Das Standardmodell der Kosmologie
Die Friedmann-Gleichung

Bastian Brandt[1]

[1]bastianbrandt@uni-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Standardmodell der Kosmologie beschreibt ein Universum dessen Dynamik durch die Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben wird. Das Universum wird als homogen und isotrop auf großen Längenskalen angenommen und in ihm darf keine Raumrichtung vor der anderen ausgezeichnet sein.
Möchte man solch einen Raum mit der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben so wird eine Metrik für den Raum benötigt die die geforderten Eigenschaften besitzt. Im Falle des Standardmodells des Kosmologie wird die Robertson-Walker-Metrik benutzt bei der es sich um die Metrik handelt die für einen homogenen isotropen Raum das maximale Maß an Symmetrie besitzt.
Da man davon ausgehen kann das im Universum ein Höchstmaß an Symmetrie herrscht, ist es dementsprechend sinnvoll diese Metrik zu benutzen.

Bei der Robertson-Walker-Metrik wird die Längenskala des Raumes durch den sogenannten kosmischen Skalenfaktor $R(t)$ bestimmt. Hat man eine Gleichung die die zeitliche Entwicklung dieses Skalenfaktors beschreibt, so hat man dementsprechend die Entwicklung des Universums nach dem Standardmodell der Kosmologie bestimmt.
Eine Gleichung für diesen kosmischen Skalenfaktor erhält man aus der Einstein-Gleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie wenn man bestimmte Annahmen für den Energie-Impuls-Tensor des Universums macht und die Robertson-Walker-Metrik als Metrik des Raumes benutzt.

2 Einstein-Gleichung und Robertson-Walker-Metrik

Die Grundlage für jede Dynamik eines Raumes in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Einsteinsche Feldgleichung. Eine kurze Herleitung dieser Gleichung lässt sich über ein Variationsprinzip durchführen.

2.1 Das Hilbertsche Variationsprinzip

Viele fundamentale Gleichungen lassen sich aus einem Variationsprinzip herleiten. Diese Möglichkeit besteht auch bei der Einsteinschen Feldgleichung.
Das Variationsprinzip für die Einsteinsche Feldgleichung geht auf Hilbert zurück der 1915 ebenso nah an der Entdeckung der Feldgleichung für die Allgemeine Relativitätstheorie stand wie Einstein. Tatsächlich stellte er sein Variationsprinzip zu einem Zeitpunkt auf, bei dem die Einsteinsche Feldgleichung noch gar nicht bekannt war. Lediglich die Lösung des Variationsproblemes war als Einstein die Feldgleichungen entdeckte noch nicht bekannt.

Die Variation beim Hilbertschen Variationsprinzip erfolgt über die metrischen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ und die Wirkung wird gegeben über:

$$S = \int \left[-R + \frac{8\pi G}{c^2} \cdot L(g^{\mu\nu}, \partial_\lambda g^{\mu\nu}) \right] \cdot \sqrt{-g} \cdot d^4x \tag{1}$$

Die Integration erfolgt über die Volumeninvariante der Allgemeinen Relativitätstheorie $\sqrt{-g} \cdot d^4x$. Es wird also im Prinzip über die gesamte Raumzeit Integriert.
Die Lagrange-Dichte in der Gleichung besteht zum einen aus dem Gravitations-Anteil $-R$ für den der einfachste mögliche Ansatz mit dem Krümmungsskalar, der auch Ricci-Skalar genannt wird, gemacht wurde. Zum anderen tritt der Materie Anteil über die Funktion L auf. Der Term $\frac{8\pi G}{c^2}$ ist eine Kopplungskonstante.

2.2 Die Einstein-Gleichung

Nun wird aus diesem Variationsprinzip die Einsteinsche-Feldgleichung hergeleitet.

Da die Variation über einen festen Rand erfolgt verschwinden alle Oberflächenintegrale, zudem lässt sich die Variation direkt über die Lagrange-Dichte durchführen. Die Variationsbedingung lautet $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$.

