Spontane Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

Daniel Bieletzki

3. Juli 2007

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

Vortrag im Rahmen des Seminars „Theorie der Teilchen und Felder“
im SS 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Symmetriebrechung spielt sowohl in der Physik als auch in der Entwicklung unseres Universums und unseres Lebens eine wichtige Rolle. In der Physik beschreibt die Symmetriebrechung den Übergang eines physikalischen Systems in einen Zustand geringerer Symmetrie. Dies ist gleichbedeutend mit einem Zustand höherer Ordnung.

Folgendes Beispiel verdeutlicht dies: Betrachten wir eine Momentaufnahme der Orte aller Moleküle eines Gases und mitteln über die Orte, die die einzelnen Moleküle im Laufe der Zeit einnehmen (Wärmebewegung der Moleküle). Durch die Mittelung über die chaotisch verteilten individuellen Positionen der Gasmoleküle kommt man zu einer vollständigen Translations-, Rotations- und Spiegelsymmetrie eines makroskopischen Gases. Kristalle sind oft ein Sinnbild der Symmetrie. Dabei ist eigentlich die erkennbare Ordnung eine Brechung der vollkommenen Symmetrie. Chaos und Symmetrie sind äquivalent. Als Ordnung erkennbare Symmetrie bedeutet immer Symmetriebrechung.

Bei der Symmetriebrechung unterscheidet man zwischen expliziter und spontaner Symmetriebrechung. Von expliziter Symmetriebrechung spricht man bei Störung einer Symmetrie durch eine vergleichsweise kleine nicht symmetrische Zutat. Die statische Spiegelsymmetrie des Gesichts wird z.B. durch ein Muttermal explizit gebrochen. Die dynamische Rotationssymmetrie eines Rades wird durch Anlegen (nicht im Mittelpunkt des Rades) einer kleinen Masse explizit gebrochen. Das Konzept der expliziten Symmetriebrechung ist nur dann sinnvoll, wenn die Symmetrie sichtbarer ist, als die vergleichsweise kleine Brechung. Daher kann bei dem Gesetz (Bewegungsgleichung) für das Gesamtsystem „Rad plus kleine Masse“ zwischen einem großen symmetrischen und einem kleinen asymmetrischen Term unterschieden werden. Allgemein gesagt: Bei einem zu großen asymmetrischen Term ist es nahezu unmöglich, die Symmetrien der fundamentalen Gesetze von den effektiven Gesetzen, mit denen wir die Erscheinungen beschreiben, abzulesen. In diesem Fall spricht man von verborgenen Symmetrien.

Der Grundgedanke der spontanen Symmetriebrechung liegt in der Unterscheidung zwischen symmetrischen Naturgesetzen und dem asymmetrischen Zustand der Welt. Die heute zu beobachtende Asymmetrie des Lebens hat sich mit Sicherheit auf verschiedenen Ebenen unabhängig durch eine Serie spontaner Symmetriebrechungen entwickelt. Ein Beispiel zur spontanen Symmetriebrechung ist die Baryonenasymmetrie. Zu Beginn des Universums lagen Materie und Antimaterie in gleichen Mengen vor. Das Ungleichgewicht von Materie und Antimaterie entstand erst während der Entwicklung des Universums bis zum heutigen Zeitpunkt.

Symmetrie ist eine instabile Eigenschaft der Anfangsbedingungen. Eine kleine unvermeidbare asymmetrische Störung bzw. Fluktuation zerstört die am Anfang möglicherweise vorhandene Symmetrie. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist Buridans Esel (eigentlich als Beispiel für das Gegenteil gemeint): Der Philosoph Buridan (um 1300) ging davon aus, dass ein Esel in der Mitte zwischen zwei identischen Heuhaufen verhungern müsste, da sich der Esel nicht zwischen den Heuhaufen entscheiden könne, d.h. dass er nicht in der Lage wäre, die Symmetrie zu brechen. Aufgrund der instabilen Eigenschaft der Situation jedoch, wächst die Anziehung eines Heuhaufens auf den Esel, sobald sich der Esel zufällig ein wenig in die Richtung des einen Heuhaufens bewegt. Die Symmetrie wurde spontan gebrochen.

