# Allgemeine Lagrangedichte, Dyson-Entwicklung und Feynmangraphen

Max Theodor Kuchel

Referat 12.06.2002

# 1 Einleitung

In diesem Referat sollen dem Leser Begriffe wie die Lagrangedichte, Dyson-Entwicklung, Feynmanregeln und Feynmangraphen näher gebracht werden. Es wird größtenteils auf Herleitungen und Beweise verzichtet und hierfür auf die angegebene Literatur verwiesen.

# 2 Die allgemeine Lagrangedichte

## 2.1 Herleitung

Die QED beschreibt die Wechselwirkung des Diracfeldes mit dem Photonfeld, wobei die in den vorhergehenden Vorträgen behandelten freien Bewegungsgleichungen dieser beiden Felder nun über die Ladung gekoppelt werden. Dazu konstruiert man die allgemeine Lagrangedichte, wozu als Ausgangspunkt in dieser Beschreibung die freie Lagrangedichte der Diractheorie verwendet wird:

$$L_f(x) = \overline{\psi}(x) \cdot (i\gamma^\mu \vec{\partial_\mu} - m1)\psi(x)$$

Man fordert von ihr die Invarianz unter der sogenannten lokalen abelschen Phasentransformation:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp(iq\alpha(x))\psi(x)$$

Dabei ist $\alpha(x)$ für alle x reell, q die Ladung des Teilchens.
$L_f(x)$ ist invariant, wenn sich die Ableitungen der Felder genauso transformieren wie die Felder und wenn gilt: $\overline{\psi}'(x) = \exp(-iq\alpha(x))\overline{\psi}(x)$.
Hier aber ergibt sich ein Problem, weil auch $\alpha$ von x abhängt:

$$\partial_\mu \psi' \neq \exp(iq\alpha(x))\partial_\mu \psi(x)$$

Diese Invarianz erreicht man nun mit Hilfe der kovarianten Ableitung, wobei folgende Ersetzung gilt:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$$

$A_\mu(x)$ ist hierbei ein Eichfeld, an das folgende Forderung zu stellen ist (Ergibt sich leicht aus den Anforderungen): $A'^\mu = A^\mu(x) - \partial^\mu \alpha(x)$
Damit ist das Eichfeld der QED identisch mit dem Photonfeld und die obige Gleichung ist aus der klassischen Elektrodynamik bekannt. Nun wird in der freien Lagrangedichte $\delta_\mu$ durch die kovariante Ableitung ersetzt:

$$L'(x) = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \vec{D_\mu} - m1)\psi(x) = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu \vec{\partial_\mu} - m1)\psi(x) - q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

Die lokale abelsche Eichinvarianz erzeugt damit mit Hilfe der kovarianten Ableitung in der bisher freien Diractheorie eine Wechselwirkung. In dieser koppelt das Photonfeld $A_\mu$ an den Ladungsstrom: $J^\mu = q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$.
Für die Formulierung einer allgemeinen Lagrangedichte L(x) muß nun natürlich noch die freie Lagrangedichte des Photonfeldes hinzugefügt werden.

$$L(x) = L_f(\psi, \overline{\psi}) + L_(A^\mu) + L_{WW}(\psi, A^\mu)$$

Freie Lagrangedichte des Diracfeldes:

$$L_f(\psi, \overline{\psi}) = \overline{\psi}(x) \cdot (i\gamma^\mu \vec{\partial_\mu} - m1)\psi(x)$$

Freie Lagrangedichte des Photonfeldes:

$$L_f(A^\mu) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

Wechselwirkungsdichte:
$L_{WW}(\psi, A^\mu) = -q\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$

## 2.2 Wechselwirkungsgleichungen

Durch Variation der allgemeinen Lagrangedichte nach $\overline{\psi}$ ergibt sich mit den Formeln

$$\frac{\partial L(x)}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi}(x))} = 0$$

$$\frac{\partial L(x)}{\partial \overline{\psi}(x)} = (i\gamma^\mu \vec{\partial_\mu} - m1)\psi(x) - q\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

und nach Anwendung von Euler-Lagrange ergibt sich damit für das Diracfeld:

$$(i\gamma^\mu \vec{\partial_\mu} - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m1)\psi(x) = 0$$