Zunächst wird nun die Variation über den **Gravitations-Anteil** betrachtet, also der Term:

$$\int \delta \left(-R \cdot \sqrt{-g}\right) \cdot d^4x \tag{2}$$

Bei diesem Term sind nun g und R von den $g_{\mu\nu}$ abhängig. Es ergibt sich somit:

$$\delta \left(R \cdot \sqrt{-g}\right) = \sqrt{-g} \cdot \left(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right) + R \cdot \delta\sqrt{-g}$$

Der Term mit $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ lässt sich mit einigen Identitäten aus der Allgemeinen Relativitätstheorie in ein Oberflächenintegral umwandeln und fällt somit aus der Variation raus. Zudem ergibt sich:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

Für den Gravitationsanteil ergibt sich somit:

$$\int \delta \left(-R \cdot \sqrt{-g}\right) \cdot d^4x = \int \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \cdot \delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g} \cdot d^4x \tag{3}$$

Nun gilt es noch den Ausdruck für den **Materie-Anteil** umzuformen. Betrachtet wird der Ausdruck:

$$\frac{8\pi G}{c^2} \int \delta \left(L \cdot \sqrt{-g}\right) \cdot d^4x \tag{4}$$

Die Umformung dieses Ausdrucks ist recht schwierig und es tauchen mehrere Terme auf die sich in Volumenintegrale umwandeln lassen und somit aus der Variation rausfallen. Als einziger letzter relevanter Term ergibt sich:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\cdot L\right) = \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot L\right)}{\delta g_{\mu\nu}}\cdot\delta g_{\mu\nu} \tag{5}$$

Für die Variation insgesamt ergibt sich also:

$$\int\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{8\pi G}{c^2\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot L\right)}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\cdot\delta g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot d^4x = 0 \tag{6}$$

Die Variation erfolgt über die $\delta g_{\mu\nu}$ die bei der Variation beliebig sind. Dementsprechend muss der Integrand in der Klammer verschwinden. Aus der Variation ergibt sich somit die Gleichung:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{8\pi G}{c^2\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot L\right)}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \tag{7}$$

Definiert man nun noch den Energie-Impuls-Tensor als,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c^2\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\cdot L\right)}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \tag{8}$$

dann ergibt sich aus dieser Gleichung die Einsteinsche Feldgleichung der ART.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G\cdot T^{\mu\nu} \tag{9}$$

Dies ist zunächst die Einstein-Gleichung ohne kosmologische Konstante. Das Auftreten einer kosmologischen Konstante wurde von Einstein nachträglich postuliert, damit es auch eine Lösung für ein stationäres Universum geben kann. Die kosmologische Konstante steht dabei für eine Art Vakuumenergie.
Berücksichtigt man diese Konstante so ergibt sich die Einstein-Gleichung in der Form:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G\cdot T^{\mu\nu} \tag{10}$$

2.3 Die Robertson-Walker-Metrik

Um ein Allgemein-Relativistisches System zu betrachten benötigt man eine spezielle Metrik.
Die wichtigste Metrik für die Kosmologie ist nun die bereits angesprochene Robertson-Walker-Metrik. Diese wurde bereits in einem eigenen Vortrag vorgestellt und ich kann mich somit auf die wichtigsten Ergebnisse beschränken.

Das Universum ist beim Standardmodell der Kosmologie auf großen Skalen homogen und isotrop. Eine Metrik die für das Universum gelten soll muss also diese Eigenschaften erfüllen. Zudem lässt sich annehmen, dass das Universum ein höchstmaß an Symmetrie besitzt. Betrachtet man die in Frage kommenden Metriken, so ist die mit maximaler Symmetrie die Robertson-Walker-Metrik. Deshalb wird sie im Standardmodell der Kosmologie verwendet.
Die Robertson-Walker-Metrik lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta \cdot d\varphi^2 \right] \tag{11}$$

Für diese Metrik existieren drei verschiedene Lösungen die sich nach Werten von k charakterisieren lassen.
Ist $k = 1$ so hat man eine geschlossene, im Prinzip kugelförmige, Lösung. Ist $k = 0$ so hat man eine flache Lösung und ist $k = -1$ so hat man eine offene Lösung. Alle anderen Werte von k führen auf ähnliche Lösungen und somit sind alle Lösungen durch diese drei k-Werte gegeben.

Für die Längenskalen in dieser Metrik ist der kosmische Skalenfaktor $R(t)$ verantwortlich. Hat man seine zeitliche Entwicklung so ist die Entwicklung des Universums über diesen Parameter bestimmt.

3 Die Friedmann-Gleichung

Eine Gleichung für den kosmischen Skalenfaktor lässt sich aus der Einstein-Gleichung gewinnen. Um die Einstein-Gleichung für das Universum aufstellen zu können wird allerdings die Kenntniss des Energie-Impuls-Tensors und des Ricci-Tensors und -Skalar vorausgestzt.

3.1 Der Energie-Impuls-Tensor des Universums

Zunächst müssen wir also den Energie-Impuls-Tensor bestimmen.
In diesen Tensor fließen alle Felder und jegliche vorhandene Materie im System mit ein. Die Kenntniss über alle diese Größen ist selbstverständlich nicht möglich. Zum Glück schränkt die Symmetrie des Universums die Zahl der unbekannten Größen stark ein.

