

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Physik  
Quantenlogik

Martin Kohn  
martin-kohn@gmx.de

Münster, 14.09.2009

# 1 Einleitung

Die Quantenlogik beschreibt die Anwendung der klassischen, alltäglichen Logik auf quantenmechanische Phänomene.

## 1.1 Klassische Logik

Um sich mit der Quantenlogik zu beschäftigen muss man erstmal die klassische Logik genau definieren. Das Wort „Logik“ kommt aus dem Griechischen und bedeutet die „denkende Kunst“, „Vorgehensweise“. Es ist also die Lehre des Schlussfolgern, die uns im Alltag auch oft begegnet. So betrachtet man zwei Argumente A und B. Die Struktur zwischen diesen Argumenten ist dann die Logik. Als Beispiel eine Aussage: Aus A folgt B ( $A \rightarrow B$ ). Streng genommen untersucht die Logik immer nur die Struktur der Aussagen und nicht deren konkreten Inhalt.

## 1.2 Historische Entwicklung

1936 wurde erstmals ein Paper zu dem Thema veröffentlicht: Birkhoff, G. und von Neumann, J.: 1936, The logic of quantum mechanics. Man war durch Versuche darauf gestoßen, dass die klassische Logik nicht mehr passte und hat sich in den Anfangsjahren dieser Theorie erhofft, dass die Quantenlogik eine eindeutige Deutung der Quantenmechanik liefert. Um 1980 fand dann verstärkte Forschung statt, beteiligt waren Carl Friedrich von Weizsäcker, Peter Mittelstaedt und andere. Heute (aktuelle Forschungsergebnisse von 2006) wird vor allem noch an der mathematischen Struktur geforscht. So gibt es inzwischen verschiedene Formulierungen, die jeweils immer Vor- und Nachteile mit sich bringen.

# 2 Ein einfaches Beispiel: Der-Stern-Gerlach Versuch

## 2.1 Aufbau

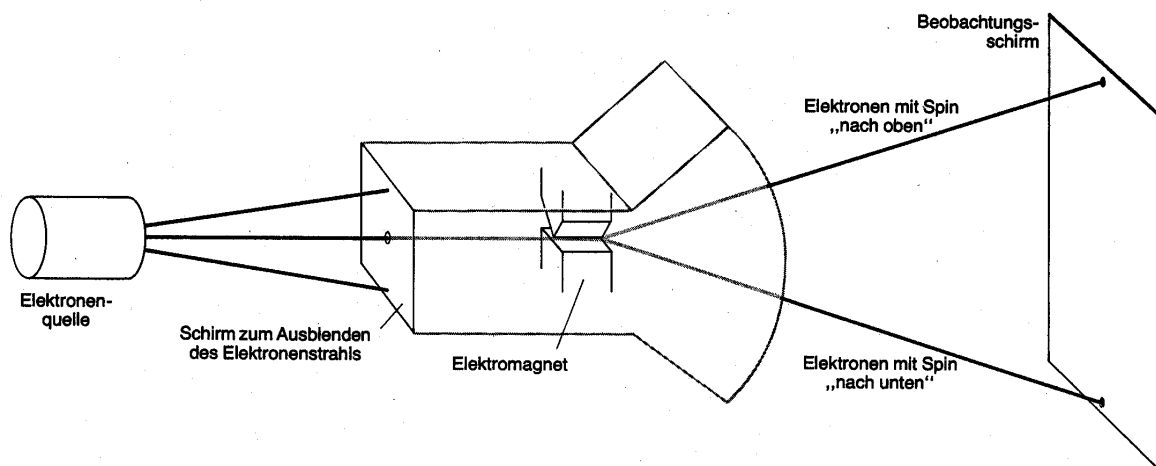


Abbildung 1: Versuchsaufbau [Qul]

Bei dem Stern-Gerlach-Versuch wird ein Elektronenstrahl durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt. Je nach Spin des Teilchens wird es stärker oder schwächer abgelenkt. In der

klassischen Physik würde man eine zufällige Verteilung auf dem Beobachtungsschirm erwarten. Es zeigt sich jedoch, dass der Spin gequantelt ist und der Teilchenstrahl immer in Spin „nach oben“ und „nach unten“ aufspaltet.