Uns sind aus früheren Vorträgen folgende Relationen für das Photonfeld bekannt:

$$\frac{\partial L_f(A^\mu)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial L_f(A^\nu)}{\partial A_\nu} = 0$$

Für den Wechselwirkungsterm $L_{WW}$ gilt dementsprechend:

$$\frac{\partial L_{WW}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0$$

$$\frac{\partial L_{WW}}{\partial A_\nu} = -q\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$$

Damit folgt mit dem Euler-Lagrange-Verfahren:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + q\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = 0$$

Dabei ist festzuhalten, daß gilt:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) - \Box A^\nu$$

Abschließend ergibt sich somit:

$$\Box A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu(x)) = q\overline{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x) = qj^\nu(x)$$

Dem Kenner der allgemeinen Maxwelltheorie fällt auf, daß diese Gleichung für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit Materie gilt, wobei in der QED das Diracfeld an die Stelle des Materiefeldes tritt.

### 2.3 Quantisierung

Wir behandeln ab jetzt eine Theorie, die Wechselwirkungen enthält. Weil hier nicht zu erwarten ist, daß die Feldoperatoren den freien Bewegungsgleichungen gehorchen, wir aber an diese anknüpfen und damit unsere bisherigen Kenntnisse benutzen wollen, müssen wir mit Hilfe von Bedingungen den Anschluß an sie finden. Dazu wird zunächst die Quantenbedingung aufgestellt, die besagt, daß die Algebra wechselwirkender Felder im Falle der Gleichzeitigkeit in die Algebra der freien Felder übergeht. Es wird die Vertauschbarkeit für alle Zeiten gefördert, falls verschiedene Teilchensorten vorliegen. Dies erklärt sich damit, daß die Hilbert-Räume unterschiedlicher Arten von Teilchen orthogonal zueinander sind. Aus diesen Quantenbedingungen ergeben sich sofort folgende Relationen:

$$\{\psi_a(x), \overline{\psi}_b(y)\}_{x^0=y^0} = (\gamma^0)_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)]_{x^0=y^0} = 0$$

$$[\psi_\alpha(x), A^\mu(y)] = ... = 0$$

Letztere Relation gilt für alle $x^0, y^0$. Zusätzlich zur Quantenbedingung wird als zweites die Erfüllung des Kausalitätsprinzips als notwendig erachtet, was die Lichtgeschwindigkeit als konstante obere Grenzgeschwindigkeit vorgibt. Aus diesem Prinzip folgt, daß sich zwei Ereignisse an verschiedenen Weltpunkten nur dann gegenseitig beeinflussen, wenn die Abstände zeit- oder lichtartig sind. Dagegen sind Ereignisse kausal unabhängig für raumartige Abstände, was heißt, daß sie innerhalb der vorliegenden Algebra miteinander kommutieren. Hieraus ergeben sich die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\{\psi_a(x), \overline{\psi}_b(y)\} = 0$$

$$\{A^\mu(x), A^\nu(y)\} = 0$$

Dabei gilt: $(x-y)^2 < 0$.
Obwohl sich nun über das Verhalten der Algebra bei zeitartigen Abständen keine Aussage treffen läßt, kann dennoch im folgenden die Entwicklung des Streuoperators ohne Konsistenzprobleme erfolgen.

# 3 Streuoperator

Streuprozesse werden in der QED mit Hilfe des Streuoperators beschrieben. Dieser liegt in Heisenberg-Form vor. Aus der Annahme der Wahrscheinlichkeitserhaltung ergibt sich sofort die Tatsache, daß S ein unitärer Operator sein muß. Um die auslaufende Wellenfunktion zu erhalten, muß man auf die einlaufende Wellenfunktion eben diesen Streuoperator S anwenden:

$$|\psi_{aus}\rangle = S|\psi_{ein}\rangle$$

$$S^+S = SS^+ = 1$$

Die letztere Relation folgt aus der Unitarität des Streuoperators. Da dieser nun im Heisenbergbild vorliegt, die störungstheoretische Entwicklung der Streumatrix aber zweckmäßigerweise im Wechselwirkungsbild geschehen soll, muß S noch in letzteres Bild übersetzt werden. Um dies näher zu erläutern, wird im

