Graßmann-Variablen

Tim Huege

5. Mai 2000

1 Motivation

Um Fermionen auf eine möglichst einfache Art und Weise behandeln zu können, ist es zweckmäßig, „antikommutierende Zahlen“ (Graßmann-Variablen) einzuführen. Auf diese Art und Weise läßt sich das Pauli-Prinzip berücksichtigen und gleichzeitig die mathematische Formulierung sehr ähnlich der von Bosonen halten.

2 Grundlegende Definitionen

Gegeben sei ein Satz von n Generatoren Θ_i der Graßmann-Algebra. Es gelte

$$\{\Theta_i, \Theta_j\} = 0 \qquad \forall\ i, j \tag{1}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\Theta_i^2 = 0 \tag{2}$$

Die Elemente der Algebra bestehen also aus Polynomen, wobei jeder Generator maximal in erster Potenz auftritt. Somit ist jedes Element darstellbar als *endliche* Reihe der Form

$$g(\underline{\Theta}) = g^{(0)} + \sum_i g_i^{(1)}\Theta_i + \sum_{i_1<i_2} g_{i_1 i_2}^{(2)}\Theta_{i_1}\Theta_{i_2} + \ldots + g^{(n)}\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_n \tag{3}$$

mit den $g^{(i)} \in \mathbf{C}$.

Wegen $\Theta_i = -\Theta_j$ kann man Produkte gleicher Generatoren zusammenfassen. Es ergibt sich eine Reihe mit maximal 2^n Summanden (man denke an

Binärzahlen, die die An- bzw. Abwesenheit der einzlenen Θ_i kennzeichnen). Die Graßmann-Algebra hat also die Dimension 2^n.

Eine Basis einer Graßmann-Algebra der Dimension $n = 2$ wäre also $\{1, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_1\Theta_2\}$.

2.1 Differentiation

Die Differentiation wird wie folgt definiert:

$$\frac{d}{d\Theta_i}\, 1 = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\Theta_i}\, \Theta_i = 1 \tag{4}$$

mit

$$\frac{d}{d\Theta_i}\, \Theta_1\Theta_2 = \delta_{i1}\Theta_2 - \delta_{i2}\Theta_1 \tag{5}$$

Zur Bildung dieser *linksseitigen* Ableitung kommutiert man das entsprechende Θ_i solange nach links, bis die Ableitung direkt auf es wirken kann. Aus (1) ergibt sich demnach das Minuszeichen im zweiten Summanden. Verallgemeinert auf beliebige Produkte gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Theta_i}\Theta_{i_1}\Theta_{i_2}\dots\Theta_{i_m} &= \delta_{ji_1}\Theta_{i_2}\dots\Theta_{i_m} - \delta_{ji_2}\Theta_{i_1}\Theta_{i_3}\dots\Theta_{i_m} + \dots + \\ &\quad +(-1)^{m-1}\delta_{ji_m}\Theta_{i_1}\dots\Theta_{i_{m-1}} \end{aligned} \tag{6}$$

Der Differentialoperator ist ein linearer Operator, daher ist nach (3) die Differentiation eindeutig definiert. Weiterhin gelten folgende Zusammenhänge:

$$\left\{\frac{d}{d\Theta_i}, \Theta_j\right\} = \delta_{ij} \tag{7}$$

$$\left\{\frac{d}{d\Theta_i}, \frac{d}{d\Theta_j}\right\} = 0 \tag{8}$$

Die Richtigkeit von (7) macht man sich am besten mit folgender Fallunterscheidung klar:

$\left\{\frac{d}{d\Theta_i}, \Theta_j\right\}$	$=$ $\frac{d}{d\Theta_i}\Theta_j\Theta_1\dots\Theta_m$	$+$ $\Theta_j\frac{d}{d\Theta_i}\Theta_1\dots\Theta_m$
$i \neq j;\ i \notin [1,m]$	0	0
$i \neq j;\ i,j \in [1,m]$	0	0
$i \neq j;\ j \notin [1,m];\ i \in [1,m]$	$(-1)^i\Theta_j\ \Omega$	$(-1)^{i+1}\Theta_j\ \Omega$
$i = j \in [1,m]$	0	$\Theta_i(-1)^{i+1}\ \Omega$
$i = j \notin [1,m]$	$\Theta_1\dots\Theta_m$	0

wobei $\Omega := \Theta_1 \dots \Theta_{i-1}\Theta_{i+1} \dots \Theta_m$. Somit ergibt sich gerade das Ergebnis δ_{ij}. Die Richtigkeit von Gleichung (8) sieht man ebenfalls mittels einer Fallunterscheidung (wobei ObDA $i<j$) und
$\Phi := \Theta_1 \dots \Theta_{i-1}\Theta_{i+1} \dots \Theta_{j-1}\Theta_{j+1} \dots \Theta_m$:

$$\begin{array}{ccccc}
\left\{ \frac{d}{d\Theta_i}, \frac{d}{d\Theta_j} \right\} & = & \frac{d}{d\Theta_i}\frac{d}{d\Theta_j}\Theta_1 \dots \Theta_m & + & \frac{d}{d\Theta_j}\frac{d}{d\Theta_i}\Theta_1 \dots \Theta_m \\
i \neq j;\ i \text{ oder } j \notin [1,m] & & 0 & & 0 \\
i = j & & 0 & & 0 \\
i \neq j;\ i,j \in [1,m] & & (-1)^{i+1}(-1)^{j+1}\ \Phi & & (-1)^{j}(-1)^{i+1}\ \Phi
\end{array}$$

Aus (8) ergibt sich sofort, daß Ableitungen höherer Ordnung als 1 verschwinden.

2.2 Integration

Die Definition der Integration über Graßmann-Variablen kann nicht über eine Riemannsche Summe o.ä. erfolgen. Betrachte zunächst eine Graßmann-Algebra mit einem einzelnen Generator Θ. Das Integral soll ein lineares Funktional sein, d.h.

$$\int d\Theta(af(\Theta) + bg(\Theta)) = a\int d\Theta f(\Theta) + b\int d\Theta g(\Theta) \quad \in \mathbf{C} \tag{9}$$

und sich verhalten wie die Integration über eine gewöhnliche Funktion $f(x)$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, d.h. analog

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{df(x)}{dx} = f(+\infty) - f(-\infty) = 0 \tag{10}$$

wird definiert:

$$\int d\Theta\ \frac{d\Theta}{d\Theta} = \int d\Theta\ 1 = 0 \tag{11}$$

Integrale über vollständige Differentiale (Ableitungen) verschwinden also. Da Θ nicht als Ableitung geschrieben werden kann, ist das Integral über Θ nichtverschwindend, man definiert es aus praktischen Gründen als 1:

$$\int d\Theta\ \Theta = 1 \tag{12}$$

Gleichung (11) ist gleichbedeutend mit der Forderung von Translationsinvarianz. Denn für $f(\Theta) = f_1 + f_2\Theta$ und mit einer nicht von Θ abhängenden antikommutierenden Zahl η gilt:

$$\begin{aligned} \int d\Theta f(\Theta+\eta) &= \int d\Theta(f_1 + f_2(\Theta+\eta)) = \int d\Theta(f_1+f_2\Theta) + \int d\Theta f_2\eta \\ &= \int d\Theta f(\Theta) + \underbrace{\left[\int d\Theta 1\right]}_{0} f_2\eta = \int d\Theta f(\Theta) \end{aligned} \tag{13}$$

Nach Verallgemeinerung auf n Generatoren gilt $\forall\ i$:

$$\int d\Theta_i\ 1 = 0 \quad , \quad \int d\Theta_i\ \Theta_i = 1 \tag{14}$$

Ein Vergleich von (14) mit (4) zeigt insbesondere, daß hier die *Integration völlig äquivalent der Differentiation* ist! Da hier nur konstante und lineare Terme auftauchen, wirken sich ein Erhöhen und ein Erniedrigen der Ordnung um eine Stufe gleich aus.

