1 Grundlagen

1.1 Die spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie legt die Rahmenbedingungen fest, denen jede physikalische Theorie entsprechen muss. Sie basiert auf zwei Grundannahmen, die postuliert werden:

1. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt (Forminvarianz).

2. Die Lichtgeschwindigkeit ist eine obere Grenzgeschwindigkeit, die in allen Inertialsystemen denselben Wert c hat.

Ereignisse werden durch Vektoren im 4-dimensionalen Minkowski-Raum dargestellt:

$$x = (x^\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein sogenannter *kontravarianter* Vierervektor, angezeigt durch die oberen Indizes. Im Unterschied dazu ist ein *kovarianter* Vierervektor festgelegt durch:

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$$

Ein (Pseudo-)Skalarprodukt im Minkowski-Raum ist definiert als:

$$(x/y) = x^0 y^0 - \vec{x}\vec{y}$$

Daraus folgt:

$$(x/y) = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu y^\mu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu$$

Das Summenzeichen wird nach Konvention weggelassen. Über gleiche Indizes wird automatisch summiert (*Kontraktion* der Indizes).
Über den *metrischen Tensor* wird der Zusammenhang zwischen kovarianten und kontravarianten Vierervektoren formal:

$$g = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) = g^{-1}$$

oder:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Die Koordinatentransformation auf ein entlang der x^1-Achse gleichförmig mit v bewegtes Koordinatensystem ist die bekannte Lorentztransformation:

$$t' = \frac{t - vx^1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x^{1'} = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3$$

Diese können wir schreiben als:

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Damit können wir schreiben:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Im Minkowski-Raum stellt diese Transformation eine Drehung $(\gamma, 0)$ dar und ist ein Element der *homogenen Lorentz Gruppe*.

Wir definieren den *Impulsvierervektor* durch:

$$P = (P^\mu) := \begin{pmatrix} E \\ \vec{P} \end{pmatrix}$$

Aus $E = m\gamma$ und $\vec{P} = m\gamma\vec{v}$ folgt:

$$\vec{P}^2 = P^\mu P_\nu = E^2 - \vec{P}^2 = m^2(1-v^2)\gamma^2 = m^2$$

Wir erhalten also die *relativistische Energie-Impuls Beziehung* bzw. *Viererimpulserhaltung*.

Definition des Gradienten:

$$\partial_\mu := \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla^k \right\}$$

$$\partial^\mu := \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla^k \right\}$$

1.2 Quantenmechanik

Die Observablen und Zustände eines physikalischen Systems werden durch hermitische Operatoren bzw. Vektoren in einem Hilbertraum dargestellt. Die Zeitentwicklung dieses Systems kann auf verschiedene Arten beschrieben werden. Im Fall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators ist es zweckmässig den sogenannten Zeitentwicklungsoperator zu definieren:

$$U(t,t_0) = \exp(-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar})$$

(Im Folgendem immer $t_0 = 0$)

Schrödinger Bild: Operatoren bleiben konstant und Zustände sind zeitabhängig. Ihre Entwicklung wird festgelegt durch:

$$|\alpha; t\rangle = U(t)\,|\alpha\rangle$$

Wir haben $\frac{\partial}{\partial t}U(t) = \frac{1}{i\hbar}HU(t)$. Daraus folgt:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t)\,|\alpha\rangle = HU(t)\,|\alpha\rangle \quad \Leftrightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\alpha; t\rangle = H\,|\alpha; t\rangle$$

Aus den Eigenschaften des Zeitentwicklungsoperators folgt also die *Schrödingergleichung* für Zustandsvektoren. Durch Lösen der Differentialgleichungen für die Zustandsvektoren können wir die Zeitentwicklung des Systems berechnen.

