

Seminarvortrag zum Thema Resonanzen

Christian Schmidt

27.06.2001

1 Einleitung

Resonanzen sind in allen Teilgebieten der Physik ein sehr wichtiges Phänomen und haben auch in der Streutheorie große Bedeutung. Viele Elementarteilchen sind aufgrund ihrer kurzen Lebensdauer überhaupt nur als Resonanzen beobachtbar, und auch in der Kernphysik zeigen sich Resonanzphänomene bei vielen Streuvorgängen. Zur mathematischen Beschreibung im Rahmen der quantenmechanischen Streutheorie werden zunächst einige Werkzeuge eingeführt, die eine Untersuchung des Phänomens mit Hilfe der Funktionentheorie ermöglichen. Im zweiten Teil der Ausarbeitung werden gebundenen Zustände mit den im ersten Teil erarbeiteten Mitteln beschrieben, im letzten Teil werden schliesslich die eigentlichen Resonanzen untersucht.

2 Vorbereitungen

2.1 Reguläre Lösung

Die reguläre Lösung der radialen Schrödingergleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + p^2 + \lambda U(r) \right] \phi_{l,p}(r) = 0$$

mit $U(r) = 2mV(r)$ und dem Kopplungsparameter λ ist diejenige Lösung, die die Asymptotik

$$\phi_{l,p}(r) \rightarrow \hat{j}_l(pr)$$

für $r \rightarrow 0$ erfüllt. Im Gegensatz zur normierten Lösung reicht es hier also, die Umgebung eines einzigen Punktes zu betrachten, um die gesuchte Funktion zu bestimmen. Aus dieser Eigenschaft kann man herleiten, dass die **Lippmann-Schwinger-Gleichung** für die reguläre Lösung die Form

$$\phi_{l,p}(r) = \hat{j}_l(pr) + \lambda \int_0^r dr' g_{l,p}(r, r') U(r') \phi_{l,p}(r')$$

annimmt. Der große Vorteil gegenüber der normierten Lösung ist, dass das Integral bei $r' = r$ abbricht. In einer langen Rechnung kann man zeigen, dass diese Gleichung durch Iteration gelöst werden kann, wobei $\phi^0(r) = \hat{j}_l(pr)$ gesetzt wird. Aus der hier nicht wiedergegebenen Herleitung folgt, dass für die reguläre Lösung die Abschätzung

$$|\phi(r)| \leq \beta \frac{pr}{1+pr} e^{|\lambda\alpha|}$$

gilt, wobei $\alpha(r) = \int_0^r dr |U(r)r|$ und der Faktor $\beta \frac{pr}{1+pr}$ eine Abschätzung für $\sin pr$ ist.

2.2 Jost-Funktion

Die **Jost-Funktion** $f_l(p)$ wird zunächst dadurch eingeführt, dass

$$\phi_{l,p}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2} \left[f_l(p) \hat{h}_l^-(pr) - f_l(p)^* \hat{h}_l^+(pr) \right]$$

Da für die normierte Lösung die Asymptotik

$$\Psi_{l,p}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{i}{2} \left[\hat{h}_l^-(pr) - s_l(p) \hat{h}_l^+(pr) \right]$$

gilt, folgt, dass die Streumatrix in der Form

$$s_l(p) = \frac{f_l(p)^*}{f_l(p)}$$

durch die Jost-Funktion ausgedrückt werden kann. Ausserdem sieht man, dass die Jost-Funktion die (p -abhängige) Proportionalitätskonstante zwischen der regulären und der normierten Lösung darstellt:

$$\phi_{l,p}(r) = f_l(p) \Psi_{l,p}(r)$$

Mit Hilfe der Gleichung $s_l = e^{2i\delta_l}$ kann weiterhin auch die Phasenverschiebung δ_l der Partialwelle durch die Jost-Funktion beschrieben werden, man erhält

$$\delta_l(p) = -\arg f_l(p).$$

Die Phasenverschiebung der Partialwelle ist also einfach die negative Phase der Jost-Funktion. Die Jost-Funktion kann durch die Integralgleichung

$$f_l(p) = 1 + \frac{\lambda}{p} \int_0^\infty dr \hat{h}_l^+(pr) U(r) \phi_{l,p}(r) \quad (1)$$

beschrieben werden. Diese erhält man aus der Lippmann-Schwingergleichung für die reguläre Lösung, indem man die dort vorkommenden Bessel- und Greenfunktionen durch Hankelfunktionen ausdrückt.

