleinen Umgebung
- Nicht-lokale Theorien: erforderlich um alle QT-Vorhersagen zu reproduzieren (Korrelationseffekte)

de Broglie-Paradoxon

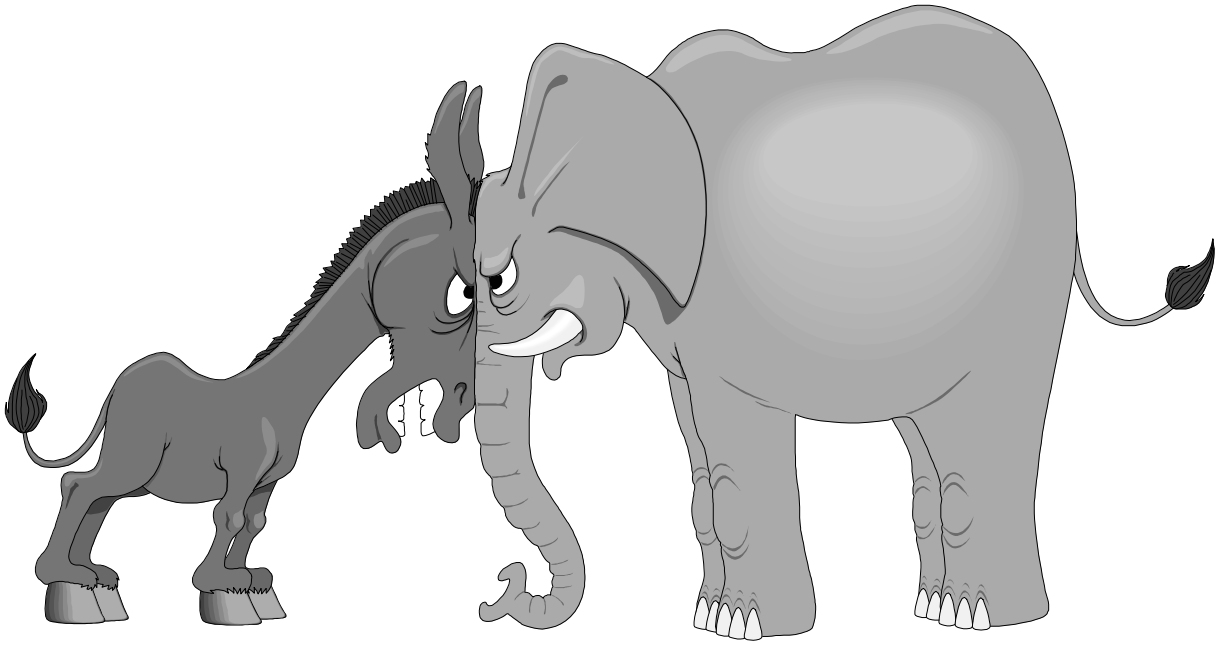


- aufgrund Vollständigkeit der QT ist es unmöglich zu sagen, ob Elektron in B_1 oder B_2
- einzig verträgliche Aussage: Elektron in B_1 und B_2
- Öffnung der Schachtel in Paris
  $\rightarrow$ Elektron ist zur Zeit t_0 in B_1
- zukünftige Messung in Tokio sicher vorhersagbar: $P_2 = 0$ für $t \geq t_0$
  $\rightarrow \Psi_2(x,y,z,t) = 0$ für $t \geq t_0$
  $\rightarrow$ Beobachtung in Paris ändert die Wellenfunktion. in Tokio
- Ergebnis: Annahme der tatsächlichen Existenz des Elektrons in Raum und Zeit führt bei allergeringsten Anforderungen (Tokio $\neq$ Paris) auf ein Paradoxon
- Erklärung 1:
  - das Elektron war bereits für $t < t_0$ in Paris
  - Ψ_1, Ψ_2 drücken nur unsere Kenntnis der Elektronenverteilung vor Beobachtung aus
  - verborgene Lokalisierungsvariable $\lambda = \pm 1$
  - Realistische Philosophie

- Erklärung 2:
  - Elektron existierte simultan in B_1 und B_2
  - Beobachtung lässt den „Anteil“ des Elektrons in B_2 plötzlich verschwinden
  - völlig sinnlos über Lokalisierung des unbeobachteten Teilchens zu sprechen
  - Positivistische Philosophie
- Resümee: Paradoxon existiert nur für diejenigen, die auf realistischer (objektive Existenz des Elektrons) und rationaler Philosophie bestehen (objektive Raum-Zeit existiert)
- de Broglie 1953: „ Die Frage ist, ob die heute akzeptierte Interpretation unvollständig ist und eine vollständig deterministische Realität verbirgt, die in Raum und Zeit durch verborgene Variable beschrieben werden kann.“
- heute: Unvollständigkeit der QT akzeptabel

→ Warum sollte menschl. Theorie physikal. Objekt in jedem Detail beschreiben?