Heisenberg Bild: Operatoren sind zeitabhängig und Zustandsvektoren bleiben konstant. Der Heisenbergoperator ist definiert als:

$$A^H(t) := U^\dagger(t)A^SU(t)$$

wobei A^S der zeitunabhängige Schrödingeroperator ist. Am Startzeitpunkt gilt:

$$A^H(t = t_0) = A^S$$

Durch Berechnung des Erwartungswertes sehen wir, dass beide Darstellungen dieselben Messergebnisse liefern:

$$\left\langle A^S \right\rangle = \langle \alpha; t|\, A^S\, |\alpha; t\rangle = \langle \alpha|\, U^\dagger(t)A^SU(t)\, |\alpha\rangle = \langle \alpha|\, A^H(t)\, |\alpha\rangle = \left\langle A^H(t) \right\rangle$$

Die Gleichung, die die Zeitentwicklung unseres Systems beschreibt, ist hier die *Heisenberggleichung*, die wir durch einfaches Differenzieren des Heisenbergoperators erhalten:

$$\frac{d}{dt}A^H(t) = \frac{d}{dt}(U^\dagger(t)A^S U(t)) = \frac{1}{i\hbar}\left[A^H(t), H\right]$$

Die *verallgemeinerte Heisenberggleichung* für $A^H(\vec{x}, t)$ ist:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}A^H(\vec{x}, t) = -\frac{1}{i\hbar}\left[A^H(\vec{x}, t), p^j\right]$$

Im Fall eines zeitabhängigen Hamiltonoperators hilft uns die Darstellung im **Dirac Bild**, falls der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als:

$$H(t) = H_0 + V(t)$$

Nun sind sowohl die Operatoren als auch die Zustandsvektoren zeitabhängig. Sie sind definiert als:

$$A^I(t) := exp(i\frac{H_0 t}{\hbar})A^S exp(-i\frac{H_0 t}{\hbar})$$

$$\left|\alpha; t\right\rangle_I := exp(i\frac{H_0 t}{\hbar})\left|\alpha; t\right\rangle_S$$

Erwartungswert:

$$\left\langle A^I \right\rangle = \left\langle {}_I\alpha; t\right| A^I(t)\left|\alpha; t\right\rangle_I = \left\langle {}_S\alpha; t\right| A^S(t)\left|\alpha; t\right\rangle_S = \left\langle A^S \right\rangle$$

Die beiden Gleichungen zur Beschreibung unseres Systems sind nun ganz analog:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\alpha; t\right\rangle_I = V^I(t)\left|\alpha; t\right\rangle_I$$

$$\frac{d}{dt}A^I(t) = \frac{1}{i\hbar}\left[A^I(t), H_0\right]$$

Der zeitabhängige Anteil des Hamiltonoperators liefert uns die Entwicklung des Zustandsvektors und der zeitunabhängige Anteil die der Observablen.

2 Die Quantisierung des Klein-Gordon Feldes

Die Schrödingergleichung entspricht aufgrund der unterschiedlichen Ordnungen der zeitlichen und räumlichen Ableitungen nicht den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie und ist nicht invariant unter Lorentztransformationen.
Als Ansatz für eine relativistische Wellengleichung wenden wir das quantenmechanische Korrespondenzprinzip $E \to i\frac{\partial}{\partial t}$ und $\vec{p} \to -i\nabla$ auf die relativistische Energie-Impulsbeziehung $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ an:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\vec{r},t) = (-\nabla^2 + m^2)\psi(\vec{r},t) \quad \Leftrightarrow \quad (\Box + m^2)\psi(\vec{r},t) = 0$$

Dies ist die *Klein-Gordon Gleichung* für die Wellenfunktion eines Teilchens. Diese Gleichung ist zwar Lorentz-invariant, wir stossen mit ihr aber auf andere Schwierigkeiten, wie z.B. negative Wahrscheinlichkeitsdichten, die im Rahmen einer Einteilchentheorie nicht erklärt werden können. In Anlehnung an die Elektrodynamik versuchen wir daher, die Klein-Gordon Gleichung anstatt auf die Wellenfunktion eines Teilchens auf eine Feldfunktion anzuwenden.
Übergang zu Feldtheorie:

$$(\Box + m^2)\psi(x) = 0$$

Füer ein reelles skalares Feld $\phi(x) = \phi^*(x)$ (x ist ein Vierervektor).

Untersuchung der Lösungen dieser Gleichung: Lösungsansatz mit ebenen Wellen:

$$\phi(x) = e^{i(k_0 t - \vec{k}\vec{x})}$$

Daraus folgt:

$$k^0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \pm\omega$$

Und die beiden unabhängigen Lösungen sind:

$$\phi_+(x) = e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} = e^{ikx}$$

$$\phi_-(x) = e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} = e^{-ikx}$$

Für $k = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}$.

