RELATIVITÄTSTHEORIE

Vorlesung WS 1987/88 und WS 2003/04

M. Stingl

LaTeX-Edition von Daniel Ebbeler

Inhaltsverzeichnis

Literaturhinweise

[0] Lorentz / Einstein / Minkowski, Das Relativitätsprinzip, 8. Aufl., Stuttgart 1982 (B.G. Teubner) (Sammlung nachgedruckter Originalabhandlungen)

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, New York 1972 (Wiley) (dieser Vorlesung überwiegend zu Grunde gelegt)

[2] C.W. Misner / K.S. Thorne / J.A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco, 1970 (Freeman)

[3] R.U. Sexl, / H.K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, 4. Aufl., Heidelberg 1995 (Spektrum Akadem. Verlag)

[4] R. Adler / M. Bazin / M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, New York 1965 (Mc Graw-Hill)

[5] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago 1984 (University of Chicago Press)

[6] C. Moller, *The Theory of Relativity*, 2nd Edition, Oxford 1972 (Oxford University Press)

[7] H. Stephani, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Berlin 1977, Deutscher Verlag der Wissenschaften

[8] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, 6. Aufl., Berlin 1970 (Springer-Verlag)

1 Grundzüge der Speziellen Relativitätstheorie

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass dem Hörer die empirische Basis und die wesentlichen Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie aus den Anfängervorlesungen bereits bekannt sind; es wird lediglich eine kurze, formale Zusammenfassung ihrer Gesichtspunkte gegeben.

1.1 Aufstellung der speziellen Lorentz-Transformation

Die wesentliche Aussage der Speziellen Relativitätstheorie ist eine neuartige Vorschrift für die Transformation von Längen- und Zeitmaßstäben zwischen relativ zueinander gleichförmig bewegten Beobachtern (Bezugssystemen) – neuartig insofern, als diese Vorschrift von der im Bereich der Alltagserfahrung gewohnten drastisch abzuweichen beginnt, sobald die Relativgeschwindigkeit mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c vergleichbar wird.

Die von der Alltagserfahrung her gewohnte Transformation ist zugleich die der Newtonschen Mechanik, die bekannte **Galilei-Transformation**: stellt ein Beobachter in einem Inertialsystem Σ ein Ereignis zur Zeit t am Ort $\vec{x}$ fest, so wird ein Beobachter in einem dagegen gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ bewegten System Σ' (bei geeigneter Wahl des willkürlichen Nullpunktes der Zeitskala) dieses Ereignis bei

$$t' = t \tag{1.1 a}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}_0 \cdot t \tag{1.1 b}$$

registrieren. Gl. (1.1 a) impliziert die Existenz einer für alle Inertialsysteme gleichen Zeitskala, der Newtonschen „absoluten Zeit“. Aus beiden Gln. (1.1) zusammen folgt für die Umrechnung von Geschwindigkeiten $\vec{v} = d\vec{x}\,/\,dt$ zwischen Σ und Σ' das einfache Additionstheorem

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \,, \tag{1.2}$$

das nicht nur für die Bewegung materieller Körper (im Bereich $|\vec{v}\,|, |\vec{v}'\,| \ll c$), sondern z. B. auch für die Wellenfront einer ebenen Schallwelle in Luft erfüllt ist.

Eine Revision dieser einfachen Transformationsvorschrift wurde unausweichlich, als gegen Ende des 19. Jahrhunderts (Interferometer-Experiment von Michelson und Morley 1887, später durch noch wesentlich genauere Messungen ergänzt) experimentell bewiesen wurde, dass für die Ausbreitung des Lichtes – d. h. der elektromagnetischen Wellen

– Gln. (1.1) nicht gelten können: ein in Richtung einer ebenen Lichtwellenfront mitbewegter Beobachter misst deren Phasengeschwindigkeit nicht, wie nach (1.2) zu erwarten, als $c' = c - |\vec{v}_0|$, sondern findet in allen gleichförmig zueinander bewegten Bezugssystemen denselben Wert wie bei der Messung im terrestrischen Laborsystem, der somit eine fundamentale Naturkonstante darstellt:

$$c = 2.997925 \cdot 10^8 \, m \, s^{-1} \, . \tag{1.3}$$

Zur Auffindung der neuen Transformationsvorschrift, die dieser Tatsache der *Unabhängigkeit der Vakuumlichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem* gerecht wird und zugleich (1.1) als Näherung für den Grenzfall $|\vec{v}_0| \ll c$ bestehen lässt, kann etwa folgender heuristischer Gedankengang dienen (Einstein 1905):

(a) Präzisierung der Messvorschriften. Ein in einem Inertialsystem Σ ruhender Beobachter – für die meisten Zwecke kann Σ ein terrestrisches Laborsystem sein – definiere sich ein cartesisches Achsenkreuz x, y, z (bzw. x^1, x^2, x^3); auf den Achsen seien Längeneinteilungen (Maßstäbe) und in regelmäßigen Abständen Uhren angebracht. Ein zweiter Beobachter, der in einem relativ hierzu gleichförmig mit $\vec{v}_0$ bewegten System Σ' ruht, benutze ein achsenparalleles Koordinatensystem x', y', z' (bzw. $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$) mit entsprechender Messanordnung.

Synchronisation der Uhren in demselben Bezugssystem – sowohl in Σ als auch in Σ' – ist notwendig, um Zeitangaben für Ereignisse an verschiedenen Raumpunkten in demselben Bezugssystem korrekt vergleichen zu können. Sie wird dadurch erreicht, dass – etwa in Σ – die am Ursprung $\vec{x} = 0$ stehende Uhr ein Lichtsignal aussendet, wenn sie $t = 0$ anzeigt, und die übrigen Uhren dann alle so einreguliert werden, dass eine im Abstand $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ vom Ursprung stehende Uhr bei Ankunft des Lichtsignals jeweils die Zeit

$$t_i = \frac{r_i}{c} \qquad (\text{alle } i) \tag{1.4}$$

anzeigt. Damit ist Zeitmessung in einem Bezugssystem wohldefiniert. Diese begrifflich ganz wesentliche Synchronisationsvorschrift nimmt dadurch, dass sie auf alle gleichförmig gegen Σ bewegten Bezugssysteme gleichermaßen anzuwenden ist, bereits Bezug auf die grundlegende Erfahrungstatsache der Unabhängigkeit von c vom Bezugssystem.

Längenmessung, etwa an einem Stab, in einem Bezugssystem bedeutet dann Feststellung der Lage seiner beiden Endpunkte in diesem System *zu ein und derselben Zeit*; sie wird sinnvoll, nachdem die an diesen beiden Lagepunkten stationierten Systemuhren wie oben synchronisiert worden sind.

Gesucht wird nun die Transformation

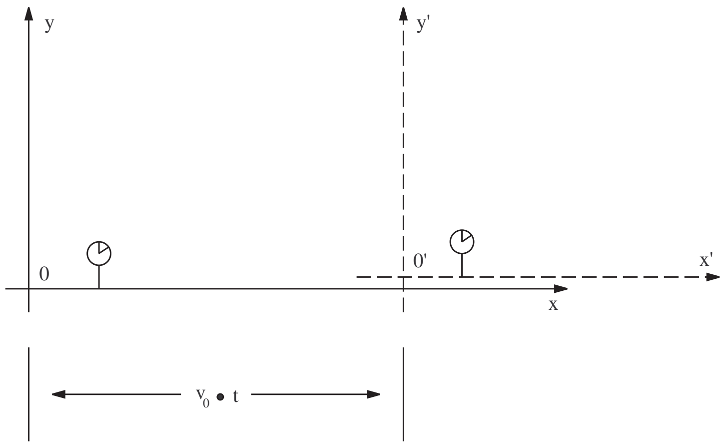
$$(\vec{x}, t) \longrightarrow (\vec{x}^{\,'}, t^{'}) \tag{1.5}$$

zwischen den in Σ und $\Sigma^{'}$ gemessenen Raum- und Zeitkoordinaten desselben Ereignisses.

b) Translationsinvarianz in Querrichtung. Zur Vereinfachung seien die achsenparallelen Koordinatenkreuze sowie der Beginn der Zeitzählung in den beiden Systemen zunächst so gewählt, dass für $t^{'} = t = 0$ die Ursprünge $0 = \{x = 0, y = 0, z = 0\}$ und $0^{'} = \{x^{'} = 0, y^{'} = 0, z^{'} = 0\}$ zusammenfallen und die gleichförmige Relativbewegung in x-Richtung erfolgt. Das bedeutet genauer: der Ursprung $0^{'}$ des $\Sigma^{'}$-Koordinatensystems soll im Σ-System die Koordinaten

$$\boxed{0^{'} :} \quad x_{0'} = v_0\, t\ , \quad y_{0'} = \text{const.} = 0\ , \quad z_{0'} = \text{const.} = 0 \tag{1.6}$$

haben.



Da aber die Wahl des Ursprungs $0^{'}$ reine Konvention ist, kann von einer gleichförmigen Bewegung von $\Sigma^{'}$ *als Ganzes* gegen Σ nur gesprochen werden, wenn auch jeder andere in $\Sigma^{'}$ feste Punkt in Σ eine Bahn parallel zur x-Achse, d. h. mit $y = \text{const.}$ und $z = \text{const.}$ beschreibt, und da für $t^{'} = t = 0$ die Anfangswerte $y = y^{'}$ und $z = z^{'}$ gelten, folgt, dass die gesuchte Transformation (1.5) die in Querrichtung zur Relativbewegung gemessenen Koordinaten ungeändert lassen muss:

$$\boxed{y^{'} = y\ , \quad z^{'} = z}\ . \tag{1.7}$$

(c) Linearitätsforderung. Eine nichttriviale Transformation findet nach (1.7) nur zwischen den Koordinatenpaaren $(x,\, t)$ und $(x',\, t')$ statt. Es ist plausibel, anzunehmen, dass etwa der Zusammenhang $x' = x'(x,\, t,\, v_0)$ linear ist, d. h. die Gestalt

$$x' = \gamma\,(x + \alpha\, t) \tag{1.8 a}$$

mit der Umkehrung

$$x = \gamma'\,(x' + \alpha' t') \tag{1.8 b}$$

besitzt, wobei die Koeffizienten γ, $\gamma\,\alpha$ und γ', $\gamma'\,\alpha'$ von v_0 abhängen können. Nichtlineare Abhängigkeiten, etwa Terme proportional zu x^2 oder t^2 oder $x\,t$ in (1.8 a), ließen sich nämlich aus Dimensionsgründen nur dadurch konstruieren, dass mindestens eine feste Längenskala ρ_0 oder Zeitskala $\rho_0\,/\,c$ eingeführt würde, die dann ein Raumgebiet der Größe ρ_0^3 um den Ursprung herum willkürlich auszeichnen und so die Homogenität des Raumes verletzen würde.

Da nach (1.6) der Punkt $x' = 0$ von Σ' in Σ bei $x = v_0 \cdot t$ erscheinen soll, muss in (1.8 a) $0 = \gamma\,(v_0\, t + \alpha\, t)$, d. h.

$$\alpha = -v_0$$

sein. Umgekehrt soll $x = 0$ in Σ' bei $x' = -v_0\, t'$ liegen; damit folgt aus (1.8 b)

$$\alpha' = +v_0\ .$$

Damit ist der nichttriviale Teil der Transformation auf die Form

$$x' = \gamma\,(v_0) \cdot (x - v_0\, t) \tag{1.9 a}$$

$$x = \gamma'\,(v_0) \cdot (x' + v_0\, t') \tag{1.9 b}$$

eingeschränkt. Für die entsprechende Transformation der Zeitskalen, t' = lineare Funktion von x und t, haben wir vorerst keine entsprechenden Einschränkungen; sie wird sich aber aus der weiteren Argumentation von selbst ergeben.

(d) Reziprozitätsforderung. Darunter versteht man die plausible Forderung, dass kein Inertialsystem in der Natur absolut ausgezeichnet sein soll. Für (1.9) bedeutet diese „Gleichberechtigung der Bezugssysteme“ insbesondere, dass ein in Σ ruhender Maßstab bei Beobachtung – d. h. Längenmessung in dem unter *(a)* präzisierten Sinne – von Σ' aus dieselbe Länge l' aufweisen soll wie derselbe, in Σ' ruhende Maßstab bei Beobachtung von Σ aus.

Der Stab ruhe also zunächst in Σ, mit Endpunkten bei x_1 und $x_2 > x_1$, seine Länge in diesem seinem „Ruhesystem“ ist dann $l = x_2 - x_1$. Vom System $\Sigma^{'}$ aus gesehen liegen die Endpunkte – beobachtet zu demselben Zeitpunkt $t^{'}$ in diesem System, wie es die Längenmessvorschrift von *(a)* verlangt – bei $x_1^{'}$ bzw. $x_2^{'}$, wobei nach (1.9 b) gilt

$$x_{1,\,2} = \gamma^{'}(v_0) \cdot (x_{1,\,2}^{'} + v_0\,t^{'}) \; ; \tag{1.10 a}$$

d. h. die Stablänge erscheint von $\Sigma^{'}$ aus als $l^{'} = x_2^{'} - x_1^{'}$ mit

$$l = x_2 - x_1 = \gamma^{'}(v_0) \cdot (x_2^{'} - x_1^{'}) = \gamma^{'}(v_0) \cdot l^{'} \; . \tag{1.10 b}$$

Umgekehrt ruhe nun derselbe Stab in $\Sigma^{'}$ mit Endpunkten bei $\tilde{x}_1^{'}$ und $\tilde{x}_2^{'}$, so dass $\tilde{x}_2^{'} - \tilde{x}_1^{'} = l$ ist. Von Σ aus gesehen erscheinen die Endpunkte, zu demselben Σ-Zeitpunkt t beobachtet, dann bei $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$, wobei nach (1.9 a) gilt

$$\tilde{x}_{1,\,2}^{'} = \gamma(v_0) \cdot (\tilde{x}_{1,\,2} - v_0\,t) \tag{1.11 a}$$

d. h. von Σ aus erscheint die Stablänge als $\tilde{l}$ mit

$$\gamma(v_0) \cdot \tilde{l} = \gamma(v_0) \cdot (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \tilde{x}_2^{'} - \tilde{x}_1^{'} = l \; . \tag{1.11 b}$$

Die Reziprozitätsforderung bedeutet, dass $\tilde{l} = l^{'}$ sein muss. Durch Vergleich von (1.10 b) und (1.11 b) ergibt sich dann

$$\boxed{\gamma^{'}(v_0) = \gamma(v_0)} \; ; \tag{1.12}$$

d. h. wir können die Transformation (1.9) präzisieren zu

$$x^{'} = \gamma(v_0) \cdot (x - v_0\,t) \tag{1.13 a}$$

$$x = \gamma(v_0) \cdot (x^{'} + v_0\,t^{'}) \; . \tag{1.13 b}$$

Zur Festlegung des Faktors $\gamma = \gamma(v_0)$ verhilft schließlich die Forderung der

(e) Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem als fundamentale Erfahrungstatsache. In der vorliegenden Situation bedeutet sie

$$\text{wenn} \quad x = c\,t \; , \quad \text{dann} \quad x^{'} = c\,t^{'} \; , \quad \text{und umgekehrt} \tag{1.14}$$

mit *demselben* c, gemäß (1.3). Mit (1.13) ergibt das

$$c\,t^{'} = \gamma(c - v_0)\,t \; ; \quad c\,t = \gamma(c + v_0)\,t^{'} \; ,$$

woraus durch Elimination etwa von t' folgt

$$c\,t \;=\; \gamma\,(c + v_0)\,\frac{1}{c}\,\gamma\,(c - v_0)\,t \quad \text{oder} \quad c^2 \;=\; \gamma^2\,(c^2 - v_0^2)\;,$$

d. h. schließlich

$$\boxed{\gamma \;=\; \gamma\,(v_0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta \;=\; \frac{v_0}{c}}\;. \tag{1.15}$$

Die noch fehlende Transformationsformel für die Zeitskala, $t' = t'\,(t,\,x,\,v_0)$, folgt nun aus (1.13 a/b) durch Elimination etwa von x' und Benutzung von (1.15):

$$\gamma\,v_0\,t' \;=\; \gamma^2\,v_0\,t \,+\, (1 - \gamma^2)\,x$$

oder wegen

$$\frac{1 - \gamma^2}{\beta\,\gamma} \;=\; -\beta\gamma \tag{1.16}$$

schließlich

$$t' \;=\; \gamma\,(v_0)\,\cdot\,\left(t \,-\, \frac{\beta}{c}\,x\right)\;, \tag{1.17 a}$$

$$t \;=\; \gamma\,(v_0)\,\cdot\,\left(t' \,+\, \frac{\beta}{c}\,x'\right)\;. \tag{1.17 b}$$

Damit ist die gesuchte Transformation, die *spezielle Lorentz-Transformation mit $\vec{v}_0$ in x-Richtung*, vollständig bestimmt; sie lautet

$$\boxed{c\,t' \;=\; \gamma\,\cdot\,[c\,t \,-\, \beta\,x]}\;, \tag{1.18 a}$$

$$\boxed{x' \;=\; \gamma\,\cdot\,[x \,-\, \beta\,(c\,t)]}\;, \tag{1.18 b}$$

$$\boxed{y' \;=\; y\;, \quad z' \;=\; z}\;, \tag{1.18 c}$$

mit der Umkehrung

$$c\,t \;=\; \gamma\,\cdot\,[c\,t' \,+\, \beta\,x']\;, \tag{1.19 a}$$

$$x \;=\; \gamma\,\cdot\,[x' \,+\, \beta\,(c\,t')]\;. \tag{1.19 b}$$

Wie man sieht, nimmt sie bei Verwendung der Koordinate $c\,t$ statt t eine in Raum- und Zeitkoordinaten weitgehend symmetrische Form an.

Erfolgt die Relativbewegung nicht in der x-Richtung, sondern in beliebiger Richtung $\hat{v}_0 = \frac{\vec{v}_0}{v_0}$, so zerlegt man den Ortsvektor $\vec{x}$ in Σ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{v}_0$,

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{x}_{\parallel} = (\hat{v}_0 \cdot \vec{x}\,)\,\hat{v}_0 \tag{1.20 a}$$

und analog den Ortsvektor $\vec{x}^{\,'}$ in $\Sigma^{'}$ gemäß

$$\vec{x}^{\,'} = \vec{x}^{\,'}_{\parallel} + \vec{x}^{\,'}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \vec{x}^{\,'}_{\parallel} = (\hat{v}_0 \cdot \vec{x}^{\,'}\,)\,\hat{v}_0 \;. \tag{1.20 b}$$

Wegen der Isotropie des Raumes transformieren sich dann die Komponenten $x_{\parallel}$, $x^{'}_{\parallel}$ mit den Zeiten t, $t^{'}$ wie die Koordinaten x, $x^{'}$ in (1.18 a/b), während die Komponenten $x_{\perp}$, $x^{'}_{\perp}$ wie in (1.18 c) ungeändert bleiben. Damit erhält man die *spezielle Lorentz-Transformation oder „Schubtransformation" (engl. boost) mit beliebiger Richtung der Relativgeschwindigkeit* $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \hat{v}_0$:

$$\boxed{c\,t^{'} = \gamma\,(c\,t) - \beta\,\gamma\,(\hat{v}_0 \cdot \vec{x}\,)} \tag{1.21 a}$$

$$\boxed{\vec{x}^{\,'} = \vec{x} + [(\gamma - 1)\,(\hat{v}_0 \cdot \vec{x}\,) - \beta\,\gamma\,(c\,t)]\,\hat{v}_0} \;. \tag{1.21 b}$$

Die Umkehrtransformation ist wie bei (1.19) durch die formale Ersetzung $\beta \to -\beta$ zu erhalten. – Neuartig gegenüber der Galilei-Transformation (1.1), die man offensichtlich im Grenzfall

$$v_0 \ll c\,, \quad \text{d.h.} \quad \beta \ll 1\,, \quad \gamma \approx 1 \tag{1.22}$$

als „nichtrelativistische Näherung" zurückerhält, ist nicht nur das Auftreten der Dehnungsfaktoren $\gamma \geq 1$ gemäß (1.15), sondern vor allem die *nichttriviale Transformation der Zeitskala* ($t^{'} \neq t$ für $v_0 \neq 0$), die das Newtonsche Konzept der absoluten Zeit widerlegt. Sie führen sofort zu wesentlichen, für die am nichtrelativistischen Erfahrungsbereich (1.22) ausgebildete Anschauung höchst ungewohnten Konsequenzen:

1) c als Grenzgeschwindigkeit. Für $v_0 \to c$ werden die Faktoren γ in (1.21) und damit die ganze Transformation singulär. Für die Relativgeschwindigkeit zwischen Inertialsystemen – und damit, da jeder materielle Körper ein „Ruhesystem" mit sich führt, insbesondere zwischen materiellen Körpern – ist also die Vakuumlichtgeschwindigkeit c eine obere Grenze.

2) Relativität des Gleichzeitigkeitsbegriffs. Finden im System Σ zwei Ereignisse an verschiedenen Orten x_1 und $x_2 = x_1 + \Delta x$ zur selben Zeit $t_1 = t_2 = t$ statt ($\Delta t = 0$), so ist für den Beobachter im relativ dazu bewegten System Σ' ihr zeitlicher Abstand nach (1.18 a)

$$c\,(t_2' - t_1') = \gamma\,(-\beta\, x_2 + \beta\, x_1) \ ,$$
$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\beta\,\gamma\,\frac{\Delta x}{c} \ , \tag{1.23}$$

also nicht Null. Es hat also keinen Sinn, schlechthin von „zwei gleichzeitigen Ereignissen" zu reden; Gleichzeitigkeit ist stets nur in einem speziellen Bezugssystem gegeben. (Die meisten sog. Paradoxien der Relativitätstheorie entspringen aus der Nichtbeachtung dieser Tatsache).

3) Relativistische Längenkontraktion. In Gl. (1.11 b) wurde bereits festgestellt, dass ein im System Σ' ruhender Stab der Länge l für den Beobachter in Σ die Länge

$$\tilde{l} = \frac{1}{\gamma}\, l \ , \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2} < 1 \tag{1.24}$$

hat: „ein relativ zum Beobachter schnell bewegter Stab erscheint diesem verkürzt". Bei dieser Folgerung ist die oben betonte Vorschrift für die Längenmessung in einem System als *Beobachtung der Stabenden zu in diesem System gleichen Zeiten* wesentlich. Dem mit dem Stab mitbewegten Beobachter in Σ' erschiene die Feststellung der beiden Stabenden durch den Σ-Beobachter *nicht* als gleichzeitig, wie unter 2) betont, d. h. in seinem System nicht als gültige Längenmessung, und er wäre daher über das abweichende Ergebnis auch nicht erstaunt. – Die in den Gln. (1.18) verarbeitete Reziprozitätsforderung bedeutet im übrigen, dass umgekehrt ein in Σ ruhender Stab dem Σ'-Beobachter gleichermaßen kontrahiert erscheint, vgl. (1.10 b).

4) Relativistische Zeitdilatation. Finden im System Σ' zwei Ereignisse *am gleichen Ort* x' zu verschiedenen Zeiten t_1' und $t_2' = t_1' + \Delta t'$ statt – etwa zwei Ablesungen einer dort ruhenden Uhr – , so registriert nach Aussage von Gl. (1.17 b) ein im System Σ ruhender Beobachter diese Ereignisse nach seiner Zeitskala zu den Zeitpunkten

$$t = t_{1,2} = \gamma\,(v_0) \cdot \left(t_{1,2}' + \frac{\beta}{c}\, x'\right)$$

und stellt daher zwischen ihnen eine Zeitdifferenz

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\,(t_2' - t_1') = \gamma\,\Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t' \tag{1.25}$$

fest: „eine relativ zum Beobachter schnell bewegte Uhr geht für ihn langsamer“ als die relativ zu ihm ruhende.

