Irreversibilität der quantenmechanischen Messung

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder
Vertiefungen zur Quantenmechanik

Ludwig Jens Papenfort

1 Das Messproblem

1.1 Kollaps der Wellenfunktion

Der Messprozess stellt eine diskontinuierliche Zeitentwicklung dar, welche nicht trivial aus der Schrödingergleichung gefolgert werden kann. Letztere beschreibt ausschließlich kontinuierliche Zeitentwicklungen in Form von unitären Transformationen.

Die allgemeinste Form eines durch die Schrödingergleichung beschriebenen Zustandes ist durch eine Superposition der verschiedenen Eigenzustände $|o_j\rangle$ einer Observable $\hat{O}$ gegeben:

$$|\Psi\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle \tag{1}$$

Das Betragsquadrat der Koeffizienten $|c_j|^2$ entspricht nach der Kopenhagener Deutung der Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse $|o_j\rangle$, also der Wahrscheinlichkeit des Messens eines ganz bestimmten Eigenzustandes. Es wird ein Kollaps der Wellenfunktion postuliert, so dass nach dem Messprozess das System sich im gemessenen Eigenzustand befindet. Dies ist in Übereinstimmung mit der experimentellen Beobachtung.

Formuliert man den Zustand in Form eines Dichteoperators, so ergibt sich folgende Darstellung:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_j |c_j|^2 |o_j\rangle\langle o_j| + \sum_{j\neq k} c_j c_k^* |o_j\rangle\langle o_k| \tag{2}$$

Versteht man dies als Matrix, so entsprechen die Diagonalelemente der Wahrscheinlichkeitsdeutung und die restlichen sogenannten Interferenz- bzw. Korrelationstermen. Mit Hilfe des Dichteoperators und der Projektionsoperatoren $\hat{P}_j$ auf die einzelnen Eigenzustände lässt sich nun der Messprozess prägnant zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\langle\Psi| && (3)\\ &\to \sum_j |c_j|^2 |o_j\rangle\langle o_j| = \sum_j |c_j|^2 \hat{P}_j && (4)\\ &\to \hat{P}_j && (5) \end{aligned}$$

Der Kollaps vollzieht sich in genau genommen zwei Schritten. Im ersten Schritt verschwinden die Interferenzterme und der Dichteoperator beschreibt nur noch ein statistisches Gemisch. Im zweiten Schritt wird genau ein Eigenzustand realisiert, welcher daraufhin den Messwert liefert.

Dieser Prozess ist diskontinuierlich und lässt sich nicht trivial aus der Schrödingergleichung folgern.

1.2 Makroskopische Superpositionszustände

Um einen Versuch zu starten den Messprozess mit Hilfe der Schrödingergleichung zu beschreiben, kann man sich konzeptionell eine einfache Kopplung zwischen zu messenden System und Messapparat zugrunde legen.

Das zu messende System $|S\rangle$ befinde sich vor der Messung in einem Superpositionszustand und der Messapparat $|A\rangle$ in einem festgelegten Anfangszustand:

$$|S\rangle = \sum_j c_j |s_j\rangle \tag{6}$$

$$|A\rangle = |A_0\rangle \tag{7}$$

Da System und Messapparat vor der Messung als unabhängig voneinander anzunehmen sind, ergibt sich für den Gesamtzustand vor der Kopplung $|\Psi(0)\rangle$ ein Produktzustand:

$$|\Psi(0)\rangle = |S\rangle \otimes |A\rangle \tag{8}$$

Der Messprozess sei nun durch den Hamiltonoperator einer zeitabhängigen Kopplung $\hat{H}_K(t)$ zwischen System und Messapparat beschreibbar, so ergibt sich aus der unitären Zeitentwicklung der Schrödingergleichung folgender Gesamtzustand zur Zeit t:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_K(t')dt'} |\Psi(0)\rangle \tag{9}$$

