

Darstellungstheorie der Lorentz-Gruppe

Kai Walter

29. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe	2
2.1	Minkowski-Raum	2
2.2	Lorentz-Transformation	3
2.3	Parametrisierung der Lorentz-Gruppe	4
2.4	Übergang zur endlichen Lorentz-Transformation	6
2.5	Lie-Algebra von \mathcal{L}_+^\uparrow	7
3	Darstellung der Lorentz-Gruppe	7
3.1	Spinordarstellung von \mathcal{L}_+^\uparrow	7
3.2	Darstellung der vollen Lorentz-Gruppe	9

1 Einführung

Nach der speziellen Relativitätstheorie von Einstein müssen Naturgesetze in allen Inertialsystemen, die durch Lorentz-Transformation miteinander verbunden sind, die gleiche Form haben. Diese Transformation ist eine lineare Transformation, bei der das im vierdimensionalen Minkowski-Raum definierte Skalarprodukt invariant bleibt und die Gruppeneigenschaften erfüllen. Im Folgenden wird diese näher untersucht und deren Lie-Algebra bestimmt.

2 Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe

2.1 Minkowski-Raum

Ein Ereignis kann in der Relativitätstheorie durch einen Vierervektor $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ im Minkowski-Raum dargestellt werden, dessen nullte Komponente die Zeitkoordinate $c \cdot t$ und dessen erste bis dritte Komponente die Raumkoordinaten \vec{x} darstellen. Die Metrik des vierdimensionalen Minkowski-Raums wird durch folgendes Skalarprodukt definiert:

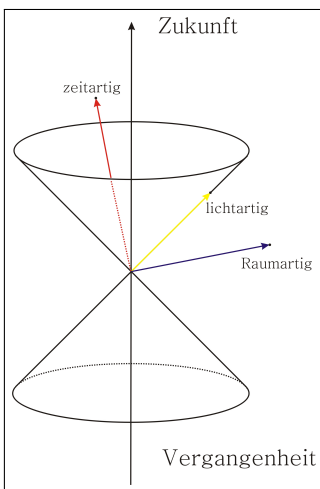
$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}, \quad (1)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ ein metrischen Tensor darstellt und folgende Form hat:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ein vierdimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt der Form (1) wird Vektorraum mit *Minkowski-Geometrie* genannt.

Auffällig ist, dass das „Längenquadrat“ x^2 in Minkowski-Raum positive und negative Werte annehmen und auch verschwinden kann, ohne dass x selbst verschwindet (Man sagt deshalb die Metrik ist *indefinit*). Somit zerfallen die Vektoren $x \neq 0$ aus dem Minkowski-Raum in eine der folgenden Klassen



$$x^2 > 0 \quad \text{zeitartig}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{lichtartig}$$

$$x^2 < 0 \quad \text{raumartig}$$

Diese bedeutet anschaulich, dass zeitartige Ereignisse innerhalb, raumartige Ereignisse außerhalb des sich vom Koordinatenursprung ausbreitenden Lichtkegels und lichtartige Ereignisse auf diesem Kegel liegen (s. Abbildung 1).

Abbildung 1: Minkowski-Raum

2.2 Lorentz-Transformation

Allgemeine lineare Transformationen lassen sich mit einer Transformationsmatrix Λ^μ_ν und dem Translationsvektor a^μ darstellen als

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (3)$$

Solche Transformationen, die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen, werden **Poincaré-Transformationen** genannt. Wir werden jedoch hier homogene Transformation betrachten, d.h. $a^\mu = 0$, die **Lorentz-Transformationen** genannt werden.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4)$$

Da diese Transformation das Skalarprodukt invariant lässt, gilt;

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma \stackrel{!}{=} \eta_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \\ \Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (5)$$

Oder in Matrixschreibweise:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (6)$$

Diese Relation wird *Pseudo-Orthogonalitätsrelation* genannt, was der Orthogonalität einer Drehmatrix in euklidischen Raum entspricht.

Zunächst soll gezeigt werden, dass diese eine Gruppe bilden.

