Bellsche Ungleichungen - Seminarvortrag 2001

Tobias Pfingsten

16. Dezember 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

Im bekannten EPR-Gedankenexperiment wurde deutlich gemacht, daß die Axiome der Quantenmechanik zu interpretatorischen Problemen führen. Als Beispiel soll ein verschränkter Zustand von zwei Spin Teilchen $\frac{1}{2}$ dienen.

Wir wollen davon ausgehen, daß sich die besagten identischen Teilchen (z.B. Elektronen) im Singulett-Zustand befinden und sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Wird die Polarisation eines Teilchens gemessen, zerfällt laut Quantenmechanik instantan die Wellenfunktion und das zweite Teilchen wird ohne lokale Interaktion mit einem Meßgerät gemessen. Seine Polarisation ist bekannt, jedenfalls wenn man diese das erste Meßergebnis zum zweiten Teilchen übermittelt.

Die Frage ist nun, ob diese Vorhersage der Quantenmechanik richtig ist und falls das so ist, ob das unserem Bild von der Natur widerspricht.

2 Unser Bild von der Natur

In der Physik werden einige Annahmen über die Natur gemacht, die hier auf dem Prüfstein zu stehen scheinen.

Realistisches, lokales Naturbild

1. Realität:
   Erscheinungen werden durch physikalische Realitäten verursacht

2. Induktiver Schluß:
   Endlich oft wiederholte Messungen lassen auf allgemeine Gesetze schließen.
   In allen Experimenten werten wir Daten statistisch aus und schließen auf allgemeine Gesetze.

3. Lokalität:
   Räumlich getrennte Objekte wechselwirken nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit

Wir werden das EPR Paradoxon und die Beschreibung über Quantenmechanik und Theorie versteckter Parameter auf diese Axiome unseres Weltbildes hin überprüfen. Es soll hier nicht darum gehen, diese Axiome zu diskutieren, sie seien im folgenden als akzeptiert angenommen.

3 Das Experiment

Es sollen die Polarisationen der Teilchen A und B gemessen werden, die Polarisatoren seien in zwei Richtungen (1 und 2) unabhängig voneinander einstellbar.
Ich nenne diese Richtungen α_1, α_2 bzw $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}$.

4 Quantenmechanische Vorhersage

Der Meßvorgang nimmt eine wichtige Stellung in der Quantenmechanik ein. Wir wollen hier aber nicht den Meßvorgang selber diskutieren, sondern die Resultate der Postulate betrachten.
Der quantenmechanische Zustand des Singulett-Paares wird beschrieben durch den Zustandsvektor

$$\langle\psi\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\langle\uparrow\uparrow| - \langle\downarrow\downarrow|\Big]$$

oder, in Darstellung mit Hilfe der Dichtematrix, als

$$W = |\,\psi\rangle\langle\psi\,| = \frac{1}{2}\Big[\;|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| - |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| - |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|\;\Big]$$

4.1 Messung an B ohne vorherige Messung an A

Lassen wir das zweite Teilchen am Ort A unberücksichtigt, so lautet die Dichtematrix für das Teilchen B:

$$W_B = \mathrm{Tr}_A W = \frac{1}{2}\Big[\;|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\;\Big].$$

Das Teilchen ist also in einem gemischten Zustand, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für Spin up oder Spin down. Ein Beobachter wird bei einer Messung in z-Achse mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ das Ergebnis up oder down erhalten. Die Messung bei Polarisatorstellung β ergibt $\pm\beta$.

4.2 Messung an B mit vorheriger Messung an A

Messen wir nun vor der Messung an B die Polarisation von A in z-Richtung, so erhalten wir analog zu 4.1 je mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Spin up oder Spin down.
Die Messung entspricht laut Meßaxiom einer Projektion in den Eigenraum des Meßergebnisses. Wir erhalten also

$$\begin{array}{ll} \text{Ergebnis } \langle\uparrow|_A : & \langle\psi\,|_\uparrow = \langle\uparrow\downarrow| \\ \text{Ergebnis } \langle\downarrow|_A : & \langle\psi\,|_\downarrow = \langle\downarrow\uparrow|. \end{array}$$

