Myonpaarbildung

Henning Jürgens
hjuergen@uni-muenster.de

5. August 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mit der Myonpaarbildung $(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ wird im folgenden einer der fundamentalen Prozesse im Rahmen der Quantenelektrodynamik in niedrigster Ordnung der Störungstheorie beschrieben.

Die theoretischen Grundlagen der Quantenelektrodynamik möchte ich für dieses Ausarbeitung soweit voraussetzen, wie sie auch im Rahmen des zugehörigen Seminars bereits in vorangegangenen Vorträgen ausgearbeitet wurden. Dieses

betrifft insbesondere den Formalismus der Streumatrix (Vortrag von Alexander Trzeciak) sowie der Störungstheorie (Vortrag von Theodor Kuchel).
Allen nachstehenden Rechnungen sind natürliche Einheiten zu Grunde gelegt, es gilt also $\hbar \equiv c \equiv 1$.

2 Das Myon

Das Myon zählt zusammen mit dem Elektron und dem Tauon, sowie den jeweiligen Antiteilchen, zu den Leptonen, deren Beschreibung im Rahmen des Standardmodells sich lediglich in den jeweiligen Teilchenmassen unterscheidet. Die Ruhemasse des Myons/Antimyons m_μ beträgt etwa das 207 fache der Ruhemasse des Elektrons m_e. Gemäß der ansonsten identischen phyiskalischen Deutung (punktförmige Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, Fermi-Dirac-Statistik, Ladung $\pm e$, elektromagnetische und schwache, jedoch keine starke Wechselwirkung), der sogenannten e-μ-τ-*Universalität*, können die unterschiedlichen Leptonen auch durch Analogieschlüsse aus entsprechenden Ergebnissen für das Elektron in die Theorie der Quantenelektrodynamik eingebunden werden.
So werden Myonen(Dirac-)felder durch einen vierkomponentigen Spinor ψ_μ beschrieben, wobei gegenüberdem dem Fall des Elektrons ψ_e lediglich die unterschiedliche Masse berücksichtigt werden muß.
Die Verallgemeinerung der Hamiltondichte der (elektromagnetischen) Wechselwirkung für das Elektron

$$\mathcal{H}_W^e = -e \cdot N\left[\bar{\psi}_e(x) \not{A}(x) \psi_e(x)\right] \tag{1}$$

für den Fall unterschieldlicher auftretender Leptonen lautet

$$\mathcal{H}_W^l = -e \cdot \sum_l N\left[\bar{\psi}_l(x) \not{A}(x) \psi_l(x)\right]. \tag{2}$$

Es werden also alle Einzelbeiträge summiert, ohne daß Mischterme mit zwei unterschiedlichen Fermionen Berücksichtigung finden. Letzeres ist eine Konsequenz aus der empirisch gewonnenen Erkenntnis, daß die Leptonenzahlen

$$N(l) := N(l^-) - N(l^+) \tag{3}$$

für jede der drei Leptonensorten l eine Erhaltungsgröße ist (neben den eigentlichen Fermionen sind hier jeweils auch die entsprechenden Neutrinos ν_l bzw. Antineutrinos $\bar{\nu}_l$ mitzuzählen).
So tritt der zwar ladungserhaltende und energetisch mögliche Zerfall

$$\mu^- \nrightarrow e^- + \gamma \tag{4}$$

nicht auf; hier beträgt die Myonenzahl auf der linken Reaktionsseite eins, auf der rechten null. Stattdessen kann die Reaktion

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{5}$$

beobachtet werden.

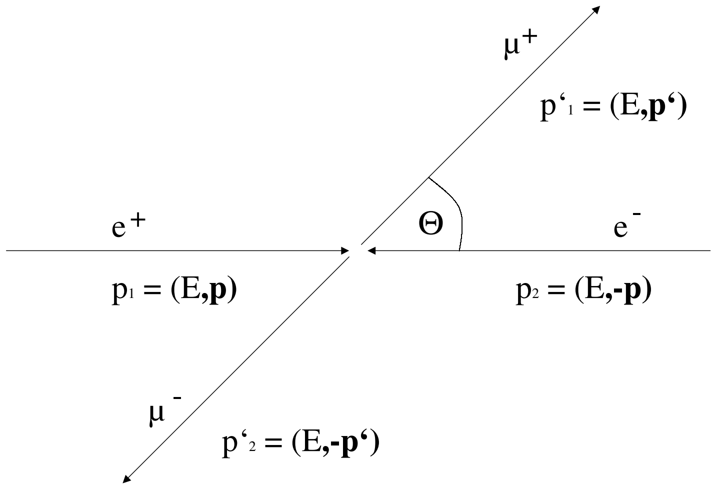

Abbildung 1: ($e^+e^- \to \mu^+\mu^-$): Kinematik im Schwerpunktsystem

3 Der Prozeß ($e^+e^- \to \mu^+\mu^-$)

Ziel der nachstehenden Ausführungen ist die theoretische Berechnung des Wirkungsquerschnittes für den Prozeß ($e^+e^- \to \mu^+\mu^-$). In Abb. ist die Kinematik im Schwerpunktsystem zkizziert. Die Ableitung erfolgt hier im wesentlichen in zwei Schritten:

1. Die störungstheoretische Entwicklung der Streumatrix S in niedrigster Ordnung. Dieser Schritt kann bei Kenntnis des zugehörigen (und leicht anzugebenen, s.u.) Feynmangraphen übersprungen werden. Ich werde hier aber den entsprechenden Term sukzessive aus der allgemeinen S-Matrix extrahieren.

2. Die Berechnung der Feynmanamplitude $\mathcal{M}$ sowie des entsprechenden Betragsquadrates $|\mathcal{M}|^2$. Damit läßt sich dann der ($|\mathcal{M}|^2$ zu proportionale) differentielle Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem direkt angeben.

3.1 Die Entwicklung der Streumatrix S

Zentraler Ausgangspunkt der Störungsrechnung im Rahmen der Qutenelektrodynamik ist die Streumatrix

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int ... \int d^4x_1 ... d^4x_n T \left\{ \mathcal{H}_W(x_1) ... \mathcal{H}_W(x_n) \right\} . \qquad (6)$$

Für den Fall, daß sich die bei der betrachtete Reaktion auftretenden Teilchen auf Leptonen beschränken, läßt sich dieser Term mit Hilfe von (2) in der Form

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\ e)^n}{n!} \int ... \int d^4x_1 ... d^4x_n \sum_{l_1} ... \sum_{l_n} T \left\{ N \left(\bar{\psi}_{l_1} \not{A} \psi_l \right)_{x_1} ... N \left(\bar{\psi}_{l_n} \not{A} \psi_n \right)_{x_n} \right\} \tag{7}$$

schreiben.
Im vorliegenden Fall ist z.B. mit $l_1 = \mu$ und $l_2 = e$ ein Myon und ein Elektron zu berücksichtigen. Eine Störungsrechnung erster Ordnung wäre dann offensichtlich ungenügend und als einfachster Ansatz verspricht erst die zweite Ordnung $S^{(2)}$ eine Beschreibung der Myonpaarbildung aus einer Elektron/Positron-Vernichtung:

$$S^{(2)} = \frac{(i\ e)^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2\ 2 \cdot T \left\{ N \left(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu \right)_{x_1} N \left(\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e \right)_{x_2} \right\} \tag{8}$$

Mit Hilfe des Wickschen Theorems läßt sich das zeitgeordnete Produkt in eine Summe von Normalprodukten entwickeln. Hier sind nur zwei der Summanden von null verschieden:

$$\begin{aligned} S^{(2)} = & - e^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[\left(\bar{\psi}_\mu \not{A} \psi_\mu \right)_{x_1} N \left(\bar{\psi}_e \not{A} \psi_e \right)_{x_2} \right] \\ & - e^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2 N \left[\left(\bar{\psi}_\mu \underbrace{\not{A} \psi_\mu \right)_{x_1} N \left(\bar{\psi}_e \not{A}} \psi_e \right)_{x_2} \right], \end{aligned} \tag{9}$$

Dabei ist der erste Anteil wiederrum uninteressant, er beschreibt zwei getrennte Prozesse und hat nichts mit dem Prozeß $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ zu tun. Der zweite Summand hingegen enthält schließlich den hierfür relevanten Anteil:

$$S^{(2)}_{e^+e^- \to \mu^+\mu^-} = -e^2 \int \int d^4x_1 d^4x_2\ N \left[\left(\bar{\psi}^-_\mu \gamma^\alpha \psi^-_\mu \right)_{x_1} \left(\bar{\psi}^-_e \gamma^\alpha \psi^-_e \right)_{x_2} \right] iD_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \tag{10}$$

3.2 Die Berechnung von $|\mathcal{M}|^2$

In Abb. 2 ist der zu (10) gehörige Feynmangraph skizziert. Die Anwendung der Feynmanregeln[1] führt auf direktem Weg zu der zugehörigen Feynmanamplitude $\mathcal{M}^{(2)}$:

$$\mathcal{M}^{(2)} = -i\, e^2 \bar{u}_\mu(\mathbf{p_2'}) \gamma^\alpha v_\mu(\mathbf{p_1'})\, D_{F\alpha\beta}(p_1 + p_2)\, \bar{v}_e(\mathbf{p_1}) \gamma^\beta u_e(\mathbf{p_2}) \tag{11}$$