1. Abgeschlossenheit

Bei Nacheinanderausführung zweier Transformationen Λ_1 und Λ_2 ergibt sich;

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T \eta (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^T (\Lambda_2^T \eta \Lambda_2) \Lambda_1 = \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 = \eta \quad \square \quad (7)$$

2. Einselement

$$\mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{1} \Lambda = \Lambda \mathbb{1}$$

3. Inverses Element

$$\begin{aligned} \eta^{-1} \Lambda^T \eta \Lambda &= \eta^{-1} \eta = \mathbb{1} \\ \Rightarrow \Lambda^{-1} &= \eta^{-1} \Lambda^T \eta \end{aligned} \quad (8)$$

Also bildet die Menge der Lorentz-Transformationen eine Gruppe, die sogenannte **Lorentz-Gruppe**.

Die Determinante von Λ lässt sich aus der Pseudo-Orthogonalität bestimmen:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^T \eta \Lambda) &= \det(\eta) \\ \det(\Lambda^T) \cdot \det(\eta) \cdot \det(\Lambda) &= \det(\eta) \\ \det(\Lambda)^2 &= 1 \\ \det(\Lambda) &= \pm 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Wie bei der Drehung beträgt die Determinante ± 1 . D.h. die Lorentz-Transformation stellt die Drehung und Spiegelung im Minkowski-Raum dar. Anders als im euklidischen Raum, wo nur Raumspiegelung vorhanden war, ist natürlich zu vermuten, dass im Minkowski-Raum auch die Zeitkoordinate gespiegelt werden kann. Um diese zu untersuchen, wird wieder die Pseudo-Orthogonalität (5) für $\rho = 0$ und $\sigma = 0$ betrachtet.

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{n=1}^3 (\Lambda^n_0)^2 \Rightarrow \Lambda^0_0 \geq +1 \text{ oder } \leq -1 \quad (10)$$

Somit kann die Lorentz-Gruppe je nach der Signatur von $\det(\Lambda)$ und Λ^0_0 in vier verschiedene Komponenten zerlegt werden.

$\text{sgn } \Lambda^0_0$	$\det \Lambda$	Struktur
+1	+1	\mathcal{L}^\uparrow_+ eigentliche orthochrone Lorentz-transformation
+1	-1	\mathcal{L}^\uparrow_- enthält $\text{diag}(1,-1,-1,-1)$
-1	+1	\mathcal{L}^\downarrow_+ enthält $\text{diag}(-1,1,1,1)$
-1	-1	\mathcal{L}^\downarrow_- enthält $\text{diag}(-1,-1,-1,-1)$

Da in \mathcal{L}^\uparrow_- , \mathcal{L}^\downarrow_+ und \mathcal{L}^\downarrow_- das Einselement nicht enthalten ist, stellen sie keine Untergruppe der Lorentz-Gruppe sondern Nebenklasse zu \mathcal{L}^\uparrow_+ dar. Die volle Lorentz-Gruppe lässt sich mit der Zeitspiegelung T und der Raumspiegelung P darstellen als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\uparrow_+ \cup P\mathcal{L}^\uparrow_+ \cup T\mathcal{L}^\uparrow_+ \cup PT\mathcal{L}^\uparrow_+$$

Im Folgenden wird die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe \mathcal{L}^\uparrow_+ betrachtet.

2.3 Parametrisierung der Lorentz-Gruppe

Die Pseudo-Orthogonalitätsrelation (5) enthält zehn unabhängige Gleichungen, wodurch zehn von 16 Komponenten der Matrix festgelegt werden. Die restlichen sechs Komponenten können frei parametrisiert werden. Man kann diese sinnvoll durch eine räumliche Drehung $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_i \in [0, \pi]$ und einer Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_i \in [0, c]$ parametrisieren. Die zugehörigen Parametermatrizen lauten:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 & 0 & -\sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\frac{v_1}{c}\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_1}{c}\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\frac{v_2}{c}\gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_2}{c}\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & 0 & 0 & -\frac{v_3}{c}\gamma_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_3}{c}\gamma_3 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Dabei stellen D_i bzw. L_i Drehung um die i -Achse bzw. spezielle Lorentz-Transformation in i -Richtung dar. Um eine Basis der Lie-Algebra zu bestimmen, wird jetzt eine infinitesimale Transformation, d.h. $|\vec{\alpha}| \ll 1$ und $|\vec{v}| \ll c$, betrachtet. So gehen die Parametermatrizen über in

$$D_{1inf} = \mathbb{1} - \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{2inf} = \mathbb{1} - \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{3inf} = \mathbb{1} - \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{1inf} = \mathbb{1} - \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{2inf} = \mathbb{1} - \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{3inf} = \mathbb{1} - \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\beta = \frac{v}{c}$ gilt.