Dieser Effekt ist experimentell vielfach und mit hoher Genauigkeit verifiziert durch die Messung der mittleren Lebensdauer – bzw. der innerhalb dieser Lebensdauer zurückgelegten mittleren Laufstrecke – von schnell bewegten instabilen Elementarteilchen. Die mittlere Lebensdauer τ eines zerfallenden Teilchens stellt – in einem statistischen Sinne – eine Uhr für die in seinem Ruhesystem gemessene Zeit, die sog. *Eigenzeit*, dar. Ein energiereiches Teilchen aus den Sekundärprozessen der kosmischen Höhenstrahlung oder aus einem Beschleuniger, das sich gegenüber dem terrestrischen Beobachter mit $|\vec{v}\,| \approx c$ bewegt, hat in dessen Laborsystem eine gemäß (1.25) erheblich verlängerte Lebensdauer und demgemäß längere Laufstrecke. – Beim

5) Doppler-Effekt elektromagnetischer Wellen verbindet sich die Zeitdilatation mit der auch im nichtrelativistischen Bereich schon geläufigen Frequenzverschiebung bewegter Wellensender: Ein in Σ' am Ort $\vec{x}\,'$ ruhender Sender strahle elektromagnetische Wellen aus, deren Periode – d. h. Zeitabstand zweier sukzessiver Feldstärkenmaxima – in der Σ'-Zeitskala zu dt' und deren Frequenz daher zu

$$\nu = \frac{1}{dt'}$$

bestimmt wird. Einem im System Σ bei $\vec{x} = 0$ ruhenden Empfänger erscheint dieses Intervall zunächst gemäß (1.25) zu $dt = \gamma\, dt'$ gedehnt, aber diese Zeit ist noch nicht das, was er als Periode, nämlich als Zeit zwischen der Ankunft zweier sukzessiver Feldstärkenmaxima, registrieren würde. In der Zeit dt hat sich nämlich der Sender in Σ um $d\vec{x} = \vec{v}_0\, dt$ weiterbewegt, so dass von den beiden bei t und $t + dt$ *emittierten* Wellenmaxima das erste nur die Laufzeit $|\vec{x}\,| \,/\, c$, das zweite dagegen die Laufzeit $|\vec{x} + d\vec{x}\,| \,/\, c$ zum Empfänger benötigt. Die vom *Empfänger* registrierte Periode der Wellen ist daher

$$dT = dt + \frac{|\vec{x}\,(t) + d\vec{x}\,| - |\vec{x}\,(t)|}{c}\,, \tag{1.26 a}$$

oder

$$\begin{aligned} dT &= dt + \frac{|\vec{x}\,|}{c} \left\{ \sqrt{1 + 2\,\hat{x} \cdot \frac{\vec{v}_0\, dt}{|\vec{x}\,|} + \left(\frac{\vec{v}_0\, dt}{|\vec{x}\,|} \right)^2} - 1 \right\} \\ &= \left[1 + \left(\hat{x} \cdot \frac{\vec{v}_0}{c} \right) \right] dt + 0\,((dt)^2) \end{aligned} \tag{1.26 b}$$

und die von ihm gemessene Frequenz $\tilde{\nu} = 1 / dT$ daher

$$\boxed{\tilde{\nu} \approx \frac{1}{[1 + \beta (\hat{x} \cdot \hat{v}_0)] \gamma (v_0) dt'} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta (\hat{x} \cdot \hat{v}_0)} \nu} . \tag{1.27}$$

Für vom Empfänger wegbewegten Sender ($\hat{v}_0 \cdot \hat{x} = +1$) und transversal bewegten Sender ($\hat{v}_0 \cdot \hat{x} = 0$) wird $\tilde{\nu} < \nu$, bei Licht also eine „Rotverschiebung“ festgestellt, die im zweiten Falle allein aus der relativistischen Zeitdilatation (Zähler von (1.27)), im ersten auch teilweise aus dem gewöhnlichen Dopplereffekt (Nenner von (1.27)) herrührt. Für direkt auf den Empfänger zubewegten Sender ($\hat{v}_0 \cdot \hat{x} = -1$) überwiegt der Nennereffekt in (1.27) und ergibt eine Frequenzerhöhung (d. h. bei Licht Violettverschiebung) gemäß

$$\tilde{\nu} \approx \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu > \nu \qquad (\text{für } \hat{v}_0 = -\hat{x}) . \tag{1.28}$$

1.2 Minkowski-Raum und Lorentz-Metrik

Die charakteristische mathematische Eigenschaft der Lorentz-Transformation ist die Existenz einer bilinearen Form der Koordinaten, die bei diesen Transformationen invariant bleibt.

Wird im System Σ am Punkt $\vec{y}$ zur Zeit t_y ein Lichtblitz erzeugt, so breitet sich von dort eine elektromagnetische Kugelwelle aus, deren Wellenfront zur Zeit $t_x = t_y + \Delta t$ die Punkte auf der Kugelschale $|\vec{x} - \vec{y}| = c \Delta t$ erreicht hat, d. h. die Punkte $\vec{x}$, deren Koordinaten die Bedingung

$$[c (t_x - t_y)]^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 = 0 \tag{1.29 a}$$

erfüllen. Die „Ereignisse“, d. h. Raum-Zeit-Punkte $(t_x, \vec{x})$, die dieser Bedingung genügen, bilden den „Lichtkegel“ des Ereignisses $(t_y, \vec{y})$, und zwar hier wegen $t_x - t_y > 0$, den *„Vorwärtslichtkegel“*. Da in die spezielle Lorentz-Transformation (1.21) die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem von vornherein eingebaut wurde, muss der Lichtkegel invariant sein, d. h. auch im System Σ' muss für die von der Lichtwelle erreichten Raum-Zeit-Punkte gelten

$$[c (t_x' - t_y')]^2 - (\vec{x}' - \vec{y}')^2 = 0 . \tag{1.29 b}$$

Die formale Rechnung, um dies nachzuprüfen, lohnt sich dennoch, denn sie bringt das bemerkenswerte Ergebnis, dass die beiden quadratischen Formen linker Hand in (1.29 a/b) nicht nur gleichzeitig verschwinden, sondern überhaupt gleich sind:

$$\begin{aligned}
&[c\,(t_x^{'} - t_y^{'})]^2 - (\vec{x}^{\,'} - \vec{y}^{\,'})^2 \\
&= \{[c\,(t_x - t_y)] + [(\gamma - 1)\,c\,(t_x - t_y) - \beta\,\gamma\,\hat{v}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{y})]\}^2 \\
&- \{(\vec{x} - \vec{y}) + [(\gamma - 1)\,\hat{v}_0\,(\vec{x} - \vec{y}) - \beta\,\gamma\,c\,(t_x - t_y)]\,\hat{v}_0\}^2 \\
&= [c\,(t_x - t_y)]^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 \\
&+ [2\,(\gamma - 1) + (\gamma - 1)^2 - \beta^2\,\gamma^2]\,[c^2\,(t_x - t_y)^2 - (\hat{v}_0\,(\vec{x} - \vec{y}))^2] \\
&- [2\,\beta\,\gamma + 2\,\beta\,\gamma\,(\gamma - 1) - 2\,\beta\,\gamma - 2\,\beta\,\gamma\,(\gamma - 1)]\,[c\,(t_x - t_y)\,\hat{v}_0\,(\vec{x} - \vec{y})]\ .
\end{aligned}$$

Die gemischten Terme in der letzten Zeile fallen heraus, und die zweite Zeile verschwindet, weil nach (1.15) gilt:

$$2\,(\gamma - 1) + (\gamma - 1)^2 - \beta^2\,\gamma^2 = (1 - \beta^2)\,\gamma^2 - 1 = 0\ . \tag{1.30}$$

Damit ist gezeigt, dass die aus den Zeit-und Raumkoordinaten zweier Ereignisse gebildete bilineare Form

$$\boxed{d^2\,(t_x,\,\vec{x};\,t_y,\,\vec{y}\,) = [c\,(t_x - t_y)]^2 - (\vec{x} - \vec{y}\,)^2}\ , \tag{1.31}$$

das sog. *Vierer-Abstandsquadrat*, invariant ist gegenüber den speziellen Lorentz-Transformationen, d. h. in allen gegeneinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen denselben Wert besitzt.

Diese Beobachtung legt es nahe, eine Erweiterung des dreidimensionalen euklidischen Ortsraumes zu einem *vierdimensionalen Raum* durch Hinzunahme der Größe $c\,t$ als vierter Koordinate vorzunehmen und diesen Raum mit einer Distanzdefinition vom Typ (1.31) zu versehen. Die Lorentz-Schübe (1.21) erscheinen dann als Teilmenge derjenigen linearen Transformationen dieses vierdimensionalen Raumes, welche den Abstand (1.31) invariant lassen.

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ kann die Metrik, d. h. die Abstandsdefinition $d\,(\vec{a},\,\vec{b}\,)$ für je zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ des Raumes, auf die Existenz des Skalarproduktes $\vec{a} \cdot \vec{b}$ gemäß

$$d^2\,(\vec{a},\,\vec{b}\,) = \|\ \vec{a} - \vec{b}\ \|^2 = (\vec{a} - \vec{b}\,) \cdot (\vec{a} - \vec{b}\,) \tag{1.32}$$

zurückgeführt werden. Der euklidische Charakter dieses Skalarproduktes drückt sich darin aus, dass mindestens ein Satz von drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ mit den Skalarprodukten

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} \tag{1.33}$$

gefunden werden kann, eine *Orthonormalbasis.* Stellt man jeden Vektor $\vec{a}$ von $\mathbb{R}^3$ durch Komponentenzerlegung $\vec{a} = a_1\,\vec{u}_1 + a_2\,\vec{u}_2 + a_3\,\vec{u}_3$ bezüglich einer solchen Orthonormalbasis dar, so ist das euklidische Skalarprodukt durch die manifest symmetrische und (positiv-) definite Bilinearform der Koordinaten

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\,a_i\,b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i\,b_i \tag{1.34}$$

gegeben.

Analog betrachten wir nun einen vierdimensionalen reellen Vektorraum, dessen Vektoren x, y, z ... mit reellen Zahlen c gemäß $c_1\,x + c_2\,y$ usw. linear kombinierbar sind. Wir wählen einen Satz von vier linearen unabhängigen Vektoren

$$\{e_\mu\} = \{e_0,\, e_1,\, e_2,\, e_3\} \tag{1.35}$$

und ordnen einem Ereignis (Raum-Zeit-Punkt oder „Weltpunkt“), das im Bezugssystem Σ zur Zeit t am Ort $(x,\, y,\, z)$ stattfindet, den *„Vierervektor“*

$$\boxed{x = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu\,e_\mu = x^0\,e_0 + x^1\,e_1 + x^2\,e_2 + x^3\,e_3} \tag{1.36 a}$$

mit den sog. *kontravarianten Koordinaten*

$$\boxed{x^0 = ct\,, \quad x^1 = x\,, \quad x^2 = y\,, \quad x^3 = z} \tag{1.36 b}$$

in diesem Raum zu. Die Wahl eines Bezugssystems Σ entspricht also der Wahl eines bestimmten Koordinatensystems (einer Basis) im vierdimensionalen Raum. – Die begriffliche Unterscheidung zwischen dem Vierervektor x (= Element des Vektorraumes) und dem Satz $\{x^\mu\}$ seiner kontravarianten Koordinaten wird in der Physik salopp gehandhabt; oft sprechen wir einfach vom „Vierervektor x^μ“.

Eine Skalarproduktdefinition, die auf die Größe (1.31) als Abstandsquadrat (Metrik) führen soll, kann offenbar nicht durch bloße vierdimensionale Erweiterung von (1.34) erhalten werden, sondern muss berücksichtigen, dass „zeitlicher“ und „räumlicher“ Beitrag in (1.31) mit verschiedenen Vorzeichen eingehen, so dass (1.31) im Gegensatz zu (1.32) eine *„indefinite Metrik“* darstellt, d. h. beiderlei Vorzeichen annehmen kann. Wir postulieren daher die Existenz eines *Vierer-Skalarprodukts* $a \cdot b$ zu je zwei Vierervektoren a, b derart, dass eine Basis (1.35) mit den von (1.33) abweichenden Skalarprodukten

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{1.37}$$

gefunden werden kann, wobei die *„metrische Matrix“*

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta_{\nu\mu}) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

noch diagonal, aber kein Vielfaches der Einheitsmatrix mehr ist . *) Da das Skalarprodukt in beiden Faktoren linear sein soll, ergibt es sich dann für zwei gemäß (1.36) in dieser *„pseudoorthonormalen“ Basis* dargestellte Vektoren als

$$a \cdot b = b \cdot a = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, a^{\mu}\, b^{\nu} \tag{1.39 a}$$

$$= a^0\, b^0 - a^1\, b^1 - a^2\, b^2 - a^3\, b^3$$

$$= a^0\, b^0 - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \;. \tag{1.39 b}$$

Das entsprechende vierdimensionale Betragsquadrat

$$a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - |\vec{a}\,|^2 \tag{1.40}$$

ergibt dann, wenn man es für die Differenz $x - y$ zweier Vierervektoren ausführt, genau das Abstandsquadrat (1.31), das als *Lorentz-Metrik* bezeichnet wird. Der mit dieser Metrik, d. h. mit dem indefiniten Skalarprodukt (1.39 / 1.38) versehene vierdimensionale Vektorraum (1.36) heißt der **Minkowski-Raum** $\boldsymbol{\mathcal{M}}^4$. Er ist der geeignete mathematische Rahmen für die relativistische Raum-Zeit-Kinematik.

Das Ungewohnte am Minkowski-Raum ist der indefinite Charakter seiner Metrik, der zu einer im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ nicht existierenden Einteilung aller Ereignispaare (x, y) in drei disjunkte Klassen führt: zwei Ereignisse $x = \{x^0, \vec{x}\}$ und $y = \{y^0, \vec{y}\}$ heißen zueinander

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \text{ raumartig, wenn} & (x-y)^2 < 0 \;, & \text{d. h. } |\vec{x} - \vec{y}\,|^2 > (x^0 - y^0)^2 \;, \\ \bullet \text{ lichtartig, wenn} & (x-y)^2 = 0 \;, & \text{d. h. } |\vec{x} - \vec{y}\,|^2 = (x^0 - y^0)^2 \;, \\ \bullet \text{ zeitartig, wenn} & (x-y)^2 > 0 \;, & \text{d. h. } (x^0 - y^0)^2 > |\vec{x} - \vec{y}\,|^2 \;. \end{array}\right\} \tag{1.41}$$

Für zwei zueinander raumartige Ereignisse ist der räumliche Abstand $|\vec{x} - \vec{y}\,|$ größer als der Lichtweg

$$|x^0 - y^0| = c\,|t_x - t_y| \;, \tag{1.42}$$

*)Ob man (1.38) oder das Negative davon wählt, ist Konvention. Im zweiten Falle erhält man als Abstandsquadrat des Negative von (1.31). Beide Konventionen werden benutzt.

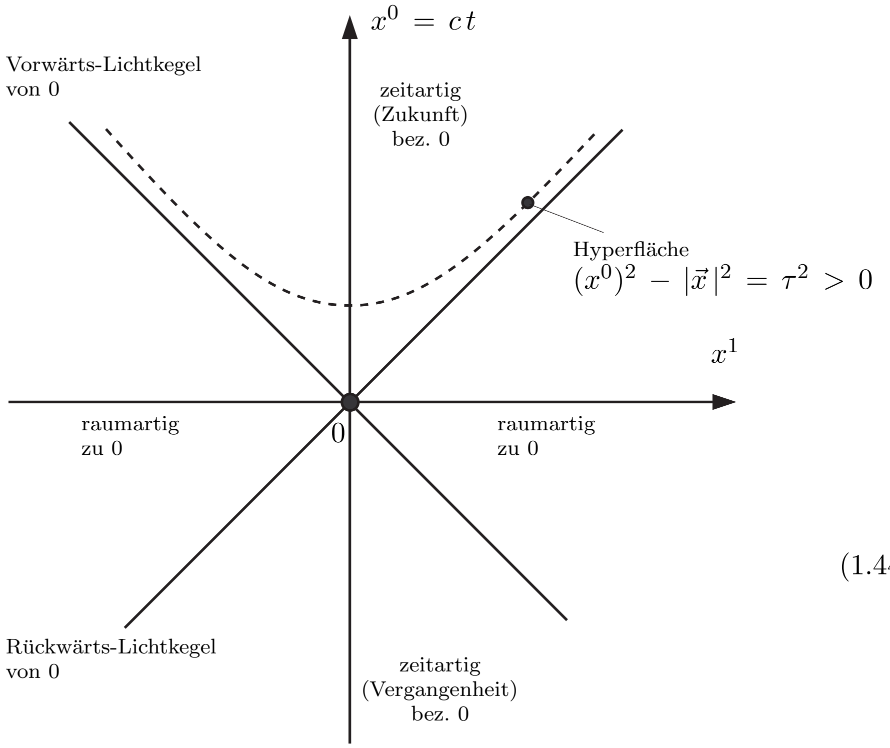
den eine elektromagnetische Wellenfront während ihres zeitlichen Abstandes zurücklegt, d. h. sie können nicht durch ein Lichtsignal verbunden werden. Wegen des schon betonten Charakters von c als oberer Grenzgeschwindigkeit können daher *raumartige Ereignispaare einander überhaupt nicht kausal beeinflussen.*

Lichtartige Ereignisse können dagegen durch ein Lichtsignal – allerdings durch kein langsameres! – verbunden werden; von ihnen liegt jedes, in der bei (1.29) benutzten Sprechweise, „auf dem Lichtkegel“ des anderen. Zeitartige Ereignispaare können auch durch Signale, die langsamer laufen als Licht, verbunden werden; zu ihnen gehören insbesondere solche, die in irgend einem Bezugssystem am gleichen Ort stattfinden ($|\vec{x} - \vec{y}\,| = 0$). Die beiden letztgenannten Klassen zerfallen nochmals in zwei Unterklassen: man sagt,

$$\text{„}y \text{ liegt im bzw. auf dem } \textit{Vorwärtslichtkegel} \text{ von } x\text{“ },\quad \text{wenn } (x-y)^2 \geq 0 \text{ und } t_y > t_x \;, \tag{1.43 a}$$

$$\text{„}y \text{ liegt im bzw. auf dem } \textit{Rückwärtslichtkegel} \text{ von } x\text{“ },\quad \text{wenn } (x-y)^2 \geq 0 \text{ und } t_y < t_x \;. \tag{1.43 b}$$

Ereignisse im Rückwärtslichtkegel von x können x kausal beeinflussen, Ereignisse im Vorwärtslichtkegel von x können durch x kausal beeinflusst werden. – Auch ein einzelner Vierervektor x wird raumartig usw. genannt je nach seinem Abstand vom Ursprung ($y = 0$), d. h. für $x^2 < 0$, $x^2 = 0$ bzw. $x^2 > 0$. Diese Verhältnisse sind in folgender Skizze dargestellt, wobei die 3 Raumkoordinaten symbolisch durch eine x^1-Koordinate ersetzt sind:



(1.44)

In diesem zweidimensionalen „Minkowski-Diagramm“ entartet der Lichtkegel des Ursprungspunktes zu der Kurve $(x^0)^2 - (x^1)^2 = 0$, d. h. zum Geradenpaar $x^0 = \pm x^1$.

Die Bedeutung der Klassifikation (1.41) liegt darin, dass sie nicht nur offensichtlich gegen Verschiebungen des zeitlichen oder räumlichen Nullpunkts (Translationen) und gegen räumliche Drehungen, sondern auch, wie vorhin gezeigt, gegen spezielle Lorentz-Transformationen invariant ist und somit eine *vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung* hat. Z. B. wird ein zu 0 zeitartiger Punkt mit $(x^0)^2 - |\vec{x}|^2 = \tau^2 > 0$ durch spezielle Lorentz-Transformationen auf andere Punkte der Hyperfläche $(x^0)^2 - |\vec{x}|^2 = \tau^2$ (bei zwei Raumdimensionen ein Rotations-Hyperboloid) abgebildet, die ganz im zeitartigen Bereich von 0 liegt, wie in der obigen Skizze deutlich wird. – Für die Basisvektoren e_μ besagt (1.37), dass e_0 „zeitartiger Einheitsvektor“ und e_1, e_2, e_3 „raumartige Einheitsvektoren“ sind.

Das Arbeiten mit dem nichtdefiniten Skalarprodukt (1.39) wird wesentlich ökonomischer, wenn man als Gegenstück zu (1.36 b) die *kovarianten Koordinaten* des Vierervektors x, gekennzeichnet durch untere Indizes, definiert als

$$x_\mu \;=\; \sum_{\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\, x^\nu \;=\; \begin{cases} +x^0 & \text{für} \quad \mu = 0 \\ -x^m & \text{für} \quad \mu = m = 1,\, 2,\, 3\;. \end{cases} \tag{1.45}$$

Mit ihnen schreibt sich das Skalarprodukt (1.39) als

$$a \cdot b = \sum_{\mu=0}^{3} a^\mu\, b_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a_\nu\, b^\nu \;, \tag{1.46}$$

d. h. als Kontraktion eines kovarianten und eines kontravarianten Koordinatensatzes. – Da die metrische Matrix (1.38) nichtsingulär ist, besitzt sie eine Inverse, die mit $\eta^{\mu\nu}$ bezeichnet wird und offensichtlich numerisch ihr gleich ist,

$$(\eta^{\mu\nu}) \;=\; (\eta^{\nu\mu}) \;=\; \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \;, \tag{1.47}$$

mit den Eigenschaften

$$\sum_{\rho=0}^{3} \eta^{\mu\rho}\, \eta_{\rho\nu} \;=\; \delta^\mu{}_\nu \;, \tag{1.48 a}$$

$$\sum_{\sigma=0}^{3} \eta_{\mu\sigma}\, \eta^{\sigma\nu} \;=\; \delta_\mu{}^\nu \;. \tag{1.48 b}$$

Beide Kroneckersymbole bezeichnen die 4×4-Einheitsmatrix,

$$(\delta^\mu{}_\nu) \;=\; (\delta_\mu{}^\nu) \;=\; \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix} \;. \tag{1.49}$$

Mit (1.48) lässt die Umkehrung von (1.45) sich angeben:

$$x^\mu \;=\; \sum_{\nu=0}^{3} \eta^{\mu\nu}\, x_\nu \qquad (\mu \;=\; 0,\, 1,\, 2,\, 3)\;. \tag{1.50}$$

Die Operationen (1.45) und (1.50) des Übergangs von kontra- zu kovarianten Koordinaten und umgekehrt durch Anwendung der beiden Formen der metrischen Matrix werden als *„Herunter- bzw. Heraufziehen eines Index“* bezeichnet. Die Operationen können nun auch auf einen der Indizes von $\eta^{\mu\nu}$ bzw. $\eta_{\mu\nu}$ angewandt werden und ergeben nach (1.48) die „gemischten“ Versionen

$$\eta^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \,, \quad \eta_{\mu}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} \tag{1.51}$$

der metrischen Matrix, die beide numerisch gleich der 4×4-Einheitsmatrix sind. – Die Sätze $\{x^\mu\}$ und $\{x_\mu\}$ sind natürlich gleichwertige Charakterisierungen desselben Vierervektors x; der letztere (kovariante) kann auch analog zu (1.36 a) als Komponentensatz in der Zerlegung

$$x = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu \, e^\mu = x_0 \, e^0 + x_1 \, e^1 + x_2 \, e^2 + x_3 \, e^3 \tag{1.52}$$

nach dem alternativen Basissystem $\{e^\mu\}$ mit

$$e^\mu = \sum_{\rho=0}^{3} \eta^{\mu\rho} \, e_\rho = \begin{cases} +\,e_0 & \text{für} \quad \mu = 0 \\ -\,e_m & \text{für} \quad \mu = m = 1,\,2,\,3 \end{cases} \tag{1.53}$$

betrachtet werden; dieses bildet nach (1.48 a) das *zu (1.35) biorthogonale Einheitsvektorensystem*:

$$e^\mu \cdot e_\nu = \sum_{\rho=0}^{3} \eta^{\mu\rho} \, (e_\rho \cdot e_\nu) = \delta^{\mu}{}_{\nu} \,. \tag{1.54}$$

Beide Koordinatentypen können als Projektionen von x auf die entsprechenden Basisvektoren berechnet werden:

$$x^\mu = e^\mu \cdot x \,, \quad x_\nu = e_\nu \cdot x \,. \tag{1.55}$$

Die *Einsteinsche Summenkonvention* vereinfacht die Vektoralgebra in $\mathcal{M}^4$ nochmals erheblich: man legt fest, dass über in einem Produkt zweimal vorkommende Lorentz-Indizes κ, λ, μ, ν, ρ, $\sigma \ldots$ automatisch von 0 bis 3 aufsummiert werden soll. Dann schreibt sich z. B. die Komponentenzerlegung des Vierervektors x als

$$x = x^\mu \, e_\mu = x_\nu \, e^\nu \,, \tag{1.56}$$

das Herunter- und Heraufziehen eine Index als

$$x_\kappa = \eta_{\kappa\lambda} \, x^\lambda \,, \quad x^\rho = \eta^{\rho\sigma} \, x_\sigma \,, \tag{1.57}$$

oder das lorentzinvariante Skalarprodukt (1.39) als

$$\boxed{x \cdot y = x^\mu \, y_\mu = x_\nu \, y^\nu} \,, \tag{1.58}$$

usw. Die *Spur der metrischen Matrix* in der „gemischten“ Version (1.51),

$$\eta^{\mu}{}_{\mu} \;=\; \eta_{\nu}{}^{\nu} \;=\; 4 \;, \tag{1.59}$$

gibt die Dimension von $\mathcal{M}^4$ an. Zu beachten ist, dass bei korrekter Anwendung der $\mathcal{M}^4$-Rechenregeln der doppelt auftretende und zu summierende Index stets in einer oberen und in einer unteren Stellung auftritt, während in 3 räumlichen Dimensionen auch z. B.

$$a^m\, b^m \;=\; \sum_{m=1}^{3} a^m\, b^m \;=\; \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{1.60}$$

vorkommen darf.