Somit gilt entsprechend (7) und (8) natürlich auch:

$$\{d\Theta_i, \Theta_j\} = \delta_{ij} \tag{15}$$

$$\{d\Theta_i, d\Theta_j\} = 0 \tag{16}$$

Bei einer Integration einer Funktion über k Graßmann-Variablen, die analog (3) zerlegt wurde, tragen nur diejenigen Summanden der Reihe bei, in denen alle k Graßmann-Generatoren vorhanden sind. So ergibt z.B.

$$\begin{aligned} \int d\Theta_2 d\Theta_1 g(\Theta_1,\Theta_2) &= \int d\Theta_2 d\Theta_1 (g^{(0)} + g_1^{(1)}\Theta_1 + g_2^{(1)}\Theta_2 + g_{12}^{(2)}\Theta_1\Theta_2) \\ &= g_{12}^{(2)} \end{aligned} \tag{17}$$

Entsprechend (16) gilt (Durchkommutieren der Θ_i)

$$\int d\Theta_1 d\Theta_2 g(\Theta_1,\Theta_2) = -g_{12}^{(2)} \tag{18}$$

3 Folgerungen

3.1 Transformationsverhalten

Betrachte den eindimensionalen Fall $g(\Theta) = g^{(0)} + g^{(1)}\Theta$ und Transformation $\Theta' = \eta + a\Theta$ mit $a \in \mathbf{C}$ und η einer nicht von Θ abhängigen antikommutierende Zahl. Es gilt:

$$\int d\Theta' g(\Theta') = g^{(1)} \tag{19}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \int d\Theta g(\Theta') &= \int d\Theta (g^{(0)} + g^{(1)}\Theta') = \int d\Theta (g^{(0)} + g^{(1)}\eta + g^{(1)} a\Theta) \\ &= g^{(1)} a \end{aligned} \tag{20}$$

Es gilt also:

$$\int d\Theta' g(\Theta') = \frac{1}{a} \int d\Theta g(\Theta'(\Theta)) = \int d\Theta (\frac{d\Theta'}{d\Theta})^{-1} g(\Theta'(\Theta)) \tag{21}$$

Beim Vergleich mit

$$\int dx' g(x') = \int dx \frac{dx'}{dx} g(x'(x)) \tag{22}$$

zeigt sich, daß das Transformationsverhalten hier gerade *umgekehrt* ist. Bei einer linearen Variablentransformation im Mehrdimensionalen nach

$$\Theta'_i = \sum_i^n a_{ij}\Theta_j + \eta_i \tag{23}$$

gilt entsprechend

$$\int d\Theta'_n \dots d\Theta'_1 g(\underline{\Theta'}) = \int d\Theta_n \dots d\Theta_1 \left[\det\left(\frac{d\underline{\Theta'}}{d\underline{\Theta}}\right)\right]^{-1} g(\underline{\Theta'}(\underline{\Theta})) \tag{24}$$

Statt der bei gewöhnlichen Integralen auftretenden Jacobi-Determinante tritt hier also gerade die *inverse* Jacobi-Determinante auf. Für den Spezialfall einer Produktfunktion $g(\underline{\Theta}) = \Theta_1 \dots \Theta_n$ und $\eta_i = 0 \; \forall \; i$ läßt sich dies besonders einfach einsehen.

Für $n = 2$ gilt z.B.

$$
\begin{aligned}
\Theta_1'\Theta_2' &= (a_{11}\Theta_1 + a_{12}\Theta_2)(a_{21}\Theta_1 + a_{22}\Theta_2) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\Theta_1\Theta_2 \\
&= \det \underline{A}\ \Theta_1\Theta_2 \\
&= \left(\sum_{\pi}(sign\ \pi)\prod_{i=1}^{2} a_{i\pi(i)}\right)\Theta_1\Theta_2
\end{aligned} \tag{25}
$$