Es scheint nun also so, als werde die Information 'Messung an A vorgenommen' instantan an B weitergegeben. Das ist aber falsch. Die korrekte Dichtematrix des Teilchens B für den Zustand nach der Messung ist wieder

$$W_B = \frac{1}{2}\Big[\;|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|\;\Big],$$

weil wir am Ort B das Meßergebnis der Messung in A nicht kennen. Beide Ergebnisse kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor. Ein anderer Zustand für B ginge von von mehr Information aus, als wir wirklich in B haben.
Erst bei Vergleich der Messergebnisse an beiden Orten, also *nach* Austausch der Meßergebnisse, können wir Aussagen über die Korrelation der Ergebnisse machen. Beide Spins stehen immer senkrecht aufeinander.
Es ist also wichtig festzuhalten, daß trotz Zerfalls der Wellenfunktion keine Information ausgetauscht wird. Da es prinzipiell unmöglich ist einen Unterschied im Zustand des Teilchens B vor und nach der Messung in A festzustellen, ist auch das Realitätsaxiom nicht verletzt. Da kein Ereignis stattgefunden hat, müssen wir auch nicht nach einer Ursache suchen.

4.3 Die Korrelationsfunktion

Die Bellschen Ungleichungen vergleichen die Aussagen der Quantenmechanik über eine Korrelationsfunktion. Wir haben eben gesehen, daß die Quantenmechanik nur über die Korrelation der Teilchen Aussagen macht.

Es sollen an beiden Orten je zwei Polarisatorstellungen zugelassen sein, zwischen denen wir hin und her schalten wollen. Das Ergebnis einer Messung kann ± 1 betragen. Die Stellungen der Polarisatoren seien mit $\alpha_\mathbf{1}, \alpha_\mathbf{2}$ und $\beta_\mathbf{1}, \beta_\mathbf{2}$ bezeichnet. Die Vektoren seien normiert und sollen senkrecht zur Flugbahn der Teilchen stehen. Außerdem seien sie wie folgt festgelegt:

$\sphericalangle(\alpha_1, \beta_1)$	45^o
$\sphericalangle(\alpha_2, \beta_2)$	45^o
$\sphericalangle(\alpha_1, \beta_2)$	135^o

Die Ergebnisse der Messungen nenne ich a_i bzw b_i. Sie können die Werte ± 1 annehmen wenn der Polarisator in i-Richtung steht, sonst seien sie Null.

Nun definiere ich eine Korrelationsfunktion und vergleiche die Voraussagen von QM und einer Theorie versteckter Parameter über ihr Mittel.

Korrelationsfunktion K
$K := (a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2$

4.4 Vorhersage der Quantenmechanik über die Korrelation der Teilchen

Um das Mittel der Korrelationsfunktion mit Hilfe der Quantenmechanik zu berechnen muß ich den Erwartungswert einer Messung erst an Teilchen A und B berechnen. Die Messung entspricht der Anwendung des Operators

$$M := \alpha\sigma_\mathbf{A} \cdot \beta\sigma_\mathbf{B}.$$

Der Erwartungswert ist

$$\langle M \rangle = \langle \psi \mid M \mid \psi \rangle = -2\alpha\beta.$$

Damit können wir das statistische Mittel der Korrelationsfunktion bestimmen:

$$|\overline{K}_{QM}| = |\langle \alpha_\mathbf{1}\beta_\mathbf{1} \rangle_{\mathrm{QM}} + \langle \alpha_\mathbf{2}\beta_\mathbf{1} \rangle_{\mathrm{QM}} + \langle \alpha_\mathbf{2}\beta_\mathbf{2} \rangle_{\mathrm{QM}} - \langle \alpha_\mathbf{1}\beta_\mathbf{2} \rangle_{\mathrm{QM}}| = 2\sqrt{2}$$

5 Lokale Theorie versteckter Parameter

5.1 Ausschluß einer nichtlikalen Theorie

Es ist durchaus angemessen davon auszugehen, daß die Quantenmechanik in ihrem Postulat des undeterminierten Meßresultats eine statistische Aussage macht. Wir nehmen daher hier an, daß ein Meßresultat immer determiniert sei, der Quantenzustand also ein statistisches Ensemble darstellt. Der versteckte Parameter sei hier λ genannt. Allgemein kommen wir mit einem Parameter $\lambda \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ aus.