1.3 Poincaré-Gruppe und homogene Lorentz-Gruppe

Die speziellen Lorentz-Transformationen (1.21) sind in unserer neuen Sprache lineare Koordinatentransformationen in $\mathcal{M}^4$ mit der besonderen Eigenschaft, das Vierer-Abstandsquadrat (1.31) invariant zu lassen. Die Bezeichnung „Koordinatentransformationen“ weist darauf hin, dass wir bei (1.21) *ein und denselben Weltpunkt (Vierervektor)* x in zwei verschiedenen Bezugssystemen Σ und Σ', d. h. Koordinatensystemen in $\mathcal{M}^4$, betrachtet und nach der Beziehung zwischen den Koordinatensätzen gefragt haben (sog. passiver Standpunkt). Von jetzt an ziehen wir es vor, die Transformationen vom *„aktiven Standpunkt“* zu betrachten, d. h. nach Festlegung *eines* Koordinatensystems zwei verschiedene Vektoren x und x' ins Auge zu fassen, die durch eine den Viererabstand erhaltende Abbildung auseinander hervorgehen. In der Sprache von (1.21) bedeutet dies, dass wir nur ein Bezugssystem, etwa Σ, benutzen, aber nun ein Ereignis $x = \{ct,\, \vec{x}\}$ an einem in Σ ruhenden physikalischen Apparat – etwa einem massiven Körper oder einem elektromagnetischen Sender/Empfänger – *mit dem entsprechenden Ereignis x' an dem relativ zu Σ gleichförmig mit $\vec{v}_0$ bewegten Apparat* vergleichen. Seine Koordinaten ct', x', y', z' *in* Σ stehen dann zu denen von x offenbar in einer linearen Beziehung, die das *Inverse* von (1.21) ist, d. h. (1.21) mit $-\beta$ statt β.

Führt man zwei derartige Vektorabbildungen in $\mathcal{M}^4$ mit zwei verschiedenen Relativgeschwindigkeiten $\vec{v}_0^{(1)}$, $\vec{v}_0^{(2)}$ nacheinander aus,

$$x' \;=\; L\,(\vec{v}_0^{(1)})\, x \quad \text{und} \quad x'' \;=\; L\,(\vec{v}_0^{(2)})\, x' \tag{1.61}$$

mit $L\,(\vec{v}_0) \;=$ spezielle Lorentz-Transformation, so erhält die Produkttransformation $L\,(\vec{v}_0^{(2)}) \,\cdot\, L\,(\vec{v}_0^{(1)})$ natürlich noch immer das Vierer-Abstandsquadrat, ist aber im allgemeinen selbst keine spezielle Lorentz-Transformation mehr, außer im Spezialfall, wo

$\vec{v}_0^{(1)}$ und $\vec{v}_0^{(2)}$ in dieselbe Richtung zeigen (siehe (1.100 d) unten!). Es ist deshalb sinnvoll, in Erweiterung von (1.21) von vornherein die Gesamtheit der linearen Abbildungen in $\mathcal{M}^4$

$$x \to x' = \Lambda\, x + a \tag{1.62 a}$$

$$\Lambda\,(c_1\, x + c_2\, y) = c_1\,(\Lambda\, x) + c_2\,(\Lambda\, y) \tag{1.62 b}$$

$$a = \text{konstanter Vierervektor} \tag{1.62 c}$$

zu betrachten mit der Eigenschaft, das vierdimensionale Abstandsquadrat invariant zu lassen:

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \,. \tag{1.63}$$

Dies trifft, wie durch Einsetzen von (1.62 a) zu sehen, genau dann zu, wenn der homogene Teil Λ der Transformation das Minkowski-Längenquadrat (1.40) invariant lässt:

$$(\Lambda\, x)^2 \equiv (\Lambda\, x) \cdot (\Lambda\, x) = x \cdot x = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathcal{M}^4 \,. \tag{1.64}$$

Durch Anwendung von (1.64) auf Summe $x + y$ und Differenz $x - y$ zweier Vierervektoren und Subtraktion ergibt sich sofort, dass diese Transformationen dann Isometrien des $\mathcal{M}^4$ sind, d. h. beliebige Skalarprodukte invariant lassen:

$$\boxed{(\Lambda\, x) \cdot (\Lambda\, y) = x \cdot y \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{M}^4} \,. \tag{1.65}$$

Um dies als Eigenschaft von Λ selbst zu formulieren, definieren wir unter Bezug auf das Skalarprodukt (1.39) die zur homogenen Transformation Λ *transponierte Abbildung* Λ^T durch die Forderung

$$x \cdot (\Lambda^T\, y) = (\Lambda\, x) \cdot y \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{M}^4 \,. \tag{1.66}$$

Dann folgt aus (1.65), dass $\Lambda^T\,\Lambda$ die Identität in $\mathcal{M}^4$ sein muss:

$$\boxed{\Lambda^T\,\Lambda = \mathbb{1}} \,. \tag{1.67 a}$$

Die homogene Transformation Λ besitzt also ein Inverses, das gleich der Transponierten Λ^T ist. (Das Inverse ist zweiseitig, d. h. es gilt neben (1.67 a) auch

$$\Lambda\,\Lambda^T = \mathbb{1} \,, \tag{1.67 b}$$

denn aus (1.66) und der Symmetrie des Skalarprodukts folgt $(\Lambda^T)^T = \Lambda$ und $\mathbb{1}^T = \mathbb{1}$).

Bei Nacheinanderausführung zweier linearer Transformationen (1.62)

$$x' = \Lambda_1 x + a_1 , \quad x'' = \Lambda_2 x' + a_2 \tag{1.68}$$

erhält man

$$x'' = \Lambda_2 (\Lambda_1 x) + (\Lambda_2 a_1 + a_2) , \tag{1.69 a}$$

d. h. stets wieder eine Transformation vom Typ (1.62) mit

$$\Lambda = \Lambda_2 \Lambda_1 , \quad a = \Lambda_2 a_1 + a_2 , \tag{1.69 b}$$

und die Produkttransformation $\Lambda = \Lambda_2 \Lambda_1$ besitzt wiederum die Isometrieeigenschaft (1.67), denn aus (1.66) folgt

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T = \Lambda_1^T \Lambda_2^T \tag{1.70}$$

und daher

$$(\Lambda_2 \Lambda_1)^T (\Lambda_2 \Lambda_1) = \Lambda_1^T \underbrace{(\Lambda_2^T \Lambda_2)}_{=\mathbb{1}} \Lambda_1 = \mathbb{1} .$$

Wählt man speziell $\Lambda_2 = \Lambda_1^T$ und $a_2 = -\Lambda_1^T a_1$, so erhält man in (1.69 b) $\Lambda = \mathbb{1}$ und $a = 0$, d. h. die Identität in $\mathcal{M}^4$; die Transformation (1.62 / 1.67) hat daher bzgl. der „Multiplikation" (1.68) auch ein Inverses. Die *Transformationen (1.62 / 1.67) des $\mathcal{M}^4$ bilden daher eine Gruppe, die Gruppe der inhomogenen Lorentz-Transformationen oder* **Poincaré-Gruppe**.

Die (1.62) entsprechende Transformation der kontravarianten Koordinaten bezüglich *derselben* Pseudo-Orthonormalbasis (1.35 / 1.37) erhält man, indem man für x (1.36 a) einsetzt und gemäß (1.55) projiziert:

$$x'^{\mu} = e^{\mu} \cdot x' = e^{\mu} [\Lambda (x^{\nu} e_{\nu})] + e^{\mu} \cdot a$$

oder

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}} , \tag{1.71}$$

wobei die Größen

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = e^{\mu} \cdot (\Lambda e_{\nu}) \tag{1.72 a}$$

eine „gemischte" Matrixdarstellung (mit einem kontra- und einem kovarianten Index) der homogenen linearen Abbildung Λ vermitteln. Durch Herauf- oder Herunterziehen von Indizes geht man zu anderen Matrixdarstellungen von Λ über, etwa zu der doppelt kovarianten

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\nu} = e_{\mu} \cdot (\Lambda e_{\nu}) . \tag{1.72 b}$$

Die Transponierten-Definition (1.66) besagt

$$x^{\mu}\,(\Lambda^{T})_{\mu\nu}\,y^{\nu} \;=\; \Lambda_{\nu\mu}\,x^{\mu}\,y^{\nu} \qquad \forall\;\{x^{\mu}\},\,\{y^{\nu}\}\;,$$

d. h.

$$(\Lambda^{T})_{\mu\nu} \;=\; \Lambda_{\nu\mu}\;, \tag{1.73 a}$$

$$(\Lambda^{T})^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \Lambda_{\nu}{}^{\mu}\;. \tag{1.73 b}$$

Die Isometrieeigenschaft (1.67) lautet in Koordinaten

$$\Lambda_{\sigma}{}^{\mu}\,\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \;=\; \delta^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \eta^{\mu}{}_{\nu} \tag{1.74 a}$$

oder

$$\boxed{\eta_{\rho\sigma}\,\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\,\Lambda^{\sigma}{}_{\nu} \;=\; \eta_{\mu\nu}}\;. \tag{1.74 b}$$

Λ heißt die *allgemeine homogene Lorentz-Transformation*. Die Transformationen (1.62) mit $a = 0$ und dem Multiplikationsgesetz $\Lambda = \Lambda_2\,\Lambda_1$ bilden eine Untergruppe der Poincaré-Gruppe, die **homogene Lorentz-Gruppe** $\mathcal{L}$. (Eine weitere Untergruppe, die sogar abelsch, d. h. kommutativ ist, bilden die vierdimensionalen Translationen, d. h. $a \neq 0$ und $\Lambda = \mathbb{1}$).

Die fundamentale Eigenschaft (1.63) der Poincaré-Transformationen wird im Hinblick auf die Allgemeine Relativitätstheorie oft auch „differentiell", d. h. für infinitesimale Vektordifferenzen

$$y^{'} \;=\; x^{'} \,+\, dx^{'}\;, \qquad y \;=\; x \,+\, dx \tag{1.75}$$

statt der in (1.63) gewählten endlichen, formuliert. Nach (1.71) ist dann

$$dx^{'\,\mu} \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,dx^{\nu} \tag{1.76}$$

und (1.63) besagt, dass das sog. *Linienelement*

$$\boxed{ds^2 \;=\; \eta_{\alpha\beta}\,dx^{\alpha}\,dx^{\beta} \;=\; (c\,d\,t)^2 \,-\, (d\vec{x}\,)^2} \tag{1.77}$$

invariant ist, wenn Λ die Gl. (1.67) oder (1.74) erfüllt:

$$\boxed{ds^{'2} \;=\; ds^2 \qquad (\Lambda \,\in\, \mathcal{L})}\;. \tag{1.78}$$

Diese Charakterisierung der allgemeinen homogenen Lorentz-Transformationen erscheint zunächst unzureichend, denn tatsächlich gilt ja die scheinbar stärkere *integrale* Aussage (1.63). Dass dies nicht zutrifft, zeigt folgender Eindeutigkeitssatz:

> Die einzigen nichtsingulären, d. h. lokal umkehrbaren Koordinaten transformationen $x \;\to\; x^{'}(x)$, die das differentielle Linienelement (1.77) invariant lassen, sind die Poincaré-Transformationen (1.71/74).

(1.79)

Nichtsingulär bedeutet dabei wie üblich, dass die Funktionalmatrix $(\partial\, x^{'\alpha} \,/\, \partial\, x^{\beta})$ nichtsingulär ist; ihr Inverses ist dann nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung die Funktionalmatrix der Umkehrtransformation $x\,(x^{'})$:

$$\frac{\partial\, x^{'\alpha}}{\partial\, x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial\, x^{\gamma}}{\partial\, x^{'\beta}} \;=\; \eta^{\alpha}{}_{\beta} \tag{1.80}$$

(Summenkonvention beachten!).

Zum Beweis betrachten wir eine allgemeine nichtsinguläre Koordinatentransformation

$$x^{'\mu} \;=\; x^{'\mu}\,(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)\ ; \tag{1.81 a}$$

sie überführt $\{dx^{\nu}\}$ in

$$dx^{'\mu} \;=\; \left(\frac{\partial\, x^{'\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\right)\, dx^{\nu} \tag{1.81 b}$$

und daher das Linienelement (1.77) in

$$ds^{'2} \;=\; \left\{\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial\, x^{'\alpha}}{\partial\, x^{\mu}}\, \frac{\partial\, x^{'\beta}}{\partial\, x^{\nu}}\right\} dx^{\mu}\, dx^{\nu}\ . \tag{1.81 c}$$

Soll dies für *alle* $\{dx^{\nu}\}$ gleich dem ursprünglichen ds^2 sein, so muss gelten

$$\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial\, x^{'\alpha}}{\partial\, x^{\mu}}\, \frac{\partial\, x^{'\beta}}{\partial\, x^{\nu}} \;=\; \eta_{\mu\nu}\ . \tag{1.82}$$

Differentiation dieser Gl. nach x^{λ} ergibt

$$\eta_{\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{\partial^2\, x^{'\alpha}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\lambda}}\right) \cdot \frac{\partial\, x^{'\beta}}{\partial\, x^{\nu}} + \left(\frac{\partial^2\, x^{'\beta}}{\partial\, x^{\nu}\, \partial\, x^{\lambda}}\right) \cdot \frac{\partial\, x^{'\alpha}}{\partial\, x^{\mu}} \right\} \;=\; 0\ .$$

Um eine Beziehung zu erhalten, die nach den zweiten partiellen Ableitungen aufgelöst werden kann, muss man

- dieselbe Gl. mit $\mu \leftrightarrow \lambda$ addieren und
- dieselbe Gl. mit $\nu \leftrightarrow \lambda$ subtrahieren;

dies ergibt

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} \Biggl\{ & \left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \left(\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \\ & + \left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \left(\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} \\ & - \left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \left(\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \Biggr\} = 0 \; . \end{aligned} \tag{1.83 a}$$

In der geschweiften Klammer hebt sich der letzte Term gegen den zweiten weg; der vierte und fünfte bilden eine gegen $\alpha \leftrightarrow \beta$ antisymmetrische Größe, die bei Summation mit dem symmetrischen $\eta_{\alpha\beta}$ verschwindet; die verbleibenden Terme 1 und 3 sind gleich. Also

$$2\, \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} \right) \cdot \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0 \qquad \forall\, (\lambda,\, \mu,\, \eta) \; . \tag{1.83 b}$$

Dies kann mit Hilfe von (1.80) und (1.48) sofort aufgelöst werden und ergibt

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = 0 \qquad \forall\, (\alpha,\, \mu,\, \nu) \; . \tag{1.83 c}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gl. ist aber gerade die lineare Funktion (1.71). Setzt man sie in die Ausgangsform (1.82) unserer Invarianzbedingung ein, so ergibt sich wegen

$$\partial x'^{\alpha} / \partial x^{\mu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \quad \text{(Poincaré-Transformation)} \tag{1.84}$$

gerade die Isometriebedingung (1.74 b), q. e. d. –

Zur weiteren Klassifikation der Poincaré- und homogenen Lorentz-Transformationen geht man von der Beobachtung aus, dass die Zeile $\mu = \nu = 0$ der Isometriebedingung (1.74 b),

$$(\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{r=1}^{3} (\Lambda^r{}_0)^2 = 1 \; , \tag{1.85}$$

bedeutet, dass $(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1$ ist, d. h.

$$\boxed{\Lambda^0{}_0 \geq +1 \quad \text{oder} \quad \Lambda^0{}_0 \leq -1} \; . \tag{1.86}$$

Sowohl die Poincaré- als auch die homogene Lorentz-Gruppe zerfallen damit in zwei disjunkte Stücke. Die Teilmenge mit ${\Lambda^0}_0 \geq +1$ heißt *orthochron*; sie enthält die Identität und die aus ihr stetig herausentwickelbaren Transformationen und wird mit dem Symbol $^\uparrow$ charakterisiert. Das nichtorthochrone Stück (${\Lambda^0}_0 \leq -1$, Symbol $_\downarrow$) entsteht daraus, indem man das orthochrone mit der *„Zeitumkehrtransformation"* Λ_T durchmultipliziert, die in der gemischten Darstellung (1.72 a) die Matrix

$$({\Lambda_T}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

besitzt.

Weiter folgt aus (1.74) durch Determinantenbildung $(\det \Lambda)^2 = 1$ und daher eine weitere Einteilung in zwei disjunkte Klassen mit

$$\boxed{\det \Lambda = +1 \quad \text{oder} \quad \det \Lambda = -1}\,, \tag{1.88}$$

von denen die ersteren als *eigentliche* (Symbol $_+$), die letzteren als uneigentliche Transformationen (Symbol $_-$) bezeichnet werden. Dabei ist zu beachten, dass Ähnlichkeitsinvarianten wie Spur und Determinante für eine homogene Lorentz-Transformation Λ nur mit Bezug auf eine spezielle Matrixdarstellung definiert werden können, da das Heraufziehen und Herunterziehen von Indizes *keine* Ähnlichkeitstransformation ist, z.B. ist

$$\det(\eta^\mu{}_\nu) = (+)^4 = +1, \quad \text{aber} \quad \det(\eta_{\mu\nu}) = (+1)\cdot(-1)^3 = -1\,.$$

In (1.88) und künftig ist stets die Konvention

$$\det \Lambda = \det(\Lambda^\mu{}_\nu)\,, \quad \operatorname{tr}\Lambda = \operatorname{tr}(\Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda^\mu{}_\mu \tag{1.89}$$

gemeint. – Die uneigentlichen Transformationen erhält man, indem man die eigentlichen entweder mit der *Raumspiegelungs- oder Paritätstransformation* Λ_P,

$$({\Lambda_P}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} +1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\,, \tag{1.90}$$

oder mit der Zeitumkehr (1.87) durchmultipliziert. Damit besteht etwa die homogene Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ aus den 4 disjunkten Stücken

$$\mathcal{L}_+^\uparrow\,, \quad \mathcal{L}_-^\uparrow\,, \quad \mathcal{L}_-^\downarrow\,, \quad \mathcal{L}_+^\downarrow\,, \tag{1.91 a}$$

innerhalb deren sich die Transformationen durch stetige Verkleinerung von Parametern in beziehungsweise die Repräsentanten

$$\mathbb{1}\ , \quad \Lambda_P\ , \quad \Lambda_T\ , \quad \Lambda_P\,\Lambda_T \tag{1.91 b}$$

überführen lassen. Nur das Stück $\mathcal{L}_+^\uparrow$, das die Identität enthält, stellt eine Untergruppe von $\mathcal{L}$ dar, die **eigentlich-orthochrone Lorentz-Gruppe** mit

$$\det\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right) \,=\, +1 \quad \text{und} \quad \Lambda^0{}_0 \,\geq\, +1\ . \tag{1.92}$$

Im Folgenden *wird unter* Λ*, falls nichts anderes angegeben, stets eine* $\mathcal{L}_+^\uparrow$*-Transformation mit den Eigenschaften (1.92) verstanden.*

Die Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ besitzt als weitere Untergruppe die *Gruppe* $S\,O\,(3)$ *der dreidimensionalen Raumdrehungen*, die durch

$$\Lambda^0{}_0 \,=\, +1 \tag{1.93}$$

(und $\det\Lambda \,=\, +1$) eindeutig charakterisiert ist. Denn aus (1.85) folgt dann $\Lambda^r{}_0 \,=\, 0$ und aus der entsprechenden Zeile $\mu \,=\, \nu \,=\, 0$ der Relation (1.67 b) folgt ebenso $\Lambda^0{}_r$ für $r \,=\, 1,\, 2,\, 3$, d. h. diese Transformationen haben die Form

$$\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right) \,=\, \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\ , \tag{1.94 a}$$

bei der nur die Raumkoordinaten x^1, x^2, x^3 unter sich transformiert werden. Damit (1.67) gilt, muss dabei die 3×3-Matrix R *orthogonal im Sinne des Dreier-Skalarprodukts (1.34), d. h. eine Raumdrehung* sein:

$$R^T\,R \,=\, R\,R^T \,=\, \mathbb{1}_{3\times 3}\ . \tag{1.94 b}$$

Solche Drehungen lassen sich bekanntlich eindeutig durch einen Dreiervektor $\vec{\varphi}$, den Drehvektor, charakterisieren, dessen Richtung $\hat{\varphi}$ die Achse und dessen Betrag φ (mit $0 \,\leq\, \varphi \,\leq\, \pi$) den Drehwinkel der Drehung angibt. Prototyp ist die Matrix einer Drehung um die z-Achse ($\hat{\varphi} \,=\, \vec{u}_3$),

$$\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right) \,=\, \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ . \tag{1.95}$$

Statt (1.94 a) wird oft auch einfach $\Lambda = R$ geschrieben.

Dagegen bilden die in Abschnitt 1.1 diskutierten *speziellen Lorentz- oder Schubtransformationen* L, die ebenfalls zu $\mathcal{L}_+^\uparrow$ gehören, in ihrer Gesamtheit, wie bereits betont, *keine Untergruppe von* $\mathcal{L}_+^\uparrow$; lediglich für die Teilmengen mit derselben Geschwindigkeitsrichtung $\hat{v}_0$ ist dies zutreffend. L ist durch einen Relativgeschwindigkeits-Vektor

$$\vec{v}_0 = c\,\beta\,\hat{v}_0 \quad \text{mit} \quad |\vec{v}_0| = v_0 < c \quad (\beta < 1) \tag{1.96}$$

charakterisiert und lässt die beiden Raumkoordinaten senkrecht zu $\hat{v}_0$ unverändert, während es die Zeitkoordinate $x^0 = c\,t$ mit der zu $\hat{v}_0$ parallelen Raumkoordinate $x_\parallel$ linear „vermischt". Prototyp ist das „aktive" Gegenstück zu (1.18), d. h. der Fall $\hat{v}_0 = \vec{u}_1$:

$$(L^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (\hat{v}_0 = \vec{u}_1) \tag{1.97}$$

mit

$$\beta = \frac{v_0}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \; . \tag{1.98}$$

Die Pseudoorthogonalität (Isometrie) (1.67) der Transformation nimmt hier die einfache Form

$$(L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2 = \gamma^2 - (\beta\,\gamma)^2 = (1-\beta^2)\,\gamma^2 = 1 = \eta_{00} \tag{1.99}$$

an; sie legt es nahe, den Schub statt durch v_0 bzw. $\beta\,(v_0)$, $\gamma\,(v_0)$ durch Hyperbelfunktionen eines Parameters u, der sog. *Rapidität*, zu parametrisieren gemäß

$$\cosh u = \gamma \; , \quad \sinh u = \beta\,\gamma \; , \quad \tanh u = \beta \; , \tag{1.100 a}$$

$$u = \operatorname{Artanh}\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \; . \tag{1.100 b}$$

$$(0 \leq u < +\infty) \tag{1.100 c}$$

Wegen $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ ist dann (1.99) erfüllt, und (1.97) nimmt die zu (1.95) formal analoge Gestalt

$$(L^\mu{}_\nu)_{\hat{v}_0 = \vec{u}_1} = \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.100 d}$$

an. Diese Parametrisierung hat den Vorteil, dass bei sukzessiven Schubtransformationen in derselben Richtung $\hat{v}_0$ die Rapiditäten, ähnlich wie die Drehwinkel φ bei sukzessiven Raumdrehungen um dieselbe Achse $\hat{\varphi}$, sich einfach addieren. – Der *Lorentz-Schub mit beliebigem* $\hat{v}_0$, d. h. das „aktive" Gegenstück zu (1.21), lautet in Matrixdarstellung

$$\left(L^{\mu}{}_{\nu}\,(\vec{v}_0)\right) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\,\gamma\,\hat{v}_{0,\,n} \\ \beta\,\gamma\,\hat{v}_0^m & L^m{}_n \end{pmatrix} \tag{1.101 a}$$

mit $m, n \;=\; 1,\, 2,\, 3$ und

$$L^m{}_n \;=\; \delta^m{}_n \;+\; (1\;-\;\gamma)\,\hat{v}_0^m\,\hat{v}_{0,\,n}\;. \tag{1.101 b}$$

Dabei ist die Stellung der Indizes ($\hat{v}_{0,\,n} \;=\; -\hat{v}_0^n!$) zu beachten.