## 2.2 Strahlengang mit klassischer Logik

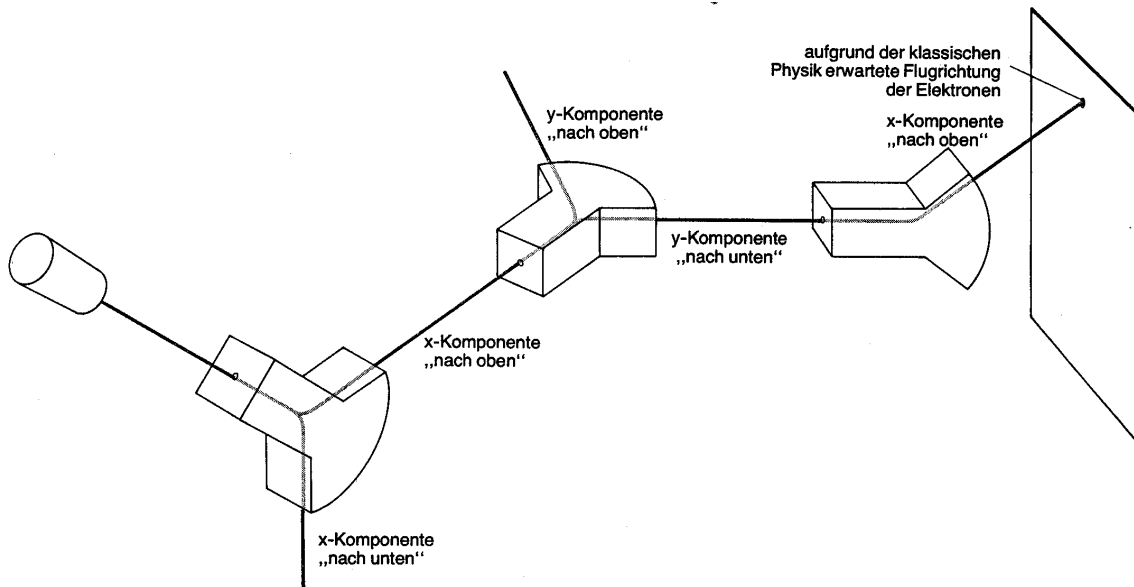


Abbildung 2: Strahlengang mit klassischer Logik [Qul]

Um Logik anhand des Stern-Gerlach-Versuchs zu zeigen, werden drei Apparate hintereinander geschaltet. Im ersten Schritt wird der Teilchenstrom in der x-Richtung aufgespalten. In Abb. 2 ist dargestellt, dass für die weitere Selektion in y-Richtung der Strahl mit Spin in x-Richtung „nach oben“ ausgewählt ist. In y-Richtung wird dann die gleiche Eigenschaft selektiert. Zuletzt wird der Teilchenstrahl nochmals in x-Richtung gefiltert. In der klassischen Physik, bzw. Logik würde man erwarten, dass, wie ursprünglich ausgewählt, in x-Richtung nur der Spin „nach oben“ vorliegt. Für die Zustände ( $|\text{Spin in x-Richtung; Spin in y-Richtung}\rangle$ ) gilt:

$$|\uparrow y\rangle \text{ und } (|x \uparrow\rangle \text{ oder } |x \downarrow\rangle) \implies |\uparrow\uparrow\rangle \text{ oder } |\uparrow\downarrow\rangle \quad (1)$$

### 2.3 Strahlengang mit Quantenlogik

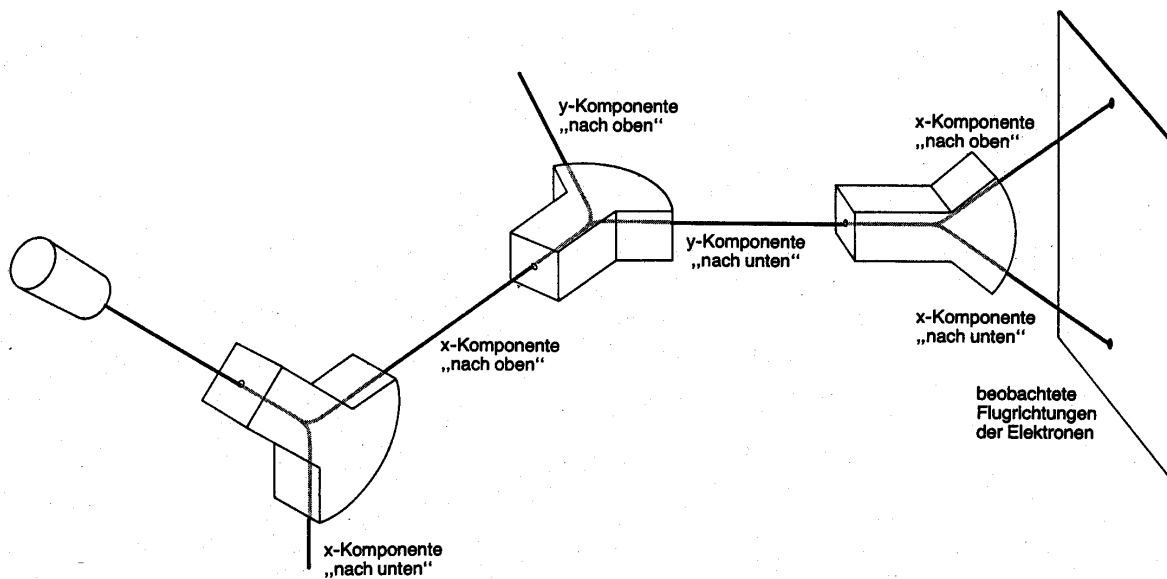


Abbildung 3: Strahlengang mit Quantenlogik [Qul]