folgenden die Beschreibung der Quantenmechanik mit Hilfe der drei zueinander äquivalenten Bilder, dem Schrödingerbild, dem Heisenbergbild und dem Wechselwirkungsbild wiederholt.
Im Schrödingerbild wird die Zeitabhängigkeit eines quantenmechanischen Systems über die Zustände $|\psi_S\rangle$ verarbeitet. Dagegen sind die Operatoren $O_S$ zeitunabhängig. Der Zusammenhang zwischen Zuständen zu unterschiedlichen Zeiten wird über den unitären Zeitentwicklungsoperator $\Pi(t,t')$ ausgedrückt:

$$|\psi_S(t)\rangle = \Pi(t,t')|\psi_S(t')\rangle$$

$$\Pi(t,t) = 1$$

$$\Pi\Pi^+ = \Pi^+\Pi = 1$$

$$\Pi(t,t') = \exp(-iH_S(t-t'))$$

Dabei ist $H_S$ hermitescher Operator im Schrödingerbild.

Im Heisenbergbild sind im Gegensatz zum Schrödingerbild die Operatoren zeitabhängig, dagegen die Zustände zeitunabhängig, Es gilt dabei folgende Relation zwischen den Zuständen des Heisenbergbilds $|\psi_H\rangle$ und denen des Schrödingerbilds: $|\psi_S\rangle = \Pi(t,t')|\psi_H\rangle$. Für die Operatoren gilt analog zu den Zuständen im Schrödingerbild:

$$O_H(t) = \Pi^+(t,t')O_H(t')\Pi(t,t')$$

Für t'=0 gilt damit speziell:

$$O_H(t) = e^{iH_S t}O_H(0)e^{-iH_S t}$$

Der Heisenbergoperator der totalen Energie ist zeitunabhängig:

$$H_H(t) = \Pi^+(t,t')H_S\Pi(t,t')$$

Außerdem gilt noch, daß alle Heisenbergoperatoren, die mit dem totalen Hamiltonoperator kommutieren, Konstanten der Bewegung sind.
Nun folgt als drittes das Wechselwirkungsbild. In dieser Beschreibung der Quantenmechanik sind sowohl die Zustände als auch die Operatoren zeitabhängig. Dabei läßt sich der totale Hamiltonoperator in einen sogenannten freien Anteil $H_0$ und einen Wechselwirkungsanteil $\overline{H}_W$ aufspalten:

$$H = H_0 + \overline{H}_W$$

Dieses Bild ist mit den Heisenbergbild und dem Schrödingerbild über folgende Randbedingungen verknüpft:

$$|\psi_W(t')\rangle = |\psi_S(t')\rangle = |\psi_H\rangle$$

$$O_W(t') = O_S = O_H(t')$$

Dies gilt für t=t' fest, aber beliebig. Die Operatoren im Wechselwirkungsbild sind spezielle Heisenbergoperatoren. Die Transformation zum Schrödingerbild erfolgt bei ihnen nur über den freien Anteil $H_0$

$$O_W(t) = R^+(t,t')O_S R(t,t')$$

$$R(t,t') = \exp(-iH_0(t-t'))$$
$$R^+R = RR^+ = 1$$

R ist ein unitärer Operator. Die Zustände des Wechselwirkungsbildes sind spezielle Schrödingerzustände. Ihre zeitliche Entwicklung beschreibt der Wechselwirkungsanteil $\overline{H}_W$.