Der Messprozess soll dabei die gemessene Observable $\hat{O}_S$ des Systems mit einem beobachtbaren Zeiger $\hat{O}_A$ in Verbindung bringen, womit der Messapparat den Zustand der Zeigerposition $|A_j\rangle$ zum Messergebnis $|s_j\rangle$ verbindet. Der Hamiltonoperator einer solchen Kopplung kann in einfacher Form durch eine Kopplungsfunktion $K(t)$ und dieser Observablen beschrieben werden:

$$\hat{H}_K = K(t)\,\hat{O}_A \otimes \hat{O}_S \tag{10}$$

Die Kopplungsfunktion ist dabei nur für ein endliches Zeitintervall ungleich Null. Dies führt nach dem Verstreichen der Zeit t mit $\phi_j \in \mathbb{R}$ zum Zustand:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j e^{i\phi_j} c_j |s_j\rangle |A_j\rangle \tag{11}$$

Dies beschreibt jedoch einen makroskopischen Superpositionszustand, da der Messapparat simultan die Zustände verschiedener Zeigerpositionen aufweist. Der Messapparat ist mit dem zu beobachtenden System verschränkt. Ein solches Verhalten tritt nach unseren Erfahrungen nach jedoch nicht im Makrokosmos auf, was eine zusätzliche Erklärung erfordert. Zudem fehlt der im vorangegangenen angesprochene Kollaps der Wellenfunktion zu einem definierten Messwert. Man spricht bis zu diesem Punkt vom sogenannten Premeasurement.

1.3 Problem der bevorzugten Basis

Reduziert man den Messprozess auf eine Kopplung von zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen, wobei der eine das zu messende System und der andere den Messzeiger darstellt, so lässt sich das Problem der bevorzugten Basis einfach illustrieren.

Beschreibt man den Messprozess der z-Komponente des Spins wie im vorangegangenen durch eine zeitlich begrenzte Kopplung, so ergibt sich analog ein verschränkter Zustand:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_1^z |-\rangle_2^z - |-\rangle_1^z |+\rangle_2^z \right] \tag{12}$$

Der zweite Spin stellt nun immer das entgegensetzte des ersten Spins dar.

Führt man einen Basiswechsel zur Observable der x-Komponente des Spins, so folgt für den Zustand:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+\rangle_1^x |-\rangle_2^x - |-\rangle_1^x |+\rangle_2^x \right] \tag{13}$$

Der Zustand, welcher sich aus dem Premeasurement ergibt, beschreibt also eine Messung der z- und x-Komponente, obwohl für beide Observablen $[\sigma_x, \sigma_z] \neq 0$ gilt. In der bisherigen Beschreibung ist die Messgröße nicht fest definiert. Beim endgültigen Messvorgang wird also zusätzlich die Basis der beabsichtigten Observable bevorzugt.

Einen modernen Erklärungsansatz zu diesen Problemen bieten die Überlegungen zur Dekohärenz, die im Folgenden grundlegend behandelt werden sollen.

2 Dekohärenz

2.1 Statistische Information der Subsysteme

Die statistische Information über ein Subsystem ist im Fall eines verschränkten Zustandes nicht trivial über den Dichteoperator des Gesamtzustandes zu gewinnen, da in diesem Fall kein Produktzustand vorliegt.

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_1^z\,|-\rangle_2^z - |-\rangle_1^z\,|+\rangle_2^z\right] && (14) \\ \hat{\rho} &= |\Psi\rangle\,\langle\Psi| \neq \sum_{j=+,-} |c_j|^2 \left[\hat{P}_j^1 \otimes \hat{P}_j^2\right] && (15) \end{aligned}$$

Um nun trotzdem auf die Informationen zu schließen, führt man den sogenannten reduzierten Dichteoperator zu einem Subsystem ein:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \mathrm{Spur}_2\,(\hat{\rho}) && (16) \\ &= \sum_j \langle j|\hat{\rho}|j\rangle_2 && (17) \\ &= \frac{1}{2}\left[\hat{P}_+^1 + \hat{P}_-^1\right] && (18) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Operators folgt für den Erwartungswert einer Observable $\hat{O}_1$ des Subsystems:

$$\left\langle \hat{O}_1 \right\rangle = \mathrm{Spur}\left(\hat{\rho}\hat{O}_1\right) = \mathrm{Spur}\left(\hat{\rho}_1\hat{O}_1\right) \qquad (19)$$