2.3 Analytische Eigenschaften der Jost-Funktion

Wie im weiteren Verlauf der Diskussion sichtbar werden wird, stellt es sich als sehr vorteilhaft heraus, die folgenden Rechnungen mit komplexen Impulsen durchzuführen. Die hier betrachtete reguläre Lösung und die Jost-Funktion können analytisch eindeutig in die komplexe Ebene fortgesetzt werden. Dies liegt daran, dass in der iterativen Berechnung der regulären Lösung von einer analytischen Funktion ($\hat{j}_l(pr)$) ausgegangen wurde und die weitere Berechnung die in der Funktionentheorie geforderten Bedingungen erfüllt. Die reelle Lösung kann daher als physikalischer Spezialfall des rein mathematisch für $p \in \mathbb{C}$ gelösten Problems interpretiert werden. Um zu untersuchen, in welchen Bereichen der komplexen Ebene Singularitäten der Jost-Funktion auftreten, wird die Integralgleichung der Jostfunktion (Gl.1) benutzt. Die oben angegebene Abschätzung für die reelle Lösung muss für komplexe Impulse modifiziert werden, da der Sinus für komplexe Zahlen nicht beschränkt ist. Man erhält

$$|\phi(r)| \leq \beta \frac{pr}{1+pr} e^{|\operatorname{Im} pr| e^{|\lambda\alpha|}}.$$

Weiterhin ist bekannt, dass die Hankelfunktion die Asymptotik

$$|\hat{h}_l^+| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \left| e^{i(pr - l\pi/2)} \right| = \left| e^{-\text{Im } pr} \right|$$

erfüllt. Setzt man diese beiden Abschätzungen in Gl.3 ein und macht man keine zusätzlichen Annahmen über das Potential, so sieht man, dass das Integral in Gl.1 nur für $\text{Im } p > 0$ konvergiert. Daher ist $f_l(p)$ nur in der oberen Halbebene sicher analytisch. Da es nur Sinn macht, Analytizität auf einer offenen Menge zu definieren, ist $r = 0$ zunächst ausgeschlossen. Die Jost-Funktion kann allerdings stetig auf die reelle Achse fortgesetzt werden.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Jost-Funktion ist die Beziehung

$$f_l(-p) = [f_l(p)]^*.$$

Auf einen mathematischen Beweis wird hier verzichtet. Diese Beziehung kann jedoch aus physikalischen Gründen plausibel gemacht werden: Da f_l und f_l^* jeweils die Vorfaktoren der ein- und auslaufenden Wellen sind, ist es nicht überraschend, dass die beiden Funktionen ihre Rolle vertauschen, wenn man von p zu $-p$ übergeht. Mit dieser Identität folgt nun für die Streumatrix

$$s_l = \frac{f_l(p)^*}{f_l(p)} = \frac{f_l(-p)}{f_l(p)}$$

Da $f_l(p)$ zunächst nur in der oberen Halbebene definiert war, sieht man, dass der Nenner genau dann analytisch ist, wenn es der Zähler nicht ist und umgekehrt, so dass die Streumatrix bisher nicht ins Komplexe fortgesetzt werden kann.

Betrachtet man Gl.1, so sieht man jedoch, dass auch das Potential in die Berechnung des Integrals eingeht. Durch geeignete Wahl des Potentials kann der analytische Bereich der Jost-Funktion in die negative Halbebene fortgesetzt werden. Dazu zwei Beispiele

- $U(r) = 0$ für $r > r_0$: Falls das Potential in einer (beliebigen!) Entfernung abbricht, konvergiert das Integral in Gl.1 auf jeden Fall, so dass f_l eine ganze Funktion von p wird und s_l damit auf ganz \mathbb{C} meromorph ist.
- $U(r) \sim e^{-\mu r}$: Bei exponentiell abfallendem Potential (wie z.B. das Yukawa-Potential) gibt es für s_l zumindest einen analytischen Streifen um die reelle Achse mit $-\mu/2 < \text{Im } p < \mu/2$

Unter praktischen Gesichtspunkten macht es natürlich keinerlei Unterschied, ob ein Yukawa-Potential in sehr großer Entfernung identisch auf Null gesetzt wird oder nicht, die mathematische Beschreibung durch die Jost-Funktion ändert sich jedoch in der unteren Halbebene massiv. In diesem Zusammenhang sieht man also schon, dass die Eigenschaften der Jost-Funktion in der unteren Halbebene keine physikalische Bedeutung besitzen, wenn man sich sehr weit von der realen Achse entfernt.