Da im Universum keine Raumrichtung vor der anderen ausgezeichnet sein darf kann der Energie-Impuls-Tensor nur Diagonalelemente enthalten. Wegen der Isotropie des Raumes müssen zudem die räumlichen Komponenten gleich sein.
Der einfachste mögliche Tensor, der diese Eigenschaften besitzt, ist der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit. Für ihn gilt:

$$T^{\mu\nu} = diag(\rho,\ p,\ p,\ p\ ) \tag{12}$$

Diese Möglichkeit ist nur die einfachste Möglichkeit für einen Energie-Impuls-Tensor mit den genannten Anforderungen. Ebenso hätte man auch den Energie-Impuls-Tensor einer viskosen Flüssigkeit verwenden können oder einen anderen ähnlichen Tensor.

3.2 Ricci-Tensor und Skalar

Die einzelnen Komponenten des Ricci-Tensors sind über den vierdimensionalen Riemman-Tensor verknüpft mit den Christoffel-Symbolen definiert. Setzt man die Robertson-Walker-Metrik voraus so ergeben sich somit die nicht-verschwindenden Komponenten:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right] \cdot g_{ij} \tag{13}$$

Da der Tensor g_{ij} diagonale Form hat bleiben von den räumlichen Komponenten nur die $i-i$-Komponenten übrig. Es ergibt sich für die drei Komponenten:

$$R_{ii} = \frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}$$

Der Ricci Skalar ergibt sich über $R^{\mu\nu}$ über multiplikation mit dem Tensor $g_{\mu\nu}$. Man erhält somit:

$$R = -6 \cdot \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] \tag{14}$$

3.3 Die Gleichung der Zeitkomponente

Setzt man die obigen Ergebnisse für die $0-0$-Komponenten in die Einstein-Gleichung ein so erhält man die Gleichung:

$$-3\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] = 8\pi G \cdot \rho$$

Formt man diese Gleichung ein wenig um so ergibt direkt die **Friedmann-Gleichung**. Es gilt:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \tag{15}$$

3.4 Die Gleichung der räumlichen Komponenten

Nun bleiben noch die beiden räumlichen Komponenten der Einstein-Gleichung.
Setzt man die $i-i$-Komponenten in die Einstein-Gleichung ein so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\ddot{R}}{R}+2\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{2k}{R^2}-3\cdot\left[\frac{\ddot{R}}{R}+\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}\right]=8\pi G\cdot p$$

Wird diese Gleichung weiter vereinfacht so ergibt sich:

$$-2\frac{\ddot{R}}{R}-\frac{\dot{R}^2}{R^2}-\frac{k}{R^2}=8\pi G\cdot p \tag{16}$$

3.5 Der Urknall

Aus den beiden in den letzten Abschnitten hergeleiteten Gleichungen lässt sich über Subtraktion eine Gleichung für die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors finden. Es ergibt sich:

$$\frac{\ddot{R}}{R}=-\frac{4\pi G}{3}\cdot(\rho+3p) \tag{17}$$

Die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors $\dot{R}$ ist verknüpft mit der Hubble-Konstante H_0. Diese ist messbar und größer als 0.
Außerdem ist $\rho+3p>0$ für alle Zeiten t und der kosmische Skalenfaktor R ebenfalls größer als 0.

Die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors ist somit kleiner als 0, daraus ergibt sich, dass das Universum in seiner gesamten Entwicklung eine Expansion durchgeführt hat.
Innerhalb einer endlichen Zeit in der Vergangenheit muss deshalb der Skalenfaktor den Wert $R(t_{BB})=0$ angenommen haben. Typischerweise legt man dieses Ereigniss auf den Zeitpunkt $t_{BB}=0$.
Nach der Friedmann-Gleichung haben viele kosmologische Parameter zu diesem Zeitpunkt eine Singularität. Diese Singularität bezeichnet man als "Big-Bang", zu Deutsch Urknall.

4 Dichte und kosmischer Skalenfaktor

Die beiden im letzten Abschnitt hergeleiteten Feldgleichungen für den kosmischen Skalenfaktor werden über eine weitere Gleichung ergänzt, diese Gleichung ergibt sich aus dem im Universum gültigen Energiesatz. Aus dieser zusätzlichen Gleichung lässt sich dann eine Beziehung zwischen der Dichte des Universums und dem kosmischen Skalenfaktor herleiten.