Die ebenen Wellen bilden ein vollständiges Lösungssystem. Wie man zeigen kann ist jede beliebige Lösung darstellbar durch:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} (e^{ikx}\alpha^*(k) + e^{-ikx}\alpha(k))$$

Mit $\alpha(k)$ eine komplexwertige Funktion.

Nun machen wir den Übergang zur Quantenfeldtheorie, indem wir analog zur gewöhnlichen Quantenmechanik den kritischen Grössen Operatoren in einem Hilbertraum zuordnen. Allerdings quantisieren wir hier anstelle eines Teilchens ein Feld.
Unsere Feldfunktion $\phi(x)$ entspricht jetzt dem Erwartungswert eines Feldoperators:

$$\phi(x) = \langle | \, \Phi(x) \, | \rangle$$

Weiterhin machen wir die sinnvollen Annahmen:

Annahme 1:

$$\Phi(x) = \Phi^\dagger(x)$$

$$(\Box + m^2)\Phi(x) = 0$$

Unser Feldoperator soll hermitisch sein und die Klein-Gordon Gleichung erfüllen.

Annahme 2:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi(x) = i\,[P^\mu, \Phi(x)]$$

$\Phi(x)$ erfüllt die verallgemeinerte Heisenberggleichung.

Wir erhalten die Entwicklung des Feldoperators analog zu oben:

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} (e^{ikx}a^\dagger(k) + e^{-ikx}a(k))$$

Wo $\alpha(k)$ und $\alpha^\dagger(k)$ nun Operatoren sind.

Wenden wir Annahme 2 auf diesen Ausdruck an, so erhalten wir durch Ausrechnen der Ableitung und Vergleich:

$$\left[P^\mu, a^\dagger(k)\right] = k^\mu a^\dagger(k) \tag{1}$$

$$[P^\mu, a(k)] = -k^\mu a(k) \tag{2}$$

Im nächsten Schritt wollen wir Zustände in unserem Hilbertraum einführen. Der einfachste Zustand ist der, in dem kein Teilchen vorhanden ist, der sogenannte *Vakuumzustand* $|0\rangle$. Wir fordern als Eigenschaften:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad , \qquad P^\mu |0\rangle = 0$$

D.h. der Vakuumzustand soll normiert sein und den Impuls 0 haben. Wenden wir (1.) auf $|0\rangle$, so erhalten wir:

$$\left[P^\mu, a^\dagger(k)\right]|0\rangle = P^\mu a^\dagger(k)|0\rangle - a^\dagger(k)P^\mu|0\rangle = P^\mu a^\dagger(k)|0\rangle$$

Also

$$P^\mu a^\dagger(k)|0\rangle = k^\mu a^\dagger(k)|0\rangle$$

$a^\dagger(k)|0\rangle$ ist daher ein Impulseigenvektor mit Eigenwert k^μ. Wir können dies als den Zustand eines Teilchens mit definiertem Impuls interpretieren. Analog folgt aus (2.):

$$P^\mu a(k)|0\rangle = -k^\mu a(k)|0\rangle$$

Der negative Impulseigenwert macht aber physikalisch keinen Sinn, wir fordern daher $a(k)|0\rangle = 0$.

Für einen beliebigen Impulszustand $P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle$ folgt:

$$P^\mu a(k)^\dagger |p\rangle = (\left[P^\mu, a(k)^\dagger\right] + a(k)^\dagger P^\mu)|p\rangle = (k^\mu a(k)^\dagger + a(k)^\dagger P^\mu)|p\rangle = (p^\mu + k^\mu)a(k)^\dagger |p\rangle$$

Und analog $P^\mu a(k)|p\rangle = (p^\mu - k^\mu)a(k)|p\rangle$.

Interpretation: durch Anwenden von $a^\dagger(k)$ wird ein beliebiger Zustand um ein Teilchen erhöht, durch Anwenden von $a(k)$ um ein Teilchen vermindert. Wir können durch n-maliges Anwenden von $a^\dagger$ auf den Vakuumzustand einen Zustand mit n Teilchen erzeugen. Wir bezeichnen daher $a^\dagger(k)$ als *Erzeugungsoperator* und $a(k)$ als *Vernichtungsoperator*.