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_W(t)\rangle = \overline{H}_W(t)|\psi_W(t)\rangle = R^+(t,t')\overline{H}_W R(t,t')|\psi_W(t)\rangle$$

$$|\psi'_W(t)\rangle = R(t,t')|\psi_W(t)\rangle = |\psi_S(t)\rangle$$
$$O'_W = R(t,t')O_W(t)R^+(t,t') = O_S$$

Damit sind Wechselwirkungsbild und Schrödingerbild miteinander verknüpft. Folgende Forderung muß erfüllt sein, um die Gleichwertigkeit der drei Bilder zu gewährleisten:

$$\langle O_S\rangle_S = \langle O_H\rangle_H = \langle O_W\rangle_W$$

Mit $O_W(t') = O_S$ und für t'=0 ergibt sich: $O_W(t) = \exp(iH_0t)O_W(0)\exp(-iH_0t)$ Die zeitliche Entwicklung der Operatoren im Wechselwirkungsbild sieht damit folgendermaßen aus:

$$i\frac{\partial}{\partial t}O_W(t) = [O_W(t), H_0]$$

Somit ist nur der freie Anteil des Hamiltonoperators für die Bewegungsgleichung für Operatoren relevant. Die Zeitabhängigkeit des Hamiltonoperators der totalen Energie im Wechselwirkungsbild ist auf den Wechselwirkungsanteil $\overline{H}_W$ beschränkt. Aus der letzten Gleichung ergibt sich eindeutig, daß Operatoren im Wechselwirkungsbild freien Bewegungsgleichungen und Vertauschungsrelationen für alle Zeiten genügen.
Für die Diskussion der Dyson-Entwicklung des Streuoperators folgt daraus, daß für die dort auftretenden Feldoperatoren die Algebra der freien Felder gilt. Diese können damit in Fourier-Darstellung nach den freien Impulsraumlösungen entwickelt werden. Damit erhält sich auch die formale Darstellung des totalen Viererimpulsvektors in Abhängigkeit der Impulsraumoperatoren $b_r^+, .....\overline{b_r}^+$.
Die Herleitung des Quantisierungspostulats aus der vierdimensionalen Translationsinvarianz ist unabhängig davon, ob nun freie oder wechselwirkende Felder vorliegen. Damit erfüllen die Diracfeld-Operatoren im Wechselwirkungsbild für alle Zeiten die freien Vertauschungsrelationen. Zusammenfassend ergeben sich für das Wechselwirkungsbild diese Vertauschungsrelationen:

$$\{\psi_a(x), \overline{\psi}_b(y)\} = -iS_{a,b}(x-y)$$

$$\{\psi_a(x), \overline{\psi}_b(y)\}_{x^0=y^0} = (\gamma^0)_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$\psi(x) = \psi_W(x)$$

$$[A^\mu, A^\nu] = -ig^{\mu\nu}D(x-y)$$

$$[A^\mu, A^\nu]_{x^0=y^0} = 0$$
$$A^\mu = A^\mu_W(x)$$

Alle anderen $..., ..., [..., ...] = 0$.

Die Beziehung zwischen Wechselwirkungsbild und Heisenbergbild ist über folgende Relation gegeben:

$$|\psi_W(t)\rangle = R^+(t,t')|\psi_S(t)\rangle$$
$$= R^+(t,t')\Pi(t,t')|\psi_H\rangle = U(t,t')|\psi_H\rangle$$

Dabei ist $t'$ fest, aber beliebig. $U(t,t')$ ist über diese Gleichung definiert. Dieser Operator ist offensichtlich unitär und es gilt mit dem Randwert $|\psi_W(t')\rangle = |\psi_H\rangle$:

$$|\psi_W(t)\rangle = U(t,t')|\psi_W(t')\rangle$$

$U(t,t')$ ist somit der Zeitverschiebungsoperator des Wechselwirkungsbildes.

Wir kennen bereits folgende Relation:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_W(t)\rangle = \overline{H}_W(t)|\psi_W(t)\rangle = R^+(t,t')\overline{H}_W R(t,t')|\psi_W(t)\rangle$$

Ersetzen wir hier nun entsprechend die zeitliche Entwicklung, so ergibt sich :

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t')|\psi_H\rangle = \overline{H}_W(t)U(t,t')|\psi_H\rangle$$

Da $\psi_H$ zeitunabhängig ist, kann man entsprechend kürzen und es ergibt sich:

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = \overline{H}_W(t)U(t,t')$$