Raumdrehungen (1.94) und Schubtransformationen (1.101) erzeugen in gewissem Sinne die gesamte eigentlich-orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$: man kann zeigen, dass *jedes* $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ *sich eindeutig in einen reinen Schub* $L\,(\vec{v}_0)$ *und eine nachfolgende Raumdrehung* $R\,(\vec{\varphi}_0)$ *zerlegen* lässt:

$$\Lambda \;=\; R\,(\vec{\varphi}_0)\,L\,(\vec{v}_0) \qquad \forall\;\Lambda \;\in\; \mathcal{L}_+^{\uparrow}\;. \tag{1.102}$$

Die allgemeine eigentlich-orthochrone Lorentztransformation ist daher durch 6 reelle Parameter – hier die Komponenten von $\vec{v}_0$ und $\vec{\varphi}_0$ – charakterisiert. – Zum Beweis bilde für ein gegebenes $\Lambda \in \mathcal{L}_+^{\uparrow}$ (mit den Eigenschaften (1.92)) den Dreiervektor $\vec{v}_0$ mit cartesischen Komponenten

$$\vec{v}_0\;: \qquad \frac{{v_0}^m}{c} \;\equiv\; \beta\,{\hat{v}_0}{}^m \;=\; \frac{\Lambda^0{}_m}{\Lambda^0{}_0} \qquad (m \;=\; 1,\, 2,\, 3)\;. \tag{1.103 a}$$

Er erfüllt die Bedingung $|\vec{v}_0| \;<\; c$ ($\beta \;<\; 1$) wegen der zu (1.85) transponierten Beziehung. Damit bildet man gemäß (1.101) den Schub $L\,(-\vec{v}_0)$; er hat die Parameter

$$\beta \;=\; \sqrt{1\;-\;\frac{1}{(\Lambda^0{}_0)^2}}\;\;(<\;1) \quad \text{und} \quad \gamma \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\;-\;\beta^2}} \;=\; \Lambda^0{}_0\;. \tag{1.103 b}$$

Betrachtet man nun die Produkttransformation $\Lambda\,L\,(-\vec{v}_0) \;\in\; \mathcal{L}_+^{\uparrow}$, so ergibt sich ihr linkes oberes Matrixelement zu

$$\begin{aligned} (\Lambda\,L\,(-\vec{v}_0))^0{}_0 &= \sum_{\mu\,=\,0}^{3} \Lambda^0{}_{\mu}\,(L\,(-\vec{v}_0))^{\mu}{}_0 \\ &= \Lambda^0{}_0\,\gamma \;+\; \sum_{m\,=\,1}^{3} \Lambda^0{}_m\,(-\beta\,\gamma\,{\hat{v}_0}{}^m) \;=\; (\Lambda^0{}_0)^2 \;-\; \sum_{m\,=\,1}^{3} (\Lambda^0{}_m)^2 \\ &= 1\;. \end{aligned} \tag{1.104}$$

Es ist also $\Lambda\, L\,(-\vec{v}_0)$ gleich einer Drehung R, q. e. d. – Die Gln. (1.103) gestatten es, die zu einem gegebenen Λ im Sinne von Gl. (1.102) gehörende Schubgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ aus der $(\mu\,=\,0)$-Zeile von $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ direkt abzulesen.

1.4 Relativistische Mechanik des Massenpunktes

a) Relativistische Bahnkinematik. Die Bahn eines Massenpunktes werde in einem Bezugssystem Σ durch

$$\vec{x}\,=\,\vec{x}\,(t)\;, \quad \vec{v}\,=\,\frac{d\vec{x}}{dt}\,=\,\vec{v}\,(t) \tag{1.105}$$

beschrieben. Diese Beschreibung ist für die relativistische Betrachtung nicht zweckmäßig, weil t, die in Σ gemessene Zeit, vom Bezugssystem abhängt und daher keine invariante Parametrisierung der Bahn vermittelt. Eine relativistische Beschreibung muss die Gesamtheit der Raum-Zeit-Punkte $\{x^\mu\}\,=\,\{c\,t,\,x,\,y,\,z\}$ des Teilchens, seine sog. *Weltlinie*, als Funktion eines lorentzinvarianten Bahnparameters darstellen. Einen solchen erhalten wir, indem wir vom invarianten Linienelement (1.77) ausgehen: bilden wir es für zwei infinitesimal benachbarte Bahnpunkte

$$\{x^\mu\}\,=\,\{c\,t,\,\vec{x}\} \quad \text{und} \quad \{x^\mu\,+\,dx^\mu\}\,=\,\{c\,(t\,+\,dt),\,\vec{x}\,+\,d\vec{x}\}$$

des Teilchens, so stellt es – im Sinne der indefiniten Lorentz-Metrik (1.31) – das *infinitesimale Bogenlängenelement längs der vierdimensionalen Weltlinie* dar:

$$ds^2 = (c\,dt)^2\,-\,(d\vec{x}\,)^2 \tag{1.106 a}$$

$$= (c\,dt)^2\left[1\,-\,\left(\frac{1}{c}\,\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right]$$

$$= c^2\left[1\,-\,\left(\frac{\vec{v}\,(t)}{c}\right)^2\right](dt)^2\;. \tag{1.106 b}$$

Nun ist aber

$$dt^{'}\;=\;\sqrt{1\,-\,\left(\frac{\vec{v}\,(t)}{c}\right)^2}\,dt\;=\;d\tau \tag{1.107}$$

nichts weiter als das Intervall der *Eigenzeit*, d. h. der im *momentanen Ruhesystem* Σ_R *des Teilchens zur* Σ*-Zeit* t ablaufenden Zeit: das momentane Ruhesystem ist ja dasjenige, das sich gegen Σ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}\,(t)$ gleichförmig bewegt, so dass in ihm der Massenpunkt momentan ruht. Es ist also mit Σ durch die spezielle Lorentz-Transformation (1.21) mit $\vec{v}\,(t)$ statt $\vec{v}_0$ – oder, in unserer an die „aktive“ Auffassung der Transformationen geknüpften Bezeichnungsweise (1.101), durch $L\,(-\vec{v}\,(t))$ – verbunden. Dann gilt aber (1.25) mit $\beta_t = |\vec{v}\,(t)|\,/\,c$ und damit (1.107). Wir sehen aus (1.106), dass das *Eigenzeitintervall* $d\tau = (1\,/\,c)\,ds$ *eine lorentzinvariante Größe* darstellt.

Die längs eines endlichen Weltlinienstücks $\{c\,t_1,\,\vec{x}_1\}\,\ldots\,\{c\,t_2,\,\vec{x}_2\}$ ablaufende Eigenzeit $\Delta\,\tau$ ist vom Σ-Beobachter durch Integration von (1.107) zu berechnen:

$$\Delta\,\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\sqrt{1 - \left[\frac{1}{c}\,\vec{v}\,(t)\right]^2}\,. \tag{1.108}$$

Diese Zeit bzw. die Vierer-Bogenlänge $s = c\,\tau$ benutzen wir nun als lorentzinvarianten Parameter der Weltlinie:

$$x^\mu = x^\mu\,(\tau) \qquad (\mu = 0,\,1,\,2,\,3)\,. \tag{1.109}$$

Differentiation nach diesem invarianten Parameter lässt offenbar das Transformationsverhalten einer Größe unverändert. Daher transformiert sich die *Vierergeschwindigkeit* $u = dx\,/\,d\tau$ mit den kontravarianten Komponenten

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \qquad (\alpha = 0,\,1,\,2,\,3) \tag{1.110}$$

bei allgemeinen Lorentztransformationen ebenso wie $\{x^\alpha\}$, d. h. als ein Vierervektor:

$$u'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\,u^\beta\,. \tag{1.111}$$

Ihre Beziehung zur gewöhnlichen Geschwindigkeit $\vec{v}$ ergibt sich durch Zerlegung in zeitliche und räumliche Komponenten und Benutzung von (1.107):

$$u^0 = \frac{d\,(c\,t)}{d\tau} = \gamma\,(v)\,\cdot\,c\,, \tag{1.112 a}$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau} = \gamma\,(v)\,\cdot\,\vec{v}\,. \tag{1.112 b}$$

Für das Vierer-Betragsquadrat folgt

$$\begin{aligned} u^2 \equiv u^\alpha\,u_\alpha &= \frac{dx^\alpha}{d\tau}\,\frac{dx_\alpha}{d\tau} \\ &= (u^0)^2 - \vec{u}^{\,2} = (\gamma\,(v))^2\,(c^2 - \vec{v}^{\,2}) = c^2 \quad (> 0)\,. \end{aligned} \tag{1.113}$$

Die Vierergeschwindigkeit ist also stets ein zeitartiger Vierervektor mit dem Vierer-Betrag $\sqrt{u^2} = c$. Im (momentanen) Ruhesystem des Teilchens ist $\vec{v} = 0$, $\gamma = 1$ und somit

$$\{u^\alpha\} = \{c,\, 0,\, 0,\, 0\} \quad \text{(Ruhesystem)}\ . \tag{1.114}$$

Dies illustriert den (leicht zu beweisenden) allgemeinen Sachverhalt, dass für jeden zeitartigen Vierervektor ein Bezugs- (Koordinaten-) System existiert, in dem seine drei räumlichen Komponenten verschwinden.

Das Transformationsverhalten (1.111) der Vierergeschwindigkeit gestattet es, das *relativistische Additionstheorem der Geschwindigkeiten*, d. h. die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}^{\,\prime}$ desselben Teilchens in zwei mit $\vec{v}_0$ relativ zueinander bewegten Bezugssystemen Σ und $\Sigma^{'}$, herzuleiten. Die Beziehung ist offenbar gegeben durch Gl. (1.111) mit $\Lambda = L\,(-\vec{v}_0)$ (in der Bezeichnungsweise der Gln. (1.101)), wobei wir nun $\gamma\,(v_0) = \gamma_0$ usw. schreiben, um dies von $\gamma = \gamma\,(v)$ und $\gamma^{'} = \gamma\,(v^{'})$ zu unterscheiden:

$$u^{'\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\,(-\vec{v}_0)\,u^\nu \tag{1.115 a}$$

oder nach Komponenten getrennt

$$\begin{pmatrix} u^{'0} \\ u^{'m} \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0\,\gamma_0\,\hat{v}_{0,\,n} \\ -\beta_0\,\gamma_0\,\hat{v}_0{}^m & \delta^m_{\ n} + (1 - \gamma_0)\,\hat{v}_0{}^m\,\hat{v}_{0,\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^n \end{pmatrix} ,$$

d. h. mit Dreiervektoren geschrieben

$$u^{'0} = \gamma_0\,u^0 - \beta_0\,\gamma_0\,(\hat{v}_0 \cdot \vec{u}\,)\ , \tag{1.115 b}$$

$$\vec{u}^{\,'} = \vec{u} - [(1 - \gamma_0)\,(\hat{v}_0 \cdot \vec{u}\,) + \beta_0\,\gamma_0\,u^0]\,\hat{v}_0\ . \tag{1.115 c}$$

Verwendet man nun beiderseits die Zerlegung (1.112), so folgt zunächst aus (1.115 b)

$$\gamma^{'} \equiv \gamma\,(v^{'}) = \gamma_0\,\gamma\,[1 - \beta_0\,\beta\,(\hat{v}_0 \cdot \hat{v})] \tag{1.116 a}$$

woraus man die Umrechnung der Dreiergeschwindigkeitsbeträge entnehmen kann, nämlich

$$v^{'2} = \frac{(\vec{v} - \vec{v}_0)^2 - \frac{1}{c^2}\,[v_0^2\,v^2 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}\,)^2]}{\left[1 - \frac{1}{c^2}\,(\vec{v}_0 \cdot \vec{v}\,)\right]^2}\ . \tag{1.116 b}$$

Setzt man

$$\hat{v}_0 \cdot \hat{v} = \cos\vartheta\ , \qquad \hat{v}_0 \cdot \hat{v}^{'} = \cos\vartheta^{'} \tag{1.117}$$

und beachtet

$$v_0^2\, v^2 \;-\; (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}\,)^2 \;=\; (\vec{v}_0 \times \vec{v}\,)^2 \;=\; v_0^2\, v^2 \sin^2\vartheta \;, \tag{1.117}$$

so kann man dies schreiben als

$$v^{'} \;=\; \frac{\sqrt{v^2\left[1 \,-\, \left(\frac{v_0}{c}\,\sin\vartheta\right)^2\right] \,-\, 2\,v_0\,v\,\cos\vartheta \,+\, v_0^2}}{1 \,-\, \left(\frac{v_0\,v}{c^2}\right)\,\cos\vartheta} \;. \tag{1.116 c}$$

Für die Umrechnung der Richtungen schließlich gibt (1.115 c)

$$\vec{v}^{\,'} \;=\; \frac{\gamma}{\gamma'}\,\{\vec{v} \,-\, [(1 \,-\, \gamma_0)\,(\hat{v}_0 \cdot \vec{v}\,) \,+\, c\,\beta_0\,\gamma_0]\,\hat{v}_0\}$$

oder bei Verwendung von (1.116 a)

$$\left\| \quad \vec{v}^{\,'} \;=\; \frac{(\vec{v} \,-\, \vec{v}_0) \,+\, (\gamma_0 \,-\, 1)\,[(\hat{v}_0 \cdot \vec{v}\,)\,\hat{v}_0 \,-\, \vec{v}_0]}{\gamma_0\,[1 \,-\, \beta_0\,\beta\,(\hat{v}_0 \cdot \hat{v})]} \;. \quad \right\| \tag{1.118}$$

Für kleine Relativgeschwindigkeiten v_0 ($\beta_0 \to 0$, $\gamma_0 \to 1$) erhält man das nichtrelativistische Additionstheorem (1.2) zurück. Zerlegt man $\vec{v}$ und ebenso $\vec{v}^{\,'}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{v}_0$,

$$\vec{v} \,=\, v_\parallel \cdot \hat{v}_0 \,+\, \vec{v}_\perp \quad \text{mit} \quad \vec{v}_\perp \cdot \hat{v}_0 \,=\, 0 \;, \quad v_\parallel \,=\, \hat{v}_0 \cdot \vec{v}$$

so ergeben sich für die Komponenten die einfacheren Formeln

$$v_\parallel^{'} \;=\; \frac{v_\parallel \,-\, v_0}{1 \,-\, \beta_0\,\frac{v_\parallel}{c}} \;, \tag{1.119 a}$$

$$v_\perp^{'} \;=\; \frac{\sqrt{1 \,-\, \beta_0^2}\,v_\perp}{1 \,-\, \beta_0\,\frac{v_\parallel}{c}} \;. \tag{1.119 c}$$

Beachte vor allem, dass im Gegensatz zu (1.2) hier auch die Geschwindigkeitskomponente transversal zu $\vec{v}_0$ eine nichttriviale Transformation erfährt.

Entsprechend der Definition der Dreierbeschleunigung, $\vec{a}\,(t) \;=\; d\vec{v}\,/\,dt$, wird man die Größen

$$b^\mu \;=\; \frac{d}{d\tau}\,u^\mu \;=\; \frac{d^2}{d\tau^2}\,x^\mu \tag{1.120}$$

als *Viererbeschleunigung* bezeichnen; sie bilden wegen der Invarianz von $d\tau$ wiederum einen Vierervektor. Dessen Zeit- und Raumkomponenten kann man aus (1.112) mittels der Beziehung

$$\frac{d}{d\tau}\gamma(v) = \left\{\frac{d}{dt}\left[1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{c^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}\frac{dt}{d\tau}$$
$$= -\frac{1}{2}\gamma(v)^3\left(-2\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{1}{c^2}\right)\gamma(v) = \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a}) \tag{1.121}$$

berechnen; man findet

$$b^0 = \frac{\gamma^4}{c}(\vec{v}\cdot\vec{a}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c(1-\beta^2)^2}\ , \tag{1.122 a}$$

$$\vec{b} = \gamma^2\,\vec{a} + \frac{\gamma^4}{c^2}(\vec{v}\cdot\vec{a})\,\vec{v} \tag{1.122 b}$$

mit der Umkehrung

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2}\left(\vec{b} - \frac{b^0}{u^0}\,\vec{u}\right)\ . \tag{1.122 c}$$

Im (momentanen) Ruhesystem Σ_R mit $\vec{v} = \vec{v}_R = 0$ ist offenbar

$$\{b^0, \vec{b}\}_R = \{0, \vec{a}\}_R\ , \tag{1.123}$$

d. h. b *ist stets raumartiger Vierervektor* mit $b^\mu\, b_\mu = -\vec{a}_R^{\,2}$. Allgemein erhält man aus (1.122)

$$b^2 = (b^0)^2 - \vec{b}^{\,2} = -\gamma^6\left[\vec{a}^{\,2} - \left(\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{a}\right)^2\right]$$
$$= -\gamma^4\left[\vec{a}^{\,2} + \left(\gamma\,\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{a}\right)^2\right] < 0\ . \tag{1.124}$$

Gl. (1.123) illustriert den Sachverhalt, dass jeder raumartige Vierervektor in einem geeigneten System auf verschwindende Zeitkomponente gebracht werden kann. – Durch Differentiation von (1.113) entsteht die Beziehung

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}u^2 = u\cdot\frac{du}{d\tau} = u\cdot b = 0\ ; \tag{1.125}$$

d. h. u und b sind (im Sinne des indefiniten Viererskalarprodukts!) stets zueinander orthogonal.

b) Bewegungsgleichung, Impuls und Energie. Um die übliche Definition des Impulses im System Σ,

$$\vec{p}_{nr}(t) = m\,\vec{v}(t)\ , \tag{1.126}$$

vierdimensional zu erweitern, muss man die Bedeutung der Masse m präzisieren. Analog zur Wahl der Eigenzeit $\tau = t_R$ als Bahnparameter verstehen wir künftig – unabhängig davon, mit welchem Bezugssystem wir ansonsten arbeiten – unter m *stets die Ruhemasse*, d. h. die im Ruhesystem des Teilchens bestimmte Masse m_R, so dass m in den folgenden Rechnungen eine bezugssystemunabhängige Konstante darstellt. Damit definieren wir als *Viererimpuls*

$$p = m\,u\;, \quad p^\mu = m\,\frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (m \text{ Ruhemasse})\;. \tag{1.127}$$

Er transformiert sich wegen der Invarianz von $d\tau$ und m wiederum als Vierervektor,

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu\;, \qquad (\Lambda \in \mathcal{L}) \tag{1.128}$$

und er ist nach (1.113) zeitartig:

$$p^2 \equiv (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = (m\,c)^2 > 0\;. \tag{1.129}$$

Nach Gl. (1.112) sind seine Komponenten

$$p^0 = \gamma\,(v)\,m\,c\;, \tag{1.130 a}$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma\,(v)\,m\,\vec{v}}\;. \tag{1.130 b}$$

Die letzte Gl. werden wir als *relativistisch korrigierte Definition des Dreierimpulses* benutzen, weil nur (1.130 b), nicht aber (1.126) als Raumanteil eines Vierervektors mit wohldefiniertem Transformationsverhalten (1.128) unter $\mathcal{L}_+^\uparrow$ identifiziert werden kann. (Will man (1.126) formal beibehalten, so muss man statt m eine „geschwindigkeitsabhängige Masse“ $M\,(v) = m\,\gamma\,(v)$ einführen, was wir aber vermeiden wollen).

Die **Newtonsche Bewegungsgleichung** der nichtrelativistischen Mechanik, die in einem Inertialsystem Σ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \equiv m\,\vec{a} = \vec{F} \tag{1.131}$$

lautet, und die daraus durch Skalarproduktbildung mit $\vec{v}$ folgende Bilanz der kinetischen Energie,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}\;, \tag{1.132}$$

müssen im relativistischen Bereich ebenfalls korrigiert werden. Hier bezeichnet $\vec{F}$ die Kraft auf den Massenpunkt. Wir definieren eine relativistische oder *Viererkraft* $K = \{K^\mu\}$ durch

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\,p^\mu \equiv m\,b^\mu = K^\mu}\;. \tag{1.133}$$

Wegen der Invarianz von $d\tau$ transformiert sich K wie p, d. h. als Vierervektor:

$$K'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} K^{\nu} \qquad (\Lambda \in \mathcal{L}) \; . \tag{1.134}$$

K fasst die Gesamtheit der äußeren Einflüsse, die den Bewegungszustand des Teilchens zu ändern versuchen, zusammen; es hängt im allgemeinen vom jeweiligen Weltpunkt x des Teilchens, seiner momentanen Vierergeschwindigkeit u und möglicherweise explizit von der Eigenzeit τ ab:

$$K^{\mu} = K^{\mu}(\{x^{\alpha}\}, \{u^{\beta}\}, \tau) \; . \tag{1.135}$$

Die Beziehung zur Newtonschen Kraft $\vec{F}$ ergibt sich aus der Überlegung, dass (1.131) im Bereich $|\vec{v}\,| \ll c$ näherungsweise und im momentanen Ruhesystem des Teilchens, wo $\vec{v}_R = 0$ ist, sogar exakt gültig bleiben muss. Dort nimmt b die Form (1.123) an, d. h. es gilt

$$\{K^{\mu}\}_R = \{0, m\,\vec{a}_R\} = \{0, \vec{F}_R\} \; . \tag{1.136}$$

Die Form von K im System Σ, wo der Massenpunkt sich momentan mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, ergibt sich dann nach (1.134) durch Anwendung des Lorentz-Schubes $\Lambda = L(\vec{v}\,)$ gemäß Gl. (1.101):

$$K^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(\vec{v}\,)\,(K^{\nu})_R \; , \tag{1.137 a}$$

d. h.

$$\boxed{K^0 = \beta\,\gamma\,(\hat{v} \cdot \vec{F}_R) = \frac{1}{c}\,\gamma\,(\vec{v} \cdot \vec{F}_R)} \; , \tag{1.137 b}$$

$$\boxed{\vec{K} = \vec{F}_R + (\gamma - 1)\,(\hat{v} \cdot \vec{F}_R)\,\hat{v}} \; . \tag{1.137 c}$$

Damit kann $\{K^{\mu}\}$ *für jeden Zeitpunkt aus der Newtonschen Kraft* $\vec{F}_R$ *im Ruhesystem des Teilchens* und der momentanen Geschwindigkeit im gewählten Bezugssystem Σ berechnet werden. [*] Durch Projektion von (1.137 c) auf $\vec{v}$,

$$\vec{v} \cdot \vec{K} = \gamma\,(\vec{v} \cdot \vec{F}_R) = c\,K^0 \tag{1.137 d}$$

prüft man nach, dass die nach (1.125) zu erwartende Viererorthogonalität erfüllt ist:

$$u_{\mu} K^{\mu} \equiv u_0 K^0 - (\vec{u} \cdot \vec{K}\,) = 0 \; . \tag{1.138}$$

[*] Will man die Definition der Dreierkraft $\vec{F}$ durch (1.131) generell beibehalten, so ist nach (1.133) und wegen $d\,/\,d\tau = \gamma\, d\,/\,dt$ zu setzen $\vec{K} = \gamma(v) \cdot \vec{F}$. Vgl. als Beispiel die Lorentz-Viererkraft, Gln. (1.267) unten.

Hat man mit Hilfe von (1.137 b/c) das Vierer-Kraftgesetz (1.135) ermittelt, so kann das relativistische Bewegungsproblem durch Integration der vier gekoppelten Differentialgleichungen

$$\boxed{m\,\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = K^\mu\left(\{x^\alpha(\tau)\},\,\{u^\beta(\tau)\},\,\tau\right) \qquad (\mu = 0,\,1,\,2,\,3)} \tag{1.139}$$

mit vorgegebenen Anfangswerten

$$\{x^\alpha(\tau = 0)\,|\,\alpha = 0 \ldots 3\}\ , \quad \{u^\beta(\tau = 0)\,|\,\beta = 0 \ldots 3\} \tag{1.140 a}$$

gelöst werden, wobei letztere wegen (1.113) die Bedingung

$$u^2(\tau = 0) = u^\beta(0)\,u_\beta(0) = c^2 \tag{1.140 b}$$

erfüllen müssen. Da bei Berechnung von K aus (1.137) in jedem Zeitpunkt Bedingung (1.138) und damit auch (1.125) erfüllt ist, bleibt dann $u^\beta\,u_\beta = c^2$ auch für alle Zeiten $\tau > 0$ erfüllt. Die ($\mu = 0$)-Komponente der Lösung, ($x^0(\tau) = c\,t(\tau)$), gibt den Zeitablauf im System Σ an; eliminiert man τ zu ihren Gunsten, so erhält man die Bahngleichung in der Form (1.105).

Für das *kräftefreie Teilchen* ist $\vec{F}_R = 0$ für alle τ und daher auch $K \equiv 0$ nach (1.137), d. h. man hat die Bewegungsgln.

$$d^2 x^\mu\,/\,d\tau^2 = 0 \qquad (\mu = 0, 1,\,2,\,3) \tag{1.141 a}$$

mit der Lösung

$$\boxed{x^\mu(\tau) = u^\mu(0)\cdot\tau + x^\mu(0)}\ , \tag{1.141 b}$$

$$u^\mu(0)\,u_\mu(0) = c^2\ ; \tag{1.141 c}$$

sie stellt in *jedem* Inertialsystem Σ eine geradlinig-gleichförmige Bewegung dar:

$$t - t_0 = \gamma_0\,\tau\ ; \quad \gamma_0 = [1 - (\vec{v}_0\,/\,c)^2\,]^{-\frac{1}{2}}\ ; \tag{1.141 d}$$

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = \vec{v}_0\,(t - t_0)\ ; \tag{1.141 e}$$

mit $t_0 = t\,(\tau = 0)$ und $\vec{v}_0 = \vec{v}\,(t = t_0)$.