3 Gebundene Zustände

3.1 Nullstellen der Jost-Funktion

Die im ersten Teil des Vortrags erarbeiteten analytischen Eigenschaften werden jetzt als erste Anwendung dazu benutzt, die gebundenen Zustände des Streusystems zu beschreiben. Dazu betrachtet man die Nullstellen der Jost-Funktion in der oberen Halbebene, d.h.

$$f_l(p) = 0 \quad \text{mit } p \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \text{Im } p > 0$$

Aus der Definition der Jost-Funktion als Vorfaktoren der ein- und auslaufenden Wellen (s.o.) erhält man für die Nullstelle

$$\phi_{l,p}(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} -\frac{i}{2} \left[f_l(-p) \hat{h}_l^+(pr) \right],$$

und da

$$\hat{h}_l^\pm(pr) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} e^{\pm i(pr - l\pi/2)}$$

ist, folgt, dass

$$\phi_{l,p}(r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$$

Die reguläre Lösung ist also beschränkt und stellt damit eine normierbare Lösung der radialen Schrödingergleichung dar. Sie ist Eigenfunktion des Hamilton-Operators mit dem Eigenwert

$$E = \frac{p^2}{2m} \in \mathbb{R}^-.$$

Da die Energie negativ und reel ist, sieht man, dass die Nullstellen von f_l in der oberen Halbebene alle auf der imaginären Achse liegen müssen. Falls $f_l(p)$ nicht singularär ist, erhält man damit das wichtige Zwischenergebnis

geb. Zustand mit $E = -\frac{p^2}{2m} \iff$ Pol der Streumatrix bei $s_l(ip) = \frac{f_l(-ip)}{f_l(ip)}$
--

Die Beschreibung mit Hilfe der Streumatrix anstatt der Jost-Funktion hat den Vorteil, dass die Streumatrix (im reellen Teil) die experimentell direkt zugängliche Größe ist und auch im Fall der relativistischen Streuung auf jeden Fall definiert ist, was für die Jost-Funktion nicht unbedingt der Fall sein muss.

3.2 Spezialfall $f_l(0) = 0$

Der Fall, dass eine Nullstelle der Jost-Funktion genau im Nullpunkt der komplexen Ebene liegt, ist für die folgende Beschreibung der Resonanzen wichtig und muss zusätzlich untersucht werden. Dazu betrachtet man die radiale Schrödingergleichung für $p = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] y(r) = 0$$

Der mittlere Term, der das Zentrifugalpotential beschreibt, dominiert die Gleichung für kleine r (wegen dem $1/r^2$ -Faktor) und für große r (da das Potential nach Voraussetzung stärker als mit r^{-2} gegen Null geht). In diesen Bereichen erhält man also die beiden Lösungen

$$y(r) \sim r^{l+1} \quad \text{und} \quad y(r) \sim r^{-l}.$$

Da am Nullpunkt keine Singularität vorliegen darf, muss sich die Funktion für kleine r wie r^{l+1} verhalten; und die Normierung erzwingt für große r , dass sich die Funktion wie r^{-l} verhält. Daraus wird klar, dass es nur für $l > 0$ eine normierbare Lösung und damit auch einen gebundenen Zustand geben kann, da die Funktion sich sonst für große r konstant verhalten würde. Eine weitere wichtige Tatsache, die hier allerdings nicht bewiesen werden kann, ist, dass die Nullstelle im Nullpunkt für $l = 0$ eine einfache Nullstelle, für $l > 0$ jedoch eine doppelte Nullstelle ist.

4 Resonanzen

4.1 Nullstellen von f_l in der unteren Halbebene

Nachdem im letzten Abschnitt gezeigt wurde, wie sich gebundene Zustände im zuvor eingeführten mathematischen Formalismus beschreiben lassen, wird nun untersucht, wie Resonanzen sich darstellen und welcher Zusammenhang zwischen Resonanzen und gebundenen Zuständen besteht. Unter der Annahme, dass das Potential eine analytische Fortsetzung von $f_l(p)$ in die untere Halbebene erlaubt, gibt es eine 1:1-Entsprechung von Nullstellen der Jostfunktion und Polstellen der Streumatrix $s_l(p)$. Wir betrachten nun wieder eine Nullstelle der Jost Funktion, d.h. $f_l(\bar{p}) = 0$, jetzt aber mit $\text{Im } \bar{p} < 0$. Genau wie im vorherigen Abschnitt folgt daraus, dass

$$\phi \sim \hat{h}^+$$

Da der Imaginärteil des Impulses jetzt aber negativ ist, divergiert diese Lösung für $r \rightarrow \infty$, so dass keine normierbare Eigenfunktion entsteht. Daraus wird klar, dass durch diese Nullstellen kein gebundener Zustand beschrieben werden kann. Der (komplexe) Impuls an der Polstelle wird für die nachfolgende Rechnung in Real- und Imaginärteil aufgeteilt, also