Im Fall eines verschränkten Zustand stellt der reduzierte Dichteoperator ein statistisches Gemisch dar. Ist der Zustand jedoch ein Produktzustand der Subsysteme, so ergibt sich für den reduzierten Dichteoperator ein reiner Zustand. Dies kann als Hinweis auf den Messprozess gedeutet werden.

2.2 Einfluss der Umgebung

Der Ansatz der Dekohärenz liegt in der Tatsache, dass jede Messapparatur zwangsläufig mit der Umgebung wechselwirkt, da nur von einem makroskopischen Messgerät auch Messergebnisse abgelesen werden können.

Diesen Einfluss stellt man nun durch einen noch nicht näher beschriebenen Zustand der Umgebung dar, welche am Messprozess teilnimmt. Die Umgebung sei dabei zu Beginn in einem Anfangszustand $|E_0\rangle$ und bilde mit der Messapparatur sowie dem zu messenden System einen Produktzustand:

$$|\Psi_{SAE}\,(0)\rangle = |S\rangle\,|A_0\rangle\,|E_0\rangle \qquad (20)$$

Der Messprozess sei wieder durch eine Kopplung zwischen System und Messapparatur im Zeitintervall $t \in (0, t_1]$ beschrieben. Die Kopplung von Messapparatur und Umgebung sei zunächst vernachlässigt. Es ergibt sich analog zum vorherigen Vorgehen:

$$|\Psi_{SAE}(t_1)\rangle = \left[\sum_j c_j |s_j\rangle |a_j\rangle\right] |E(t_1)\rangle \tag{21}$$

Nun soll die Kopplung des verschränkten Systems an die Umgebung $\hat{H}_{SA,E}$ zum tragen kommen. Mit $t_2 > t_1$ folgt dann analog:

$$|\Psi_{SAE}(t_2)\rangle = \sum_j c_j |s_j\rangle |a_j\rangle |e_j\rangle \tag{22}$$

Hier bilden System, Messapparat und Umgebung einen verschränkten Gesamtzustand. Die statistische Information über Messapparatur und System lässt sich nun durch den reduzierten Dichteoperator gewinnen:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{SA} &= \mathrm{Spur}_E\left(\hat{\rho}_{SAE}\right) &(23)\\
&= \mathrm{Spur}_E\left[|\Psi_{SAE}(t_2)\rangle \langle\Psi_{SAE}(t_2)|\right] &(24)\\
&= \sum_{j,k} c_j c_k^* |s_j\rangle |a_j\rangle \langle a_k| \langle s_k| \langle e_k|e_j\rangle &(25)
\end{aligned}$$

Modellierungen der Umgebung zB. durch sehr viele harmonische Oszillatoren ergeben, dass die verschiedenen Umgebungszustände nach sehr kurzer Zeit Orthogonalität entwickeln:

$$\langle e_k|e_j\rangle \xrightarrow{t} \delta_{j,k} \tag{26}$$

Damit folgt jedoch, dass nach einer, für die Umgebung charakteristische Dekohärenzzeit τ_D die Interferenzterme des reduzierten Dichteoperators verschwinden:

$$\hat{\rho}_{SA} \xrightarrow{\tau_D} \sum_j |c_j|^2 \left[\hat{P}_j^S \otimes \hat{P}_j^A\right] \tag{27}$$

Die Deutung dieses Verhaltens ist nun, dass die Interferenzterme durch die Kopplung an die Umgebung wegfließen und nicht mehr im isolierten Subsystem aus Messapparat und System beobachtbar sind. Es tritt kein Kollaps in ein statistisches Gemisch auf, jedoch geht die Interferenz durch die Komplexität der Umgebung schnell aber kontinuierlich verloren.