Verborgene Variablen



PRO	**CONTRA**
Bell	Bohr
Bohm	Born
Planck	Pauli
Einstein	Jordan
de Broglie	Heisenberg
Schrödinger	**von Neumann**

2.1 Lebenslauf

* 1903 † 1957

- in Budapest geboren
- Chemie-Studium in Berlin und Zürich
- Mathematik-Studium in Budapest

1923 Veröffentlichung seiner Definition der Ordinalzahlen

1926 Diplom in Chemie

1926 Doktor in Mathematik
(Dissertation über Mengenlehre)

1926-1930 Privatdozent in Berlin und Hamburg

1928 Minimax-Theorem (Spieltheorie)

1931 Professur in Princeton

1932 präzise Formulierung und Beweis der Ergodenhypothese

1932 Publikation: „Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik“
(→ von Neumann-Theorem)

1933 Professur am neugegründeten Instititute for Advanced Study

- löst speziellen Fall von Hilberts 5. Problem (kompakte Gruppen)

ab 1935 Publikationen mit F.J. Murray über Operatorringe → von Neumann-Algebren

1937 amerikanische Staatsbürgerschaft

2.Weltkrieg Berater am Atombomben-Projekt in Los Alamos

- Beteiligung an Entwicklung der Wasserstoffbombe

1944 mit Oskar Morgenstern: „Theory of Games and Economic Behavior“

1952 entwirft MANIAC I, erster Computer mit flexiblem Speicherprogramm

1955 wird Mitglied der US Atomic Energy Commission

2.2 Arbeitsgebiete

- 20 von 150 Publikationen in Physik
- Reine Mathematik
  - Mengenlehre
  - Logik
  - Topologische Gruppen
  - Maßtheorie
  - Ergodentheorie
  - Operatortheorie
  - Kontinuierliche Geometrie
- Angewandte Mathematik
  - Statistik
  - Numerische Analyse
  - Schockwellen
  - Dynamische Systeme
  - Hydrodynamik
  - Aerodynamik
  - Ballistik
  - Detonationsprobleme
  - Meteorologie
  - Spieltheorie
  - Computer

  } nicht-klassische Probleme

3. Das von-Neumann-Theorem

- Erfolgsrezept: axiomatische Methode:

  „Er erfasste die Wurzel eines Problems durch Konzentration auf wenige grundlegende Eigenschaften, aus denen alles weitere folgt.“

Einfacher Beweis des Theorems am Beispiel des Spin-1/2-Teilchens

- Menge aller Spin-Observablen für betrachtete Teilchen sei {R,S,T,...}
- Observablen können durch hermitesche (2x2)-Matrizen dargestellt werden:

  $R = \alpha \mathbf{1} + \sigma \cdot \beta$
- Ergebnisse einer Messung von R,S,T,... seien durch Werte verborgener Variablen $\{\lambda,\mu,\nu,...\}$bestimmt
- Präparation: Teilchenmenge für die alle VV feste Werte haben $\{\lambda_0,\mu_0,\nu_0,...\}$

$\rightarrow$alle Observablen haben wohldefinierte Messwerte $\{r_0, s_0, t_0,...\}$

- Für N Messungen gilt:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i = r(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) = r_0$$

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} r_i^2 = r^2(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) = r_0^2$$

- Mittlere quadratische Abweichung ΔR verschwindet: $\Delta R = \sqrt{\langle R^2 \rangle - \langle R \rangle^2} = 0$
- R,S,T,... sind dispersionsfrei

→gesamtes Ensemble ist dispersionsfrei

- falls Observablen R, S nicht vertauschen, sind keine Instrumente zur gleichzeitigen Messungen konstruierbar

→Messung an Teilsystemen durchführen

→gegebenes Ensemble stets als Summe dispersionsfreier Ensembles denkbar

→Ergebnisse der QT (z.B. $\Delta R \cdot \Delta S \geq \hbar$) gelten für ganzes Ensemble, nicht für dispersionsfreie Teile

⇒Existenz VV zieht notwendig Existenz dispersionsfreier Ensembles nach sich

3.1 Axiome

- Von-Neumann-Theorem widerlegt Existenz derartiger Ensembles

Axiom 1: Es gibt eine eindeutige Zuordnung zwischen Spin-Observablen und hermiteschen (2x2)-Matrizen