$$\bar{p} = p_R - ip_I.$$

Zur Vereinfachung der Diskussion wird im folgenden angenommen, dass die Nullstelle der Jost-Funktion eine einfache NS ist (dies muss im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt in der unteren Halbebene nicht unbedingt der Fall sein). Unter dieser Voraussetzung ist die Taylor-Näherung bis zur ersten Ordnung in der Nähe der Nullstelle

$$f(p) = \left(\frac{df}{dp} \right)_{\bar{p}} (p - \bar{p}) + \dots$$

Wie im ersten Teil gezeigt wurde, ist die Phasenverschiebung der l -ten Partialwelle genau die negative Phase der Jost-Funktion. Damit folgt in der Umgebung der Nullstelle

$$\delta_l = -\arg f_l(p) = -\arg \left(\frac{df}{dp} \right)_{\bar{p}} - \arg(p - \bar{p}).$$

Der erste Summand, der die Phase der Ableitung angibt, ist konstant und wird als Hintergrundphasenverschiebung δ_{bg} bezeichnet, der zweite Summand ändert sich in der Umgebung und ist der resonante Teil der Phasenverschiebung δ_{res} . Für den Fall, dass die Nullstelle nah bei der reellen Achse liegt, ändert sich diese resonante Phasenverschiebung um π , wenn man den Impuls entlang der reellen Achse laufen lässt, und zwar um so schneller, je näher die Nullstelle an der reellen Achse liegt (siehe Abb.1).

Dies ist die charakteristische Eigenschaft einer Resonanz:

Resonanz \iff schnelle Änderung von $\delta_l(p)$ um π
--

Da der partielle Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_l(p) = \frac{4\pi(2l+1)}{p^2} \sin^2 \delta_l(p)$$

gegeben ist, erhält man für verschiedene Hintergrundphasenverschiebungen die in Abb.2 gezeigten Resonanzkurven

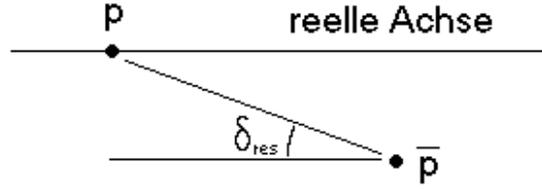


Abbildung 1: Resonanter Teil der Phasenverschiebung in der p -Ebene

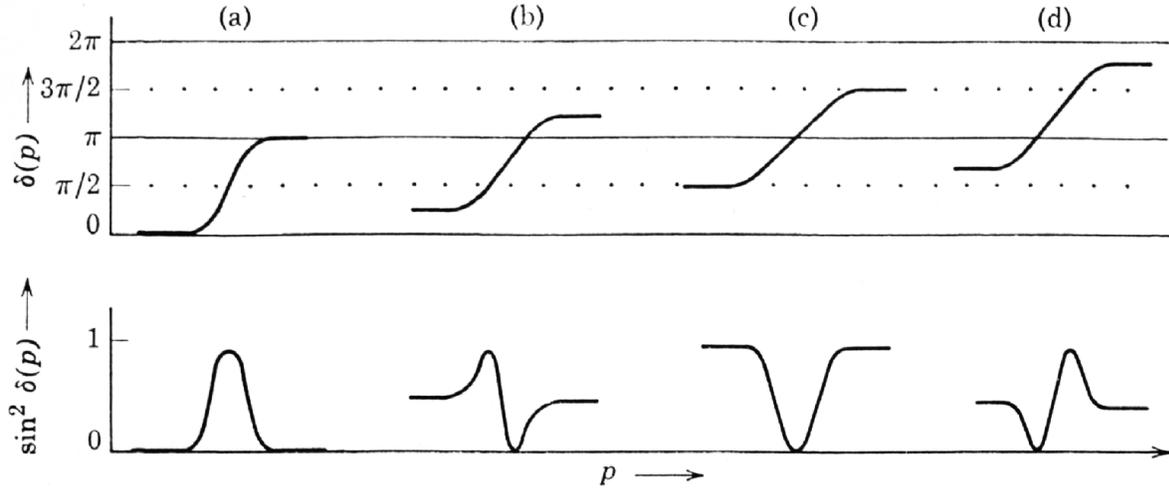


Abbildung 2: Phasenverschiebungen und Wirkungsquerschnitte für verschiedene δ_{bg}

4.2 Breit-Wigner-Formel

Oft werden die Wirkungsquerschnitte nicht als Funktion des Impulses sondern als Funktion der Energie untersucht. Um das bisher gesagte auf die Energie zu übertragen, muss man bedenken, dass jeweils die obere und die untere Halbebene des komplexen Impulses auf die vollständige E -Ebene übertragen werden. Man kann sich die E -Ebene daher aus zwei übereinanderliegenden Riemann-Flächen zusammengesetzt denken. Die gebundenen Zustände werden dann von der imaginären Achse der p -Ebene auf die negative reelle Achse der oberen E -Ebene übertragen, die Nullstellen, die die Resonanzen bewirken, findet man auf der unteren E -Ebene wieder. Die p und E -Ebenen sind in Abb.3 dargestellt, wobei für die Energie nicht zwischen den beiden Riemann-Flächen unterschieden wird.