Diese Gleichung ist aber nicht einfach zu integrieren, da $\overline{H}_W(t)$ noch von der Zeit abhängt. Bevor wir diese Gleichung mittels Iteration lösen, werden wir noch einen kurzen Blick auf den Streuoperator werfen. Zunächst sind uns aus den vorhergehenden Referaten schon folgende Relationen bekannt:

$$|\psi_{aus}\rangle = \lim_{t\to\infty}|\psi_W(t)\rangle$$
$$|\psi_{ein}\rangle = \lim_{t\to-\infty}|\psi_W(t')\rangle$$

Für unendlich weit entfernte Zeiten werden die Zustände dabei als frei angesehen. Damit erhalten wir mit dem Zeitentwicklungsoperator im doppelten Zeitlimes:

$$\lim_{t\to\infty}|\psi_W(t)\rangle = \lim_{t\to\infty, t'\to-\infty} U(t,t')|\psi_W\rangle$$

Daraus folgt: $||\psi_{aus}\rangle = \lim_{t\to\infty,t'\to-\infty} U(t,t')|\psi_W\rangle$ Damit erhalten wir endlich eine Definition des Streuoperators im Wechselwirkungsbild:

$$S = \lim_{t\to\infty, t'\to-\infty} U(t,t')$$

Es zeigt sich somit, daß die Streuoperatoren im Heisenbergbild und im Wechselwirkungsbild im doppelten Zeitlimes übereinstimmen.
Nun kann die Iterationslösung des Zeitentwicklungsoperator angegeben werden:

$$U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 ... \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n \overline{H}_W(t_1)\overline{H}_W(t_2)...\overline{H}_W(t_n)$$

Dies ist wegen der n unterschiedlichen oberen Integrationsgrenzen problematisch. Deswegen wird der Ausdruck mit Hilfe der Dyson-Entwicklung so umgeschrieben, daß es nur eine einzige obere Grenze gibt (Hier ohne Beweis, s. aber Nolting: Grundkurs Theoretische Physik: Band 5: Quantenmechnik Teil 1 Grundlagen):

$$U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 ... \int_{t'}^{t} dt_n P(\overline{H}_W(t_1)\overline{H}_W(t_2)...\overline{H}_W(t_n))$$

Dabei ist P der Zeitordnungsoperator nach Dyson:

$$P(\overline{H}_W(t_i)\overline{H}_W(t_k)) = \Theta(t_i - t_k)\overline{H}_W(t_i)\overline{H}_W(t_k) + \Theta(t_k - t_i)\overline{H}_W(t_k)\overline{H}_W(t_i)$$

$$\Theta(t_i - t_k) = 1, t_i > t_k$$

$$\Theta(t_i - t_k) = 0, sonst$$

Die Zeitordnung wird durch die Thetafunktionen gewährleistet. Damit ergibt sich der Streuoperator:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} dt_n P(\overline{H}_W(t_1)\overline{H}_W(t_2)...\overline{H}_W(t_n))$$

Mit $\overline{H}_W(t_i) = \int d^3x_i \overline{\mathcal{H}}_W(x_i)$ kann man den Streuoperator folgendermaßen schreiben:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 ... \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n P(\overline{\mathcal{H}}_W(x_1)...\overline{\mathcal{H}}_W(x_n))$$

An dieser Gleichung müssen noch zwei Dinge verändert werden: Zum einen muß die Dysonsche Zeitordnung durch die Wicksche Zeitordnung ersetzt werden (s. folgenden Abschnitt), zum anderen muß die Gleichung noch normalgeordnet werden.

# 4 Das Wicktheorem

Wir wollen innerhalb der störungstheoretischen Entwicklung des Streuoperators nach den Potenzen des Wechselwirkungsoperators den entstehenden Termen bestimmte physikalische Prozesse zuordnen. Da es allerdings bei gegebener Ordnung Konkurrenzprozesse gibt, die sich schließlich zur endgültigen Amplitude summieren, müssen auch die relativen Phasen zwischen diesen Amplituden berücksichtigt werden, was mit Hilfe einer Statistik geschieht. Dies wurde bei Dyson nicht beachtet, weswegen nun anstelle der Zeitordnung P eine neue tritt, der Wicksche Operator T. Beide Zeitordnungen sind durch folgende Relation für ein Produkt aus Operatoren $U_1, ...U_n$ miteinander verknüpft:

$$T(U_1(t_1)U_2(t_2)...U_n(t_n)) = \delta_F \cdot P(U_1(t_1)U_2(t_2)...U_n(t_n))$$