Die noch fehlende Interpretation der Zeitkomponente p^0 des Viererimpulses von (1.127) ergibt sich nun aus der $(\mu = 0)$-Komponente von (1.133) in der Form

$$\gamma \frac{d}{dt} (m\, u^0) \; = \; K^0$$

zusammen mit Gl. (1.137 b):

$$\frac{d}{dt} [m\, c^2 \, \gamma\, (v)] \; = \; \vec{v} \cdot \vec{F}_R \, . \tag{1.142}$$

Die rechte Seite dieser zu (1.132) analogen Gleichung gibt die *momentane Leistung* der Newtonschen Kraft $\vec{F}_R$ im Bezugssystem Σ an. Wir identifizieren daher die 0-Komponente des Viererimpulses gemäß

$$\boxed{E \; = \; c\, p^0 \; = \; m\, c^2 \, \gamma \; = \; \frac{m\, c^2}{\sqrt{1 \, - \, \beta^2}}} \tag{1.143}$$

mit der *relativistischen Energie des Massenpunktes in* Σ. (Natürlich ist dies, wie im nichtrelativistischen Falle das $(1/2)\, m\, v^2$ in (1.132), eine Energie ohne Einschluss von „potenziellen", d. h. Wechselwirkungsbeiträgen). Es ist also

$$\{p^\mu\} \; = \; \left\{ \frac{1}{c} \, E, \, \vec{p} \right\} \; . \tag{1.144}$$

Die invariante Beziehung (1.129) in der nach p^0 bzw. E aufgelösten Form

$$\boxed{E \; = \; \sqrt{(m\, c^2)^2 \; + \; (c\, \vec{p}\,)^2} \; = \; E\, (|\vec{p}\,|)} \tag{1.145}$$

heißt die **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**; ist sie erfüllt, so befindet sich das Teilchen „auf der Massenschale" zur Ruhemasse m. Entwickelt man (1.143) für $v \ll c$ gemäß

$$\frac{1}{\sqrt{1 \, - \, \beta^2}} \; = \; 1 \; + \; \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \; + \; \ldots \tag{1.146 a}$$

oder (1.145) entsprechend für $|\vec{p}\,| \; \ll \; m\, c$,

$$m\, c^2 \sqrt{1 \; + \; \left(\frac{\vec{p}}{m\, c} \right)^2} \; = \; m\, c^2 \left[1 \; + \; \frac{1}{2} \, \frac{|\vec{p}\,|^2}{m^2 \, c^2} \; + \; \ldots \right] \; , \tag{1.146 b}$$

so findet man als Term 1. Ordnung in v^2 bzw. $|\vec{p}\,|^2$ in der Entwicklung von E die bekannten Ausdrücke für die nichtrelativistische kinetische Energie:

$$E \; = \; m\, c^2 \; + \; \frac{m}{2} \, v^2 \; + \; \ldots \; = \; m\, c^2 \; + \; \frac{|\vec{p}\,|^2}{2\, m} \; + \; \ldots \tag{1.147}$$

Daneben tritt jedoch ein auch im Ruhesystem von Null verschiedener, zur Masse proportionaler Term, die sog. **Ruheenergie**, auf

$$\boxed{E_R = m\,c^2} \, . \tag{1.148}$$

In der relativistischen Physik ist also auch dem Ruhezustand eines massiven Teilchens eine Energie zuzuordnen, die proportional zur Ruhemasse ist.

Man kann hier einwenden, dass auf Grund der Gl. (1.142) die Definition $E = c\,p^0$ von (1.143) streng genommen nur bis auf eine additive Konstante möglich ist. Warum sollte man nicht diese Konstante etwa als $-\,m\,c^2$ wählen und statt (1.143) die Größe

$$T = c\,p^0 - m\,c^2 = m\,c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right] , \tag{1.149}$$

die im nichtrelativistischen Grenzfall (1.147) direkt in $(1/2)\,m\,v^2$ übergeht, als Energie definieren? Die Relativitätstheorie bevorzugt E zunächst aus einem formalen Grunde: die additive Konstante, wie das $-\,m\,c^2$ in (1.149), wäre eine Lorentzinvariante, und damit wäre T, wie im nächsten Abschnitt noch genauer ausgeführt, als Mischung aus einer Vektorkomponente und einer Invarianten eine „nichtkovariante", d. h. kein einheitliches Transformationsverhalten unter $\mathcal{L}$ mehr aufweisende Größe. Der überzeugendste Grund für die Definition von E gemäß (1.143) und (1.147) ist aber ein *experimentelles* Resultat, das erst Jahrzente nach Aufstellung der Speziellen Relativitätstheorie deutlich wurde: bei Stoß- und Zerfallsprozessen von Elementarteilchen und Atomkernen gilt ein *Erhaltungssatz im allgemeinen nicht für T* (dies ist nur bei sog. elastischen Stößen der Fall), *sondern nur für E*, die Summe aus Ruhe- und Bewegungsenergie. Insbesondere kann – als drastischste Konsequenz – Ruheenergie (1.148) bei Prozessen wie radioaktivem Zerfall oder Kernspaltung teilweise in kinetische Energie umgewandelt werden.

Der zu (1.146) entgegengesetzte *„ultrarelativistische" Grenzfall* wird erreicht in Bezugssystemen Σ, in denen $|\vec{v}\,|$ nahe bei c, d. h. $\beta \approx 1$ ist. Für $\beta \to 1$ wird $\gamma \gg 1$ und daher nach (1.130 b)

$$|\vec{p}\,| \gg m\,c \, . \tag{1.150}$$

In diesem Falle wird (1.145) zu

$$\boxed{E = c\,|\vec{p}\,| + O\left(\frac{m\,c}{|\vec{p}\,|}\right)} \, . \tag{1.151}$$

Elementarteilchen, die sich mit Geschwindigkeiten sehr nahe bei c – bzw. mit Energien weit über ihrer Ruheenergie – bezüglich des Laborsystems bewegen, sind mit modernen Teilchenbeschleunigern in großem Umfange erzeugbar. Die speziell-relativistische Mechanik und insbesondere Gl. (1.145) mit ihrem ultrarelativistischen Grenzfall (1.150) gehört heute zu den selbstverständlichen Konstruktionsgrundlagen solcher Beschleuniger.

Teilchen, für die der ultrarelativistische Limes exakt erreicht wird, die also das Energie-Impuls-Gesetz

$$p^0 = |\vec{p}| \quad \text{oder} \quad E = c\,|\vec{p}| \tag{1.152 a}$$

befolgen, sind die *Photonen*, die Quanten des elektromagnetischen Feldes, sowie (im Rahmen der heute erreichbaren experimentellen Genauigkeit) auch die beim β-Zerfall der Atomkerne entstehenden *Neutrinos*. Sie haben nach (1.145) keine Ruhemasse:

$$m = 0 \quad (\text{Photon}\,;\text{Neutrino})\ . \tag{1.152 b}$$

Endlichen Impuls $|\vec{p}|$ und endliche Energie E können sie daher nach (1.130 b) und (1.143) nur besitzen, wenn für sie $\gamma = \infty$ oder $\beta = 1$, d. h. die Geschwindigkeit gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit ist, und diese ist dann, wie wir wissen, in allen Bezugssystemen dieselbe:

$$v = c \quad \text{in allen } \Sigma\ , \quad \text{wenn} \quad m = 0\ . \tag{1.152 c}$$

Für solche Teilchen *existiert daher kein Ruhesystem*. Die Relation

$$\boxed{\frac{\vec{p}}{p^0} \equiv \frac{c\,\vec{p}}{E} = \frac{\vec{v}}{c}} \tag{1.153}$$

(aus 1.130 a/b) gilt dagegen für alle Teilchen, ob mit $m = 0$ oder $\neq 0$.

1.5 Tensoren in $\mathcal{M}^4$. Relativitätsprinzip

a) Tensoren als Lorentz-Kovarianten. Das Skalarprodukt (1.39) ist invariant unter $\Lambda \in \mathcal{L}$. In Verallgemeinerung dieser Aussage nennt man jede Funktion $f(x)$ auf $\mathcal{M}^4$, die nur vom lorentzinvarianten Normquadrat $x^2 = x^\mu x_\mu$ abhängt, und weiter jede Funktion $S(x, y, z, \dots)$, die von mehreren Vierervektoren nur über deren lorentzinvariante Skalarprodukte

$$x^2, y^2, z^2, \dots\ , \quad x \cdot y\ , \quad y \cdot z\ , \quad z \cdot x\ , \dots \tag{1.154}$$

abhängt, einen *Lorentz-Skalar* oder Lorentz-Tensor 0. Stufe. Sie ist unabhängig vom Bezugssystem, in dem sie berechnet wird. Die einfachsten Lorentz-Skalare sind bezugssystemunabhängige Konstanten, wie c, m oder $m\,c^2$.

Als Vierervektoren haben wir zunächst die Elemente x des $\mathcal{M}^4$ selbst bzw. ihre kontra- oder kovarianten Koordinatensätze $\{x^\mu\}$, $\{x_\mu\}$ bezeichnet, die sich unter $\Lambda \in \mathcal{L}$ gemäß (1.62) bzw. (1.71) transformieren. Wir haben den Begriff dann erweitert auf andere vierkomponentige Größen, die sich in derselben Weise wie x transformieren, etwa den Viererimpuls $\{p^\mu\}$ mit Gl. (1.128). In Verallgemeinerung hiervon bezeichnen wir jeden Satz von 4 Funktionen $V^\mu(x)$ auf $\mathcal{M}^4$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – oder $V^\mu(x, y)$ auf $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{M}^4$, usw. – die sich unter $\mathcal{L}$ gemäß

$$V'^{\mu}(x') \equiv V'^{\mu}(\Lambda x) = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x) \tag{1.155 a}$$

oder

$$\boxed{V'^{\mu}(x) = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1} x)} \tag{1.155 b}$$

transformieren, als kontravariante Komponenten eines Vierervektorfeldes $V(x)$ oder – salopp, aber kurz – als *„kontravarianten Vierervektor“* . Durch Anwendung der metrischen Matrix wie in (1.57) erhalten wir den zugehörigen „kovarianten Vierervektor“

$$V_\mu(x) = \eta_{\mu\nu} V^\nu(x) \,. \tag{1.156}$$

Vierervektoren heißen auch *Lorentz-Tensoren 1. Stufe*. Wegen der Isometrie (1.74) von Λ ist für sie das Skalarprodukt

$$V^2(x) = V^\mu(x)\, V_\mu(x) = \eta_{\mu\nu} V^\mu(x)\, V^\nu(x) \tag{1.157 a}$$

eine Lorentz Invariante, d. h.

$$\boxed{V'^2(x) = V^2(\Lambda^{-1} x)} \,. \tag{1.157 b}$$

Das hat insbesondere die Konsequenz, dass die Zuordnung eines Vierervektors zu einer der drei Klassen

$$V^2 < 0 \qquad \text{(raumartiger Vierervektor)} \tag{1.158 a}$$

$$V^2 = 0 \qquad \text{(lichtartiger Vierervektor)} \tag{1.158 b}$$

$$V^2 > 0 \qquad \text{(zeitartiger Vierervektor)} \tag{1.158 c}$$

unter $\Lambda \in \mathcal{L}$ stets erhalten bleibt; für *zeitartige* Vierervektoren bleibt überdies unter $\Lambda \in \mathcal{L}^{\uparrow}$ (orthochrone Transformationen) auch die Zugehörigkeit zum Vorwärts- ($V^0 > 0$) oder Rückwärtslichtkegel ($V^0 < 0$) erhalten. – Die einfachsten Vierervektoren sind wieder solche mit konstanten Komponenten, wie der Viererimpuls (1.127) eines Massenpunktes; Beispiel für ein komplizierteres Vierervektorfeld ist die Viererkraft (1.135).

Als nächstkompliziertes Objekt mit einem wohldefinierten Transformationsverhalten unter $\mathcal{L}$ betrachten wir einen Satz von 16 Funktionen $T^{\mu\nu}(x)$ auf $\mathcal{M}^4$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) oder $T^{\mu\nu}(x, y)$ auf $\mathcal{M}^4 \times \mathcal{M}^4$ usw., die sich unter $\Lambda \in \mathcal{L}$ ebenso linear untereinander transformieren wie der Satz der 16 Produkte

$$x^\mu \, y^\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \tag{1.159}$$

der Komponenten zweier Vierervektoren x, y, nämlich nach dem Gesetz

$$T'^{\mu\nu}(x' = \Lambda x) = \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\sigma \, T^{\rho\sigma}(x) \tag{1.160 a}$$

oder

$$\boxed{T'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \, \Lambda^\nu{}_\sigma \, T^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1} x)} \, . \tag{1.160 b}$$

Man nennt sie die doppelt kontravarianten Komponenten eines *Vierer- oder Lorentz-Tensorfeldes 2. Stufe* oder kurz einen „doppelt kontravarianten Tensor". Durch Herunterziehen von Indizes mittels der metrischen Matrix kann man zu „gemischten" Komponenten bzw. Tensoren

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\rho} \, \eta_{\rho\nu} \, , \quad T_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \, T^{\rho\nu} \tag{1.161 a}$$

und schließlich zum doppelt kovarianten Tensor

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \, \eta_{\nu\sigma} \, T^{\rho\sigma} \tag{1.161 b}$$

übergehen; die entsprechenden Modifikationen des Transformationsgesetzes (1.160) sind evident. Ein Lorentz-Tensor 2. Stufe mit der Eigenschaft

$$T^{\nu\mu} = T^{\mu\nu} \quad \text{bzw.} \quad T^{\nu\mu} = -T^{\mu\nu} \tag{1.162}$$

heißt *symmetrisch* bzw. *antisymmetrisch*; diese Eigenschaften bleiben, wie man leicht nachprüft, unter (1.160) erhalten und sind daher unabhängig vom Bezugssystem. Z. B. bilden in jedem Punkt der Weltlinie eines Massenpunktes die Produkte $x^\mu \, x^\nu$ seiner Viererkoordinaten einen symmetrischen, die Größen $x^\mu \, p^\nu - x^\nu \, p^\mu$ einen antisymmetrischen Tensor. Infolge der Bedingungen (1.162) besitzen derartige Tensoren statt 16 nur $\frac{1}{2} \, 4 \, (4 + 1) = 10$ bzw. $\frac{1}{2} \, 4 \, (4 - 1) = 6$ unabhängige Komponenten.

Es ist nun klar, wie *Lorentz-Tensoren höherer Stufe* zu definieren sind; z. B. hat ein zweifach kontra- und zweifach kovarianter Tensor 4. Stufe $W^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ das Transformationsgesetz

$$W'^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu}(x) = \Lambda^{\kappa}{}_{\rho}\,\Lambda^{\lambda}{}_{\sigma}\,\Lambda_{\mu}{}^{\tau}\,\Lambda_{\nu}{}^{\omega}\,W^{\rho\sigma}{}_{\tau\omega}(\Lambda^{-1}x)\ . \tag{1.163}$$

Ein einfacher Weg zur Erzeugung höherer Tensoren ist die in (1.159) bereits angewandte Bildung von *direkten oder äußeren Produkten von Tensoren*: bildet man aus den Komponenten eines Tensors m-ter Stufe

$$R^{\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_p}{}_{\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_q} \quad \text{mit} \quad p + q = m \tag{1.164 a}$$

und eines Tensors n-ter Stufe

$$S^{\gamma_1\,\gamma_2\,\ldots\,\gamma_r}{}_{\delta_1\,\delta_2\,\ldots\,\delta_s} \quad \text{mit} \quad r + s = n \tag{1.164 b}$$

die sämtlichen Produkte, so transformieren diese sich unter $\mathcal{L}$ als Komponenten eines Tensors $(m + n)$-ter Stufe

$$T^{\alpha_1\,\ldots\,\alpha_p\,\gamma_1\,\ldots\,\gamma_r}{}_{\beta_1\,\ldots\,\beta_q\,\delta_1\,\ldots\,\delta_s} \tag{1.164 c}$$

mit $p + r$ kontra- und $q + s$ kovarianten Indizes. Diese direkte Produktbildung wird symbolisch als

$$T = R \otimes S \tag{1.164 d}$$

geschrieben.

Umgekehrt führt die Operation der *Tensorkontraktion* von Tensoren höherer zu solchen niedrigerer Stufe: an einem Tensor der Stufe ≥ 2 werden ein kontra- und ein kovarianter Index gleichgesetzt und, wie es die Summenkonvention dann automatisch erfordert, von 0 bis 3 summiert. (Oder, hierzu äquivalent: ein Tensor, der u. a. obere Indizes α und β hat, wird mit $\eta_{\alpha\beta}$ multipliziert, wobei dann automatisch über α und β zu summieren ist). Dadurch entsteht ein Tensor von *um 2 erniedrigter Stufe*. Z. B. erhalten wir aus dem vierstufigen W von (1.163) gemäß

$$T^{\kappa}{}_{\nu} = W^{\kappa\mu}{}_{\mu\nu} = \eta^{\mu}{}_{\lambda}\,W^{\kappa\lambda}{}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda}\,W^{\kappa\lambda\mu}{}_{\nu} \tag{1.165}$$

einen Tensor 2. Stufe, denn aus Gl. (1.163) wird durch Kontraktion mit $\eta^{\mu}{}_{\lambda}$ und Beachtung von (1.74) in der Form

$$\eta^{\mu}{}_{\lambda}\,\Lambda^{\lambda}{}_{\sigma}\,\Lambda_{\mu}{}^{\tau} = \eta_{\sigma}{}^{\tau} = \delta_{\sigma}{}^{\tau}$$

das Transformationsgesetz (1.160 b) für Tensoren 2. Stufe. Weitere Kontraktion führt gemäß

$$\boxed{\eta_{\kappa\nu}\,T^{\kappa\nu} = T^{\kappa}{}_{\kappa} = \operatorname{tr} T} \tag{1.166}$$

zu einem Lorentz-Skalar, der als *Spur* tr T (engl. trace) des zweistufigen Tensors T bezeichnet wird. Die Kontraktion des direkten Produkts eines zweistufigen Tensors und eines Vektors ergibt gemäß

$$\eta_{\nu\lambda}\, T^{\mu\nu}\, V^{\lambda} \;=\; T^{\mu}{}_{\lambda}\, V^{\lambda} \;=\; U^{\mu} \tag{1.167}$$

einen Vektor und zeigt, dass ein *Tensor 2. Stufe eine lineare Transformation auf $\mathcal{M}^4$ definiert*, die jedem Vierervektor V eine Bildvektor U zuordnet; es wird dann auch $U^{\mu} \;=\; (T\,V)^{\mu}$ geschrieben.

Die Kontraktionsoperation – eine Verallgemeinerung der Skalarproduktbildung (1.157 a) – kann als Test auf den Tensorcharakter eines Größensatzes von zunächst unbekanntem Transformationsverhalten benutzt werden gemäß dem sog. **Quotiententheorem**, das wir – als Beispiel – für Tensoren 2. Stufe formulieren:

> Ist $\{X^{\mu\nu}\}$ ein Satz von 16 Größen unbekannten Transformationsverhaltens und $\{T^{\mu\nu}\}$ ein Tensor 2. Stufe, und ergibt die Kontraktion $S \;=\; X^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu}$ einen Lorentz-Skalar, dann muss X ebenfalls Tensor 2. Stufe sein. (Analoges gilt für andere Tensorstufen).

(1.168)

Diese Aussage folgt sofort durch Anwendung des Tensortransformationsgesetzes (1.160) auf $T^{'}$ in der Gleichung

$$X^{'\mu\nu}\, T^{'}_{\mu\nu} \;=\; X^{\mu\nu}\, T_{\mu\nu} \;.$$

Spezialisiert auf den Tensor $T_{\mu\nu} \;=\; x_{\mu}\, y_{\nu}$ von (1.159), wird sie auch als alternative Definition des Tensorbegriffes benutzt: ein Tensor p-ter Stufe ist das, was bei Kontraktion mit p beliebigen Vektoren von $\mathcal{M}^4$ eine Invariante ergibt. In dieser Auffassung wird geradezu ein *Tensor T als lineares Funktional* betrachtet, das (z. B. für $p \;=\; 2$) jedem Vektorpaar $(x,\, y)$ aus $\mathcal{M}^4 \,\times\, \mathcal{M}^4$ eine Zahl, nämlich die Invariante

$$T^{\mu\nu}\, x_{\mu}\, y_{\nu} \;=\; x_{\mu}\, (T\, y)^{\mu} \;=\; x \,\cdot\, (T\, y) \;, \tag{1.169}$$

zuordnet.

Die Isometrieeigenschaft (1.74) der homogenen Lorentz-Transformationen kann, wie ein Vergleich mit (1.160) zeigt, auch als Aussage über das Transformationsverhalten von $\eta_{\mu\nu}$ gelesen werden und besagt dann, dass $\eta_{\mu\nu}$ (bzw. $\eta^{\mu}{}_{\nu} \;=\; \delta^{\mu}{}_{\nu}$) die doppelt kovarianten (bzw. gemischten) Komponenten eines Tensors 2. Stufe, das *metrischen Tensors* η, darstellen, der die spezielle Eigenschaft hat, in allen Bezugssystemen dieselbe Darstellung (1.38) bzw. (1.49) zu besitzen:

$$\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad \text{in allen Systemen} \quad \Sigma' \; . \tag{1.170}$$

Ein tensorielles Transformationsverhalten unter $\mathcal{L}$ kann nicht nur Feldfunktionen auf $\mathcal{M}^4$, sondern auch *Differentialoperatoren* zukommen. Bei der Transformation

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^{\;\nu} \tag{1.171 a}$$

gilt für die partiellen Ableitungen $\partial / \partial x^\mu$ die Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \; . \tag{1.171 b}$$

Die Umkehrung von (1.171 a) gemäß (1.67 a) ergibt aber

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^T)^\nu{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \tag{1.171 c}$$

und daher gilt für die partiellen Ableitungen nach den *kontravarianten* Koordinaten

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}} \; , \tag{1.171 d}$$

d. h. das Transformationsgesetz eines *kovarianten* Viervektors. Dies gilt natürlich auch umgekehrt. Es sind daher $\partial / \partial x^\mu$ die kovarianten und $\partial / \partial x_\mu$ die kontravarianten Komponenten eines Vierervektor-Operators, des *Vierergradienten* ∂:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; , \qquad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \; . \tag{1.172}$$

Diesen Schluss könnte man auch aus dem Quotiententheorem (1.168) – diesmal für Tensoren 1. Stufe – ziehen, denn wegen

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} x^\beta = \delta_\alpha{}^\beta = \eta_\alpha{}^\beta \tag{1.173}$$

ist die Größe $(\partial / \partial x^\mu) \, x^\mu$ eine Invariante:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\mu = \eta_\mu{}^\mu = 4 \; . \tag{1.174}$$

Durch direkte Produktbildung von (1.172) mit sich selbst entsteht der symmetrische Tensor der zweiten Ableitungen,

$$(\partial \otimes \partial)_{\mu\nu} = \partial_\mu \, \partial_\nu = \frac{\partial}{\partial \, x^\mu} \, \frac{\partial}{\partial \, x^\nu} = \partial_\nu \, \partial_\mu \; . \tag{1.175}$$

Seine Spur gemäß (1.166),

$$\begin{aligned} \partial \cdot \partial &= \eta_{\mu\nu} \, \partial^\mu \, \partial^\nu = \partial^\mu \, \partial_\mu \\ &= (\partial^0)^2 - \vec{\nabla}^{\,2} = \frac{1}{c^2} \, \frac{\partial^2}{\partial \, t^2} - \vec{\nabla}^{\,2} = \Box \; , \end{aligned} \tag{1.176}$$

ist der bekannte *d'Alembert- oder Wellenoperator*, der sich damit als *lorentzinvarianter Differentialoperator* erweist. Die Lorentz-Invarianz des elektromagnetischen Wellenoperators impliziert natürlich die Gleichheit der Phasengeschwindigkeit c der elektromagnetischen Wellen in allen Bezugssystemen und könnte daher auch an den Anfang der Speziellen Relativitätstheorie gestellt werden.

Die partiellen Ableitungen eines Vierervektorfeldes (1.155),

$$\partial^\mu \, V^\nu \, (x) \; , \qquad (\mu, \, \nu = 0, \, 1, \, 2, \, 3) \tag{1.177}$$

bilden nach dem Schema (1.164) (mit $m = n = 1$) einen Tensor 2. Stufe. Die antisymmetrisierte Form

$$\partial^\mu \, V^\nu \, (x) - \partial^\nu \, V^\mu \, (x) \tag{1.178}$$

wird als *Vierer-Rotation* des Vektorfeldes bezeichnet; sie hat nach dem bei (1.162) Gesagten 6 unabhängige Komponenten. (Anders als in 3 Dimensionen ist also die Rotation hier ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, *nicht* ein Vektor). Die Viererrotation eines Vierergradienten verschwindet:

$$\partial^\mu \, (\partial^\nu \, S \, (x)) - \partial^\nu \, (\partial^\mu \, S \, (x)) = 0 \; . \tag{1.179}$$

Die Spur von (1.177) andererseits ist ein Lorentz-Skalar,

$$\partial_\mu \, V^\mu \, (x) = \frac{\partial}{\partial \, t} \, \frac{1}{c} \, V^0 \, (x) + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \, (x) \tag{1.180}$$

(beachte das Pluszeichen!), die *Viererdivergenz* des Vektorfeldes. Von einem Tensorfeld 2. Stufe (1.160) kann man analog die sog. *Tensordivergenz*

$$\partial_\mu \, T^{\mu\nu} \, (x) \qquad (\nu = 0, \, 1, \, 2, \, 3) \tag{1.181}$$

bilden, die ein Vektorfeld darstellt.