Eine Nullstelle der Jostfunktion $f_l(E)$ in der unteren Halbebene befindet sich bei der Energie

$$\bar{E} = E_R - i\frac{\Gamma}{2},$$

wobei der Imaginärteil konventionsgemäß als $-\Gamma/2$ bezeichnet wird. Durch Taylorentwicklung wie zuvor erhält man in einer Umgebung von \bar{E} :

$$f_l(E) = \left(\frac{df}{dE} \right)_{\bar{E}} - (E - \bar{E}) + \dots$$

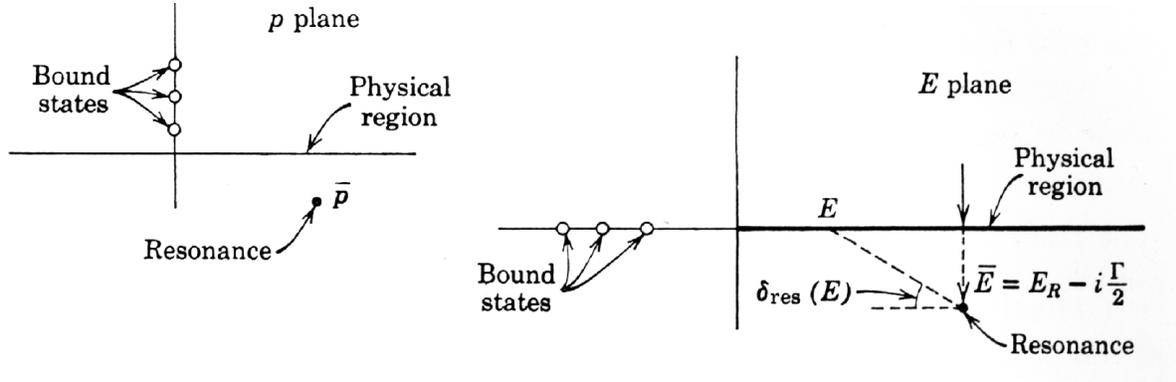


Abbildung 3: komplexe Ebenen des Impulses und der Energie

Wie man leicht aus Abb.3 (unter Benutzung des Satzes von Pythagoras) ablesen kann, gilt

$$\sin \delta_{res}(E) = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2]^{1/2}},$$

und damit für den partiellen Wirkungsquerschnitt die **Breit-Wigner-Formel**

$$\sigma_l(E) \sim \sin^2 \delta_l(E) = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

4.3 Gebundene Zustände und Resonanzen

Wie bisher gezeigt wurde, sind gebundene Zustände äquivalent zu Nullstellen von $f_l(p)$ in der oberen Halbebene und Resonanzen zu Nullstellen in der unteren Halbebene. Um den Zusammenhang zwischen gebundenen Zuständen und Resonanzen aufzuzeigen, betrachtet man die Jost-Funktion nun als Funktion von komplexen p und λ . Wie man zeigen kann, ist f_l immer eine ganze (d.h. auf ganz \mathbb{C} analytische) Funktion von λ . Da die gebundenen Zustände alle auf der negativen imaginären Achse liegen und da für ein genügend schwaches Potential keine gebundenen Zustände mehr existieren, ist klar, dass man ein λ_0 finden kann, für das eine Nullstelle der Jostfunktion bei $p = 0$ vorliegt. Sei zunächst $l = 0$. Die Potenzreihenentwicklung von f_l um $\lambda = \lambda_0$ und $p = 0$ ist dann

$$f_0(\lambda, p) = i\xi p + \eta(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

Für $\lambda = \lambda_0$ gibt es wie erwartet eine einfache Nullstelle bei $\bar{p} = 0$. Für $\lambda \neq \lambda_0$ erhält man eine Nullstelle bei

$$\bar{p} = -i\frac{\eta}{\xi}(\lambda - \lambda_0).$$

Im physikalisch relevanten Fall sind $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, daher wandert die Nullstelle \bar{p} entlang der imaginären Achse. Für $\lambda < \lambda_0$ liegt die Nullstelle in der unteren Halbebene, allerdings nah unter der reellen Achse, so dass es keine Resonanz, sondern einen so genannten "virtuellen Zustand" gibt. Die physikalische Bedeutung eines virtuellen Zustands nah beim Ursprung ist, dass der partielle Wirkungsquerschnitt für $l = 0$ für kleine Energien sehr groß wird, da die Streuränge klein ist. Die Nullstellenverschiebung ist in Abb.4 in der p und in der E -Ebene dargestellt.