Um nun die Eigenschaften der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren weiter untersuchen zu können und insbesondere ihre Vertauschungsrelationenzu erhalten, benötigen wir die zusätzliche Annahme der *Mikrokausalität*:

Annahme 3: $[\Phi(x), \Phi(y)] = 0$ für $(x-y)^2 < 0$

Dies folgt unmittelbar aus den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie: liegen zwei Ereignisse raumartig zueinander, d.h. liegen sie ausserhalb ihrer jeweiligen Lichtkegel, so können ihre Messungen sich nicht gegenseitig beeinflussen. Der Kommutator muss dann verschwinden.

Für $x = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} t' \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ lautet die Bedingung der Raumartigkeit:

$$(x-y)^2 = (t-t')^2 - (\vec{x}-\vec{y})^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad |t-t'| < |\vec{x}-\vec{y}|$$

Der Kommutator verschwindet für $\vec{x}$ ungleich $\vec{y}$ in einem ganzen t'-Intervall um den Wert t. Also folgt insbesondere für $t' = t$ unter Berücksichtigung der Definition der Ableitung:

$$\left[\Phi(\vec{x}, t), \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{y}, t)\right] = 0$$

Nun schreiben wir die Entwicklung unseres Feldoperators und seiner zeitlichen Ableitung in folgender Weise:

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-i\vec{k}\vec{x}} (e^{i\omega t} a^\dagger(k) + e^{-i\omega t} a(-k))$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{2} e^{-i\vec{k}\vec{x}} (e^{i\omega t} a^\dagger(k) - e^{-i\omega t} a(-k))$$

Dann können wir die Fouriertransformation umkehren und erhalten das Gleichungssystem:

$$e^{i\omega t} a^\dagger(k) + e^{-i\omega t} a(-k) = 2\omega \int d^3x \quad e^{ikx} \Phi(\vec{x}, t) \tag{3}$$

$$e^{i\omega t} a^\dagger(k) - e^{-i\omega t} a(-k) = -2i \int d^3x \quad e^{ikx} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\vec{x}, t) \tag{4}$$

Aus (3.) folgen mit Annahme 3 und der linearen Unabhängigkeit der Exponentialfunktionen die Vertauschungsrelationen:

$$\left[a^\dagger(k_1), a^\dagger(k_2)\right] = 0$$

$$[a(k_1), a(k_2)] = 0$$

Für alle k_1, k_2.

Wenden wir die erste Relation auf den Vakuumzustand an, so erhalten wir:

$$\left[a^\dagger(k_1), a^\dagger(k_2)\right]|0\rangle \quad \Leftrightarrow \quad a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle = a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle$$

Oder $|k_2, k_1\rangle = |k_1, k_2\rangle$. Ein Zustand mit zwei Teilchen ist invariant unter Vertauschung der Impulse. Daraus folgt der *Boson* Charakter unserer Teilchen. Man kann zeigen, dass dies allgemein eine Konsequenz der Mikrokausalität ist.

Aus (3.) und (4.) folgt weiterhin ein Ausdruck für $[a(k_1), a^\dagger(k_2)]$, in dem $[\Phi(\vec{x}, t), \frac{\partial}{\partial t}(\vec{y}, t)]$ vorkommt. Der Kommutator verschwindet für $\vec{x}$ ungleich $\vec{y}$. Es ist physikalisch nicht sinnvoll, dies auch für $\vec{x} = \vec{y}$ anzunehmen. Wir erhalten dann:

$$[\Phi(\vec{x}, t), \frac{\partial}{\partial t}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Und durch Ausrechnen:

$$\left[a(k_1), a^\dagger(k_2)\right] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta^3(k_1 - k_2)$$

Daraus folgt die Norm unserer Zustände:

$$\langle k|k'\rangle = \left\langle 0|a(k)a^\dagger(k')|0\right\rangle = \left\langle 0|[a(k), a^\dagger(k')]|0\right\rangle + \left\langle 0|a^\dagger(k')a(k)|0\right\rangle = \left\langle 0|[a(k), a^\dagger(k')]|0\right\rangle$$

Unsere erzeugten Zustände bilden also ein Orthonormalsystem. Wir können dieses als Basis eines linearen Zustandsraums auffassen, des sogenannten *Fockraums*. Durch n-maliges Anwenden der Erzeugungsoperatoren auf den Vakuumzustand erhalten wir eine Basis für n-Teilchenzustände.