4.1 Der Energieerhaltungssatz

In einem abgeschlossenen System gilt der Energieerhaltungssatz, in der ART lautet dieser:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} \tag{18}$$

Da das Universum wohl als abgeschlossen anzusehen ist gilt dieser Energieerhaltungssatz auch für das Universum.
Die $\mu = 0$ -Komponente dieses Erhaltungssatzes liefert die Gleichung:

$$d\left(R^3\left[\rho + p\right]\right) = R^3 dp$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$d\left(\rho R^3\right) = -pd(R^3) \tag{19}$$

Dieser Erhaltungssatz lässt sich auch mit Worten formulieren. Es gilt:

Die Änderung der Energie in einem mitbewegten Volumenelement ist gleich dem negativen Druck mal der Volumenänderung.

Zusammen mit den beiden obigen Feldgleichungen ergeben sich drei Gleichungen für die Entwicklung des Universums. Von diesen drei Gleichungen sind allerdings nur zwei unabhängig. Die von den anderen abhängige Gleichung ist mit den beiden anderen über die sogenannte Bianchi-Identität verknüpft. Als unabhängige Gleichungen nimmt man typischerweise die Friedmann-Gleichung und die in diesem Abschnitt hergeleitete Gleichung.

4.2 Die Beziehung zwischen Dichte und kosmischem Skalenfaktor

Zwischen Druck und Dichte gibt es eine Beziehung die einer Zustandsänderung aus der Thermodynamik ähnelt. Diese Zustandsänderung besagt:

$$p(t) = \omega(t) \cdot \rho(t) \tag{20}$$

In Fall des Standardmodells der Kosmologie nimmt man zusätzlich an, dass der Faktor ω zeitunabhämgig ist. Es ergibt sich dann die Gleichung:

$$d\left(\rho R^3\right) = -\omega \cdot \rho \cdot dR^3 \tag{21}$$

Diese Gleichung kann man nun in mehreren Schritten weiter umformen und es ergibt sich:

$$R^3 \frac{d\rho}{\rho} = -(1+\omega)\frac{dR^3}{R^3}$$

Integriert man diesen Ausdruck so ergibt sich:

$$\rho \sim R^{-3(1+\omega)} \tag{22}$$

Die Dichte hängt also vom kosmischen Skalenfaktor ab.
Extremfälle der Stadien des Universums lassen sich nach Werten von ω unterscheiden.

Der erste Fall ist das **Strahlungsdominierte Universum** (RD). In diesem Fall handelt es sich um ein Stadium in dem die Teilchen eine hohe Energie haben.
Das Universum lässt sich dann durch die Statistik relativistischer Quantengase beschreiben. Aus dieser ergibt sich

$$\omega = \frac{1}{3} \tag{23}$$

und somit:

$$\rho \sim R^{-4} \tag{24}$$

Das **Materiedominierte Universum** (MD) befindet sich in einem Stadium in dem die Energie der Teilchen nicht mehr ausreicht um ein Wasserstoffatom zu ionisieren. In diesem Fall wird der Druck des Universums proportional zur Temperatur und diese ist sehr klein, fast identisch null. Somit ergibt sich für den Parameter ω:

$$\omega = 0 \qquad \rightarrow \qquad \rho \sim R^{-3} \tag{25}$$

Ist in einem Universum in dem **Vakuumenergie** die vorherrschende Energie ist (VD), also in Anwesenheit einer kosmologischen Konstante gilt:

$$\omega = -1 \qquad \rightarrow \qquad \rho = const \tag{26}$$

Je nach dem Modell das man sich für die Entwicklung des Universums macht kann es sich zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Stadien befinden, deren Zustand auch durchaus ein Mischzustand sein kann.

5 Die Lösung der Friedmann-Gleichung

Kennt man die Entwicklung von ρ und p so ist es im Grunde kein Problem über die Friedmann-Gleichung die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors $R(t)$ zu erhalten.

Zunächst wird die Friedmann-Gleichung für ein **flaches Universum** gelöst.

Für ein flaches Universum gilt die Friedmann-Gleichung:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho \tag{27}$$

Mit der eben hergeleiteten Beziehung zwischen Dichte und kosmischem Skalenfaktor ergibt sich dann:

$$\dot{R} \sim R^{-\frac{3}{2}\omega+\frac{1}{2}} \tag{28}$$

Formt man diesen Ausdruck um so ergibt sich:

$$R^{\frac{3}{2}\omega+\frac{1}{2}} dR \sim dt$$

Integriert man diesen Ausdruck und invertiert ihn so ergibt sich:

$$R \sim t^{\frac{2}{3}\cdot(\omega+1)^{-1}} \tag{29}$$

Über die Lösung der Friedmann-Gleichung haben wir also die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors für ein flaches Universum erhalten.