Axiom 2: Wenn die Observable R der Matrix R entspricht, dann entspricht die Observable f(R) der Matrix f(R)

Axiom 3: Sind R und S beliebige Observablen und a,b reelle Zahlen, dann gilt die folgende Linearität der Mittelwerte: $\langle aR+bS\rangle = a\langle R\rangle + b\langle S\rangle$

- Axiom 1 impliziert: Messwert r_i der Observablen R kann sich nicht von den Eigenwerten der zugeordneten Matrix R unterscheiden
- Axiom 2 wird im Beweis nicht benutzt

3.2 Beweisannahmen

- Gegeben sei verborgene Variable λ
- λ determiniert Ergebnisse aller möglichen Spin-Beobachtungen
- dispersionsfreies Ensemble mit $\lambda = \lambda_0$
- 3 beliebige Observablen R,S,T mit zugeordneten (2x2)-Matrizen
- Messung:

  $R \rightarrow r(\lambda_0) = r_0$ fest, Eigenwert von R

  $S \rightarrow s(\lambda_0) = s_0$ fest, Eigenwert von S

  $T \rightarrow t(\lambda_0) = t_0$ fest, Eigenwert von T
- Speziell: $R = \sigma_1$, $S = \sigma_2$, $T = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathbf{n} = (1,1,0) \qquad |\mathbf{n}| = \sqrt{2}$$

- Es gilt: T = R+S
- Ensemble-Mittelwerte: (da stets gleiche Ergebnisse) $\langle R \rangle = r_0 \quad \langle S \rangle = s_0 \quad \langle T \rangle = t_0$

3.3 Beweisschluß

- Nach Axiom 3: $\langle T \rangle = \langle R + S \rangle = \langle R \rangle + \langle S \rangle$
- also: $t_0 = r_0 + s_0$
- Eigenwerte von σ_1, σ_2: ± 1
- Eigenwert von $T = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}$: $\pm\sqrt{2}$
- Es gilt <u>nie</u>: $\pm\sqrt{2} = \pm 1 \pm 1$

$\Rightarrow$ Existenz dispersionsfreier Ensembles führt zu Widerspruch

(falls Axiome gültig)

$\Rightarrow$ **Vervollständigung der QT durch verborgene Variable unmöglich**

- Einstein 1935: „Der Gedanke, daß ein einem Strahl ausgesetztes Elektron aus freiem Entschluß den Augenblick und die Richtung wählt, in der es fortspringen will, ist mir unerträglich. Wenn schon möchte ich lieber Schuster oder gar Angestellter in einer Spielbank sein als Physiker.“

3.4 Reaktionen auf das Theorem

- kausale Ergänzung unmöglich, falls einige wenige Annahmen über mathematische Struktur der QT erfüllt
- Bohr: bewundert mathematische Strenge, kommt auf elementare Weise im Wesentlichen zur gleichen Schlussfolgerung
- Born: Formalismus der QT ist durch die Axiome eindeutig festgelegt, er sieht keine Möglichkeit der Einführung einer deterministischen Theorie
- zahlreiche Anwendungen und triumphale Erfolge der QT sind bereits bekannt
- vorbehaltlose Anerkennung des Theorems schließt jede wissenschaftliche Debatte für Jahre aus
- jede Opposition ist praktisch eliminiert
- Einstein ist mit seiner Ablehnung der Akausalität in Princeton recht isoliert

4.1 konkretes Spin-1/2-Modell

- oberflächliche Betrachtung der Axiome: selbstverständlich, harmlos:
  - A1: falls falsch, müßte sich neue Theorie grundlegend von QT unterscheiden
  - A2: beim einfachen Beweis ungenutzt
  - A3: postuliert lineare Eigenschaften der Mittelwerte
    - innerhalb der QT gültig
    - anscheinend auch in KLM gültig

      E = T + V $\quad \rightarrow \quad \langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$
    - versagt bei anderen klass. Messungen
- einfaches Modell der Spin-1/2-Teilchen:
  - nur teilweise realistisch (Welle-Teilchen-Dualismus nicht betrachtet)
  - gibt QT-Vorhersagen perfekt wieder

- Eigenschaften: 3 Hypothesen:
  - Teilchen → rotierende Kugeln,
    - Bewegung in y-Richtung
    - Spin λ in x-z-Ebene $\perp$ Bewegung
  - Ensemble von Kugeln, statistische Verteilung von λ durch Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\theta)$:
    - $\theta = \angle(\lambda, \mathbf{z})$