Die letzte Umformung zeigt, daß das Ergebnis auf die sog. Leibniz-Formel für Determinanten hinausläuft. Für beliebige n wird demnach über alle Permutationen der Indizes summiert, die Vorzeichen der Summanden alternieren durch die Antikommutativität. Damit ergibt sich für beliebiges n also:

$$
\Theta_1' \ldots \Theta_n' = \sum_{i_1 \ldots i_n} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n} \Theta_1 \ldots \Theta_n = \det \underline{A}\ \Theta_1 \ldots \Theta_n \tag{26}
$$

Wegen

$$
\int d\Theta_n \ldots d\Theta_1\ \Theta_1 \ldots \Theta_n = \int d\Theta_n' \ldots d\Theta_1'\ \Theta_1' \ldots \Theta_n' = 1 \tag{27}
$$

muß also gelten:

$$
d\Theta_n' \ldots d\Theta_1' = (\det \underline{A})^{-1}\ \ d\Theta_n \ldots d\Theta_1 \tag{28}
$$

3.2 Gaußsche Integrale

Besondere wichtig ist die Berechnung von Gaußschen Integralen, d.h. n-dimensionalen Integralen der Form

$$
I_n = \int d\Theta_1 \ldots d\Theta_n\ e^{-\frac{1}{2}\ \underline{\Theta}^T \underline{A}\ \underline{\Theta}} \tag{29}
$$

Die Transformationsmatrix $\underline{A}$ läßt sich schreiben als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix:

$$
\underline{A} = \underline{A}^s + \underline{A}^{as} \tag{30}
$$

Somit wird aus der Bilinearform im Exponenten:

$$
\underline{\Theta}^T \underline{A}\ \underline{\Theta} = \underline{\Theta}^T \underline{A}^s\ \underline{\Theta} + \underline{\Theta}^T \underline{A}^{as}\ \underline{\Theta} \tag{31}
$$

Dabei verschwindet

$$\underline{\Theta}^T \underline{A}^s \ \underline{\Theta} = \sum_{i,j} \Theta_i A^s_{ij} \Theta_j = 0 \qquad (32)$$

wegen $\Theta_i\Theta_j = -\Theta_j\Theta_i$. Es trägt also nur der antisymmetrische Teil der Matrix $\underline{A}$ bei. Zur Auswertung des Integrals, entwickelt man nun die e-Funktion in eine Reihe. Durch die Integration werden die Terme der Reihenentwicklung „ausgesiebt“, in denen gerade jeder Generator genau einmal auftritt. Insbesondere haben diese Terme also die Ordnung n. Betrachte das einfache Beispiel $n = 2$:

$$\underline{\Theta}^T \underline{A} \ \underline{\Theta} = a_{12}\Theta_1\Theta_2 + a_{21}\Theta_2\Theta_1 \qquad (33)$$

In der Reihenentwicklung der e-Funktion tauchen nun alle möglichen Potenzen dieser Summe auf. Man sieht sofort, daß hier nur die $n/2{=}1$-te Potenz beiträgt, da in jeder höheren Potenz nur Terme der Ordnung $> n{=}2$ auftauchen. Da jeder Summand in (33) bei beliebigem n immer von der Ordnung 2 ist, ist es nicht möglich, mit einer Potenz dieser Summe Terme ungerader Ordnung herzustellen. D.h. für ungerade n ist I_n grundsätzlich 0! Bei geradem n trägt nur die Potenz $n/2$ bei, da die Summanden ja von der Ordnung 2 sind, d.h. die $n/2$-te Potenz liefert gerade Terme der Ordnung n. Es gilt also:

$$I_n = \frac{1}{(n/2)!} \int d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \ (-\frac{1}{2} \ \underline{\Theta}^T \underline{A} \ \underline{\Theta})^{n/2} \qquad (34)$$

Rechnet man (33) noch weiter aus:

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}^T \underline{A} \ \underline{\Theta} &= a_{12}\Theta_1\Theta_2 + a_{21}\Theta_2\Theta_1 = (a_{12} - a_{21})\Theta_1\Theta_2 \\ &= (a_{12} - (-a_{12}))\Theta_1\Theta_2 = 2a_{12}\Theta_1\Theta_2 \end{aligned} \qquad (35)$$

so ergibt sich als Ergebnis:

$$I_2 = \int d\Theta_1 d\Theta_2 \ -\frac{1}{2} \cdot 2a_{12}\Theta_1\Theta_2 = a_{12} \qquad (36)$$