Nun kann man wieder die bereits oben erläuterten Fälle unterscheiden. Es ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} VD: & \omega = \frac{1}{3} & \rightarrow & R \sim t^{\frac{1}{2}} \\ MD: & \omega = 0 & \rightarrow & R \sim t^{\frac{2}{3}} \end{array}$$

Der Vakuumenergiedominierte Fall lässt sich allerdings nicht auf diese Weise lösen da im Exponenten durch 0 geteilt werden müsste. In diesem Fall nimmt allerdings die Gleichung die sich durch die Friedmann-Gleichung ergibt eine ganz besonders einfache Form an. Es gilt nämlich:

$$\dot{R} \sim R \tag{30}$$

Als Ergebniss ergibt sich:

$$R \sim e^{C\cdot t} \tag{31}$$

Für die Konstante ergibt sich zudem $C = H_0$.

Die gekrümmten Modelle mit $k \neq 0$ sind nicht geschlossen lösbar. Es lassen sich zwar Lösungen finden, die hier aber nicht diskutiert werden sollen. Diese Lösungen sind zumindest im Diagramm 1 abgebildet.

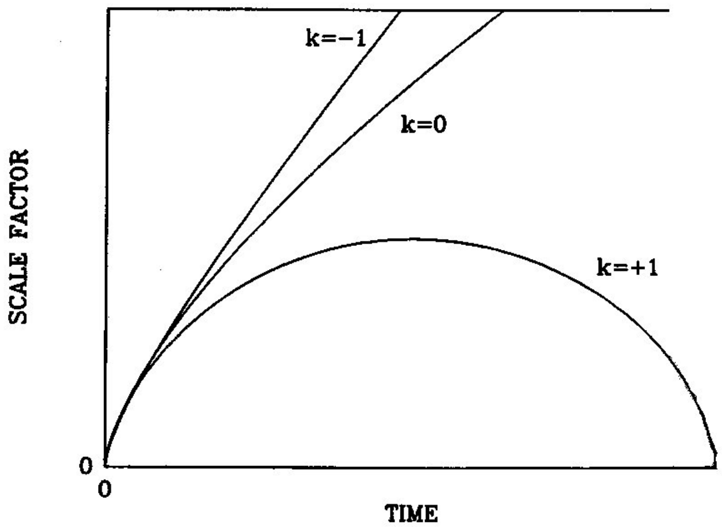

Abbildung 1: Die Lösungen der Friedmann-Gleichung

6 Diskussion der Friedmann-Gleichung

Die Friedmann-Gleichung lässt sich mit dem Hubble-Parameter noch weiter umformen. Man erhält so eine Gleichung mit der sich Abschätzungen für den Hubble-Parameter und die Dichte des Universums machen lassen.

6.1 Der Zusammenhang zwischen Dichte und Gestalt des Universums

Der Hubble-Parameter ist definiert als:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{32}$$

Dieser Parameter ist keine zeitlich konstante Größe sondern weist im allgemeinen eine Zeitabhängigkeit von $H \sim \frac{1}{t}$ auf.
Setzt man diesen Parameter in die Friedman-Gleichung ein und formt sie ein wenig um so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2} - 1 \tag{33}$$

Führt man nun noch einen Parameter ein, die sogenannte kritische Dichte $\rho_C = \frac{3H^2}{8\pi G}$ so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \frac{\rho}{\rho_C} - 1 \tag{34}$$

Das Dichteverhältniss zwischen der Dichte des Universums und der kritischen Dichte wird zumeist geschrieben als $\Omega = \frac{\rho}{\rho_C}$. Mit diesem Verhältniss ergibt sich die Friedmann-Gleichung als:

$$\frac{k}{H^2R^2} = \Omega - 1 \tag{35}$$

H^2R^2 ist immer größer als 0. Somit ergibt sich eine direkte Beziehung zwischen den Parametern Ω und k. Es gilt:

$$\begin{aligned} k = 1 \quad &\rightarrow \quad \Omega > 1 \\ k = 0 \quad &\rightarrow \quad \Omega = 1 \\ k = -1 \quad &\rightarrow \quad \Omega < 1 \end{aligned}$$

Aus diesem Zusammenhängen ergibt sich direkt die Bedeutung des Begriffes der kritischen Dichte. Hat nämlich das Universum genau diese Dichte so ist $k = 0$ und das Universum somit flach.