Die Phase $\delta_F$ ist $\pm 1$ für eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Vertauschungen von Fermioperatoren und $+1$ für eine beliebige Anzahl von Vertauschungen von Boseoperatoren. Es gilt, daß sich die Wickschen T-Produkte durch die Vertauschungsfunktionen $S_{a,b}$ für Fermionen und D für Bosonen ausdrücken lassen. Die Wickordnung ist im Gegensatz zur Normalordnung von Operatoren ein von der Statistik abhängiges Zeitordnungsschema für die totalen Operatoren und nicht eine Umordnung von Erzeugern und Vernichtern. Es gelten zusammengefaßt folgende Relationen zwischen den beiden Ordnungen:
$T(\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)) - N(\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)) = \mp i S^{\pm}_{a,b}(x-y)$ für $x^0 > y^0$ bzw. $x^0 < y^0$
$T(\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)) - N(\overline{\psi}_b(x)\psi_a(x)) = \pm i S^{\pm}_{a,b}(x-y)$ für $x^0 > y^0$ bzw. $x^0 < y^0$
$T(A^\mu(x)A^\nu(y)) - N(A^\mu(x)A^\nu(y)) = \mp i g^{\mu\nu} D^{\pm}(x-y)$ für $x^0 > y^0$ bzw. $x^0 < y^0$

Damit ist die Differenz zwischen Wickschem T-Produkt und dem Normalprodukt durch die Frequenzanteile der Vertauschungsfunktionen gegeben. Welche nun in welcher Reihenfolge auftreten, legt die Abfolge der Raum-Zeit-Koordinaten fest. Es ergibt sich hieraus die Definition der bekannten Feynman-Propagatoren, die durch das Vorzeichen des Ergebnisses der Differenz der Zeitkoordinaten der beiden betrachteten Punkte gegeben ist. Zunächst aber wird die Kontraktion zweier Operatoren folgendermaßen symbolisiert:

$$\underbrace{UV} = T(UV) - N(UV)$$

Hierdurch wird dann auch der Feynman-Propagator definiert:

$$P_F = -2\underbrace{UV}$$

Es ist hierbei anzumerken, daß die Kontraktion in den anderen Referaten durch eine eckige Klammer symbolisiert werden.
Für die T-Produkte ergibt sich als Vakuumerwartungswert (s. hierzu das Referat von David Kleinhans):

$$\langle 0|N(...)|0\rangle = 0$$
$$\langle 0|T(UV)|0\rangle = \underbrace{UV}\langle 0|0\rangle = \underbrace{UV} = -0,5P_F$$

Nun kommen wir nach diesen Vorbereitungen zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts, dem Wicktheorem. Es ist die Verallgemeinerung der Kontraktion zweier Operatoren auf eine beleibige Anzahl von Operatoren.

1. Das T-Produkt einer beliebigen Anzahl von Operatoren läßt sich in eine Summe von Normalprodukten entwickeln, deren einzelne Summanden alle möglichen Kontraktionen von je zwei Operatoren enthalten.

2. Gemischte Normalprodukte sind solche, in denen bereits mehrere Operatoren als Normalprodukte auftreten. Ein Beispiel dafür ist T(N(UV)XY). Für gemischte T-Produkte sind in der Entwicklung nach Normalprodukten alle die Terme wegzulassen, die Kontraktionen von bereits normalgeordneten Operatoren entsprechen. Damit gilt: $T(N(UV)) = N(UV)$.