Als Anwendung von (1.172) betrachten wir für eine (nicht notwendig elektromagnetische) ebene Welle die Beziehung

$$i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\omega}{c} & (\mu = 0) \\ -k_m & (\mu = m) \end{array} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} . \tag{1.182}$$

Das Transformationsverhalten der beiden Seiten, wiewohl zunächst unbekannt, muss jedenfalls gleich sein. Wir schließen, dass die vier Größen

$$\{k_\mu\} = \left\{\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right\} \tag{1.183}$$

sich als kovarianter *Vierer-Wellenzahlvektor* unter $\mathcal{L}$ transformieren. Die Phase der ebenen Wellen,

$$\Phi(t, \vec{x}) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \frac{\omega}{c}(ct) = -(k^0 x^0 - \vec{k}\cdot\vec{x}) = -k_\mu x^\mu \tag{1.184}$$

wird damit als Lorentzinvariante erkennbar. Diese Aussage ist einleuchtend, denn denkt man sich in einem geeignet gewählten System Σ das bei $t = 0$ durch den Ursprung $\vec{x} = 0$ laufende Wellenmaximum als Referenzmaximum gekennzeichnet, so gibt $-\Phi(t, \vec{x})/2\pi$ die am Ort $\vec{x}$ bis zur Zeit t registrierte Anzahl von Maxima, beginnend mit diesem Referenzmaximum, an, und diese reine Zählung der Maxima kann nicht vom Bezugssystem abhängen. Das Vierer-Normquadrat von k ist eine Invariante,

$$k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k}^2 = \kappa^2 = \text{Invariante} ; \tag{1.185}$$

diese verschwindet im Spezialfall elektromagnetischer Wellen:

$$\boxed{k_\mu k^\mu = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = c|\vec{k}| \qquad \text{(elektromagn. Welle)}} . \tag{1.186}$$

Allgemein stellt (1.185) die invariante Fassung des *Dispersionsgesetzes* der ebenen Welle dar. Ebene Wellen mit zeitartigem k, d. h. mit $\kappa^2 > 0$ bzw. dem Dispersionsgesetz

$$\omega(|\vec{k}|) = c\sqrt{|\vec{k}|^2 + \kappa^2} , \tag{1.187}$$

treten in der Quantentheorie als Materiewellen auf, die der freien Bewegung relativistischer Teilchen der Ruhemasse

$$m = \hbar\frac{\kappa}{c} \qquad (\hbar \text{ Wirkungsquantum}) \tag{1.188}$$

zuzuordnen sind; die Länge $\frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{m\,c}$ heißt die Comptonwellenlänge dieser Teilchen. Solche Materiewellen sind die einfachsten Lösungen der invarianten Wellengleichung

$$(\Box + \kappa^2)\,\varphi\,(x) = 0\;, \tag{1.189}$$

der sog. **Klein-Gordon-Gleichung**.

b) Einsteinsches Relativitätsprinzip. Größen wie Lorentz-Skalare, -Vektoren und -Tensoren, die das soeben diskutierte multilineare Transformationsverhalten unter $\Lambda \in \mathcal{L}$ aufweisen, nennt man verallgemeinernd Lorentz-Kovarianten; Gleichungen zwischen Lorentz-Tensoren desselben Typs heißen *„relativistisch kovariant"*. Dies bedeutet, dass sie bei Bezugssystemwechsel „forminvariant" sind, d. h. in „gestrichenen" und „ungestrichenen" Größen dieselbe Form annehmen. Äquivalent dazu ist die Feststellung, dass das *Verschwinden einer Lorentz-Kovarianten eine invariante Aussage* ist: wenn $V^\mu = 0$ bzw. $T^{\mu\nu} = 0$, dann auch $V'^\mu = 0$ bzw. $T'^{\mu\nu} = 0$, usw.

Einstein postulierte, dem experimentellen Erfahrungsstand der Zeit (1905) weit vorauseilend, als Erster, dass Forminvarianz gegenüber Bezugssystemwechsel durch Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen nicht nur für die Gesetze elektromagnetischer Wellenausbreitung (dort mathematisch ausgedrückt durch die Invarianz des Wellenoperators (1.108)), sondern für alle korrekt formulierten Naturgesetze zu gelten habe und geradezu als Kriterium für deren Richtigkeit anzusehen sei. Dies ist das **Einsteinsche Relativitätsprinzip**:

> Die Naturgesetze müssen in allen durch spezielle Lorentz-Transformationen, Raumdrehungen und Translationen auseinander hervorgehenden Bezugssystemen dieselbe mathematische Form aufweisen, d. h. forminvariant gegen Poincaré-Transformationen sein.

(1.190)

Dies trifft genau dann zu, wenn das betreffende Naturgesetz die Form „Lorentz-Kovariante = 0" (bzw. einer Gleichung zwischen zwei Kovarianten desselben Typs) annimmt. Die formale Tensorrechnung im $\mathcal{M}^4$ hat ihre Bedeutung dann darin, dass sie eine allgemeine Methode zur Aufstellung lorentzkovarianter Gleichungen darstellt.

Für die relativistische Physik erwächst damit das Programm, die vorrelativistische Fassung der Naturgesetze in kovariante Form zu bringen. Wir sahen in Abschnitt (1.4), dass dies für die Newtonsche Punktmechanik eine echte relativistische Korrektur und Neufassung erfordert; ihre vorrelativistische Fassung ist für schnell bewegte Teilchen schlicht ungültig. [*)] Dagegen zeigt sich, dass für die Maxwellsche Elektrodynamik die

[*)] Die Newtonsche Mechanik erfüllt ein Relativitätsprinzip vom Typ (1.190), wenn man dort „spezielle Lorentz-" durch „Galilei-" Transformationen ersetzt.

volle Kovarianz bereits „versteckt“ gegeben ist und nur durch geeignete Schreibweise noch manifest gemacht werden muss.

c) Pseudotensoren und ε-Tensor. Die bisherige Klassifikation der Kovarianten ist ausreichend, solange die eigentlich-orthochrone Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ betrachtet wird. Nimmt man die diskreten Transformationen (1.90) (Raumspiegelung) oder (1.87) (Zeitumkehr) hinzu, so zeigt sich, dass wichtige Größen eine Erweiterung der Transformationsformeln benötigen, ähnlich, wie im euklidischen $\mathcal{R}^3$ gewisse Vektoren sich bei Raumspiegelung als Pseudo- statt als echte Vektoren erweisen.

Als Beispiel betrachte das vierdimensionale *Volumenelement* in $\mathcal{M}^4$,

$$d^4x \;=\; dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3 \; . \tag{1.191}$$

Bei homogenen Lorentz-Transformationen $x \;\rightarrow\; x^{'} \;=\; \Lambda\, x$ transformiert es sich bekanntlich nach dem Gesetz

$$d^4x^{'} \;=\; \frac{\partial\,(x^{'0}\;\ldots\;x^{'3})}{\partial\,(x^0\;\ldots\;x^3)} \cdot d^4x \tag{1.192}$$

mit der Funktionaldeterminante der Transformation $x^{'}(x)$, d. h. hier einfach mit der Determinante von Λ:

$$\boxed{d^4x^{'} \;=\; (\det\,\Lambda^\mu{}_\nu)\;\cdot\;d^4x} \; . \tag{1.193}$$

Unter $\Lambda \;\in\; \mathcal{L}_+$ (mit $\det\,\Lambda \;=\; +1$) ist das Volumenelement also eine Invariante, unter Λ_P oder Λ_T (mit $\det\,\Lambda \;=\; -1$) erhält es dagegen eine Faktor -1. Allgemein bezeichnen wir eine Größe, die sich nach dem Muster (1.193) mit dem Faktor $\det\,\Lambda$ transformiert, als *Pseudoskalar*.

Ungeachtet der Transformationseigenschaft (1.193) hat natürlich das Integral einer (im Unendlichen hinreichend schnell abfallenden) skalaren Funktion $S\,(x)$ über den gesamten $\mathcal{M}^4$,

$$I\,[S] \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^0\;\ldots\;\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^3\,S\,(x) \tag{1.194 a}$$

$$\equiv\; \int d^4x\,S\,(x) \; , \tag{1.194 b}$$

einen gegenüber allen Transformationen $x^{'}(x)$ und damit auch gegenüber Transformationen $\Lambda \;\in\; \mathcal{L}$ invarianten Wert. Beachte, dass wir das *Integralzeichen in* $\int d^4x$ *stets als* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ *in allen vier Koordinaten* definieren. Die Invarianz auch gegenüber Transformationen

$\Lambda \in \mathcal{L}_-$ kommt formal dadurch zustande, dass bei Λ_P oder Λ_T eine ungerade Anzahl unter den vier Integralen eine Vertauschung der Integrationsgrenzen erfährt und daher die Umwandlung in die von uns definierte Standardform ein Minuszeichen erhält. Wir können dies symbolisch durch

$$\int' = \operatorname{sgn}(\det \Lambda) \cdot \int \tag{1.195}$$

ausdrücken; die Gesamtoperation $\int d^4x$ ist dann wegen $|\det \Lambda| = 1$ für alle $\Lambda \in \mathcal{L}$ invariant.

Die *vierdimensionale Deltafunktion* $\delta^4(x - y)$ ist, analog ihrem dreidimensionalen Gegenstück $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, der formale Integralkern eines linearen Funktionals (der δ-Distribution), das jeder bei $x = y$ regulären Funktion $f(x)$ auf $\mathcal{M}^4$ ihren Funktionswert an der Stelle y zuordnet:

$$\int d^4x\, \delta^4(x - y)\, f(x) = f(y) \;. \tag{1.196 a}$$

Insbesondere ist für $f(x) \equiv 1$ unabhängig von y

$$\int d^4x\, \delta^4(x - y) = 1 \;. \tag{1.196 b}$$

Da in dieser Beziehung $\int d^4 x$ eine Lorentz-Invariante ist, schließen wir, dass $\delta^4(x - y)$ *Lorentz-Invariante* sein muss. In der Tat transformiert sich die δ-Funktion bei linearen Transformationen $x \to x' = A\,x$ mit nichtsingulärer Matrix A bekanntlich gemäß

$$\delta^4(A\,x - A\,y) = |\det A|^{-1}\, \delta^4(x - y) \;, \tag{1.197}$$

und für $A = \Lambda \in \mathcal{L}$ ist $|\det \Lambda| = 1$.

Um „Pseudo-Kovarianten“ höherer Stufe zu erzeugen, geht man zweckmäßig von einem ausgezeichneten Prototyp aus, dem sog. **Levi-Civitá-Tensor** oder **$\boldsymbol{\varepsilon}$ -Tensor**. Dies ist ein Tensor ε vierter Stufe, der – wie das zweistufige η – *in allen Bezugssystemen dieselben Komponenten* besitzt, nämlich (in vierfach kontravarianter Version)

$$\left\| \; \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn}\,(\kappa,\,\lambda,\,\mu,\,\nu)\,\text{gerade Permutation von}\ (0\ 1\ 2\ 3)\,, \\ -1\,, & \text{wenn}\,(\kappa,\,\lambda,\,\mu,\,\nu)\,\text{ungerade Permutation von}\ (0\ 1\ 2\ 3)\,, \\ \;\;0 & \text{sonst, d.h. wenn 2 oder mehr Indizes gleich}\,. \end{cases} \; \right\| \tag{1.198}$$

Dieser Tensor ist also *vollständig antisymmetrisch* in allen vier Indizes, d. h. ist $\Pi(\kappa, \lambda, \mu, \nu)$ irgend eine Permutation von κ, λ, μ, ν und $(-)^{\Pi}$ deren Parität, so ist

$$\varepsilon^{\Pi(\kappa,\lambda,\mu,\nu)} = (-)^{\Pi} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} . \tag{1.199}$$

Um die (1.163) entsprechende Beziehung zu finden, betrachten wir für $\Lambda \in \mathcal{L}$ die vierstufige transformierte Größe $\Lambda^{\alpha}{}_{\kappa} \Lambda^{\beta}{}_{\lambda} \Lambda^{\gamma}{}_{\mu} \Lambda^{\delta}{}_{\nu} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$. Sie ist antisymmetrisch unter Permutation von $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – denn jede solche Permutation kann durch Umbenennung von Summationsindizes in eine der Indizes von $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ überführt werden – und muss daher proportional zu $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ sein. Die Proportionalitätskonstante d erhalten wir, indem wir $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 1, 2, 3)$ setzen; dann steht linker Hand nichts weiter als die Laplacesche Entwicklung der Determinante von $(\Lambda^{\rho}{}_{\sigma})$:

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \Lambda^{0}{}_{\kappa} \Lambda^{1}{}_{\lambda} \Lambda^{2}{}_{\mu} \Lambda^{3}{}_{\nu} = \det \Lambda , \tag{1.200}$$

und rechter Hand $d \cdot 1$. Offensichtlich gilt (1.200) nicht nur für $\Lambda \in \mathcal{L}$, sondern für beliebige (auch singuläre) lineare Transformationen von $\mathcal{M}^4$. Für $\Lambda \in \mathcal{L}$ erhalten wir wegen $(\det \Lambda)^{-1} = \det \Lambda$:

$$\boxed{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\det \Lambda) \Lambda^{\alpha}{}_{\kappa} \Lambda^{\beta}{}_{\lambda} \Lambda^{\gamma}{}_{\mu} \Lambda^{\delta}{}_{\nu} \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}} . \tag{1.201}$$

Wir bezeichnen eine Größe $\tilde{W}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ mit der Transformationseigenschaft

$$\tilde{W}'^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\det \Lambda) \Lambda^{\alpha}{}_{\kappa} \Lambda^{\beta}{}_{\lambda} \Lambda^{\gamma}{}_{\mu} \Lambda^{\delta}{}_{\nu} \tilde{W}^{\kappa\lambda\mu\nu} \tag{1.202}$$

unter $\mathcal{L}$ als *Pseudotensor* 4. Stufe. Der ε-Tensor ist der Prototyp solcher Tensoren mit der speziellen Eigenschaft $\varepsilon' = \varepsilon$. Durch Kontraktion eines solchen Pseudotensors mit einem, zwei, drei oder vier Vektoren erhalten wir schrittweise Pseudotensoren 3. und 2. Stufe, 1. Stufe (Pseudovektoren) und schließlich 0. Stufe (Pseudoskalare). Die Prototypen sind

$$\tilde{U}^{\kappa\lambda\mu} = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} V_{\nu} , \qquad \text{(Pseudotensor 3. Stufe)} ; \tag{1.203 a}$$

$$\tilde{T}^{\kappa\lambda} = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} V_{\mu} X_{\nu} , \qquad \text{(Pseudotensor 2. Stufe)} ; \tag{1.203 b}$$

$$A^{\kappa} = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} V_{\lambda} X_{\mu} Y_{\nu} , \qquad \text{(Pseudo- oder Axialvektor)} ; \tag{1.203 c}$$

$$P = \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} V_{\kappa} X_{\lambda} Y_{\mu} Z_{\nu} , \qquad \text{(Pseudoskalar)} . \tag{1.203 d}$$

Die letztere Bildung ist das Analogon zum dreidimensionalen Spatprodukt $\vec{V} \cdot (\vec{X} \times \vec{Y}\,)$. In diesen Formeln sind V, X, Y, Z beliebige Vierervektoren. Die Transformationsgesetze aller dieser Gebilde unterscheiden sich von denen „normaler“ Tensoren durch den zusätzlichen Faktor $\det \Lambda$; z. B. gilt für ein Axialvektorfeld

$$A'^{\kappa}(x) = (\det \Lambda)\, \Lambda^{\kappa}{}_{\lambda}\, A^{\lambda}(\Lambda^{-1} x) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, 3)\,. \tag{1.204}$$

Produkte von zwei Pseudo-Kovarianten – seien es direkte Produkte oder Kontraktionen – sind dagegen wegen $(\det \Lambda)^2 = 1$ wieder „normale“ Kovarianten. Der Prototyp ist das (achtstufige) direkte Produkt des ε-Tensors mit sich selbst; man prüft anhand der Definition (1.198) unschwer nach, dass dafür gilt

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\sum_{\Pi} (-)^{\Pi}\, \eta^{\alpha\mu_\Pi}\, \eta^{\beta\nu_\Pi}\, \eta^{\gamma\rho_\Pi}\, \eta^{\delta\sigma_\Pi}\,, \tag{1.205 a}$$

wo Π alle 24 Permutationen von (μ, ν, ρ, σ) durchläuft:

$$\Pi\,(\mu, \nu, \rho, \sigma) = (\mu_\Pi, \nu_\Pi, \rho_\Pi, \sigma_\Pi)\,. \tag{1.205 b}$$

Die in (1.205 a) auftretende Bildung ist wieder eine Determinante, nämlich

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\begin{vmatrix} \eta^{\alpha\mu} \;\ldots\ldots\; \eta^{\alpha\sigma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta^{\delta\mu} \;\ldots\ldots\; \eta^{\delta\sigma} \end{vmatrix}\,. \tag{1.206}$$

Durch stufenweise Kontraktion erhält man daraus

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon_{\alpha}{}^{\nu\rho\sigma} = -\begin{vmatrix} \eta^{\beta\nu} \;\ldots\ldots\; \eta^{\beta\sigma} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta^{\delta\nu} \;\ldots\ldots\; \eta^{\delta\sigma} \end{vmatrix}\,, \tag{1.207}$$

$$\boxed{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma} = -2\,(\eta^{\gamma\rho}\, \eta^{\delta\sigma} - \eta^{\gamma\sigma}\, \eta^{\delta\rho})}\,, \tag{1.208}$$

$$\boxed{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = -6\, \eta^{\delta\sigma}}\,, \tag{1.209}$$

und schließlich

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -4! = -24\,. \tag{1.210}$$

Dabei ist zu beachten, dass für alle $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\,\delta} \tag{1.211}$$

gilt, denn $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist von Null verschieden nur, wenn genau 3 Indizes raumartig sind, und Herunterziehen aller Indizes erzeugt daher 3 Faktoren (-1). Mit (1.210) lässt sich Gl. (1.201) umkehren zu einer Verallgemeinerung von (1.200),

$$\det \Lambda \;=\; -\frac{1}{4!}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\,\Lambda^{\beta}{}_{\nu}\,\Lambda^{\gamma}{}_{\rho}\,\Lambda^{\delta}{}_{\sigma}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\;, \tag{1.212}$$

die eine Form des Laplaceschen Entwicklungssatzes darstellt.

1.6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wie schon betont, bedarf die Maxwellsche Elektrodynamik vom relativistischen Standpunkt keiner Korrektur, sondern nur einer Formulierung, die ihre tatsächlich kovariante Natur manifest werden lässt.

a) Ladungs- und Stromdichte bilden die Quellen des elektromagnetischen Feldes; sie müssen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\,\rho\,(t,\,\vec{x}\,)}{\partial\,t} \;+\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\,(t,\,\vec{x}\,) \;=\; 0 \tag{1.213}$$

genügen. Auf mikroskopischer Ebene sind sie letztlich stets als Summen von Beiträgen einzelner Teilchen mit Ladungen q_n darstellbar: ist $\vec{x}_n\,(t)$ die Bahn des n-ten Teilchens in einem Bezugssystem Σ, so ist

$$\rho\,(t,\,\vec{x}\,) \;=\; \sum_n q_n\,\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n\,(t))\;, \tag{1.214 a}$$

$$\vec{j}\,(t,\,\vec{x}\,) \;=\; \sum_n q_n\,\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n\,(t))\,\frac{d\vec{x}_n}{dt}\;. \tag{1.214 b}$$

Diese Darstellungen erfüllen die Kontinuitätsgleichung, denn aus der Zeitableitung von (1.214 a) und

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n\,(t)) \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial\,x_n{}^i}\,\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n)\right]\frac{dx_n{}^i}{dt}$$

$$=\;-\sum_{i\,=\,1}^{3}\left[\frac{\partial}{\partial\,x^i}\,\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n)\right]\frac{dx_n{}^i}{dt} \;=\; -\vec{\nabla}\cdot\left[\delta^3\,(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n\,(t))\frac{d\vec{x}_n}{dt}\right] \tag{1.215}$$

folgt (1.213). Um zu zeigen, dass sich ρ und $\vec{j}$ gemäß

$$\boxed{\{J^{\mu}\,(x)\} \;=\; \{J^0 \;=\; c\,\rho\,(t,\,\vec{x}\,)\;,\quad \vec{J} \;=\; \vec{j}\,(t,\,\vec{x}\,)\}} \tag{1.216}$$

zu einem Separatvektorfeld, der *Viererstromdichte* J, zusammenfassen lassen, ergänzen wir $\vec{x}_n(t)$ formal durch $x_n^{\ 0}(t) = c\,t$ und schreiben (1.214 a/b) als

$$J^\mu(x) = \sum_n q_n\,\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))\,\frac{dx_n^{\ \mu}(t)}{dt}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \sum_n q_n\,\delta^4(x - x_n(t'))\,\frac{dx_n^{\ \mu}(t')}{dt'} \qquad (\mu = 1,\,2,\,3)\ . \tag{1.217 a}$$

Transformation von der Variablen t' auf den invarianten Bahnparameter τ_n (Eigenzeit des n-ten Teilchens) ergibt

$$J^\mu(x) = \sum_n q_n \int d\tau_n\,\delta^4(x - x_n(\tau_n))\,u_n^{\ \mu}(\tau_n) \tag{1.217 b}$$

in der Notation von (1.110). Die Vierergeschwindigkeiten $u_n(\tau_n)$ sind Vierervektoren, die δ-Funktionen $\delta^4(\dots)$, wie schon erläutert, Invarianten. Damit ist J^μ *Vierervektor*. Die Kontinuitätsgleichung nimmt nach Gl. (1.180) nun die manifest lorentzinvariante Form

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu(x) = 0}\ . \tag{1.218}$$

an: „der Viererstrom ist viererdivergenzfrei“. Man nennt dann J etwas salopp auch einen *„erhaltenen Strom“* (engl. conserved current).

Aus jedem Viererstromfeld (nicht nur dem elektrischen) mit der Eigenschaft (1.218) kann man eine *Gesamtladung*

$$Q = \frac{1}{c}\int d^3x\,J^0(t,\,\vec{x}\,) \tag{1.219}$$

bilden, die als Folge von (1.218) zeitunabhängig ist:

$$\frac{d\,Q}{dt} = \int d^3x\,\frac{\partial}{\partial\,x^0}\,J^0(x) = -\int d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(x) = 0 \qquad \forall\ t\ . \tag{1.220}$$

Der letzte Schluss folgt in bekannter Weise durch Umwandlung des Volumenintegrals in ein Flächenintegral über eine räumlich unendlich ferne Oberfläche mittels des Gaußschen Integralsatzes, da $\vec{J}(t,\,\vec{x}\,)$ für $|\vec{x}\,| \to \infty$ verschwindet.