Die klassische Sicht beim-Stern-Gerlach Versuch trifft nicht zu. Abb. 3 zeigt das reale Versuchsergebnis. Durch Selektion der y-Komponente wird der homogene Zustand in x-Richtung zerstört. In der Logik ausgedrückt bedeutet dies:

$$|\uparrow y\rangle \text{ und } (|x \uparrow\rangle \text{ oder } |x \downarrow\rangle) \implies (|\uparrow\uparrow\rangle \text{ und } |\downarrow\uparrow\rangle) \text{ oder } (|\uparrow\downarrow\rangle \text{ und } |\downarrow\downarrow\rangle) \quad (2)$$

Es zeigt sich dass das Distributivgesetz der klassischen Logik nicht mehr erfüllt ist.

## 3 mathematische Beschreibung

Mit Hilfe der Dialogischen Logik lassen sich die Gesetze der klassischen Logik an die Anforderungen der Quantenlogik anpassen.

### 3.1 Ein einfacher Dialog

<u>Proponent P</u>	<u>Opponent O</u>
$A \rightarrow B$	A
Wieso A?	Beweis von A
B	Wieso B ?
Beweis von B	

Abbildung 4: Beispiel [PPP]

Der Dialog findet zwischen 2 Personen statt, der Proponent P behauptet  $A \rightarrow B$ , der Opponent O versucht dieses zu widerlegen. Das Prinzip des Dialogs folgt der effektiven Logik.

Diese Begriff definiert, dass die jeweils zuletzt entstandene Verteidigungspflicht einer Aussage zuerst zu erfüllen ist.

Der Proponent muss also  $A$  folgt  $B$  beweisen, wenn der Opponent  $A$  bewiesen hat. Der Opponent muss  $A$  beweisen, um die Aussage  $A \rightarrow B$  überhaupt bestreiten zu können. Schematisch ist der Dialog in Abb. 4 dargestellt. P behauptet  $A \rightarrow B$ , worauf O die Aussage  $A$  behauptet. P fordert dann aber erst einen Beweis von O für  $A$ , bevor er selber  $A \rightarrow B$  zeigen muss. Hat O gezeigt, dass  $A$  gilt, so behauptet P die Aussage  $B$ . Zuletzt fordert B den Beweis von  $B$ , kann der Proponent diesen liefern, so hat er  $A \rightarrow B$  bewiesen.

### 3.2 Logikkalkül

Die Implikation  $A \leq B \Leftrightarrow \vdash A \rightarrow B$  bedeutet, dass  $A \rightarrow B$  dialogisch beweisbar ist. Mit der Implikation und mehreren Sätzen (siehe Abb. 5 Logikkalkül der affirmativen Logik) lässt sich ein Großteil der klassischen Logik abdecken, die sogenannte affirmative Logik. Zur klassischen

$$\begin{array}{ll}
 (L_1) & A \leq A \\
 (L_2) & A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C \\
 (L_3) & A \wedge B \leq A \\
 (L_4) & A \wedge B \leq B \\
 (L_5) & C \leq A, C \leq B \Rightarrow C \leq A \wedge B \\
 (L_6) & A \leq A \vee B \\
 (L_7) & B \leq A \vee B \\
 (L_8) & A \leq C, B \leq C \Rightarrow A \vee B \leq C \\
 (L_9) & (A \wedge (A \rightarrow B)) \leq B \\
 (L_{10}) & A \wedge C \leq B \Rightarrow C \leq (A \rightarrow B)
 \end{array}$$

Abbildung 5: Logikkalkül [PPP]

Logik ist es dann nur noch ein kleiner Schritt; es werden 3 Sätze und das Falsche/Wahre als Aussagen hinzugefügt:  $L_{13}$  ist ein wichtiger Satz für die Unterscheidung zwischen klassischer

$\perp$  das Falsche  
 $\top$  das Wahre

$$\begin{array}{ll}
 (L_{11}) & A \wedge \neg A \leq \perp \\
 (L_{12}) & A \wedge C \leq \perp \Rightarrow C \leq \neg A \\
 (L_{13}) & \top \leq A \vee \neg A \quad (\text{Tertium non datur})
 \end{array}$$

Abbildung 6: ergänzende Sätze der Klassischen Logik [PPP]

Logik und Quantenlogik. In der klassischen Physik befindet sich ein Teilchen an einer gewissen Position  $x$  (Aussage wahr) oder es befindet sich nicht an der Position  $x$  (Aussage unwahr). In

der Quantenmechanik sind Positionsbestimmungen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit möglich, sodass dieser Satz nicht mehr zutrifft.