Bei ausgeschriebenen Spinorindices r_1, r_2, s_1 und s_2 sowie unter Einsetzen des Photonenpropagators[2] erhält man hier die Form

$$\mathcal{M}^{(2)} = -i\, e^2 \left[\bar{u}_{\mu,s_2}(\mathbf{p_2'}) \gamma_\alpha v_{\mu,s_1}(\mathbf{p_1'}) \right] \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{v}_{e,r_1}(\mathbf{p_1}) \gamma^\alpha u_{e,r_2}(\mathbf{p_2}) \right]. \tag{12}$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts wird nun nicht direkt die Feynmanamplitude, sondern deren Betragsquadrat benötigt, also das Produkt von $\mathcal{M}$

[1] vgl. hierfür 4

[2] hierbei wird der Summand $i\,\epsilon$ vernachlässigt

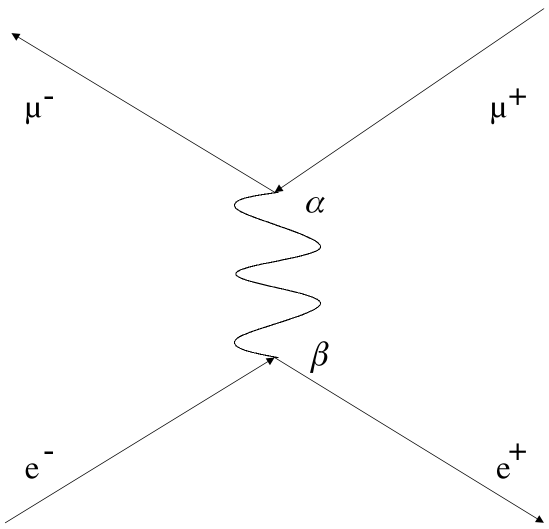

Abbildung 2: Feynmangraph der Reaktion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

und dem konjugierten $\mathcal{M}^*$. Die Konjugation von (12) erleichtert sich durch die allgemeine Kenntnis der Konjugation von Produkten der Form

$$\begin{aligned}(\bar{a}\gamma^\lambda b)^* &= (a^\dagger\gamma^0\gamma^\lambda b)^* = (a^\dagger\gamma^{\lambda\dagger}\gamma^0 b)^* = (a^\dagger\gamma^{\lambda\dagger}b^\dagger\gamma^0)^* \\ &= (a^\dagger\gamma^{\lambda\dagger}\bar{b})^* = (a^\dagger\gamma^0\gamma^\lambda\gamma^0\bar{b})^* = a\gamma^\lambda\bar{b}. \end{aligned} \tag{13}$$

Damit ergibt sich die Konjugation von (12) zu

$$\mathcal{M}^{(2)*} = -i\,e^2\,[\bar{v}_{\mu,s_1}(\mathbf{p_1'})\gamma_\beta u_{\mu,s_2}(\mathbf{p_2'})]\;\frac{1}{(p_1+p_2)^2}\;\left[\bar{u}_{e,r_2}(\mathbf{p_2})\gamma^\beta v_{e,r_1}(\mathbf{p_1})\right]. \tag{14}$$

Damit läßt sich dann ein Ausdruck für das Betragsquadrat der Feynmanamplitude $|\mathcal{M}^2|^{(2)} = \mathcal{M}^{(2)}\mathcal{M}^{(2*)}$ angeben. Dieser hängt allerdings noch explizit von den Spinzuständen der ein- bzz. ausfallenden Teilchen ab. Experimentell am einfachsten realisieren läßt sich aber eine unpolarisierte Elektron/Positron-Strahlung und auch die Detektion der ausfallenden Myonen erfolgt in der Regel nicht spinsensitiv. In diesem Fall muß dann die möglichen einfallenden Zustände gemittelt und über die möglichen ausfallenden Zustände summiert werden:

$$|\mathcal{M}^{(2)'}|^2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{r_1}\sum_{r_2}\sum_{s_1}\sum_{s_2}|\mathcal{M}^{(2)}(r_1,r_2,s_1,s_2)|^2 \tag{15}$$

Die Berechnung kann mit Hilfe der sogenannte Spurtechnik (nämlich als Spur eins Produktes von γ-Matrizen) erfolgen. Ich möchte dies an dieser Stelle aber nicht ausführen, sondern gebe lediglich das Ergebnis an:

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}^{(2)'}|^2 = \frac{e^4}{2m_e^2m_\mu^2(p_1+p_2)^4} \quad &\cdot \quad [(p_1p_1')(p_2p_2') + (p_1p_2')(p_2p_1') \\ &+ \quad m_e^2(p_1'p_2') + m_\mu(p_1p_2) + 2m_e^2m_\mu^2\big] \end{aligned} \tag{16}$$

Für das Schwerpunktsystem läßt sich mit dem dafür zugehörigen Ausdruck nach (20) auch schon der Wirkungsquerschnitt der Reaktion angeben. In diesem Fall vereinfacht[3] sich dieser Ausdruck zu

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{\alpha^2}{16\,E^4}\frac{|\mathbf{p}'|}{E}\left(E^2 + m_\mu^2 + |\mathbf{p}'|^2\,\cos^2(\theta)\right) \tag{17}$$

Im hochenergetischen Grenzfall $E \gg m_\mu$ gilt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{\alpha^2}{16\,E^4}\left(1 + \cos^2(\theta)\right) \tag{18}$$

Die beiden letzten Gleichungen für den Streuquerschnitt weisen wie zu erwarten ein Symmetrie für θ um null auf.

3.3 Anmerkungen

In der obigen Betrachtung wurde der (jedoch geringe) Beitrag der schwachen Wechselwirkung vernachlässigt.

Bei der experimentellen Untersuchung des Prozesses $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ konnten die theoretischen Vorhersagen mit einer sehr hohen Genaugigkeit bestätigt werden. Dieses sichert unter anderem auch die Beschreibung von Leptonen als punktförmige Teilchen bis zu einer ,,Auflösung"von $7\ \cdot 10^{-18}m$.

In heutigen Experimenten der Elementarteilchenphysik dient die Reaktion $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ vor allem auch der Eichung von Wirkungsquerschnitten von Prozessen, die parallel stattfinden. Diese Streuquerschnitte werden dann in Relation zu $\sigma(\mu^-\mu^+)$ angegeben.

Weil die Produktion von möglichen weiteren Leptonen mit einem zu (18) identischen Wirkungsquerschnitt stattfinden müßte, kann heute deren Existenz unterhalb einer Ruhemasse von 45 GeV ausgeschlossen werden. Im Jahr 1975 gelang aus der Reaktion $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ tatsächlich der erste experimentelle Nachweis der Tauonen. (zum Vergleich: die Ruhemasse beträgt hier: $m_\tau = 1,78\ GeV$).

4 Feynmanregeln in der QED

Die Matrixelemente S_{fi} der Streumatrix und die Wirkunsquerschnitte im Schwerpunktsystem von Streuprozessen in der Quantenelektrodynamik lassen sich mit Hilfe der Feynmanamplitude $\mathcal{M}$ darstellen:

$$\begin{aligned}\langle f|\,S\,|i\rangle = \delta_{fi} \quad + \quad & \left[(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\prod_{Fermionen}\left(\frac{m_i}{V\,E_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\ & \left.\cdot \quad \prod_{Photonen}\left(\frac{1}{2\,V\,\omega_i}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\mathcal{M}\end{aligned} \tag{19}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{1}{64\,\pi^2(E_1+E_2)^2}\cdot\frac{|\mathbf{p}_1'|}{|\mathbf{p}_2'|}\cdot\left[\prod_{Leptonen}(2m_i)\right]\cdot|\mathcal{M}|^2 \tag{20}$$

[3]dabei werden Terme propotional zu m_e vernachlässigt und $|\mathbf{p}| = E$ angenommmen

Die Feynmanamplitude $\mathcal{M}$ ergibt sich dabei in einfacher Weise aus den Feynmangraphen. Die im obigen Fall verwendeten Feynmanregeln lauten:

1. Für jeden Vertex schreibe $i\,e\,\gamma^\alpha$
2. Für virtuelle Photonen schreibe $i\,D_{F\alpha\beta}(k)$
3. Schreibe:
   (a) für ein einlaufendes Lepton l_- : $u_r(\mathbf{p})$
   (b) für ein auslaufendes Lepton l_- : $\bar{u}_r(\mathbf{p})$
   (c) für ein einlaufendes Lepton l_+ : $\bar{v}_r(\mathbf{p})$
   (d) für ein auslaufendes Lepton l_+ : $v_r(\mathbf{p})$
4. Sortiere die spinoriellen Faktoren im Sinne der Pfeile im Feynmandiagramm und multipliziere mit einem Phasenfaktor (-1), falls eine ungerade Anzahl von Permutationen benachbarter fermionischer Operatoren für Normalordnung nötig ist.

5 Literatur

- O. Nachtmann: Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte, Vieweg, 1986
- F. Mandl, G. Shaw, Quantenfeldtheorie, AULA, 1993