# 5 Feynman-Graphen und Feynman-Regeln

## 5.1 Einleitung

Die Wechselwirkungsdichte $\overline{\mathcal{H}}_W$ ist mit den Relationen des ersten Abschnitts nun folgendermaßen gegeben:

$$\overline{H}_W(x) = -L_{WW}(\psi, \overline{\psi}, A^\mu) = qj^\mu(x)A_\mu(x) = qN(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x))A_\mu(x)$$

Der Ladungsstrom $J^\mu = qj^\mu(x)$ ist hierbei ein Normalprodukt. Für die Wechselwirkungsdichte ergeben sich in erster und zweiter Ordnung der Entwicklung nach Dyson, wobei auf die Wicksche Zeitordnung zurückgegriffen werden kann, da in der Quantenelektrodynamik die Dyson-Entwicklung sowohl für die P- und T-Zeitordnung dieselbe ist.

$$S_1 = \frac{-iq}{1!}\int d^4x_1 T(N(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))A_\mu(x_1))$$

$$S_2 = \frac{(-iq)^2}{2!}\int d^4x_1 \int d^4x_2 T(N(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1))A_\mu(x_1)N(\overline{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2))A_\nu(x_2))$$

Nun sind Diracfeld und Photonfeld unabhängig voneinander, wodurch sich die T-Produkte als Produkt der T-Produkte der unterschiedlichen Felder ergeben. In der 1. Ordnung der Entwicklung ergeben sich vier Terme, in der 2. Ordnung noch wesentlich mehr. Hinzu kommt noch, daß man die Wechselwirkung eines Diracfeldes mit einem äußerem klassischen Photonfeld von einem quantisierten Photonfeld. Für letzteres sind Wechselwirkungsprozesse 1. Ordnung nicht erlaubt, da diese die Energie-Impulserhaltung verletzen würden (hier ohne Beweis).

## 5.2 Feynman-Graphen im Ortsraum

Wir haben in einem früheren Referat gezeigt, daß die positiven Anteile der Feldoperatoren $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ und $A^\mu(x)$ Vernichtungsoperatoren, die negativen dagegen Erzeuger sind. Diese Eigenschaften werden mit den Feynman-Graphen im Ortsraum visualisiert. Teilchenoperatoren werden durch Pfeile symbolisiert, die nach oben gerichtet sind, Antiteilchenoperatoren dagegen durch welche, die nach unten zeigen. Die Kontraktion als Differenz zweier vierdimensionaler Koordinaten wird durch eine gerichtete Linie zwischen zwei Punkten dargestellt. Photonen werden als Wellenlinien gezeichnet.
Mit diesen Elementen werden nun die Gleichungen der QED graphisch dargestellt und anschaulicher. Dies ist auch notwendig, denn die Entwicklungen des Streuoperators in höhere Ordnungen ergeben sehr rasch sehr viele Terme.
Im Ortsraum gelten folgende Regeln, die als Feynmanregeln bezeichnet werden:

1. Faktor $(-i)^n$ für Diagramm n-ter Ordnung.
2. Faktor $q(\gamma^\mu)_{ab}$ für jeden Eckpunkt (Vertex), wobei die Ladung des wechselwirkenden Fermions sind.
3. Propagator $-S_{ab}(x_i - x_j)/2$ für innere von $x_j$ nach $x_i$ gerichtete Fermionlinie.

4. Propagator $-\gamma_{\mu\nu} D_F(x_i - x_j)/2$ für innere von $x_j$ nach $x_i$ gerichtete Photonlinie und Kontraktion mit $\gamma^\mu$, $\gamma^\nu$ an den Punkten $x_i$, $x_j$.

5. Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $\psi^{(\mp)}$, $\overline{\psi}^{(\mp)}$, $A_\mu^{(\mp)}$ für äußere Fermion- und Photonlinien bzw. $A_\mu^{ex}$ bei Ankopplung an ein klassisches Photonfeld.

6. Einen Faktor (-1) für jede geschlossene Fermionlinie.

7. Integration über alle $x_i^\mu = x_i^0; \vec{x_i}$

## 5.3 Feynman-Graphen im Impulsraum

Zur praktischen Berechnung von Wirkungsquerschnitten sind die Matrixelemente der Streuoperators im Impulsraum zu bestimmen. Daher sind die Fouriertransformierten von Operatoren und Vertauschungsfunktionen zu berechnen. Damit ergeben sich die Feynmanregeln im Impulsraum aus denen des Ortsraumes durch Fouriertransformation. In der Dyson-Entwicklung werden die Komponenten durch ihre Fourierdarstellungen versetzt und dann die Integration über $d^4x_n$ ausgeführt. Ich verweise auf die Referate der Herren Kleinhans, Jürgens und Stockamp, in denen die Feynman-Regeln auf konkrete Beispiele angewendet und damit verdeutlicht werden.