Mit $\vec{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

konstruiert man eine neue Matrix M_μ

$$M_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \Lambda_\mu \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\text{und } N_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{e}_\mu^T \\ -\mathbf{e}_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

so dass lässt sich die infinitesimalen Transformationsmatrix kurz fassen lassen als

$$L(\vec{\alpha}, \vec{v})_{inf} = \mathbb{1} - \vec{\alpha} \vec{M} - \vec{\beta} \vec{N} \quad (14)$$

2.4 Übergang zur endlichen Lorentz-Transformation

Wir haben in Kapitel 2.3 die infinitesimale Transformation betrachtet. In diesem Kapitel wird es die Aufgabe sein, durch Hintereinanderausführen infinitesimaler Lorentz-Transformationen die endliche Lorentz-Transformation herzuleiten.

Man betrachte zunächst die reine Rotation $R(\vec{\alpha})$

$$\begin{aligned} L(\vec{\alpha}, 0) &= R(\vec{\alpha}) = R\left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^2 = \dots = R\left(\frac{\vec{\alpha}}{N}\right)^N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - \frac{\vec{\alpha}}{N} \vec{M} \right)^N = e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{M}} \end{aligned} \quad (15)$$

Bei der Schubtransformation $L(0, \vec{v})$ gilt jedoch

$$L(0, \vec{v}) = L(\vec{v}) \neq L\left(\frac{\vec{v}}{2}\right)^2,$$

weil in der Relativitätstheorie die Geschwindigkeit keine additive Größe ist. Um dieses Problem zu lösen, wird ein neuer Parameter \vec{u} eingeführt, der **Rapidityvektor** genannt wird.

$$\vec{u} = u \cdot \hat{v} \quad \text{mit } u = \operatorname{artanh}\left(\frac{|\vec{v}|}{c}\right) \quad 0 \leq u < \infty \quad (16)$$

Der Rapidityvektor hat die gesuchte additive Eigenschaft, so dass sich die endliche Schubtransformation analog zur Rotation bestimmen lässt.

$$L(0, \vec{v}) = e^{-\vec{u} \cdot \vec{N}} \quad (17)$$

Somit haben allgemeine, endliche Lorentz-Transformationen die Form

$$L(\vec{\alpha}, \vec{v}) = e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{M}} \cdot e^{-\vec{u} \cdot \vec{N}} \quad (18)$$

Es ist zu beachten, dass diese sich nicht als

$$e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{M} - \vec{u} \cdot \vec{N}}$$

schreiben lässt, weil N und M nicht miteinander kommutieren: Man erhält ein anderes Ergebnis, je nach dem, ob zuerst die Rotation und dann die Schubtransformation ausgeführt wird oder umgekehrt. Es gilt allgemein das Baker-Campbell-Hausdorff-Theorem

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (19)$$

Im Folgenden wird als Parameter nicht mehr die Geschwindigkeit, sondern der Rapidityvektor verwendet.

2.5 Lie-Algebra von \mathcal{L}_+^\uparrow

Die in (12) und (13) definierten Matrizen unterliegen folgende Kommutatorrelationen

$$[M_\mu, M_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\lambda} M_\lambda \quad (20)$$

$$[N_\mu, N_\nu] = -\epsilon_{\mu\nu\lambda} M_\lambda \quad (21)$$

$$[N_\mu, M_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\lambda} N_\lambda, \quad (22)$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ einen antisymmetrischen Tensor 3. Stufe darstellt. Die Matrizen M_μ und N_μ definieren somit die sechsdimensionale Lie-Algebra \mathbf{L} der orthogonalen Lorentz-Gruppe. Man konstruiert man eine neue Basis

$$\vec{M}^\pm = \frac{1}{2}(\vec{M} \pm i\vec{N}), \quad (23)$$

die folgende Kommutatorrelationen erfüllt,

$$[M_\mu^\pm, M_\nu^\pm] = \epsilon_{\mu\nu\lambda} M_\lambda^\pm, \quad [M_\mu^+, M_\nu^-], \quad (24)$$

zerfällt damit \mathbf{L} in zwei dreidimensionale Lie-Algebren \mathbf{L}^+ und \mathbf{L}^- jeweils mit Basis \vec{M}^+ und \vec{M}^- .