Da die Quantenmechanik gut überprüft ist, sollten wir allerdings diese Theorie nicht ganz verwerfen, sondern als statistische Theorie verwenden. Damit sollten wir davon ausgehen, daß die Meßergebnisse zwar Funktionen von λ und den Polarisatorstellungen sind, allerdings wie in der QM nur die Ergebnisse ± 1 liefern:

$$a = a(\alpha, \beta, \lambda) = \pm 1, \ \mathrm{b} = \mathrm{b}(\alpha, \beta, \lambda) = \pm 1.$$

Gehen wir weiter davon aus, daß der Parameter λ zwar für uns versteckt bleibt, aber grundsätzlich gemessen werden kann, so kommen wir mit obigem Anzatz mit unserem Naturbild in Konflikt. Den Parameter für generell unmessbar zu erklären halte ich für unsinnig, da wir dann diesen Parameter nicht benutzen sollten. Ist also der Meßwert abhängig von Parameter und beiden Polarisatorstellungen, so müssen wir erwarten, daß wir die Relation für den zuletzt gemessenen Meßwert b umstellen können:

$$b = b(\alpha, \beta, \lambda) \ \rightarrow \ \alpha = (\mathrm{b}, \beta, \lambda).$$

Alle Größen in der Klammer wären meßbar, so daß man in der Lage sein würden über verschiedene Polarisatorstellungen bei A instantan Information nach B zu übertragen. Das widerspricht dem Axiom der Lokalität. Will man das nicht verwerfen, sollten man ansetzen

$$a = a(\alpha, \lambda), \ \mathrm{b} = \mathrm{b}(\beta, \lambda).$$

Mit dieser sehr allgemeinen Theorie lokaler versteckter Parameter wollen wir nun Voraussagen über das Mittel der Korrelationsfunktion machen.

5.2 Vorhersage der lokalen Theorie versteckter Parameter über die Korrelation der Teilchen

Da alle Meßergebnisse die Werte ± 1 annehmen, gilt

$$K_{lTvP} = (a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2 = \pm 2.$$

Das Mittel bilden wir als Ensemblemittel mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der versteckten Parameter.

$$\begin{aligned} |\overline{K_{lTvP}}| &= |\int d^n\lambda \ P(\lambda) K(\lambda)| \\ &\leqq \int d^n\lambda \ P(\lambda) |K(\lambda)| \\ &= 2 \int d^n\lambda \ P(\lambda) \\ &= 2 \end{aligned}$$

6 Vergleich der Vorhersagen mit realen Experimenten

Obwohl mögliche versteckte Parameter unseren Messungen nicht zugänglich sind, können wir über die Korrelationsfunktion Quantenmechanik und eine Theorie lokaler versteckter Parameter vergleichen. Das ist die Leistung der Bellschen Ungleichung, wie die hergeleitete Ungleichung nach ihrem Entwickler genannt wird:

Bellsche Ungleichung
$$|\overline{K}_{QM}| = 2\sqrt{2} \ < \ 2 \geqq |\overline{K_{lTvP}}|$$

Durchgeführte Experimente bestätigten mehrheitlich die Vorhersage der QM mit einer statistischen Aussagekraft von bis zu 60 Standartabweichungen. Glauben wir an das zweite Axiom, so sollten wir die Theorie *lokaler* Parameter verwerfen.
Es gibt allerdings zwei strittige Punkte in der Bewertung der Experimente.

7 Schlupflöcher in den Experimenten

Experimente wurden bis heute mehrheitlich an Photonen durchgeführt. Detektoren für Photonen zeichnen sich durch sehr schlechte Ausbeuten aus. Man kann nun annehmen, daß eine nicht repräsentative Gruppe von Photonen (mit bestimmten versteckten Parametern) bevorzugt gemessen wird und so das Ergebnis verfälscht. Neue Experimente an Atomen sollen dieses Problem lösen.

In der Argumentation wurde eine nichtlokale Theorie versteckter Parameter aufgrund der Verletzung des Lokalitätsaxioms ausgeschlossen. Solange man nicht beide Messungen sehr weit voneinander entfernt und mit zufällig wechselnden Polarisatorstellungen vornimmt, kann man sich vorstellen, daß Informationsübertragung zwischen den Meßorten möglich wird, wir also eine nichtlokale Theorie in Betracht ziehen müssen. Neue Experimente scheinen dieser Voraussetzung Genüge zu tun und bestätigen die Quantenmechanik.