Für den Fall, dass $l > 0$ ist, erhält man als Potenzreihenentwicklung

$$f_l(\lambda, p) = \xi p^2 + \eta(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

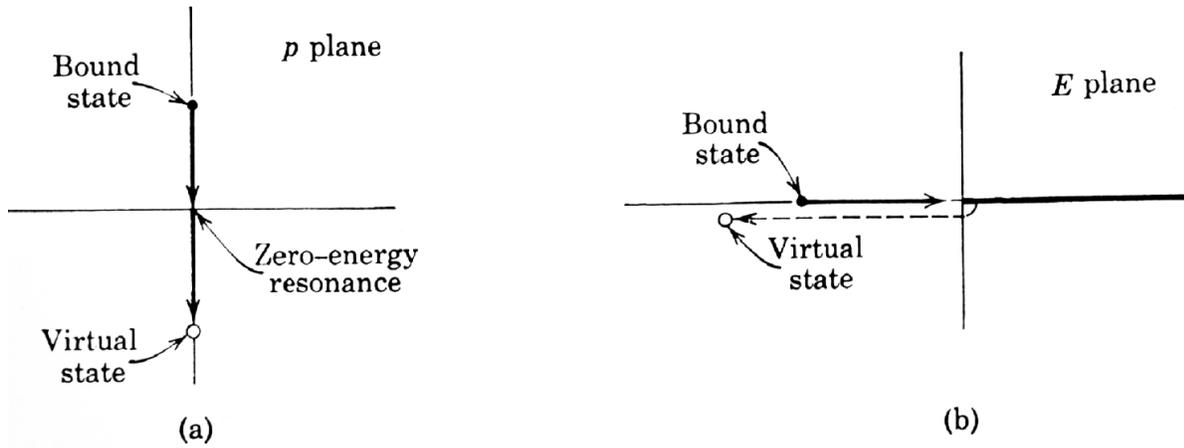


Abbildung 4: Nullstellenverschiebung für $l = 0$

und damit für $\lambda \neq \lambda_0$ zwei Nullstellen bei

$$\bar{p} = \pm i \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^{1/2} (\lambda - \lambda_0)^{1/2}$$

Die Nullstellenverschiebung ist in Abb.5 wieder in der p und in der E -Ebene dargestellt. In der p -Ebene gibt es aufgrund der Wurzel im Nullpunkt eine Richtungsänderung um 90° . Wie man sieht, werden aus den gebundenen Zuständen mit $l > 0$ Resonanzen, die sich für schwächeres Potential immer mehr von der reellen Achse entfernen und daher immer weniger ausgeprägt werden. In Abb.6 ist die Stärke einer Resonanz für vier verschiedene Stärken des Potentials sichtbar. Man sieht, wie die Resonanz immer ausgeprägter und schmaler wird. Im untersten Diagramm wurde das Potential so stark gewählt, dass ein gebundener Zustand entstanden ist.

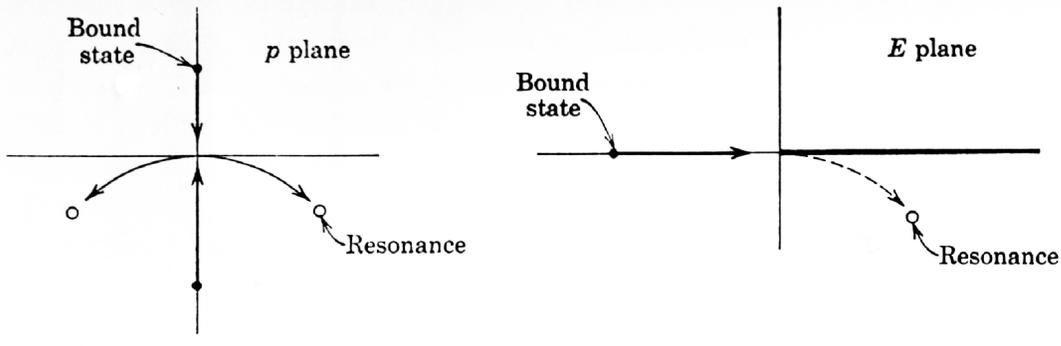


Abbildung 5: Nullstellenverschiebung für $l > 0$

4.4 Zeitverzögerung

Bekanntlich kann man die Wellenfunktion des Streusystems als Summe aus einem einlaufenden freien Wellenpaket und einem gestreuten auslaufenden Wellenpaket betrachten:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \Psi_{in}(\vec{x}, t) + \Psi_{sc}(\vec{x}, t),$$