Der Gesamtzustand ist noch immer ein verschränkter reiner Zustand, nur das isoliert betrachtete Subsystem erscheint als statistisches Gemisch. Als Beispiel beträgt die Dekohärenzzeit eines Staubpartikels unter der kosmischen Hintergrundstrahlung $\tau_D \approx 10^{-7}$s. Diese ist für größere Systeme umso kürzer und erklärt damit das nicht vorhanden sein von makroskopischen Interferenzeffekten.

Als weiteren Punkt kann man annehmen, dass die Kopplung an die Umgebung die Messung nicht stört, da sonst die Korrelation zwischen Messapparat und System nicht gewährleistet ist. Dies wäre aber keine geeignete Messapparatur. Aus dieser Bedingung folgt direkt:

$$\left[\hat{H}_{SA,E}, \hat{P}_j^A\right] = 0 \quad \forall j \tag{28}$$

Dies hat zur Folge, dass durch die Kopplung des Messapparates an die Umgebung die Observable festgelegt ist, welche im Messprozess gemessen wird. Alle anderen Möglichkeiten werden durch die Umgebung unterdrückt. Dadurch ist die Basis allerdings eindeutig festgelegt:

$$|\Psi_{SAE}(t_2)\rangle = \sum_j c_j |s_j\rangle |a_j\rangle |e_j\rangle \tag{29}$$

Wenn diese Basisdarstellung existiert, was hier angenommen wird, ist sie festgelegt und eindeutig.

2.3 Konsequenzen

Durch die einfache Beschreibung der Kopplung an die Umgebung ergibt sich bereits ein besseres Verständnis für die beim Messprozess auftretenden Probleme. So folgt daraus direkt ein statistisches Gemisch und keine Superpositionszustände des makroskopischen Messapparats. Zudem wird eine ganz bestimmte Basis und damit eine bestimmte Observable innerhalb des Messprozesses festgelegt.

Es gibt jedoch einige Unklarheiten, welche nur durch weitere Überlegungen geklärt werden könnten.

Der Gesamtzustand bildet immer noch eine Superposition. Wie man diese Superposition zu verstehen hat und was für Konsequenzen sich daraus ergeben kann hier nicht geklärt werden.

Ebenso ist ungeklärt, wie man das sich daraus ergebende statistische Gemisch deuten soll, denn dies ist kein statistisches Gemisch im klassischen Sinne. Im gleichen Gedankengang muss beachtet werden, dass nach der Messung genau ein Eigenzustand und damit ein fester Messwert vorliegt. Wie dieser aus der Superpostion bzw. dem statistischen Gemisch folgt ist fraglich.

3 Spin-Messung am Elektron

In diesem letzten Teil soll gezeigt werden, dass die Information über den Zustand vor der Messung prinzipiell unwiederbringlich verloren geht.

3.1 Beschreibung des Messvorgangs

Dazu denke man sich einen Messapparat mit einem Zeiger, welcher zwei Zustände abhängig von der gemessenen Spinorientierung besitzt. Dieser Zeiger besitze die Schwerpunktskoordinate q und den dazu kanonischen Impuls p. Der Anfangszustand des Zeigers sei in einer Ruhestellung bei $q = 0$. Die Messung führt nun zum Ausschlag des Zeigers um die Strecke L:

$$S_z = \pm\frac{\hbar}{2} \Rightarrow q = \pm L \tag{30}$$

Auch hier sei die Messung durch eine Kopplung zwischen Zeiger und Spin beschrieben, welche im Zeitintervall $t \in [0, \tau]$ wirkt. Der Hamiltonoperator der Kopplung nimmt die folgende einfache Form an:

$$\hat{H}_K = \frac{2}{\hbar} V\left(t\right) \hat{S}_z \hat{p} \tag{31}$$

Dabei ist $\hat{p}$ der Impulsoperator und $V\left(t\right)$ die Geschwindigkeit des Zeigers. Es gilt demnach:

$$\int_0^\tau V\left(t\right) dt = L \tag{32}$$

Da der makroskopische Messapparat aus sehr vielen quantenmechanischen Teilsystemen besteht, resultieren für diesen sehr viele Freiheitsgrade in der Größenordnung von 10^{23}. Der Zustand des gesamten Messapparats hängt im Allgemeinen von all diesen Freiheitsgraden ab. Der Anfangszustand vor der Messung $|A_0\rangle$ ist durch den Zeiger in der Ruhestellung mit $q = 0$ charakterisiert.