6.2 Der physikalische Radius des Universums

Eine allgemein bekannte Größe aus der ART ist der dreidimensionale Ricci-Skalar. Nach Definition ergibt sich für ihn aus der Robertson-Walker-Metrik:

$$^3R = \frac{6k}{R^2(t)} \tag{36}$$

Setzt man das Ergebniss aus dem letzten Abschnitt für die Friedmann-Gleichung ein so ergibt sich:

$$^3R = 6H^2(\Omega - 1) \tag{37}$$

Der physikalische Radius der Krümmung des Universums, der auch einfach Krümmungsradius genannt wird. ist definiert als:

$$R_{Curv} = \frac{R}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{6}{|^3\, R\,|}} \tag{38}$$

Diesen Ausdruck kann man mithilfe des dreidimensionalen Ricci-Skalar auch über den Hubble-Parameter ausdrücken. Der Krümmungsradius ist dann $\sim H^{-1}$. Den Parameter H^{-1} nennt man auch die Hubble-Zeit, oder den Hubble-Radius. Es gilt:

$$R_{Curv} = \frac{H^{-1}}{|\ \Omega - 1\ |^{\frac{1}{2}}} \tag{39}$$

Ist $|\ \Omega - 1\ |$ sehr klein so ist der Krümmungsradis des Universums viel größer als der jeweilige Hubble-Radius. Das Universum ist dann sehr flach. Ein Universum dessen Dichte genau die kritische Dichte ist hat einen unendlichen Krümmungsradius und ist somit flach.

Hat man ein geschlossenes Modell, mit $k > 0$ so ist der Krümmungsradius der tatsächliche Radius der Kugel auf deren Oberfläche sich das Universum befindet.

6.3 Der Dämpfungsparameter des Universums

Mit den bereits diskutierten Ergebnissen lässt sich nuun eine Aussage über den sogenannten Dämpfungsparameter des Universums machen. Dieser ergibt sich bei der Herleitung des Hubble-Gesetzes.
Das Hubble-Gesetz lautet:

$$H_0 d_L = z + \frac{1}{2}(1 - q_0) \cdot z^2 + \ldots \tag{40}$$

Für den Dämpfungsparameter gilt:

$$q_0 = -\left(\frac{\ddot{R}(t_0)}{R(t_0)}\right) \cdot \frac{1}{H_0^2} \tag{41}$$

Diese Beziehungen wurden im Vortrag über die Robertson-Walker-Metrik bereits behandelt.

Aus der Friedmann-Gleichung und der Gleichung für die räumlichen Komponenten kann man nun eine Beziehung zwischen q_0 und $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{C0}}$ herleiten. Dazu wird auch die im letzten Abschnitt umgeformte Friedmann-Gleichung benutzt. Es ergibt sich die Gleichung:

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}(1 + 3\omega) \tag{42}$$

Für die unterschiedlichen Stadien des Universums ergeben sich nun wieder verschiedene Ergebnisse. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} MD: \quad & \omega = 0 \quad && \rightarrow \quad q_0 = \frac{\Omega_0}{2} \\ RD: \quad & \omega = \frac{1}{3} \quad && \rightarrow \quad q_0 = \Omega_0 \\ VD: \quad & \omega = -1 \quad && \rightarrow \quad q_0 = -\Omega_0 \end{aligned}$$

Kann man nun also einen der beiden Parameter messen so kann man darüber eine Aussage über den Wert des anderen Parameters ziehen.
Besser messbar ist q_0, über ihn lässt sich dann eine Abschätzung für die Dichte des Universums machen.

7 Das Alter des Universums

Eine weitere wichtige Größe für Abschätzungen ist das Alter des Universums.
Es ergibt sich in Abhängigkeit von mehreren kosmologischen Parametern durch integration der Friedmann-Gleichung. Zudem lässt es sich über mehrere Verfahren unabhängig voneinander Messen und liefert somit eine gute Basis um Abschätzungen dieser Parameter durchzuführen.

Die Umformungen die auf das Alter des Universums führen sind recht umfangreich. Deshalb werde ich die vollen Umformungen nur für den Fall eines Materiedominierten Universums machen. Die Rechnungen die zum Alter eines Strahlungsdominierten Universums führen sind allerdings vollkommen analog und lassen sich eins zu eins übernehmen.

7.1 Das Alter eines MD-Universums

Im Materiedominierten Fall gilt:

$$\rho \sim R^{-3}$$

Daraus ergibt sich direkt die Beziehung:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} \tag{43}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Friedmann-Gleichung ein so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho_0 \cdot \frac{R_0}{R} \tag{44}$$

Zudem gilt:

$$\frac{k}{R_0^2} = H_0^2 \cdot (\Omega_0 - 1) \tag{45}$$

Aus der Herleitung des Hubble-Gesetzes ergibt sich zudem:

$$\frac{R_0}{R} = 1 + z \tag{46}$$

Es ergibt sich somit die umgeformte Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + H_0^2 \cdot (\Omega_0 - 1) = \frac{8\pi G}{3} \cdot \rho_0 \cdot (1 + z) \tag{47}$$