Aus (14) und (23) folgt die infinitesimale Transformation mit neuer Basis

$$L(\vec{\alpha}, \vec{v})_{inf} = \mathbb{1} - (\vec{\alpha} - i\vec{u})\vec{M}^+ - (\vec{\alpha} + i\vec{u})\vec{M}^- \quad (25)$$

Da die Kommutatorrelation von \vec{M}^\pm (24) die gleiche Struktur hat wie diese bei der Drehgruppe, lässt sich die Darstellung mit den Darstellungsmatrizen der infinitesimalen Drehung $D^{(j)}$ und $D^{(j')}$ mit komplexen Parametern $\vec{\alpha} - i\vec{u}$ und $\vec{\alpha} + i\vec{u}$ ausdrücken

$$L(\vec{u}, \vec{\alpha}) \rightarrow D^{(j j')}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = D^{(j)}(\vec{\alpha} - i\vec{u}) \otimes D^{(j')}(\vec{\alpha} + i\vec{u}) \quad (26)$$

$$= D^{(j)}(\vec{\alpha})D^{(j)}(-i\vec{u}) \otimes D^{(j')}(\vec{\alpha})D^{(j')}(i\vec{u}), \quad (27)$$

wobei $j, j' = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ gilt. Die Dimension der Darstellung ist wie bei der Drehgruppe durch $(2j+1)(2j'+1)$ gegeben.

3 Darstellung der Lorentz-Gruppe

3.1 Spinordarstellung von \mathcal{L}_+^\uparrow

Die Darstellung von \mathcal{L}_+^\uparrow wurde in 2.5 hergeleitet und ist durch (27) gegeben.

Die einfachsten nichttrivialen Darstellungen sind jene mit $j = 0, j' = \frac{1}{2}$ und $j = \frac{1}{2}, j' = 0$. Diese Darstellungen werden **Spinordarstellungen** genannt und im Folgenden näher untersucht.

1. $j = \frac{1}{2}, j' = 0$, **Linkshändige SpinorDarstellung**

Wie bei der Drehgruppe lässt sich \vec{M}^+ in diesem Fall mit paulischen Spinmatrizen $\vec{\sigma}$ ausdrücken:

$$\vec{M}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}, \quad \vec{M}^- = 0 \quad (28)$$

In Allgemeinen stellt die Basis der Lie-Algebra im Hilbertraum einen antihermiteschen Operator dar, was mit einem imagenären Eigenwert verbunden ist. Daher ist es zweckmäßig, eine neue Basis der Form $i\vec{M}^+$ zu verwenden. Somit ergibt sich die Erzeugende der Darstellung (*hermitesche Erzeugende*)

$$-i(\vec{\alpha} - i\vec{v})\frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (29)$$

Die Spinordarstellung ergibt sich durch Übergang zur endlichen Darstellung, analog zum in 2.4 betrachteten Übergang zur endlichen Lorentz-Transformation:

$$D^{(\frac{1}{2},0)}(\vec{v}, \vec{\alpha}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{\sigma}} \quad (30)$$

Man beachte, dass die Darstellung zwar *unimodular* (d.h. deren Determinante beträgt 1), aber nur für $\vec{v} = 0$ unitär und für $\vec{\alpha} = 0$ hermitisch und positiv definit ist. Diese Eigenschaften sind auf die Nichtkompaktheit der Lorentz-Gruppe zurückzuführen, weil ein Parameter der Gruppe, die Rapidität, im Gegensatz zum Winkel nicht beschränkt ist ($|\vec{v}| \in [0, \infty)$).