Es gibt unzählige Beispiele in der Chemie und Biologie, die die spontane Symmetriebrechung noch mehr verdeutlichen. Als ein physikalisches Beispiel sei die spontane Magnetisierung eines Ferromagneten erwähnt. Die Spinstellungen bzw. die magnetischen Momente im Ferromagneten sind oberhalb einer kritischen Temperatur chaotisch angeordnet. Es exisitiert keine makroskopische Vorzugsrichtung. Die Wärmebewegung der Spins sorgt für die vollkommene Rotationssymmetrie des Ferromagneten. Beim Abkühlen des Ferromagneten unterhalb der kritischen Temperatur ordnen sich die magnetischen Momente der Spins parallel zueinander an. Es entsteht ein makroskopisch wirksames Magnetfeld. Der Übergang vom unmagnetischen, ungeordneten Zustand zum magnetischen, geordneten Zustand bricht die Drehsymmetrie des Ferromagneten spontan.

2 Das Goldstone-Theorem

2.1 Coleman-Theorem

Spontane Symmetriebrechung bedeutet, dass der Grundzustand eines Systems weniger Symmetrien aufweist als seine Bewegungsgleichungen. Hier wird die Bezeichnung der verborgenen Symmetrie klar. Spontane Symmetriebrechung unterscheidet sich von der expliziten Symmetriebrechung, bei der sich die Bewegungsgleichungen so ändern, dass sie weniger Symmetrien aufweisen.

In einem quantenmechanischen System bedeutet das, dass der Vakuumerwartungswert des Grundzustands weniger Symmetrien aufweist als die Bewegungsgleichungen des Systems. Es handelt sich also um Symmetrien, die im Grundzustand des Systems nicht direkt auftreten.

Die Nicht-Invarianz des Grundzustands als eine Symmetriebruch-Bedingung kann mit dem Coleman-Theorem zusammengefasst werden (ohne Beweis):

Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ und einem Zustand minimaler Energie, dem Vakuumzustand. Wirkt eine definierte Transformationsgruppe G auf die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ oder auf den Vakuumzustand, treten folgende Fälle auf:

1. Vakuumzustand und $\mathcal{L}$ sind invariant $\Longrightarrow$ exakte Symmetrie
2. Vakuumzustand ist nicht invariant und ...
   - $\mathcal{L}$ ist nicht invariant $\Longrightarrow$ explizite Symmetriebrechung
   - $\mathcal{L}$ ist invariant $\Longrightarrow$ **spontante Symmetriebrechung**

2.2 Goldstone-Theorem

Das Theorem von Goldstone besagt Folgendes:

Wird eine kontinuierliche und nur globale Symmetrie spontan gebrochen, so tritt in der effektiven Theorie ein masseloses pseudoskalares Teilchen auf. Das zugehörige Teilchen heißt Nambu-Goldstone-Boson

<u>**Beweis:**</u>
Nach Noether's Theorem existiert zu jeder kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangedichte ein erhaltener Strom:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 \tag{1}$$

Daraus folgt, dass die Ladung Q eine Konstante der Bewegung ist.

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{d}{dt}\int d^3x J_0(\mathbf{x},t) = 0 \tag{2}$$

Die Transformation eines Feldoperators sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \phi(x) \to \phi'(x) &= e^{iQ\epsilon}\phi(x)e^{-iQ\epsilon} \\ &= \phi(x) + i\epsilon\,[Q,\phi(x)] + ... \end{aligned} \tag{3}$$

Aus der Erhaltung des Stromes in Gleichung (1) folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x\,[\partial^\mu J_\mu(\mathbf{x},t),\phi(0)] \\ &= \partial^0 \int d^3x\,[J_0(\mathbf{x},t),\phi(0)] + \int d\mathbf{S}\cdot[\mathbf{J}(\mathbf{x},t),\phi(0)] \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\,[Q(t),\phi(0)] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Das Kennzeichen einer spontanen Symmetriebrechung ist, wenn der Vakuumerwartungswert des Kommutators in Gleichung (4) nicht verschwindet. Also:

$$\begin{aligned} 0 \neq \eta &\equiv \langle 0|\,[Q(t),\phi(0)]\,|0\rangle \qquad (5) \\ &= \sum_n (2\pi)^3\delta^3(p_n)\left[\langle 0|J_0(0)|n\rangle\,\langle n|\phi(0)|0\rangle\,e^{-iE_nt} - \langle 0|\phi(0)|n\rangle\,\langle n|J_0(0)|0\rangle\,e^{iE_nt}\right] \end{aligned}$$

Hier wurde Translationsinvarianz ausgenutzt und ein vollständiger Satz von Zuständen eingesetzt. Da sich die positiven und negativen Energien nicht gegenseitig wegheben, kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn ein Zustand existiert mit $E_n = 0$ für $p_n = 0$. Das ist das masselose Goldstone-Boson mit der Eigenschaft $\langle n|\phi(0)|0\rangle \neq 0$ und $\langle 0|J_0(0)|n\rangle \neq 0$.