Setzt man nun noch die Parameter

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{C0}} \qquad \rho_{C0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

in die Gleichung ein so formt sie sich um zu:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + H_0^2 \cdot (\Omega_0 - 1) = H_0^2 \cdot \Omega_0 (1+z) \tag{48}$$

Das Alter des Universums ergibt sich allgemein über das Integral:

$$t = \int_0^t dt' = \int_0^{R(t)} \frac{1}{\dot{R}'} dR' \tag{49}$$

Aus der obigen umgeformten Friedmann-Gleichung lässt sich nun ein Ausdruck für $\dot{R}$ gewinnen. Setzt man ihn ein und führt eine Substitution mit $x = (1+z)^{-1}$ durch so ergibt sich für das Alter eines Materiedominierten Universums das Integral:

$$t = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{H_0 \sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_0 \cdot x^{-1}}} \tag{50}$$

Löst man dieses Integral und setzt dann $z = 0$ so hat man das Alter des Universums in Abhängigkeit von den Parametern H_0 und Ω_0 erhalten.
Das Integral lässt sich elementar lösen, die Funktion die aus ihm resultiert ist allerdings sehr kompliziert und nicht sonderlich aussagekräftig und sie wird deshalb hier nicht explizit aufgeführt. Im Diagramm 2 ist allerdings die Abhängigkeit von der Größe $H_0 t_0$, mit dem heutigen Alter t_0 des Universums, gegen den Parameter Ω_0 aufgetragen.

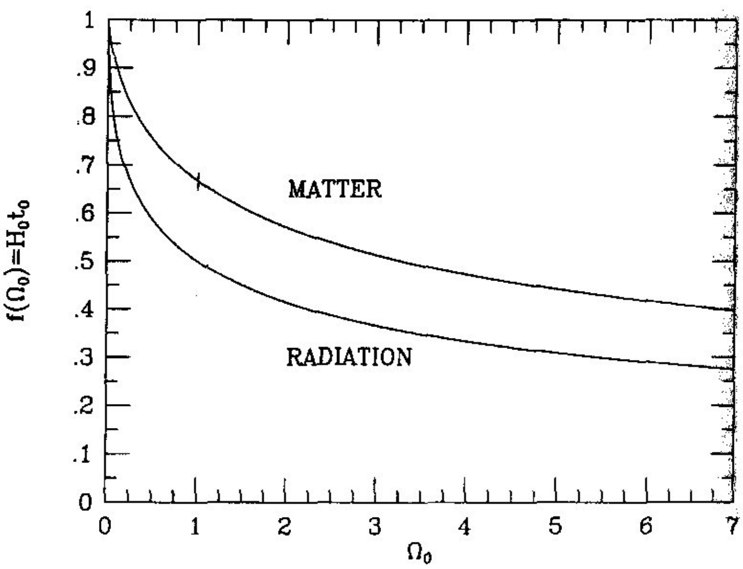

Abbildung 2: Alterskurven des Universums

7.2 Das Alter eines RD-Universums

Die Rechnung im Strahlungsdominierten Fall erfolgt wie gesagt vollkommen analog. Es gilt:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4} \tag{51}$$

Nach der Rechnung ergibt sich somit das Integral:

$$t = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{H_0\sqrt{1-\Omega_0+\Omega_0 \cdot x^{-2}}} \tag{52}$$

Auch dieses Integral lässt sich lösen, führt aber auf eine ähnlich komplizierte Lösung wie im vorherigen Teil und auch sie wird deshalb nur im Diagramm 2 graphisch dargestellt. Aus beiden Integralen kann man erkennen das die Zeitskala des Alters des Universums über die Hubble-Zeit H_0^{-1} gegeben ist.

7.3 Das Alter eines flachen Universums mit MD- und VD-Anteil

Zum Vergleich kann man nun noch das Alter des Universums im Falle eines flachen Universums mit anwesender Materie- und Vakuumenergie betrachten. Es gilt:

$$k = 0 \quad \text{und} \quad \Omega_0 = 1$$

Es verändert sich zudem noch die Friedmann-Gleichung und es tritt noch ein Term mit einer kosmologischen Konstante auf. Es gilt:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{mat} + \frac{\Lambda}{3} \tag{53}$$

Die Energiedichte des Universums setzt sich dann aus Vakuumenergiedichte ρ_{vac} und Materieenergiedichte ρ_{mat} zusammen. Für die Dichteverhältnisse gegen die kritische Dichte ρ_{C0} gilt somit:

$$\Omega_0 = \Omega_{vac} + \Omega_{mat} = 1 \tag{54}$$

Nun kann man das Alter des Universums in Abhängigkeit vom Anteil des Vakuumenergiedichteverhältnisses berechnen. Die einzelnen Rechenschritte erfolgen dabei im allgemeinen vollkommen analog zu den beiden vorherigen Fällen sind allerdings etwas komplizierter und werden nun hier nicht im einzelnen durchgeführt.