Dass Q, sofern J^μ Vierervektor mit der Eigenschaft (1.218) ist, *nicht nur zeitunabhängig, sondern auch Lorentz-Skalar* ist, ist für die spezielle Form (1.214) trivial, denn dort wird

$$Q = \sum_n q_n\ , \tag{1.221}$$

eine Summe bezugssystemunabhängiger Konstanten. Um zu zeigen, dass es auch allgemein zutrifft, benutzen wir die Relation

$$\delta\,(x^0) \;=\; \frac{d}{dx^0}\,\Theta\,(x^0) \;=\; \frac{\partial}{\partial\, x^0}\,\Theta\,((e_0)_\mu\, x^\mu)\ , \tag{1.222}$$

wo $\Theta\,(z)$ die Einheits-Stufenfunktion

$$\Theta\,(z) \;=\; \begin{cases} 1 & (z\,>\,0) \\ 0 & (z\,<\,0) \end{cases} \tag{1.223}$$

und e_0 der zeitartige Basisvektor von (1.35) mit

$$\{(e_0)_\mu\} \;=\; \{1,\,0,\,0,\,0\}\ , \qquad e_0\,\cdot\,e_0 \;=\; +1 \tag{1.224}$$

ist. Dann schreibt sich (1.219) als

$$Q \;=\; \int d^4x\, J^0\,(x)\,\delta\,(x^0) \;=\; \int d^4x\, J^\mu\,(x)\,\partial_\mu\,\Theta\,(e_0\,\cdot\,x)\ . \tag{1.225}$$

Da $\int d^4x$ und $J^\mu\,\partial_\mu$ Invarianten sind, besteht der einzige Effekt einer Lorentz-Transformation $\Lambda\,\in\,\mathcal{L}^\uparrow$ in der Transformation des hier ausgezeichneten festen Vektors e_0 gemäß

$$(e_0^{'})_\mu \;=\; \Lambda_\mu^{\ \nu}\,(e_0)_\nu \;=\; \Lambda_\mu^{\ 0}\ . \tag{1.226}$$

Durch partielle Integration unter Anwendung der Viererdivergenzfreiheit (1.218) erhalten wir daher für die Änderung von Q unter Λ:

$$Q^{'}\,-\,Q \;=\; \int d^4x\,\partial_\mu\,\{J^\mu\,(x)\,[\Theta\,(e_0^{'}\,\cdot\,x)\;-\;\Theta\,(e_0\,\cdot\,x)]\}\ . \tag{1.227}$$

Dies kann nach der vierdimensionalen Version des Gaußschen Satzes in ein (dreidimensionales) Integral über eine unendlich ferne Hyperfläche in $\mathcal{M}^4$ umgewandelt werden, die etwa aus Stücken mit $t\,=\,$ const. und $|\vec{x}\,|\,\rightarrow\,\infty$ und solchen mit $|\vec{x}\,|\,=\,$ const. und $t\,\rightarrow\,\infty$ bestehe. Auf den ersteren verschwindet der Strom $J^\mu\,(t,\,\vec{x}\,)$, auf den letzteren die Differenz der Stufenfunktionen, denn für $x^0\,\rightarrow\infty$ bei festem $|\vec{x}\,|$ gilt

$$e_0^{'}\,\cdot\,x \;=\; \Lambda_0^{\ 0}\,x^0\;+\;\Lambda_m^{\ 0}\,x^m\;\rightarrow\;\Lambda_0^{\ 0}\,x^0$$

und daher

$$\Theta\,(e_0^{'}\,\cdot\,x)\;\rightarrow\;\Theta\,(x^0)\quad \text{für}\quad \Lambda\,\in\,\mathcal{L}^\uparrow\,(\text{da }\;\Lambda_0^{\ 0}\;\geq\;+1)\ . \tag{1.228}$$

Damit ist in der Tat $Q^{'}\,-\,Q\;=\;0$ unter $\Lambda\,\in\,\mathcal{L}^\uparrow$, q. e. d.

b) Feldstärkentensor und Maxwell-Gleichungen. Die weitere kovariante Umformulierung der Elektrodynamik geht zweckmäßig von den *Potentialen*

$$\Phi\,(t,\,\vec{x}\,)\;=\;\Phi\,(x)\;,\qquad \vec{A}\,(t,\,\vec{x}\,)\;=\;\vec{A}\,(x) \tag{1.229}$$

aus, die zwar (wegen ihrer bekannten Eichfreiheit) noch nicht die messbaren Feldgrößen, aber hinsichtlich ihres relativistischen Transformationsverhaltens am leichtesten einzuordnen sind. Sie erfüllen auf Grund der Maxwell-Gleichungen die inhomogenen Wellengleichungen

$$\Box\,\Phi\,(x)\;-\;\frac{\partial}{\partial\,t}\,L\,[\Phi,\,\vec{A}\,]\;=\;\frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho\,(x)\;, \tag{1.230 a}$$

$$\Box\,\vec{A}\,(x)\;+\;\vec{\nabla}\,L\,[\Phi,\,\vec{A}\,]\;=\;\mu_0\,\vec{j}\,(x) \tag{1.230 b}$$

mit dem Wellenoperator (1.176) und der Abkürzung

$$L\,[\Phi,\,\vec{A}\,]\;=\;\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,\Phi\,(x)\;+\;\vec{\nabla}\,\cdot\,\vec{A}\,(x)\;. \tag{1.231}$$

In den Gln. (1.230) lassen sich die rechten Seiten, wenn man noch (1.230 a) mit $1\,/\,c$ durchmultipliziert und $c^2\;=\;1\,/\,(\mu_0\,\varepsilon_0)$ beachtet, nach (1.216) zu dem Vierervektor $J^\mu\,(x)$ zusammenfassen; also müssen auch die linken Seiten zusammen einen Vierervektor bilden. Da $\Box$ Invariante ist und $\{\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t},\,-\vec{\nabla}\}$ den Vierervektor $\{\partial^\mu\}$ bilden, ist dies genau dann der Fall, wenn die Potentiale gemäß

$$\{A^\mu\,(x)\}\;=\;\left\{\frac{1}{c}\,\Phi\,(x),\;\vec{A}\,(x)\right\} \tag{1.232}$$

ein Vierervektorfeld, das **Viererpotential** des elektromagnetischen Feldes, bilden; dann wird

$$L\,[\Phi,\,\vec{A}\,]\;=\;L\,[A]\;=\;\partial_\mu\,A^\mu\,(x) \tag{1.233}$$

eine invariante Viererdivergenz, und die Gln. (1.230) nehmen die manifest kovariante Form

$$\boxed{\Box\,A^\mu\,(x)\;-\;\partial^\mu\,(\partial_\nu\,A^\nu\,(x))\;=\;\mu_0\,J^\mu\,(x)} \tag{1.234}$$

an. Eine Umeichung der Potentiale gemäß

$$\Phi^{'}\;=\;\Phi\;-\;\frac{\partial}{\partial\,t}\,\Lambda\,(t,\,\vec{x}\,)\;,\quad \vec{A}^{'}\;=\;\vec{A}\;+\;\vec{\nabla}\,\Lambda\,(t,\,\vec{x}\,) \tag{1.235}$$

mit einer beliebigen skalaren „Eichfunktion“ Λ lässt bekanntlich die messbaren Felder unverändert; sie stellt sich in kovarianter Schreibweise als Addition eines Vierergradienten dar:

$$A^\mu\,(x)\;\rightarrow\;A^{'\,\mu}\,(x)\;=\;A^\mu\,(x)\;-\;\partial^\mu\,\Lambda\,(x)\;. \tag{1.236}$$

Diese Eichfreiheit kann man benutzen, um A^μ vereinfachende Zusatzbedingungen, sog. Eichfixierungen, aufzuprägen, von denen die **Lorentz-Eichbedingung**

$$L[A] \equiv \partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{1.237}$$

die einzige zugleich in A^μ lineare und Poincaré-invariante ist und daher in der relativistischen Theorie bevorzugt wird. Mit ihr nehmen die Wellengleichungen eine einfache Gestalt an:

$$\Box A^\mu(x) = \mu_0 J^\mu(x) \qquad \text{(Lorentz-Eichung)}\ . \tag{1.238}$$

Die elektromagnetischen Feldstärken $\vec{E}(t, \vec{x})$ und $\vec{B}(t, \vec{x})$ sind nun aus dem Viererpotential durch Differentiationen zu gewinnen,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\ , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.239}$$

(Wir betrachten im Folgenden nur Felder und Quellen *im Vakuum*, d. h. ohne die zusätzliche Anwesenheit polarisier- oder magnetisierbarer Materie, so dass wir die Felder $\vec{D}$ und $\vec{H}$ nicht eigens zu behandeln brauchen, weil sie durch

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\ , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} \tag{1.240}$$

gegeben sind). Schreibt man etwa die x-Komponenten der Gln. (1.239) in der Form

$$E^1 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial t} = c\,(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1)\ , \tag{1.241 a}$$

$$B^1 = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^1 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)\ , \tag{1.241 b}$$

wobei $\partial^m = -\partial_m$ für $m = 1, 2, 3$ zu beachten ist, so sieht man, dass unter dem Gesichtspunkt der relativistischen Kovarianz die 6 Feldkomponenten sich zu einem antisymmetrischen Tensorfeld 2. Stufe vom Typus der Viererrotation (1.178), dem *Feldstärkentensor*

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) = -F^{\nu\mu}(x)\ , \tag{1.242}$$

zusammenfassen lassen; seine Invarianz gegen die Umeichungen (1.236) ist nach (1.179) unmittelbar klar. Im einzelnen bedeutet (1.242)

$$\frac{1}{c}E^m = F^{m\,0} = -F^{0\,m} \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{1.243 a}$$

für das elektrische und

$$B^m = -\frac{1}{2}\varepsilon^m{}_{kl}\,F^{kl} \qquad (m = 1, 2, 3) \tag{1.243 b}$$

(oder $B^1 = -F^{23}$ und zyklisch) für das magnetische Feld; dabei ist

$$\varepsilon^{mpq} = \varepsilon^{0mpq} \qquad (= \varepsilon^m{}_{pq} = -\varepsilon^{mp}{}_q) \;, \tag{1.244 a}$$

der ($\kappa = 0$)-Anteil des ε-Tensors $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ von (1.198), identisch mit dem üblichen dreidimensionalen ε-Symbol in der Konvention

$$\varepsilon^{123} = -\varepsilon_{123} = +1 \;, \tag{1.244 b}$$

und es werden k und l automatisch von 1 bis 3 summiert, so dass man etwa

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon^1{}_{kl}\,F^{kl} = \frac{1}{2}\,(\varepsilon^1{}_{23}\,F^{23} + \varepsilon^1{}_{32}\,F^{32}) = \varepsilon^{123}\,F^{23} = F^{23}$$

hat. Vollständig ausgeschrieben ist

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\,E^1 & -\frac{1}{c}\,E^2 & -\frac{1}{c}\,E^3 \\ +\frac{1}{c}\,E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ +\frac{1}{c}\,E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ +\frac{1}{c}\,E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \;; \tag{1.245}$$

und die Umkehrung von (1.243) lautet

$$F^{m\,0} = \frac{1}{c}\,E^m \;, \quad F^{kl} = \varepsilon^{kl}{}_n\,B^n \qquad (m,\,k,\,l = 1,\,2,\,3) \tag{1.246}$$

wobei für die letzte Beziehung die zu (1.208) analoge Identität für das dreidimensionale ε-Symbol,

$$\varepsilon^{kl}{}_m\,\varepsilon^m{}_{pq} = -(\delta^k{}_p\,\delta^l{}_q - \delta^l{}_p\,\delta^k{}_q) \;, \tag{1.247}$$

benutzt wurde.

Ist das elektromagnetische Feld als antisymmetrischer Lorentz-Tensor 2. Stufe identifiziert, dann müssen die Maxwellschen Gleichungen sich zu Tensor-Differentialgleichungen zusammenfassen lassen. Wir betrachten zunächst die homogenen Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\,\vec{B}}{\partial\,t} \;. \tag{1.248}$$

Die erstere lautet unter Verwendung des $F^{\mu\nu}$-Tensors

$$\begin{aligned} &\partial_1\,(-F^{23}) + \partial_2\,(-F^{31}) + \partial_3\,(-F^{12}) \\ &\qquad = -(\partial_1\,F_{23} + \partial_2\,F_{31} + \partial_3\,F_{12}) = 0 \end{aligned} \tag{1.249 a}$$

und die x-Komponente der zweiten schreibt sich

$$c\,(\partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20}) + c\,\partial_0\,(-F^{23}) \\ = -c\,(\partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{23}) = 0\ ; \tag{1.249 b}$$

für die y- und z-Komponenten erhält man Entsprechendes durch zyklische Vertauschung der Indizes (1, 2, 3). – Die zyklische Indexanordnung in diesen Gleichungen zeigt, dass man sie mittels des ε-Tensors (1.198) zusammenfassen kann zu

$$\boxed{\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\,\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) = 0 \qquad (\kappa = 0, 1, 2, 3)}\ , \tag{1.250}$$

der *kovarianten Form der homogenen Maxwell-Gleichungen.* Die Komponente $\kappa = 0$ hiervon ergibt die Quellenfreiheit von $\vec{B}$, die Komponenten $\kappa = k = 1, 2, 3$ bilden das Induktionsgesetz. Da der ε-Tensor vermöge seiner vollständigen Antisymmetrie aus dem mit ihm kontrahierten dreistufigen $\partial_\lambda F_{\mu\nu}$ den gegen Indexpermutationen antisymmetrischen Anteil herausprojiziert und dieser Anteil seinerseits – wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ – durch Aufaddieren lediglich der 3 zyklischen Indexpermutationen erhalten werden kann, lässt sich (1.250) auch in der äquivalenten Form

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0} \tag{1.251}$$

schreiben: sind λ, μ, ν alle verschieden, so ergeben sich die 4 Komponenten von (1.250); sind mindestens zwei unter ihnen gleich, so wird (1.251) wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ zur Identität. Eine noch kompaktere Schreibweise wird durch die Definition eines sog. *dualen Feldtensors*

$$\overline{F}^{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\,F_{\mu\nu} = -\overline{F}^{\lambda\kappa} \tag{1.252}$$

erreicht, der jedoch gemäß (1.203 b) genauer ein Pseudotensor ist. Mit ihm schreibt sich (1.250) einfach als das Verschwinden einer „Tensordivergenz“,

$$\partial_\lambda\,\overline{F}^{\lambda\kappa} = 0 \qquad (\kappa = 0, 1, 2, 3)\ . \tag{1.253}$$

Um auch die *inhomogenen Maxwell-Gleichungen*

$$\vec{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\,\vec{E}\,) = \rho\ , \quad \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\,(\varepsilon_0\,\vec{E}\,) = \vec{j} \tag{1.254}$$

zu einem kovarianten Naturgesetz zusammenzufassen, schreiben wir die erste von ihnen, mit $c\,\mu_0$ multipliziert, als

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0\,c\,\rho = \mu_0\,J^0 \tag{1.255 a}$$

und die x-Komponente der zweiten, mit μ_0 multipliziert, als

$$\partial_1 \underbrace{F^{11}}_{\equiv 0} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \mu_0 J^1 \ . \tag{1.255 b}$$

Dann erkennt man sie als Komponenten der kovarianten Gleichung

$$\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = \mu_0 J^\mu(x) \qquad (\mu = 0,\, 1,\, 2,\, 3)} \ , \tag{1.256}$$

deren linke Seite wieder eine „Tensordivergenz“ darstellt. Während hier der Viererstrom (1.216) als (vektorielles) Quellenfeld auftritt, ist (1.253) quellenfrei; darin spiegelt sich die empirische Tatsache, dass es in der Natur zwar bewegte elektrische Ladungen und damit einen elektrischen Viererstrom, aber keine magnetischen Monopole und damit keinen zu J^μ dualen „magnetischen Viererstrom“ gibt.

Aus der Identifikation der Felder als Vierertensor 2. Stufe ergeben sich nun sofort die *Transformationsformeln für die Feldstärkenkomponenten* bei Wechsel des Bezugssystems; sie sind im Tensor-Transformationsgesetz (1.160) enthalten:

$$F'^{\mu\nu}(\underbrace{\Lambda x}_{x'}) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}(x) \ . \tag{1.257}$$

Aufgeteilt nach „elektrischen“ ($\mu,\, \nu = m,\, 0$ mit $m = 1,\, 2,\, 3$) und „magnetischen“ ($\mu,\, \nu = m,\, n$) Komponenten lautet dies

$$\begin{aligned} F'^{m0}(x') &= (\Lambda^m{}_r \Lambda^0{}_0 - \Lambda^m{}_0 \Lambda^0{}_r) F^{r0}(x) \\ &\quad + \Lambda^m{}_r \Lambda^0{}_s F^{rs}(x) \ , \end{aligned} \tag{1.258 a}$$

$$\begin{aligned} F'^{mn}(x') &= (\Lambda^m{}_r \Lambda^n{}_0 - \Lambda^m{}_0 \Lambda^n{}_r) F^{r0}(x) \\ &\quad + \Lambda^m{}_r \Lambda^n{}_s F^{rs}(x) \ , \end{aligned} \tag{1.258 b}$$

wobei $r,\, s$ von 1 bis 3 summiert werden.

Diese Zusammenhänge sind vor allem interessant für den Fall, dass Λ eine spezielle Lorentz-Transformation ist, d. h. für die Umrechnung elektromagnetischer Feldstärken zwischen zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen. Dazu setzen wir in (1.258) $\Lambda = L(-\vec{v}_0)$ und benutzen (1.101) sowie die Beziehung

$$\varepsilon^{abc} v^b U^c = (\vec{v} \times \vec{U})^a \qquad (\vec{U} = \vec{E} \text{ oder } \vec{B}) \tag{1.259}$$

für das dreidimensionale Vektorprodukt. Dann finden wir nach elementarer Rechnung:

$$\vec{E}'(x') = (1 - \gamma_0)[\hat{v}_0 \cdot \vec{E}(x)]\,\hat{v}_0 + \gamma_0[\vec{E}(x) + \vec{v}_0 \times \vec{B}(x)] , \tag{1.260 a}$$

$$\vec{B}'(x') = (1 - \gamma_0)[\hat{v}_0 \cdot \vec{B}(x)]\,\hat{v}_0 + \gamma_0[\vec{B}(x) - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E}(x)] , \tag{1.260 b}$$

wobei $x' = L(-\vec{v}_0)\,x$ durch die Gln. (1.21) gegeben ist. Der Beobachter in Σ' misst also nur *parallel* zu $\vec{v}_0$ dieselben Feldstärkenkomponenten $E'_{\parallel}$, $B'_{\parallel}$ wie der Beobachter in Σ, während in den Richtungen *senkrecht* zu $\vec{v}_0$ die in Σ registrierten $E_{\perp}$- und $B_{\perp}$-Felder sich für ihn linear „vermischen". Dies zeigt besonders deutlich, dass die *Aufteilung des Gesamtphänomens „elektromagnetisches Feld" in „elektrischen" und „magnetischen" Anteil vom Bezugssystem abhängt*; vom relativistischen Standpunkt aus besitzen die beiden Anteile überhaupt keine eigenständige Existenz mehr.

Schließlich ist die Rückwirkung des elektromagnetischen Feldes auf seine Quellen, d. h. letztlich auf die geladenen Teilchen als Träger des Viererstroms $J^{\mu}(x)$, zu formulieren. In nichtkovarianter Form wird sie durch die bekannte *Lorentz-Kraft* beschrieben: ein Volumenelement d^3x der geladenen Materie am Ort $\vec{x}$ erfährt zur Zeit t eine Kraft $\vec{f}(x)\,d^3x$ mit $x = (t, \vec{x})$ und der Kraftdichte

$$\vec{f}(x) = \rho(x)\,\vec{E}(x) + \vec{j}(x) \times \vec{B}(x) . \tag{1.261}$$

Mit (1.245) kann etwa die x-Komponente dieser Gleichung geschrieben werden

$$\begin{aligned} f^1 &= \left(\frac{1}{c}E^1\right)(c\,\rho) + (B^3 j^2 - B^2 j^3) \\ &= F^{10} J_0 + \underbrace{F^{11}}_{\equiv 0} J_1 + F^{12} J_2 + F^{13} J_3 . \end{aligned}$$

Die 3 Komponenten von (1.261) lesen sich damit als $f^m = F^{m\nu} J_\nu$ mit $m = 1, 2, 3$, und da der letztere Ausdruck dem Transformationsverhalten nach der Raumanteil eines Vierervektors ist, liegt es nahe, ein Vierervektorfeld f zu definieren durch

$$\boxed{f^{\mu}(x) = F^{\mu\nu}(x)\,J_\nu(x)} . \tag{1.262}$$

Diese sog. **Vierer-Kraftdichte** auf das Quellensystem ist im vierdimensionalen Sinne orthogonal auf der Stromdichte, denn aus der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ folgt

$$f^{\mu} J_{\mu} = F^{\mu\nu} J_\mu J_\nu = 0 . \tag{1.263}$$

Aus dieser Beziehung in der Form

$$f^0 \, J_0 \;=\; \vec{f} \cdot \vec{j} \;=\; (\rho \, \vec{E}\,) \cdot \vec{j} \;=\; \left(\frac{1}{c} \, \vec{j} \, \cdot \, \vec{E} \right) \, J_0$$

(oder direkt aus der ($\mu \;=\; 0$)-Komponente von (1.262)) identifiziert man die 0-Komponente von f:

$$c \, f^0 \, (x) \;=\; \vec{j} \, (x) \, \cdot \, \vec{E} \, (x) \; . \tag{1.264}$$

Dies ist die **Leistungsdichte**, d. h. die Leistung des Feldes an den Quellen pro Volumenelement d^3x.

Besteht das Quellensystem gemäß den Gln. (1.214) aus geladenen Punktteilchen, dann gibt Gleichung (1.261) nach Integration über den *drei*dimensionalen Raum

$$\vec{F} \;=\; \sum_n q_n \, \{ \vec{E} \, (t, \, \vec{x}_n \, (t)) \;+\; \vec{v}_n \, (t) \;\times\; \vec{B} \, (t, \, \vec{x}_n \, (t)) \} \; . \tag{1.265}$$

Dies entspricht im Sinne von (1.133) einer Viererkraft

$$\boxed{K^\mu \;=\; q \, F^\mu_{\;\;\nu} \, (x \, (\tau)) \, \frac{dx^\nu}{d\tau}} \tag{1.266}$$

auf ein Teilchen der Ladung q, in Analogie zu (1.262). Ihre Zeit- und Raumkomponenten sind

$$K^0 \;=\; \gamma \, (v) \, q \, (\vec{E} \, \cdot \, \vec{v}\,) \;=\; \gamma \, \vec{F} \, \cdot \, \vec{v} \; , \tag{1.267 a}$$

$$\vec{K} \;=\; \gamma \, (v) \, q \, [\vec{E} \;+\; \vec{v} \;\times\; \vec{B}\,] \;=\; \gamma \, \vec{F} \; , \tag{1.267 b}$$

und die Viererorthogonalität (1.138) ist – wieder wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ – manifest.