2.3 Spontane Brechung der globalen Symmetrie

Im Folgenden werden die spontane Symmetriebrechung und ihre Folgen anhand einiger Beispiele für Lagrangedichten diskutiert. Betrachte folgende Lagrangedichte mit einem zweikomponentigen, skalaren Feld $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$:

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{6}$$

Damit der potentielle Term in $\mathcal{L}$ nach unten beschränkt ist, muss die Kopplungskonstante $\lambda > 0$ sein. Wie man sich leicht klar machen kann, ist $\mathcal{L}$ invariant gegenüber einer globalen U(1)-Phasentransformation:

$$\begin{aligned}
\phi \rightarrow \phi' &= e^{i\alpha}\phi \\
&\Downarrow \\
\phi'^\dagger\phi' &= \phi^\dagger e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\phi = \phi^\dagger\phi \\
(\partial_\mu\phi)' &= e^{i\alpha}\partial_\mu\phi \\
&\Downarrow \\
(\partial_\mu\phi')^\dagger(\partial_\mu\phi') &= (\partial_\mu\phi)^\dagger e^{-i\alpha}e^{i\alpha}(\partial^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) \\
&\Downarrow \\
\mathcal{L}(\phi',\partial_\mu\phi') &= \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)
\end{aligned} \tag{7}$$

Das Minimum des Potentials liegt bei $\phi_V = \phi_V^\dagger = 0$ und ist dementsprechend auch invariant gegenüber einer U(1)-Phasentransformation. Außerdem handelt es sich hier um ein stabiles, globales Minimum. Dieser Fall entspricht also einer exakten Symmetrie.

Betrachten wir nun folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi) + \frac{m^2}{2}\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{8}$$

Gegenüber der Lagrangedichte im Falle der exakten Symmetrie ist nur das Vorzeichen vor dem Massenterm verändert. Demnach ist es klar, dass auch diese Lagrangedichte invariant gegenüber einer U(1)-Phasentransformation ist. Ein Blick auf die graphische Abbildung des Potentials (Flaschenhalspotential) zeigt jedoch, dass das ursprüngliche Minimum nun ein lokales Maximum ist und ein Kreis von neuen Minima in der (ϕ_1,ϕ_2)-Ebene entstanden ist. Diesen Effekt bezeichnet man als Bifurkation, der durch die Veränderung des Kontrollparameter „Masse“ hervorgerufen wird. Alle Zustände auf dem Kreis sind entartet. Alle Minima befinden sich auf dem Kreis mit Radius bzw. Grundzustand:

$$|\phi_V| = (\frac{m^2}{\lambda})^{1/2} \equiv v \tag{9}$$

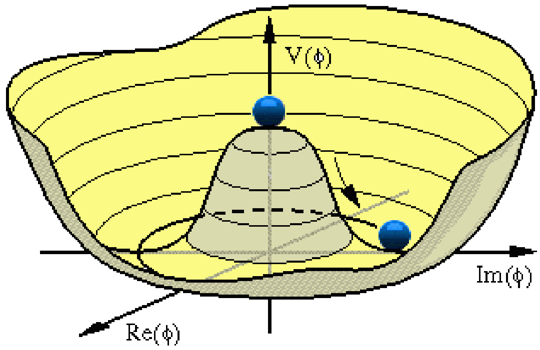

Abbildung 1: Flaschenhalspotential

Um das System berechnen zu können, ist die Wahl eines der unendlich vielen, entarteten Grundzustände nötig. Durch diese Wahl ist die Symmetrie des Systems spontan gebrochen. Stellen wir uns einen Massenpunkt an der Stelle des instabilen Maximums im Flaschenhalspotential vor. Zu dem Zeitpunkt ist die Rotationssymmetrie des Systems noch vollständig erhalten. Durch kleinste Fluktuationen ist das Masseteilchen dazu gezwungen, das instabile Maximum zu verlassen und eines der stabilen Minima einzunehmen. Durch die Besetzung eines Minimums wird die Rotationssymmetrie des Systems durch das Masseteilchen spontan gebrochen. Anders ausgedrückt: Die Wahl eines bestimmten Grundzustandes entspricht der Wahl einer bestimmten Phase ϕ, die die Symmetrie spontan bricht. Dies ist nochmal ein Beispiel dafür, dass Symmetrie eine instabile Eigenschaft der Anfangsbedingungen ist. Um nun eine effektive Theorie beschreiben zu können, wählen wir folgenden Grundzustand:

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1|0\rangle &= v \\ \langle 0|\phi_2|0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Betrachte nun kleine Schwingungen um die Ruhelage des Minimums und definiere ein verschobenes Feld:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= f + \chi_1 \\ \phi_2 &= \chi_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Daraus ergibt sich insgesamt folgende Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \chi_1)^2 + (\partial_\mu \chi_2)^2\right] - \frac{1}{2} m_1^2 \chi_1^2 - \frac{\lambda}{16}\left(\chi_1^4 + 2\chi_1^2\chi_2^2 + \chi_2^4\right) - \frac{m\sqrt{\lambda}}{2}\left(\chi_1^2 + \chi_2^2\right)\chi_1 \tag{12}$$

Aus der neuen Lagrangedichte lässt sich nun ablesen, dass das Teilchen χ_1 eine Masse und das Teilchen χ_2 keine Masse hat. Die globale U(1)-Symmetrie ist spontan gebrochen und χ_2 ist das Goldstone-Boson.

Kleine Schwingungen um ein Minimum das Flaschenhalspotentials können in radiale und winkelabhängige Komponenten aufgeteilt werden. Das Teilchen χ_1 vollführt dabei die radiale Schwingung um die gewählte Ruhelage, während sich das masselose Goldstone-Boson energiefrei entlang des Minima-Kreises bewegen kann.

Wie erwähnt, ist $\mathcal{L}$ aus Gleichung (12) gegenüber der originalen U(1)-Phasentransformation nicht mehr invariant. Jedoch ist sie gegenüber der folgenden U(1)-Phasentransformation invariant:

$$(v + \chi_1 + i\chi_2) \longrightarrow (v + \chi_1 + i\chi_2)' = e^{i\alpha}\,(v + \chi_1 + i\chi_2) \tag{13}$$

Deshalb sagt man auch, die globale U(1)-Phasensymmetrie ist verborgen.

2.4 Beispiel: Chirale Symmetrie

Spontane Symmetriebrechung spielt u.a. eine Rolle im linearen σ-Modell der Pion-Nukleon-Wechselwirkung ($O(4)$), in der Theorie der Supraleitung ($U(1)$), im Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung ($SU(2)$x$U(1)$) und in der chiralen Störungstheorie ($SU(2)_R$x$SU(2)_L$)

Im Folgenden betrachten wir die chirale Symmetriebrechung: Betrachte ein System mit folgender Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi} i \partial\!\!\!/ \psi + i g \bar{\psi} \tau \gamma_5 \psi \phi + g \bar{\phi} \phi \sigma \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) \\
&- \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \phi^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\sigma^2 + \phi^2)^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Diese Lagrangedichte beschreibt ein System aus masselosen up- und down-Quarks, die durch ein masseloses Dublett, dem Spinorfeld $\psi = (\psi_1,\psi_2)$, beschrieben werden. Die drei Pionen π^+,π^0,π^- werden durch ein Triplett, dem Pseudoskalarfeld ϕ beschrieben. σ beschreibt ein Skalarfeld.

Diese Lagrangedichte ist invariant gegenüber einer globalen infinitesimalen SU(2)-Symmetrietransformation:

$$\begin{aligned}
\delta\psi &= -i\epsilon \cdot \frac{\tau}{2}\psi \\
\delta\phi &= \epsilon \times \phi \\
\delta\sigma &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Der dazugehörige Strom ist ($a = 1,2,3$) erhalten mit Ladung $Q^a = \int j^{a0}(x) d^3x$ als Konstante der Bewegung:

$$j^{a\mu}(x) = (\phi \times \partial^\mu \phi)^a + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \tau^a \psi \tag{16}$$

Zusätzlich ist $\mathcal{L}$ invariant gegenüber einer weiteren Transformation:

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -i\eta \cdot \frac{\tau}{2}\gamma_5\psi \\ \delta\phi &= \eta\sigma \\ \delta\sigma &= -\eta \cdot \phi \end{aligned} \tag{17}$$

Dazu gibt es einen weiteren Satz von erhaltenen Strömen mit zugehörigen Ladungen Q_5^a:

$$j_5^{a\mu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\tau^a\psi + (\sigma\partial^\mu\phi^a - \phi^a\partial^\mu\sigma) \tag{18}$$

Diese Transformationen in Gleichung (17) hat die Eigenschaft, dass sie Paritätsänderungen mit einbeziehen ($\psi \rightarrow \gamma_5\psi$ und Pseudoskalar $\phi \rightarrow$ Skalar σ). Die Folge davon ist, das der Strom in Gleichung (18) ein axialer Vektor und die dazugehörige Ladung Q_5^a ein Pseudoskalar ist.