Ein Vergleich mit

$$\det \underline{A} = -a_{12}a_{21} = a_{12}^2 \qquad (37)$$

zeigt, daß also

$$I_2 = \sqrt{\det \underline{A}} \qquad (38)$$

Dieses Ergebnis gilt auch nach Verallgemeinerung auf die Dimension n, da durch das „Aussieben" mittels des Integrals gerade Produkte von $n/2$ Matrixelementen A_{ij} mit allen Indexkombinationen und alternierenden Vorzeichen summiert werden:

$$I_n = \int d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \; e^{-\frac{1}{2}\; \underline{\Theta}^T \underline{A}\; \underline{\Theta}} = (\det \underline{A})^{1/2} \tag{39}$$

Ein Beweis findet sich unter [1]. Die analoge Gauß-Integralformel für gewöhnliche Zahlen ist - wie im Rahmen des vorhergehenden Vortrags hergeleitet - von gleicher Gestalt, nur steht dort die Determinante im Nenner statt im Zähler, da dort gerade das reziproke Transformationsverhalten vorliegt. Diese Formel läßt sich noch auf den Fall allgemeiner Bilinearformen inklusive linearem Term verallgemeinern, s. dazu [2].

4 Verallgemeinerung

4.1 ins Komplexe

Man verknüpfe zwei Sätze von jeweils n Generatoren Θ_i und Θ_i^*, die allesamt miteinander antikommutieren

$$\{\Theta_i, \Theta_j\} = \left\{\Theta_i^*, \Theta_j^*\right\} = \left\{\Theta_i, \Theta_j^*\right\} = 0 \tag{40}$$

mittels folgender Operation (genannt „Involution"):

$$\begin{aligned}
(\Theta_i)^* &= \Theta_i^* \\
(\Theta_i^*)^* &= \Theta_i \\
(\Theta_{i_1}\Theta_{i_2} \ldots \Theta_{i_m})^* &= \Theta_{i_m}^* \ldots \Theta_{i_2}^* \Theta_{i_1}^* \\
(\lambda\Theta_i)^* &= \lambda^* \Theta_i^*
\end{aligned} \tag{41}$$

wobei $\lambda \in \mathbf{C}$. Die Θ_i und Θ_i^* sind bei Differentiation und Integration als unabhängige Variablen anzusehen. Aus Gleichung (39) wird dann:

$$\int d\Theta_1^* \ldots d\Theta_n^* d\Theta_1 \ldots d\Theta_n \; e^{-\underline{\Theta}^\dagger \underline{A}\; \underline{\Theta}} = \det \underline{A} \tag{42}$$

Da nun über $2n$ statt über n Variablen integriert wird, entfällt die Wurzel. Die Gleichnung läßt sich am einfachsten für antihermitesche Matrizen $\underline{A}^\dagger = -\underline{A}$ beweisen, sie gilt aber auch allgemein.

4.2 ins Kontinuierliche

Man geht von den n Generatoren Θ_i über zu kontinuierlichen Variablen $\Theta(x)$, also einer unendlichdimensionalen Graßmann-Algebra. Die Rechenregeln werden dabei sinngemäß übernommen. So gehen die Summen in der Reihenentwicklung (3) z.B. zu Integralen über. Die Formel (39) wird in der so verallgemeinerten Form dann zur Bestimmung Gaußscher Integrale im Rahmen des Pfadintegralformalismus verwendet. Für Details s. [3].

Literatur

[1] Greiner, Reinhardt: „Feldquantisierung“; Theor. Physik Bd. 7A; Verlag Harri Deutsch; Aufg. 12.6

[2] Greiner, Reinhardt 7A; Aufg. 11.3 und S. 480

[3] Greiner, Reinhardt 7A; Kap. 12.8, S.481/482