Der Darstellungsraum ist zweidimensional. Die Elemente $\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$ in diesem Raum werden **linkshändige Weyl-Spinoren** genannt und haben folgende Eigenschaften:

a) Transformationsverhalten

$$\chi'_\alpha = \left(e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{\sigma}} \right)_\alpha^\beta \chi_\beta \quad (31)$$

b) Skalarprodukt

$$(\psi, \chi) = \psi^\alpha \chi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta \chi_\alpha = \psi_1 \chi_2 - \psi_2 \chi_1 \quad (= -\psi_\alpha \chi^\alpha), \quad (32)$$

wobei $\epsilon^{\alpha\beta}$ den invarianten metrischen Tensor darstellt und folgende Form hat:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2 \quad (33)$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\alpha\beta} \quad (34)$$

2. $j = 0, j' = \frac{1}{2}$, **Rechtshändige Spinor Darstellung**

$$\vec{M}^+ = 0, \quad \vec{M}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow D^{(0, \frac{1}{2})}(\vec{u}, \vec{\alpha}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \cdot e^{\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{\sigma}} \quad (35)$$

Darstellungsraum ist Raum der rechtshändigen Weyl-Spinoren
 Um rechtshändige Weyl-Spinoren von linkshändigen zu unterscheiden, werden gepunktete Indizes verwendet.

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{rechtshändige Weyl-Spinoren}) \quad (36)$$

Rechtshändige Weyl-Spinoren haben folgende Eigenschaften

a) Transformationsverhalten

$$\bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \left(e^{-\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \cdot e^{\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{\sigma}} \right)^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\beta}} \quad (37)$$

b) Skalarprodukt

$$(\bar{\theta}, \bar{\eta}) = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\theta}^{\dot{1}} \bar{\eta}^{\dot{2}} + \bar{\theta}^{\dot{2}} \bar{\eta}^{\dot{1}} \quad (= -\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}) \quad (38)$$

mit dem metrischen Tensor

$$\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2 \quad (39)$$

$$\bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (40)$$

Zwischen linkshändigen und rechtshändigen Spinoren gilt folgende Beziehung

$$(\chi_{\alpha})^* = \chi_{\dot{\alpha}} \quad (41)$$

Da sich jede Darstellung mit j und j' mit diesen Spinoren darstellen lässt, wird diese **Fundamentaldarstellung** genannt.

3.2 Darstellung der vollen Lorentz-Gruppe

Zunächst wird $\mathcal{L}^{\uparrow} = \mathcal{L}_+^{\uparrow} \cup \mathcal{L}_-^{\uparrow}$ betrachtet. Da \vec{u} ein polarer und $\vec{\alpha}$ ein axialer Vektor ist, gilt unter Raumspiegelung

$$P L(\vec{v}, 0) = L(-\vec{v}, 0) P \quad P L(0, \vec{\alpha}) = L(0, \vec{\alpha}) P \quad (42)$$

und daher auch

$$\begin{aligned}
 P \vec{N} P^{-1} &= -\vec{N} & P \vec{M} P^{-1} &= \vec{M} \\
 \Rightarrow P \vec{M}^\pm P^{-1} &= \vec{M}^\mp
 \end{aligned} \tag{43}$$

Für die raumgespiegelte Darstellung muss dann gelten

$$P D^{(j j')}(\vec{\alpha}, \vec{u}) P^{-1} = D^{(j' j)}(\vec{\alpha}, -\vec{u}) \tag{44}$$

Diese Relation gilt offensichtlich für $j' = j$. Alternativ kann diese durch Verdoppelung der Komponentenzahl mit Hilfe der direkten Summe $D^{(j j')} \oplus D^{(j' j)}$ erreicht werden. Dann haben die Darstellungen folgende Struktur

$$\begin{pmatrix} D^{(j j')} & 0 \\ 0 & D^{(j' j)} \end{pmatrix} \tag{45}$$

mit dem Paritätsoperator P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Ein wichtiges Beispiel hierzu ist die Darstellung $D^{\text{Dirac}} = D^{(\frac{1}{2}, 0)} \oplus D^{(0, \frac{1}{2})}$ auf vierdimensionalem Raum der **Diracspinoren**

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \bar{\eta}^1 \\ \bar{\eta}^2 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Somit wurde die Darstellung von \mathcal{L}^\uparrow gezeigt, die gleichzeitig auch die Darstellung der vollen Lorentz-Gruppe ist.