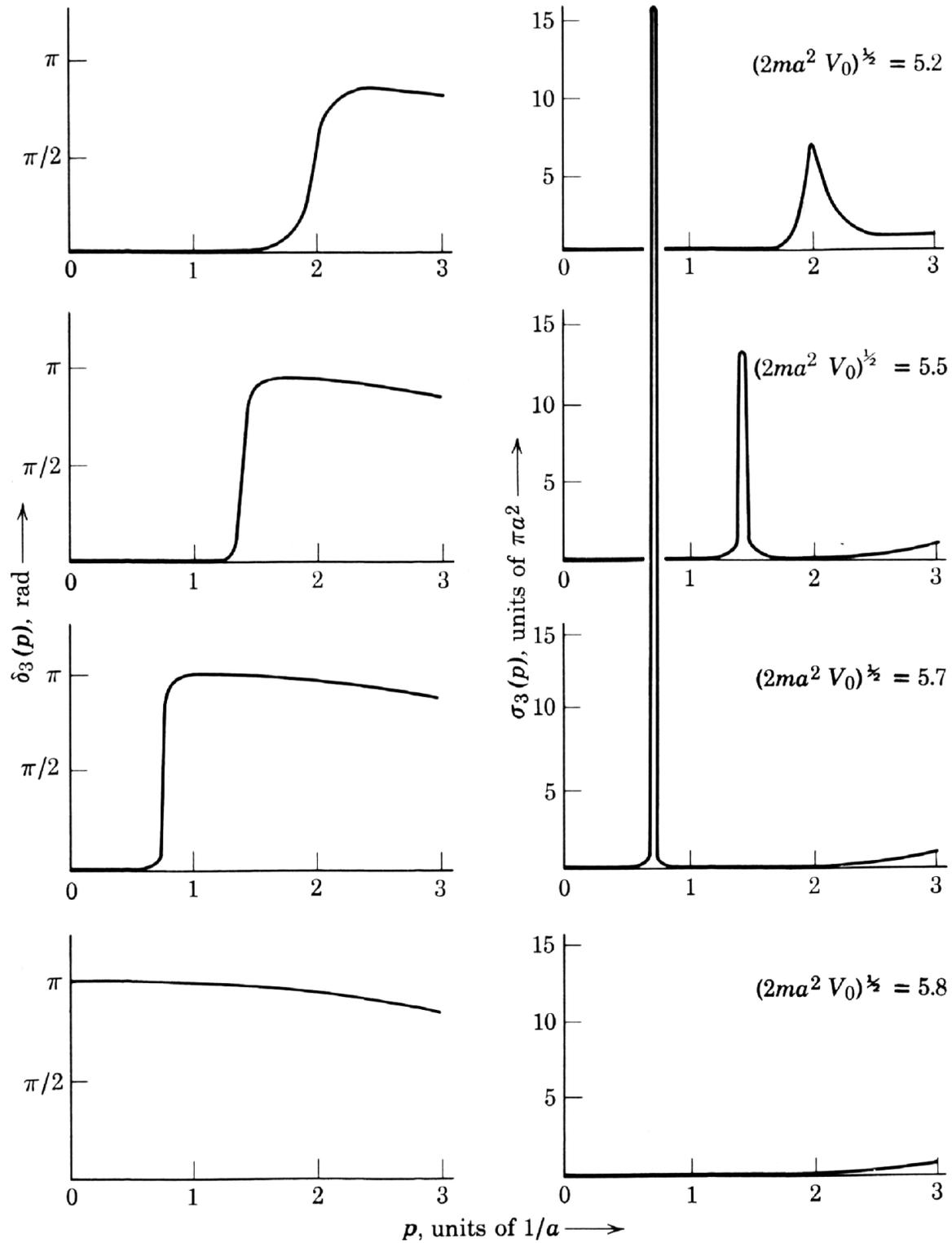


Abbildung 6: Ausprägung einer Resonanz für verschiedene Stärken des Potentials

wobei für die gestreute Welle die Asymptotik

$$\Psi_{sc}(\vec{x}, t) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{r} \int d^p \phi(\vec{p}) f(p\hat{x} \leftarrow \vec{p}) e^{i(pr - Et)}$$

gilt. Bei früheren Betrachtungen wurde die Annahme gemacht, dass $f(p\hat{x} \leftarrow \vec{p})$ verglichen mit der Ausdehnung des Wellenpaketes $\phi(\vec{p})$ so langsam variiert, dass es aus dem Integral herausgezogen werden kann und man damit die Asymptotik

$$\Psi_{sc} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} f(p_0\hat{x} \leftarrow \vec{p}_0) \Psi_{in}(r\hat{3}, t)$$