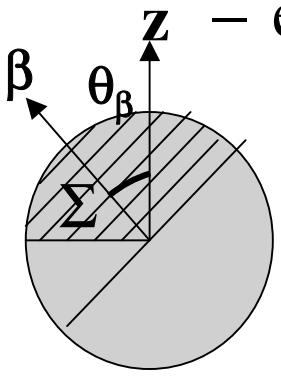
$$\rho(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\theta & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le \theta \le +\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

    → Wahrscheinlichkeitseigenschaften des (1,0)-Zustands
  - Meßinstrument der Observablen

    $R = \alpha\mathbf{1} + \sigma \cdot \beta$
    - Bestimmung des Vorzeichens der Projektion von λ auf β

- Multiplikation mit $|\beta|$
- Addition von α

- Meßergebnisse stets $\alpha \pm |\beta|$ √
- σ_3-Messung: $\alpha = 0$, $\beta = (0,0,1)$
  - Projektion von λ auf β nie negativ
  - Meßergebnis immer +1
  - (1,0) EZ von σ_3 zum EW +1 √
- $\rho(\theta)$ positiv semi-definit, auf 1 normiert
- W.keiten $p_1(\alpha+|\beta|)$, $p_2(\alpha-|\beta|)$?
  - entsprechen W.keiten für $\lambda \cdot \beta = \pm 1$



$$p_1 = \int_{\Sigma} \frac{1}{2}\cos\theta \; d\theta = \frac{1+\cos\theta_\beta}{2} \qquad p_1 = \frac{1}{2}\left[1+\frac{\beta_3}{|\beta|}\right]$$

$$p_1 = \frac{1-\cos\theta_\beta}{2} \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left[1-\frac{\beta_3}{|\beta|}\right]$$

  - da $\cos\theta_b = \frac{\hat{z}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|} = \frac{\beta_3}{|\vec{\beta}|}$ Übereinstimmung √

$\Rightarrow$ Meßergebnisse, Wahrscheinlichkeiten in voller Übereinstimmung mit QT

Diskussion des Axiom 3

- dispersionsfreies Ensemble: festes λ_0
- λ_0: auf Winkelhalbierende y-z-Ebene
- Messung von σ_2, σ_3 und $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}$ mit $\mathbf{m}$=(0,1,1) an Teilsystemen
- es gilt: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} = \sigma_2 + \sigma_3$
- λ_0 bildet spitzen Winkel mit **y**, **z**, **m**

$\Rightarrow \alpha + |\beta|$ Ergebnis bei allen 3 Messungen

$\Rightarrow$

$$\sigma_2 \to +1 \qquad \langle \sigma_2 \rangle = +1$$

$$\sigma_3 \to +1 \qquad \langle \sigma_3 \rangle = +1$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m} \to +\sqrt{2} \qquad \langle \sigma \cdot m \rangle = +\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \langle \sigma \cdot m \rangle \neq \langle \sigma_2 \rangle + \langle \sigma_3 \rangle$

$\Rightarrow$ Axiom 3 ist fürs Ensemble <u>nicht</u> erfüllt

$\Rightarrow$ Widerspruch zum Theorem

(alle QT- Vorhersagen erfüllt, aber Axiom 3 nicht)

4.2 einfacher Datensatz

- QT: Einzelresultat nicht determiniert, aber eindeutiger Erwartungswert wird vorhergesagt:
  - Messung von R am System im Zustand $\Psi \rightarrow$ Erwartungswert $\langle \Psi | R | \Psi \rangle$
  - Erwartungswerte sind additiv:

$$\langle \Psi | R + S | \Psi \rangle = \langle \Psi | R | \Psi \rangle + \langle \Psi | S | \Psi \rangle \quad (1)$$

  - i.a. stört die Messung von R+S die Messung von R und S

  $\rightarrow$ Messung an Teilsystemen

  $\rightarrow$ Mittel der Messwerte erfüllen (1)
- VV: es gibt zusätzliche Parameter
  - Zustandsvektor Ψ und „verborgener Vektor“ H legen Ergebnis einer R-Messung eindeutig fest

  $\rightarrow$ Varianz der Einzelmessungen ist Null

- von Neumann (Axiom3): Für alle VV sind die Mittel von R+S, R, S im Ensemble identischer Systeme additiv: (2)

$$\langle \Psi H \,|\, R+S \,|\, \Psi H \rangle = \langle \Psi H \,|\, R \,|\, \Psi H \rangle + \langle \Psi H \,|\, S \,|\, \Psi H \rangle$$