Die Kurve die sich für das Alter dieses Universums ergibt ist in Abbildung 3 dargestellt in Abhängigkeit vom Parameter Ω_{vac}.

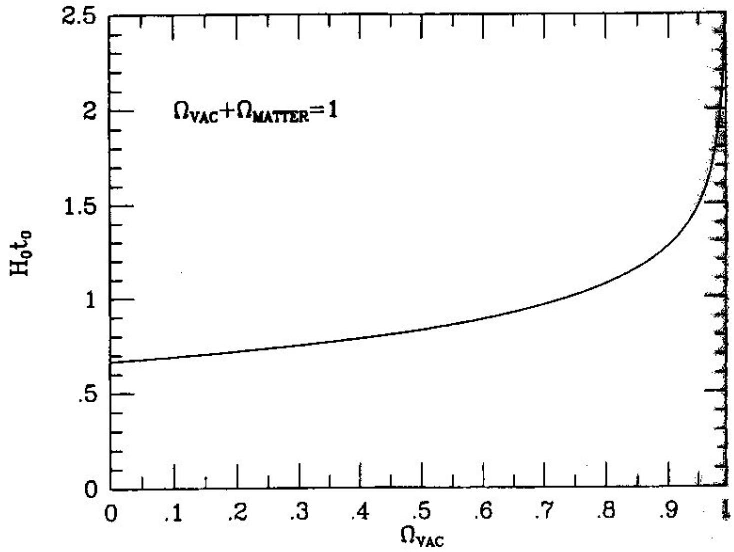

Abbildung 3: Das Alter eines flachen Universums mit Materie und Vakuumenergie

Hat man einen Vakuumanteil von $\Omega_{vac} \leq 0,74$ so ist das Universum älter als H_0t_0. Dies liegt daran, das durch das Auftreten einer recht großen kosmologischen Konstante die Expansionsrate stark erniedrigt wird.
Ein weiterer interessanter Fall ist der Fall $\Omega_0 \to 1$. Für diesen Fall geht das Alter des Universums $t_0 \to \infty$. Diese Tatsache ist der Grund das Einstein die kosmologische Konstante überhaupt eingeführt hat. In diesem Fall hätte man nämlich genau das von ihm geforderte statische Universum.

7.4 Abschätzung der Dichte mit dem Alter des Universums

Das Alter des Universums ist eine gute Möglichkeit um Abschätzungen durchführen zu können. Vor allem liefert es eine gute Möglichkeit eine Abschätzung für die Energiedichte des Universums zu machen.

Das Alter des Universums hängt außer vom Modell für das Universum nur vom Wert Ω_0 und der Hubble-Konstante H_0 ab. Die Hubble-Konstante ist bis zu einer gewissen Genauigkeit messbar und liefert somit im Bereich der Messungenauigkeit Grenzen für die Abschätzungsmöglichkeit mit dem Alter des Universums.

Das Alter des Universums wird heute auf etwa $13,7 \cdot 10^9$ *years* geschätzt.
Um einen Rückschluß auf die Dichte machen zu können braucht man nun noch eine untere Grenze für die Hubble-Konstante. Zu diesem Zwecke parameterisiert man sie

häufig über einen Parameter h. Es gilt dann:

$$H_0 = h \cdot 100 \, \frac{km}{s} \frac{1}{Mparsec} \tag{55}$$

Die Einheit $Mparsec \approx 3,4 \cdot 10^6 Lightyears$ ist eine wichtige Astronomische Einheit. Vernünftige Grenzen für diesen Parameter h sind $0,4$ oder $0,5$.

Setzt man nun das Alter des Universums auf $t_0 \leq 13 \cdot 10^9 \, years$ und h auf $h \leq 0,5$ so ergibt sich für die Dichte eines Materiedominiertes Universum ungefähr:

$$\Omega_0 \geq 1,25$$

Diese Abschätzung ergibt sich aus aus den Alterskurven in Abbildung 2. Es handelt sich dabei um eine schon recht gute Abschätzung für die obere Grenze des Dichteverhältnisses des Universums. Heutzutage geht man davon aus, dass das Universum recht flach sein müsste und somit das Dichteverhältniss etwa im Bereich von $\Omega_0 = 1$ bewegen müsste.