Das zu messende Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen befinde sich in einem Superpositionszustand bezüglich der z-Komponente des Spins:

$$|e_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{33}$$

Der Gesamtzustand von Messapparatur und Teilchen sei vor dem Messvorgang wiederum durch einen Produktzustand gegeben:

$$|\Psi\left(0\right)\rangle = |e_0\rangle \otimes |A_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} |A_0\rangle \tag{34}$$

Mit der unitären Zeitentwicklung der Schrödingergleichung folgt der Gesamtzustand nach der Kopplung:

$$|\Psi(0)\rangle \xrightarrow{\tau} \hat{U}_t(\tau)\,|\Psi(0)\rangle = |\Psi(\tau)\rangle \tag{35}$$

Der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}_t(\tau)$ enthält den Hamiltonoperator der Kopplung und lässt sich weiter vereinfachen:

$$\hat{U}_t(\tau) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^\tau \hat{H}_K(t)dt} = e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma_z\hat{p}\int_0^\tau V(t)dt} = e^{-\frac{i}{\hbar}\sigma_z\hat{p}L} \tag{36}$$

Insgesamt ergibt sich für den Gesamtzustand nach der Kopplung:

$$|\Psi(\tau)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}L\hat{p}}\,|A_0\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}L\hat{p}}\,|A_0\rangle \tag{37}$$

Hier wirkt der Faktor $e^{\pm\frac{i}{\hbar}L\hat{p}}$ nur noch auf den Zustand des Messapparates und bewirkt, analog zum Zeitentwicklungsoperator, eine Transformation der Ortskoordinate um die Länge L. Mit anderen Worten, der Anfangszustand mit dem Zeiger in der Ruhestellung wird auf einen Zustand $|A_\pm\rangle$ mit dem Zeiger bei $q \pm L$ transformiert:

$$|A_\pm\rangle = e^{\pm\frac{i}{\hbar}L\hat{p}}\,|A_0\rangle \tag{38}$$

Der Gesamtzustand nach der Kopplung entspricht einer Korrelation zwischen Spinorientierung und Zeigerposition:

$$|\Psi(\tau)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} |A_+\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} |A_-\rangle \tag{39}$$

Die bereits angesprochenen Probleme mit diesem Gesamtzustand seien vorerst unbeachtet.

Um nun den Zustand des Elektrons vor der Messung rekonstruieren zu können, müssen α und β bekannt sein. Über den Erwartungswert der Zeigerstellung, lässt sich auf das Verhältnis der Beträge beider Größen schließen:

$$\left\langle \hat{S}_z \right\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathrm{sign}(q)\rangle = \frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 - |\beta|^2\right] \tag{40}$$

Nun fehlt noch die Information über die relative Phase $\frac{\alpha}{\beta}$ beider Größen. Dazu konstruiere man sich einen Operator $\hat{A}$ mit dem Erwartungswert $\left\langle \hat{A} \right\rangle = \hbar\alpha\beta^*$. Dieser ist beispielsweise über folgende Relationen konstruierbar:

$$\hat{A}_1 = \hat{S}_x\cos(2L\hat{p}) + \hat{S}_y\sin(2L\hat{p}) \tag{41}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{S}_x\sin(2L\hat{p}) - \hat{S}_y\cos(2L\hat{p}) \tag{42}$$

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + i\hat{A}_2 = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{2iL\hat{p}} \tag{43}$$

Damit ergibt sich das Bild, dass nach dem Premeasurement der Zustand des Teilchens vollständig rekonstruierbar ist. Bis hier hin ist der Messprozess reversibel. Jedoch verlangt die Abwesenheit von makroskopischen Superpositionszuständen, dass der Messprozess an diesem Punkt noch nicht abgeschlossen sein kann.