- Problem: Was heißt identische Systeme?
  - QT: gleicher Zustandsvektor
  - VV: gleicher Zustandsvektor ≠ identisch
- VV muß (1) erfüllen, da experimentell bewiesen, aber auch (2)?
  - (1) $\Rightarrow$ Mittel von $\langle \Psi H \,|\, R \,|\, \Psi H \rangle$ über alle H müssen additiv sein
- Es gelte für ein Ensemble:

System	ψ	H	R	S	R+S
1	3	1	2	5	5
2	3	2	4	3	9
3	3	1	2	5	5
4	3	2	4	3	9

- Mittel über ununterscheidbare Systeme:

$\langle 3 | R | 3 \rangle = 3 \quad \langle 3 | S | 3 \rangle = 4 \quad \langle 3 | R + S | 3 \rangle = 7$

- identische Systeme (gleiches Ψ und H):

$$\langle 3,1 | R + S | 3,1 \rangle = 5 \neq 2 + 5$$

$$\langle 3,2 | R + S | 3,2 \rangle = 9 \neq 4 + 3$$

$\Rightarrow$ **aus (1) folgt nicht notwendig auch (2)**

- weiteres Argument:

  falls VV gültig, ist Varianz aller Messungen um Erwartungswerte Null

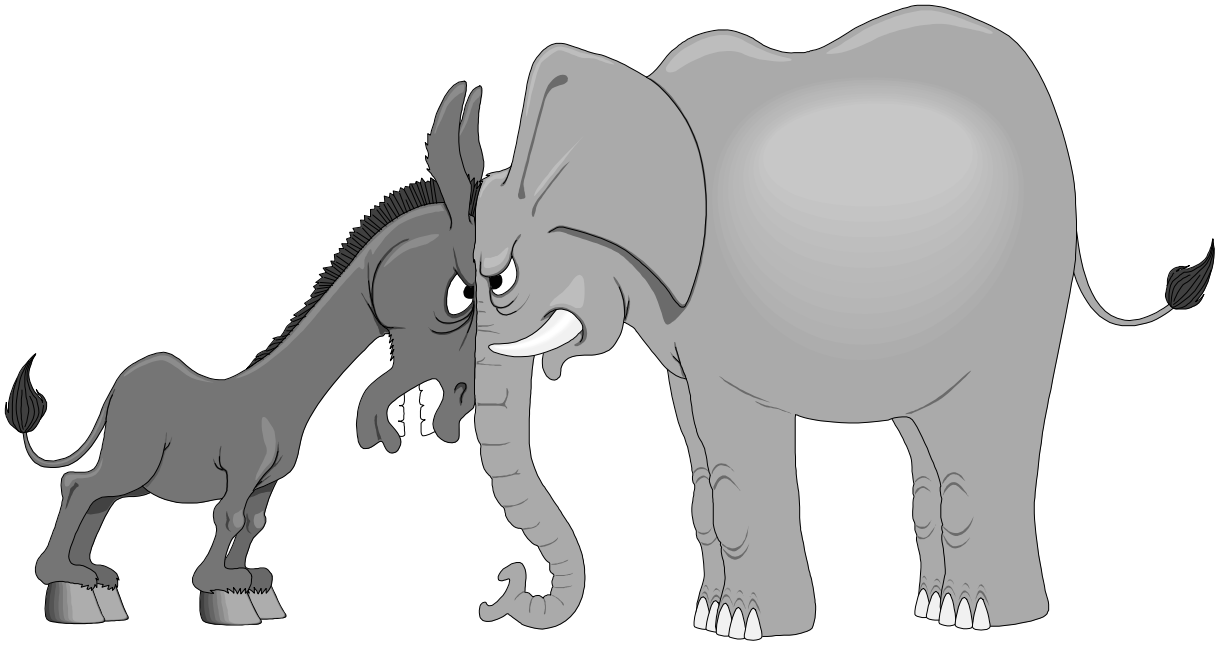
$\rightarrow$ Terme in (2) nicht nur Erwartungswerte sondern eindeutige Messergebnisse

$\rightarrow$ Eigenwerte der zugehörigen Operatoren

aber: i.a. sind die Erwartungswerte dieser Operatoren ungleich allen Eigenwerten!

$\rightarrow$ Bell: „Von Neumann‘s sehr allgemeines und plausibles Postulat ist absurd!“

Verborgene Variablen



Abstimmumgsergebnis:

PRO	CONTRA
6 Seminar-Teilnehmer	10 Seminar-Teilnehmer

1 Enthaltung