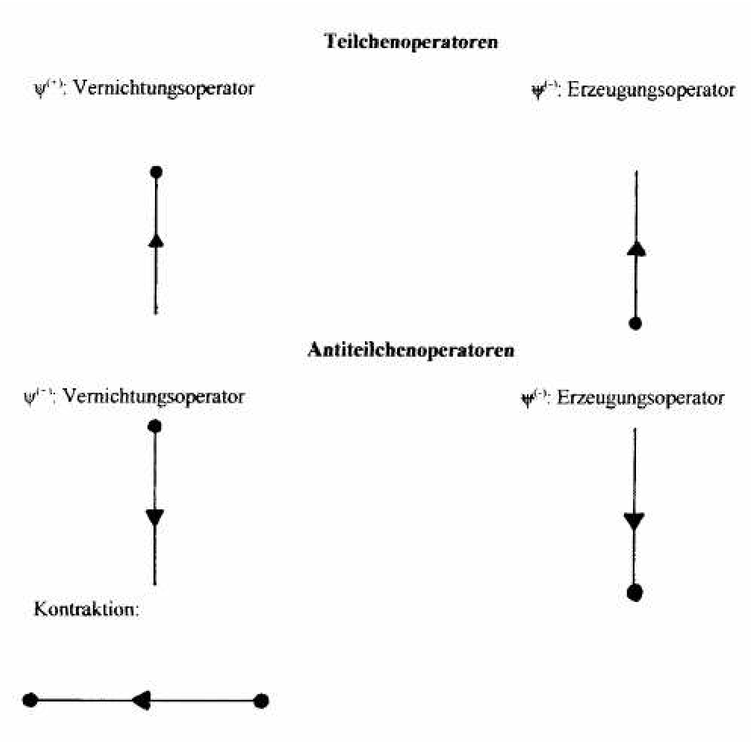


Abbildung 1: Feynmangraphen von Fermionen

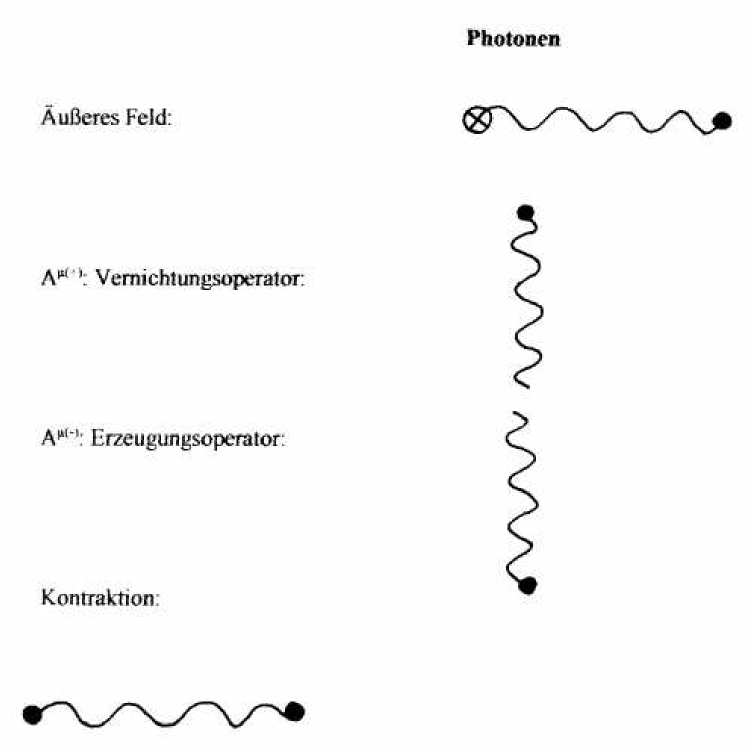


Abbildung 2: Feynmangraphen von Photonen

# 6 Literaturverzeichnis

O. Nachtmann: Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte, Vieweg, 1986

G. Köpp, F. Krüger: Einführung in die Quanten-Elektrodynamik, Teubner, 1997