3.2 Weitere Zeitentwicklung

Geht man nun von einer weiteren Zeitentwicklung nach der Schrödingergleichung aus, so muss diese durch den Hamiltonoperator des Gesamtsystems $\hat{H}_{AT}$ beschrieben werden. Führt man diese aus und nimmt man vereinfachend an der Hamiltonoperator ist unabhängig von der Zeit, so folgt sofort:

$$\begin{aligned} |\Psi(\tilde{\tau} > \tau)\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{AT}\tilde{\tau}} |\Psi(\tau)\rangle && (44) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{AT}\tilde{\tau}} \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}L\hat{p}} |A_0\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}L\hat{p}} |A_0\rangle \right] && (45) \end{aligned}$$

Berechnet man mit diesem Zustand den Erwartungswert von $\hat{A}$, zeigt sich durch eine Ortstransformation des Hamiltonoperators durch die beteiligten Faktoren ein anderes Bild:

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \hbar\alpha\beta^* \left\langle e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}(q-L)} e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}(q+L)} \right\rangle \tag{46}$$

Nähert man den hinzugewonnen Erwartungswert für kleine Zeiten, stellt sich heraus, dass dieser gegen Null strebt. Wenn aber dieser Term gegen Null strebt, so strebt auch der Erwartungswert von $\hat{A}$ gegen Null, wodurch die Information über die relative Phase verloren geht.

3.3 Konstante der Bewegung

Ein weiterer Versuch diese Information trotzdem zu gewinnen, ist sich eine Konstante der Bewegung anzusehen, welche nicht von der zeitlichen Entwicklung betroffen ist. Ein Beispiel aus der klassischen Mechanik wäre der konstante Anfangsort:

$$q_0(t) = q - t\frac{p}{m} = q_0 \tag{47}$$

In diesem Fall ergibt sich solch eine Konstante der Bewegung $\hat{A}'$ wie folgt:

$$\hat{A}' = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}} \cdot \hat{A} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}} \tag{48}$$

Wie einfach nach zu rechnen ist, fällt durch die zusätzlichen Faktoren der Informationsverlust durch die Zeitentwicklung des Zustands weg:

$$\left\langle \hat{A}' \right\rangle = \left\langle \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{2iL\hat{p}'} \right\rangle = \hbar\alpha\beta^* \tag{49}$$

Der transformierte Impulsoperator hängt jetzt allerdings von den Freiheitsgraden des Hamiltonoperators ab, und damit von den Freiheitsgraden des makroskopischen Messapparats:

$$\hat{p}' = e^{-\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}(q,q_1,\ldots,q_N)} \cdot \hat{p} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{\tau}\hat{H}_{AT}(q,q_1,\ldots,q_N)} \tag{50}$$

Die N Freiheitsgrade des Messapparats sind aber unbekannt und eine gleichzeitige Messung dieser Freiheitsgrade ist praktisch völlig unmöglich. Die Konsequenz ist, dass die Observable $\hat{A}'$ nicht messbar ist, in Analogie zur klassischen Mechanik, in dem Fall dann in die statistische Physik übergegangen wird.

Der Zustand ist nicht rekonstruierbar und wird alleine durch die makroskopische Messapparatur praktisch irreversibel.

Literatur

[1] Gennaro Auletta. *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2009.

[2] Asher Peres. Quantum measurements are reversible. *American Journal of Physics*, 42:886–891, 1974.

[3] Asher Peres. Can we undo quantum measurements? *Physical Review*, D22:879–893, 1980.

[4] Maximilian Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev.Mod.Phys.*, 76:1267–1305, 2004. arXiv:quant-ph/0312059v4.