Die Algebra, die durch die Ladungen generiert werden, ist die Folgende:

$$\begin{aligned} \left[Q^a, Q^b\right] &= i\epsilon_{abc}Q^c \\ \left[Q^a, Q_5^b\right] &= i\epsilon_{abc}Q_5^c \\ \left[Q_5^a, Q_5^b\right] &= i\epsilon_{abc}Q^c \end{aligned} \tag{19}$$

Die erste Gleichung repräsentiert die Generatoren der SU(2)-Gruppe. Die zweite Gleichung transformiert einen Isovektor unter einer SU(2)-Gruppe. Die dritte Gleichung vervollständigt die Algebra der sechs Ladungen. Diese Relationen sind natürlich viel komplizierter als die erste allein, um eine Matrizen-Darstellung der Algebra zu finden. Mit der Vereinfachung $Q_{R/L}^a = \frac{1}{2}\left(Q^a \pm Q_5^a\right)$ finden wir folgende Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} \left[Q_R^a, Q_R^b\right] &= i\epsilon_{abc}Q_R^c \\ \left[Q_L^a, Q_L^b\right] &= i\epsilon_{abc}Q_L^c \\ \left[Q_R^a, Q_L^b\right] &= 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Hiermit erkennen wir aufgrund der Vertauschung von Q_R und Q_L, dass die Lagrangedichte invariant gegenüber einer sogenannten chiralen Symmetrie $SU(2)_R \times SU(2)_L$ ist. Diese Darstellung ist gekennzeichnet durch die Eigenwerte des links- und rechtshändigen Isospins $Q_{R/L}^2$ der Teilchen, in diesem Fall der Quarks. Da die Algebra der SU(2)-Gruppe einer Rotation im 3-dim. Raum entspricht, entspricht die Algebra der $SU(2)_R \times SU(2)_L$ der Rotation in einem 4-dim. euklidischen Raum.

Für $\mu^2 < 0$ entspricht das Potential in (14) der 4-dim. Version des oben besprochenen Flaschenhalspotentials. Die Minima liegen bei $\left\langle \sigma^2 + \phi^2 \right\rangle_0 = -\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ auf einer 3-dim. Hyperfläche im 4-dim. Raum. Wiederum wählen wir einen beliebigen Grundzustand aus und führen das dazugehörige verschobene Feld ein:

$$
\begin{aligned}
<\phi>_0 &= 0 \\
<\sigma>_0 &= \left(-\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv v \\
\sigma &= v + \sigma'
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Daraus folgt für $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ + gv\right)\psi + ig\bar{\psi}\tau\gamma_5\psi \cdot \phi + ig\bar{\psi}\psi\sigma' \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma')(\partial^\mu\sigma') + \mu^2\sigma'^2 - \lambda^2 v\sigma'(\sigma'^2 + \phi^2) \\
&- \frac{1}{4}\lambda^2(\sigma'^2 + \phi^2)^2
\end{aligned}
\tag{22}
$$

An dieser Lagrangedichte erkennen wir, dass das ϕ-Feld masselos ist. Es existieren also drei Goldstone-Bosonen, die den drei Richtungen senkrecht zur ausgewählten Richtung für die Symmetriebruch-Bedingung entsprechen. Das σ'-Feld hat die Masse $(-2\mu^2)^{\frac{1}{2}}$. Mit anderen Worten: Bei Anwendung der chiralen Symmetrietransformation und geeigneter Wahl eines Grundzustands erhalten wir 3 Goldstone-Bosonen, die Pionen. Durch die Wahl des Grundzustandes wurde eine von vier Dimensionen festgelegt, die restlichen drei wurden zu Goldstone-Bosonen. Die chirale Symmetrie ist spontan gebrochen.