### 3.3 kommensurable Eigenschaften

Aussagen der klassischen Physik sind beweisbar, indem die entsprechenden Observablen gemessen werden. Diese Observablen sind in der dialogischen Logik unbegrenzt verfügbar. Eine Aussage, die so bewiesen wurde, kann jederzeit zitiert werden.  $|\phi\rangle$  ist der Zustand eines System und dieses System kann die Eigenschaft  $E_A$  besitzen. Nun definiert man Projektionsoperatoren, z.B.  $P_A|\phi\rangle = |\phi\rangle$  mit den Eigenwerten 0 und 1. Ferner soll bei Eigenwert 1 die Eigenschaft  $E_A$  vorliegen. Zwei Eigenschaften sind nun kommensurabel, wenn gilt:  $P_AP_B|\phi\rangle = P_BP_A|\phi\rangle$  bzw.  $P_AP_B = P_BP_A$ .

### 3.4 inkommensurable Eigenschaften

Aussagen der Quantenphysik sind nicht unbegrenzt gültig, wie es schon an dem Beispiel des Stern-Gerlach-Versuchs gezeigt wurde. So sind Eigenschaften nur gültig, bis eine weitere Messung an dem System vorgenommen wird. Für die dialogische Logik bedeutet dies: Eine Aussage A darf nur zitiert werden, wenn danach nur zu A kommensurable Eigenschaften bewiesen wurden.

Ein Beispiel ist in Abb. 7 dargestellt. A und B sind zwei inkommensurable Eigenschaften. Wenn am Ende der Proponent A beweisen müsste, könnte er nicht Schritt 2 zitieren, da durch Beweis (Messung) von B, das System in dem A galt, verändert wurde. Unter Berücksichtigung der

	<u>P</u>		<u>O</u>
1.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	1.	A
2.	Wieso A ?	2.	Beweis von A durch Exp. an S
3.	$B \rightarrow A$	3.	B
4.	Wieso B ?	4.	Beweis von B durch Exp. an S
5.	A	5.	Wieso A ?
6.	—		

Abbildung 7: Dialog mit inkommensurablen Eigenschaften [PPP]

begrenzten Gültigkeit von Aussagen, lassen sich die Sätze des Logikkalküls anpassen. Mit dem Logikkalkül der Quantenlogik werden dann auch quantenmechanische Versuche widerspruchsfrei beschrieben.

## 4 Zusammenfassung

Die Quantenlogik ist notwendig, um die quantenmechanischen Experimente zu erklären. Die Hoffnung, dass die Quantenlogik die Interpretation der Quantenmechanik liefert, hat sich leider nicht erfüllt. Es wurden sogar neue Fragen aufgeworfen, so z.B. die Frage ob die Quantenlogik umfassender als die klassische Logik ist. Ferner geht es darum, welche Formulierung der Quantenlogik besser ist.

## 4.1 Ein Gedanke zum Schluss

„Das ungelöste, heutige Problem ist vielmehr die klassische Physik selbst. Wie ist es möglich, dass es so etwas wie die uns vertraute heile Welt der klassischen Physik überhaupt gibt?“ aus „Universell und inkonsistent?“ Quantenmechanik am Ende des 20. Jahrhunderts von Peter Mittelstaedt

## 5 Quellen

- [Qul] Quantenlogik; R.I.G. Hughes in Spektrum der Wissenschaft, Dezember 1981
- [PPP] Philosophische Probleme der modernen Physik; Peter Mittelstaedt Bibliographisches Institut, 1976
- „Universell und inkonsistent?“ Quantenmechanik am Ende des 20. Jahrhunderts von Peter Mittelstaedt Physikalische Blätter 56 (2000) Nr. 12
- Sprache und Realität in der modernen Physik; Peter Mittelstaedt Bibliographisches Institut, 1986
- <http://wwwcs.uni-paderborn.de/cs/ag-madh/WWW/ziegler/qlogik.html> 22.07.09
- [http://www14.informatik.tu-muenchen.de/lehre/2003WS/seminar/QC\\_vortrag\\_Meilensteine.html](http://www14.informatik.tu-muenchen.de/lehre/2003WS/seminar/QC_vortrag_Meilensteine.html) 22.07.09
- <http://www.burghardt-koeln.de/franzj/logik.htm> 22.07.09
- [http://arxiv.org/PS\\_cache/quant-ph/pdf/0101/0101028v2.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/quant-ph/pdf/0101/0101028v2.pdf) 22.07.09
- [http://www.hyperkommunikation.ch/lexikon/dialogische\\_logik.htm](http://www.hyperkommunikation.ch/lexikon/dialogische_logik.htm) 22.07.09