erhält. Wie wir gesehen haben, ist diese Bedingung bei ausgeprägten Resonanzen nicht mehr unbedingt erfüllt. Die Folge davon ist (ohne Beweis), dass die gestreute Welle mit einer gewissen Zeitverzögerung τ ausgesandt wird, für die die Gleichung

$$\tau_l = \frac{1}{v_0} \frac{d\delta_l}{dp} = \frac{d\delta_l}{dE}$$

gilt. Die Zeitverzögerung kann dabei durchaus auch negativ sein, aufgrund der Kausalität aber höchstens so groß, wie es der Ausdehnung a des Targets entspricht. Dies spiegelt die Tatsache wieder, dass es erst dann eine gestreute Welle geben kann, wenn das ursprüngliche Wellenpaket den Target getroffen hat. Als Auswirkung auf die Steigung der partiellen Phasenverschiebung folgt die Ungleichung

$$\frac{\delta_l}{dp} > -a.$$

Als physikalische Erklärung für die Zeitverzögerung bei der Aussendung der gestreuten Welle wird angenommen, dass das gestreute Teilchen in einen *metastabilen Zustand* eingefangen wird, der nach kurzer Zeit wieder zerfällt. Um die Resonanzkurve genau auszumessen, ist klar, dass zwischen der Resonanzbreite Γ und der Energieauflösung ΔE der Zusammenhang

$$\Delta E \ll \Gamma$$

gelten muss. In diesem Fall ist der Impuls des Wellenpaketes scharf definiert, jedoch die räumliche Ausdehnung entsprechend der Unschärferelation sehr groß. Deswegen besteht eine große Unsicherheit, wann das Wellenpaket das Ziel getroffen und sich der metastabile Zustand ausgebildet hat. Daher kann man in diesem Fall den Zerfall des Zustandes nicht messen. Ist andererseits

$$\Delta E \gg \Gamma,$$

so kann man zwar den Zerfall gut verfolgen, dafür ist die Resonanzkurve aber nicht messbar.

5 Zusammenfassung

5.1 Vorbereitungen

- die *Jostfunktion* $f_l(p)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen regulärer und normierter Lösung der radialen Schrödingergleichung
- die Streumatrix s_l kann durch die Jostfunktion ausgedrückt werden: $s_l(p) = \frac{f_l(-p)}{f_l(p)}$
- für die Phasenverschiebung gilt $\delta_l = -\arg f_l(p)$
- für $\text{Im}(p) > 0$ ist $f_l(p)$ auf jeden Fall analytisch und stetig fortsetzbar auf die reelle Achse
- $f_l(p) \in \mathbb{R}$ für $p \in i\mathbb{R}$
- für “vernünftige” Potentiale ist s_l mindestens in einem Streifen um die reelle Achse definiert und dort auch analytisch

5.2 Gebundene Zustände

- gebundene Zustände mit Energie $E = -\frac{p^2}{2m}$ und Drehimpuls l entsprechen einfachen Nullstellen der Jost-Funktion auf der positiven imaginären Achse, d.h. $f_l(ip) = 0$
- für “hinreichend vernünftige” Potentiale entspricht dies Polstellen von $s_l(p)$
- ist $f_l(0) = 0$ und $l = 0$, so ist die Nullstelle einfach und es gibt keinen gebundenen Zustand
- ist $f_l(0) = 0$ und $l > 0$, so ist die Nullstelle doppelt und es gibt einen gebundenen Zustand (mit $E = 0$)

5.3 Resonanzen

- eine Nullstelle von $f_l(\bar{p})$ mit $\text{Im } \bar{p} < 0$ führt zu schneller Änderung der Phasenverschiebung als Funktion von $p (= \text{Re } \bar{p})$, falls \bar{p} nah an der reellen Achse liegt, und damit zu einer Resonanzkurve für $\sigma_l(p)$
- betrachtet man f_l als Funktion von $\bar{E} \in \mathbb{C}$, so erhält man (aus trigonometrischen Überlegungen) die **Breit-Wigner-Formel**:

$$\sigma_l(E) = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

- für $l > 0$ gilt: gebundene Zustände haben oft (aber nicht immer) entsprechende Resonanzen für ein schwächeres Potential
- für $l = 0$ gibt es sog. “Virtuelle Zustände”
- um die Resonanzkurve genau auszumessen, muss die Resonanzbreite $\Gamma \gg \Delta E$ sein
- die Zeitverzögerung der gestreuten Welle kann als Ausbildung eines “metastabilen Zustands” interpretiert werden
- um den exponentiellen Zerfall eines solchen metastabilen Zustands auszumessen, muss $\Gamma \ll \Delta E$ sein