3 Der Higgs-Mechanismus

Eine der wichtigsten Eigenschaften, die Elementarteilchen besitzen, ist Masse. Manche haben überhaupt keine (z.B. Photon), viele andere Elementarteilchen haben zum Teil große Massen. Die Frage ist jedoch, wie Teilchen zu ihrer Masse kommen. Diese Frage hat Professor Peter Higgs von der Universität Edinburgh versuchsweise beantwortet. Er führte dazu ein Feld ein, das sogenannte Higgs-Feld, das im ganzen Raum herrscht. Teilchen, die sich in diesem Feld aufhalten, erhalten Masse. Die Wirkung des Higgs-Feldes wird durch das sogenannte Higgs-Boson vermittelt. Durch seine Kopplung an alle Teilchen verschafft das Higgs-Boson ihnen Masse. Das Higgs-Teilchen ist das letzte noch fehlende Teilchen im Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Mit dem LHC in CERN sollte es möglich sein, so hohe Schwerpunktsenergien bei Kollisionseperimenten zu erreichen, die zur Erzeugung des Higgs-Bosons ausreichen. Das Theorem von Higgs lautet wie folgt:

Wird eine Eichsymmetrie spontan gebrochen, so tritt das zugehörige Nambu-Goldstone-Boson physikalisch nicht in Erscheinung. Das Eichfeld wird massiv und absorbiert den entsprechenden Freiheitsgrad

Dieses Theorem soll anhand folgender schematischer Beispiele verdeutlicht werden:

3.1 Spontane Brechung einer abelschen lokalen Symmetriegruppe

Betrachte den einfachen Fall einer abelschen U(1) Eichtheorie mit Lagrangian

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda^2(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{23}$$

mit

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= (\partial_\mu - igA_\mu)\phi \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial\nu A_\mu \end{aligned} \tag{24}$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer lokalen U(1)-Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{25}$$

Wenn $\mu^2 < 0$ ist, dann ist der einzige Grundzustand bei $\phi_0 = 0$ invariant und es liegt exakte Symmetrie vor. Für $\mu^2 > 0$ liegt das Minimum das Potentials der Lagrangsdichte bei $|\phi| = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\mu^2}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}$

Der Higgs-Mechanimus teilt das Feld in Amplitude und Phase auf. Anschließend wählt man die sogenannte unitäre Eichung, so daß nur der Realteil des Feldes übrig bleibt.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{-i\frac{\theta(x)}{v}} \\ \alpha(x) &= -\frac{1}{gv}\theta(x) \end{aligned} \tag{26}$$

Wenn man nun alle Transformationen einsetzt, ergibt sich folgende Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - \frac{1}{2}\mu^2\rho^2 - \frac{1}{4}F_{A'\mu\nu}F^{A'\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2f^2A'_\mu A'^\mu \\ &+ A'_\mu A'^\mu\frac{1}{2}g^2(\rho^2 + 2v\rho) - \frac{1}{8}\lambda^2\rho^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 v\rho^3 + const. \end{aligned} \tag{27}$$

Sowohl das Skalarfeld ρ als auch das Eichfeld A'_μ sind massiv. Das Skalarfeld beinhaltet das Higgs-Boson.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass aufgrund der spontanen Symmetriebrechung das Eichfeld eine Masse erhält. Durch den Higgs-Mechanismus entstehen zusätzliche Freiheitsgrade, die durch die unitäre Eichung eliminiert werden. Der Vakuumzustand ist durch die Eichfixierung nicht mehr entartet und invariant. Das massive Eichfeld absorbiert das Goldstone-Boson. $\theta(x)$ wird daher das „Möchte-gern-Goldstone-Boson“ genannt.

3.2 Glashow-Salam-Weinberg-Modell

Das GSW-Modell vereint die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung. In diesem Modell ist eine Langrangedichte $\mathcal{L}$ gegeben, die unter einer lokalen $SU(2) \times U(1)$- Trafo invariant ist. Nach langer Rechnung tauchen folgende Felder in der neuen Lagrangedichte auf:

- Vektorfeld $W_\mu(x)$: Massives Austauschteilchen (schw. Ww.)
- Vektorfeld $Z_\mu(x)$: Massives Austauschteilchen (schw. Ww.)
- Vektorfeld $B_\mu(x)$: Elektromagnetisches Feld
- Skalarfeld $\rho(x)$: Higgs-Feld

Es bleibt das Photon als einziges masslose Teilchen über. Die Erklärung dafür liefert die Residuale Symmetrie: $\exists$ eine Untergruppe U(1), die $\mathcal{L}$ und $|0\rangle$ invariant lassen.