1.7 Energie-Impuls-Tensor und Drehimpuls

a) Um die **Energie-Impuls-Bilanz** eines Gesamtsystems aus elektromagnetischem Feld und geladenen Teilchen in einer zur Kontinuitätsgleichung (1.218) analogen Form auszudrücken, gehen wir wieder von den geladenen Teilchen, abgezählt durch den Index n, aus. Sind ${p_n}^\mu \, (t)$ ihre Energie-Impuls-Vierervektoren (1.127) als Funktionen der in einem Inertialsystem Σ gezählten Zeit, so können wir in diesem System – analog zu (1.214) – dem Teilchenschwarm eine *Energie-Impuls-Dichte*

$$\frac{1}{c} \, \Theta^{\mu 0}_{\;\;\;(pt)} \, (t, \, \vec{x}\,) \;=\; \sum_n {p_n}^\mu \, (t) \, \delta^3 \, (\vec{x} \;-\; \vec{x}_n \, (t)) \tag{1.268 a}$$

und eine *Energie-Impuls-Stromdichte*

$$\Theta^{\mu l}{}_{(pt)}(t,\,\vec{x}\,) \;=\; \sum_n p_n{}^{\mu}(t)\,\delta^3(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n(t))\,\frac{dx_n{}^l}{dt} \tag{1.268 b}$$

($l \,=\, 1,\,2,\,3$) zuordnen, wobei der Index (pt) das Teilchensystem meint. Wie bei (1.217 a/b) können wir diese beiden Gln. durch Einführung von $x_n{}^0(t) \,=\, c\,t$ (für alle n) in den äquivalenten Formen

$$\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}(x) \;=\; \sum_n p_n{}^{\mu}(t)\,\delta^3(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n(t))\,\frac{dx_n{}^{\lambda}(t)}{dt} \tag{1.269}$$

oder (wegen $p_n \,=\, m_n\,u_n$)

$$\left\Vert\;\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}(x) \;=\; \sum_n m_n \int d\tau_n\,u_n{}^{\mu}(\tau_n)\,u_n{}^{\lambda}(\tau_n)\,\delta^4(x\,-\,x_n(\tau_n))\;\right\Vert \tag{1.270}$$

zusammenfassen. Die letztere Form zeigt, dass $\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}$ ein Tensor 2. Stufe, der *Energie-Impuls-Tensor des Teilchensystems*, ist und sich somit nach der Formel

$$\Theta'^{\mu\lambda}(x) \;=\; \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\Lambda^{\lambda}{}_{\kappa}\,\Theta^{\nu\kappa}(\Lambda^{-1}\,x) \tag{1.271}$$

transformiert, und zugleich, dass dieser Tensor *symmetrisch* ist:

$$\boxed{\Theta^{\lambda\mu}{}_{(pt)} \;=\; \Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}}\;. \tag{1.272}$$

Für masselose Teilchen ist (1.270) nicht direkt anwendbar; hier geht man zweckmäßiger von der auch bei $m \,=\, 0$ gültigen Beziehung (1.153) in der Form

$$p_n{}^{\mu} \;=\; E_n\,\frac{dx_n{}^{\mu}}{dt} \tag{1.273}$$

aus und schreibt (1.269) in der Form

$$\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}(x) \;=\; \sum_n \frac{p_n{}^{\mu}\,p_n{}^{\lambda}}{E_n}\,\delta^3(\vec{x}\,-\,\vec{x}_n(t))\;. \tag{1.274}$$

Um die Energie-Impuls-Bilanz des Teilchensystems aufzustellen, bildet man – wieder unter Verwendung der Beziehung (1.215) – die Tensordivergenz

$$\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,\Theta^{\mu 0}{}_{(pt)} \;+\; \sum_{l\,=\,1}^{3}\frac{\partial}{\partial\,x^l}\,\Theta^{\mu l}{}_{(pt)} \;=\; \partial_{\lambda}\,\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)} \tag{1.275 a}$$

und findet, da rechter Hand nur die Terme mit Zeitableitungen $dp_n{}^\mu \,/\, dt$ übrigbleiben,

$$\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}\,(x) \;=\; \sum_n \delta^3\,(\vec{x} \,-\, \vec{x}_n\,(t))\,\frac{dp_n{}^\mu}{dt}\;. \tag{1.275 b}$$

Die rechte Seite ergibt bei Integration über den $\mathbb{R}^3$ die Gesamtkraft ($\mu \,=\, m \,=\, 1,\, 2,\, 3$) bzw. die Gesamtleistung ($\mu \,=\, 0$) auf das Teilchensystem, stellt also insgesamt die *Vierer-Kraftdichte* f dar, wie sie für elektromagnetische Kräfte in (1.261/264) eingeführt wurde:

$$\boxed{\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}\,(x) \;=\; f^\mu\,(x)}\;. \tag{1.276}$$

Sind die Teilchen sämtlich kräftefrei, dann ist $dp_n \,/\, dt \;=\; 0$ für alle p_n, und es gilt Erhaltung von Gesamtenergie und Gesamtimpuls in der Form

$$\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)} \;=\; 0\;; \qquad \text{(Quellensystem kräftefrei)}\;. \tag{1.277}$$

Bewegen sie sich jedoch unter dem Einfluss eines elektromagnetischen Feldes $F^{\mu\nu}\,(x)$, dann ist die Vierer-Kraftdichte durch (1.262) – oder $dp_n{}^\mu \,/\, dt \;=\; \gamma\,(v_n)\,\cdot\,K_n{}^\mu$ durch Gl. (1.266) – gegeben:

$$\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}\,(x) \;=\; F^{\mu\nu}\,(x)\,J_\nu\,(x)\;. \tag{1.278}$$

Der Energie-Impuls-Tensor des Quellensystems allein ist dann, wie zu erwarten, nicht viererdivergenzfrei. Nach Ergänzung durch einen entsprechenden Tensor $\Theta_{(em)}$ für das elektromagnetische Feld sollte er jedoch für das *Gesamtsystem* diese Eigenschaft aufweisen. Dies ist in der Tat der Fall, wenn man

$$\Theta^{\mu\nu}{}_{(em)}\,(x) \;=\; \frac{1}{\mu_0}\left[F^\mu{}_\rho\,F^{\rho\nu} \;-\; \frac{1}{4}\,\eta^{\mu\nu}\,(F^{\rho\sigma}\,F_{\sigma\rho})\right] \tag{1.279}$$

als *Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes* einführt; er ist wiederum symmetrisch. Berechnung seiner Tensordivergenz ergibt

$$\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(em)} \;=\; \frac{1}{\mu_0}\left\{(\partial_\lambda\,F^\mu{}_\rho)\,F^{\rho\lambda} \;+\; F^\mu{}_\rho\,(\partial_\lambda\,F^{\rho\lambda}) \;-\; \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\lambda}\,F^{\rho\sigma}\,\partial_\lambda\,F_{\sigma\rho}\right\}\;. \tag{1.280 a}$$

Im ersten Term wird nach Indexumbenennungen

$$F^{\rho\lambda}\,(\partial_\lambda\,F_{\mu\rho}) \;=\; \frac{1}{2}\,[F^{\rho\lambda}\,\partial_\lambda\,F_{\mu\rho} \;+\; F^{\lambda\rho}\,\partial_\rho\,F_{\mu\lambda}]$$

$$=\; \frac{1}{2}\,F^{\rho\lambda}\,(\partial_\lambda\,F_{\mu\rho} \;+\; \partial_\rho\,F_{\lambda\mu} \;+\; \partial_\mu\,F_{\rho\lambda}) \;-\; \frac{1}{2}\,F^{\rho\sigma}\,\partial_\mu\,F_{\rho\sigma}\;, \tag{1.280 b}$$

und hier verschwindet der 1. Term auf Grund der homogenen Maxwell-Gleichungen (1.251), während der zweite den letzten Term von (1.280 a) kompensiert. Im mittleren Term von (1.280 a) wendet man die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (1.256) an und erhält

$$\partial_\lambda \, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(em)}\,(x) \;=\; -F^{\mu\rho}\,(x)\, J_\rho\,(x)\;. \tag{1.281}$$

Wegen (1.278) ist also der Energie-Impuls-Tensor des Gesamtsystems viererdivergenzfrei; darin drückt sich natürlich die *Erhaltung von Gesamtenergie und Gesamtimpuls* aus:

$$\boxed{\partial_\lambda \,\{\Theta^{\mu\lambda}{}_{(pt)}\,(x) \,+\, \Theta^{\mu\lambda}{}_{(em)}\,(x)\} \;=\; 0}\;. \tag{1.282}$$

Zur genaueren Interpretation von (1.279) kann man etwa die explizite Darstellung (1.245) des Feldstärkentensors heranziehen; man findet

$$(F^{\mu\rho}\,F_{\rho\nu}) \;=\; \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{c}\,\vec{E}\right)^2 & \left(\dfrac{1}{c}\,\vec{E}\,\times\,\vec{B}\right)_n \\[2ex] \left(\dfrac{1}{c}\,\vec{E}\,\times\,\vec{B}\right)^m & \begin{array}{c} -\vec{B}^{\,2}\,\delta^m_{\ n} \,-\, B^m\,B_n \\ -\,\dfrac{1}{c^2}\,E^m\,E_n \end{array} \end{pmatrix} \tag{1.283 a}$$

und daraus durch Spurbildung

$$\frac{1}{4}\,F^{\rho\sigma}\,F_{\sigma\rho} \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c}\,\vec{E}\right)^2 \,-\, \vec{B}^{\,2}\right]\;. \tag{1.283 b}$$

Damit erhält $\Theta_{(em)}$ die explizite Form

$$(\Theta_{(em)}{}^{\mu}{}_{\nu}) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\vec{E}^{\,2} \,+\, \dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^{\,2}\right) & \dfrac{1}{c}\left(\vec{E}\,\times\,\dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{B}\right)_n \\[2ex] \dfrac{1}{c}\left(\vec{E}\,\times\,\dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{B}\right)^m & \begin{array}{c} -\delta^m_{\ n}\,\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\vec{E}^{\,2} \,+\, \dfrac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^{\,2}\right) + \\ -\varepsilon_0\,E^m\,E_n \,-\, \dfrac{1}{\mu_0}\,B^m\,B_n \end{array} \end{pmatrix}\;. \tag{1.284}$$

Man erkennt in $\Theta^0{}_0$ den bekannten Ausdruck für die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes und in $\Theta^m{}_0$ (bis auf einen Faktor $1\,/\,c$) die Komponenten des Poynting-Vektors, d. h. der *Energiestromdichte*:

$$\Theta_{(em)}{}^0{}_0\,(x) \;=\; w_{(em)}\,(x)\;; \qquad \Theta_{(em)}{}^m{}_0\,(x) \;=\; \frac{1}{c}\,S^m\,(x) \tag{1.285}$$

mit $\vec{S} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$. Um die Bedeutung der räumlichen Komponenten $\Theta^m{}_n$ herauszuarbeiten, bedenkt man, dass der Poynting-Vektor $\vec{S}$ zugleich auch gemäß

$$\pi^m(x) = \frac{1}{c^2} S^m(x) \tag{1.286}$$

die *Impulsdichte* des Feldes beschreibt. Die Raumkomponenten von (1.281),

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \Theta_{(em)}{}^{m0} + \frac{\partial}{\partial x^n} \Theta_{(em)}{}^{mn} = -f^m \qquad (m = 1, 2, 3) ,$$

stellen daher die *lokale Impulsbilanz* des Feldes dar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi^m(t, \vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{T}^{(m)}_{(em)}(t, \vec{x}) = -f^m(t, \vec{x}) , \tag{1.287}$$

und somit ist $\vec{T}^{(m)}_{(em)}$ mit den Komponenten

$$\left(\vec{T}^{(m)}_{(em)}\right)^n = \Theta^{mn}_{(em)} \tag{1.288}$$

die *Stromdichte der m-Komponente des Impulses.* Aus der klassischen Kontinuumsmechanik ist die alternative Deutung von $-\vec{\nabla} \cdot \vec{T}^{(m)}$ als „innerer", nämlich von den am Volumenelement angreifenden innerer Spannungen des Mediums selbst herrührender Beitrag zur Impulsänderung dieses Volumenelements, geläufig; wegen dieser schon von Maxwell benutzten Analogie wird der dreidimensionale symmetrische Tensor

$$-\Theta^m_{(em)n} = \delta^m{}_n\, w_{(em)} + \varepsilon_0 E^m E_n + \frac{1}{\mu_0} B^m B_n \tag{1.289}$$

mit der Dimension Energie/Volumen = Kraft/Fläche = Spannung auch als *Maxwellscher Spannungstensor* des Feldes bezeichnet. Seine Spur im dreidimensionalen Sinne

$$-\Theta_{(em)}{}^m{}_m = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) = w_{(em)} , \tag{1.290}$$

gibt nochmals die Energiedichte, so dass der Vierertensor (1.284) spurfrei ist:

$$\boxed{\Theta_{(em)}{}^\mu{}_\mu = 0} . \tag{1.291}$$

Die Spur des Tensors (1.269/270) für das geladene Teilchensystem,

$$(\Theta_{(pt)}(x))^\mu{}_\mu = \sum_n m_n c^2 \int d\tau_n\, \delta^4(x - x_n(\tau_n)) , \tag{1.292}$$

(und damit auch $\Theta^{\mu}{}_{\mu}$ für das Gesamtsystem) ist dagegen Null nur an Raum-Zeit-Punkten, durch die keine Weltlinie eines massiven Teilchens verläuft; auf den Weltlinien von Teilchen mit nichtverschwindender Ruheenergie ist sie δ-Funktions-artig konzentriert.

Die in Gleichungen (1.219 - 227) gegebene Herleitung für die Gesamtladung lässt sich nun für den *Gesamtviererimpuls*

$$P^{\mu} \,=\, P^{\mu}_{(pt)} \,+\, P^{\mu}_{(em)} \,=\, \frac{1}{c} \int d^3x \, [\Theta^{\mu 0}_{(pt)}\,(x) \,+\, \Theta^{\mu 0}_{(em)}\,(x)] \tag{1.293}$$

des Systems Feld + Ladungen sinngemäß wiederholen und ergibt die *integrale Form des Erhaltungssatzes von Energie und Impuls*, nämlich dass P^{μ} konstanter Vierervektor ist:

$$dP^{\mu} \,/\, dt \,=\, 0 \qquad (\mu \,=\, 0 \ldots 3) \;. \tag{1.294}$$

b) Die Drehimpulsdichte eines Feld- oder Teilchensystems bezüglich des Koordinatenursprungs lässt sich angeben, wenn man die Impulsdichte, d. h. die Elemente $\Theta^{\mu 0} \,=\, \Theta^{0\mu}$ des Energie-Impuls-Tensors, kennt. Wir betrachten ein isoliertes Gesamtsystem – etwa das aus elektromagnetischem Feld und geladenen Teilchen – , dessen symmetrischer Θ-Tensor also „erhalten“ (divergenzfrei) ist:

$$\Theta^{\nu\mu}\,(x) \,=\, \Theta^{\mu\nu}\,(x) \;, \qquad \partial_{\lambda}\, \Theta^{\mu\lambda}\,(x) \,=\, 0 \;. \tag{1.295}$$

Aus Θ können wir den Tensor 3. Stufe

$$M^{\lambda\mu\nu}\,(x) \,=\, x^{\lambda}\, \Theta^{\mu\nu}\,(x) \,-\, x^{\mu}\, \Theta^{\lambda\nu}\,(x) \tag{1.296}$$

konstruieren, der im ersten Indexpaar antisymmetrisch ist. Wegen (1.295) ist M dann ebenfalls „erhaltener“ Tensor:

$$\partial_{\nu}\, M^{\lambda\mu\nu} \,=\, \eta^{\lambda}{}_{\nu}\, \Theta^{\mu\nu} \,-\, \eta^{\mu}{}_{\nu}\, \Theta^{\lambda\nu} \,=\, \Theta^{\mu\lambda} \,-\, \Theta^{\lambda\mu} \,=\, 0 \;. \tag{1.297}$$

Genau wie früher bei der Gesamtladung (Skalar) oder dem Gesamtviererimpuls (1.293) (Vierervektor) schließen wir daraus, dass die Größe

$$\boxed{J^{\lambda\mu} \,=\, \frac{1}{c} \int d^3x\, M^{\lambda\mu 0}\,(x) \,=\, -J^{\mu\lambda}} \tag{1.298}$$

zeitlich konstant und zugleich ein Tensor 2. Stufe ist, der *Tensor des Gesamtdrehimpulses* des Systems. Da er antisymmetrisch ist, hat er 6 unabhängige Elemente. Die 3 vollständig raumartigen Elemente

$$J^{mn} \,=\, \int d^3x \left[x^m\, \frac{1}{c}\, \Theta^{n0} \,-\, x^n\, \frac{1}{c}\, \Theta^{m0} \right] \tag{1.299 a}$$

definieren wegen (1.293) offenbar die 3 cartesischen Komponenten des *Drehimpulses* $\overline{J}$ *des Systems bezüglich des räumlichen Koordinatenursprungs*:

$$\boxed{\overline{J}^k \;=\; \frac{1}{2}\,\varepsilon^k{}_{mn}\,J^{mn} \qquad (k \;=\; 1,\,2,\,3)} \;. \tag{1.299 b}$$

Für die übrigen nichtverschwindenden Komponenten mit $(\lambda,\,\mu) \;=\; (0,\,m)$ besagt (1.298) mit (1.293)

$$\int d^3x\,x^m\,\left(\frac{1}{c}\,\Theta^{00}\right) \;=\; J^{m0} \;+\; t\,P^m \;, \tag{1.300}$$

d. h. (da J^{m0} konstant ist) der *Schwerpunkt der Energieverteilung des Systems („Energieschwerpunkt") bewegt sich gleichförmig-geradlinig mit dem konstanten Impuls* $\vec{P}$ von Gl. (1.293). Die J^{m0} als Anfangswerte dieser Schwerpunktsposition bei $t \;=\; 0$ können durch geeignete Wahl des Koordinatenursprungs zu Null gemacht werden und haben daher keine besondere physikalische Bedeutung.

Die Drehimpulsdefinition (1.298) ist stets auf einen willkürlich ausgezeichneten Bezugspunkt – hier den Koordinatenursprung – bezogen, d. h. sie enthält auch den Bahndrehimpuls des Systems bezüglich dieses Punktes. Berechnet man den Drehimpuls bezüglich eines anderen vierdimensionalen Punktes $a \;=\; \{a^\lambda\}$, d. h. führt man an den Vektoren x^λ, x^μ in (1.296) die Translationen $x^{'} \;=\; x \;-\; a$ aus, so erhält man nach (1.293)

$$J^{'\lambda\mu} \;=\; J^{\lambda\mu} \;-\; (a^\lambda\,P^\mu \;-\; P^\lambda\,a^\mu) \;. \tag{1.301}$$

Um den „inneren", durch Translation des Bezugspunktes unbeeinflussten Teil des Drehimpulses zu isolieren, bildet man für ein System mit $P_\mu\,P^\mu \;=\; M^2 \;>\; 0$ in Analogie zur Vierergeschwindigkeit (1.110) eines Massenpunktes die Vierergeschwindigkeit

$$U^\nu \;=\; \frac{P^\nu}{M} \;=\; \frac{P^\nu}{\sqrt{P_\alpha\,P^\alpha}} \tag{1.302}$$

und damit den sog. **Pauli-Lubanski-Spinvektor**

$$\boxed{S^\mu \;=\; \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu}\,J_{\rho\sigma}\,U_\nu\,/\,c} \;, \tag{1.303}$$

der natürlich ein *Pseudovektor* – vom Typ (1.203 c) – ist. Wegen $\varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu}\,P_\sigma\,U_\nu \;\propto\; \varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu}\,U_\sigma\,U_\nu \;=\; 0$ bleibt er bei der Translation (1.301) unverändert. Für ein isoliertes System, bei dem $J_{\rho\sigma}$ und P_ν zeitlich konstant sind, ist er ebenfalls erhalten:

$$dS^\mu\,/\,dt \;=\; 0 \;, \qquad (\mu \;=\; 0\,\ldots\,3) \qquad \text{(isoliertes System)} \;. \tag{1.304}$$

Von seinen vier Komponenten sind nur drei unabhängig, denn aus der Definition folgt sofort

$$U \cdot S = U_\mu S^\mu = 0 \, . \tag{1.305}$$

Insbesondere wird im „Schwerpunktsystem“ mit

$$\{P^\mu\} = \{M\,c, 0, 0, 0\} \quad \text{oder} \quad \left\{\frac{U^\mu}{c}\right\} = \{1, \vec{0}\,\} \tag{1.306}$$

offenbar

$$S^0 = 0 \, , \tag{1.307 a}$$

$$S^1 = J_{23} = \overline{J}^{\,1} \quad \text{und zyklisch} \, , \tag{1.307 b}$$

d. h. *S stellt tatsächlich den inneren Drehimpuls („Spin“) des Systems* dar.

Im vorstehenden Abriss der Speziellen Relativitätstheorie haben wir die Lichtgeschwindigkeit c stets explizit ausgeschrieben. Im Folgenden vereinfachen wir alle Formeln durch Benutzung des (*für die Relativitätstheorie) „natürlichen“ Einheitensystems, in dem* $c = 1$ ist. Dort gelten Formeln wie $x^0 = t$, $d\tau = ds$, $u^0 = 1$, $E_R = m$, $p^\mu p_\mu = m^2$, $J^0 = \rho$, $A^0 = \Phi$ oder $\Theta^{m0}_{(em)} = S^m$, usw.

2 Grundgedanken der Allgemeinen Relativitätstheorie

2.1 Äquivalenzprinzip. Bewegung im Gravitationsfeld

Dass im statischen und homogenen Erdschwerefeld bei sorgfältiger Aussschaltung aller anderen Kräfte als der Schwerkraft alle materiellen Körper, gleich welcher Masse und Zusammensetzung, „gleich schnell fallen", genauer gesagt: dieselbe konstante Beschleunigung $\vec{g}_0$ erfahren, erkannte schon Galilei (um 1600). Die spätere Newtonsche Mechanik musste dies so deuten , dass alle Körper im Erdschwerefeld eine Kraft $\vec{F} = m_G \cdot \vec{g}_0$ erfahren, deren Kopplungskonstante m_G, die sog. *schwere Masse, in strikter und universeller Proportionalität zu ihrer trägen Masse* m steht und daher bei passender Einheitenwahl dieser gleich ist. Genau dann wird nämlich nach dem Newtonschen Gesetz (1.131)

$$\vec{a} = \left(\frac{m_G}{m}\right) \cdot \vec{g}_0 = \vec{g}_0 \tag{2.1}$$

für alle Körper dasselbe. Die Gleichheit von $m_G\,/\,m$ für verschiedene Materialien wurde schon von Newton selbst durch Pendelversuche verifiziert. Das klassische Experiment hierzu ist das von Eötvös (1889), der das Verhältnis von Erdanziehung (proportional zu m_G) und Zentrifugalkraft auf Grund der Erdrotation (proportional zu m) für verschiedene Festkörper – und organische Materialien mittels einer empfindlichen Anordnung verglich und eine relative Abweichung $< 10^{-9}$ feststellte [*)] Im Newtonschen Begriffsrahmen musste die exakte Gleichheit dieser beiden ganz verschiedenen Arten von Masse jedoch eine unverstandene Kuriosität bleiben.

Für Albert Einstein (1879–1955) bildete (um 1908) einen der heuristischen Ausgangspunkte seiner Allgemeinen Relativitätstheorie die Überlegung, dass als Folge dieser erstaunlichen Gleichheit ein *homogenes und statisches* Gravitationsfeld in einem darin *„frei fallenden"* – d. h. nur diesem Schwerefeld und keinen sonstigen Kräften ausgesetzten – Laboratorium auf keine Weise nachweisbar ist. Denn die Beobachter, ihre Probekörper und Messapparate und das gesamte Laboratorium reagieren ja auf dieses Gravitationsfeld alle mit exakt derselben Beschleunigung. Ist Σ ein Inertialsystem mit Koordinaten $(t,\, \vec{x}\,)$, das etwa an der Erdoberfläche ruht, so folgen Probekörper mit Massen $m^{(i)}$ darin, solange ihre Geschwindigkeiten $\ll c$ bleiben, den Newtonschen Gleichungen

$$m^{(i)}\,\frac{d^2\,\vec{x}^{\;(i)}}{dt^2} = m_G^{(i)} \cdot \vec{g}_0 \;. \tag{2.2}$$

[*)] Vgl. etwa [1], p. 12, für Details. Zu dem noch empfindlicheren modernen Experiment von Roll, Krotkov und Dicke (1964), das für Gold- und Aluminiumkörper mit gleichem m direkt die Sonnenanziehung (!) vergleicht und eine relative Abweichung $\approx 10^{-11}$ feststellt, vgl. [2], p. 14/15

Das frei fallende Labor andererseits stellt ein gegen Σ *nichtgleichförmig* bewegtes Bezugssystem Ξ dar, dessen Koordinaten $(t^{'}, \vec{x}^{\,'})$ mit denen von Σ durch die nichtgalileische Transformation

$$\vec{x}^{\,'} = \vec{x} - \frac{1}{2}\,\vec{g}_0\,t^2\ , \qquad (t^{'} = t) \tag{2.3}$$

verknüpft sind. In diesem System haben wir wegen $m_G^{(i)} = m_i$ für alle i offenbar

$$m^{(i)}\,\frac{d^2\,\vec{x}^{\,\prime(i)}}{dt'^2} = 0\ , \tag{2.4}$$

d. h. die Probekörper bewegen sich wie in einem Inertialsystem bei Abwesenheit jeglicher Kraft, obwohl doch Ξ nach unserem bisherigen Verständnis ein nichtinertiales (weil gegen das inertiale Σ beschleunigtes) Bezugssystem ist. Die Gravitationskraft ist durch bloßen Übergang zu einem anderen Bezugssystem „wegtransformiert“ worden. Deshalb „liegt es auch vom physikalischen Standpunkt nahe, anzunehmen, dass die Systeme ... beide mit demselben Recht als „ruhend“ angesehen werden können, bzw. dass sie als Bezugssystem für die physikalische Beschreibung der Vorgänge gleichberechtigt seien. – Aus diesen Erwägungen sieht man, dass die Durchführung der allgemeinen Relativitätstheorie zugleich zu einer Theorie der Gravitation führen muss; denn man kann ein Gravitationsfeld durch bloße Änderung des Koordinatensystems *erzeugen.*“ (A. Einstein, 1916, in [0]).

Das **Prinzip der Äquivalenz von Gravitation und Trägheit** baut auf diesem gesicherten empirischen Sachverhalt auf, abstrahiert aber von seinen Besonderheiten in dreifacher Weise:

a) Offenbar ist der Schluss (2.4) nur in einem exakt statischen und homogenen Gravitationsfeld möglich. Bei zeitlich oder räumlich variabler Schwerebeschleunigung, $\vec{g} = \vec{g}\,(t, \vec{x}\,)$, statt des konstanten $\vec{g}_0$ würde das „Wegtransformieren“ der Schwerkraft durch den Bezugssystemwechsel (2.3) nicht gelingen, jedenfalls nicht „global“, d. h. für alle Punkte eines endlichen Raum-Zeit-Gebietes. „Lokal“, d. h. bei Beschränkung auf hinreichend kleine Zeitintervalle und Raumgebiete, ist es aber offenbar immer noch möglich, denn in solchen ist ja das Gravitationsfeld in sehr guter Näherung statisch und homogen, so dass Gl. (2.4) dort bei der Wahl des richtigen „lokalen“ $\vec{g}$ statt $\vec{g}_0$ in der Transformation (2.3) noch immer gilt. Ein Koordinatensystem, in dem dies zumindest für eine infinitesimale Umgebung des Weltpunktes $\{x^\mu\}$ erreicht ist, nennen wir ein **lokal inertiales** System bei x. „In analyzing physics in a local inertial frame of reference, ... one wins simplicity by foregoing every reference to what is far away. Physics is simple only when viewed locally: that is Einstein's great lesson [2].“

b) Gln. (2.2 - 2.4) gelten nur für frei fallende Massenpunkte mit $v \ll c$. Wird v mit c vergleichbar, so wird man – als natürliche Erweiterung von (2.2 -2.4) – annehmen, dass sich „lokal“ stets die speziell-relativistische Form (1.141) der kräftefreien Bewegung erreichen lässt. Genauer gesagt: für eine kleine Umgebung eines jeden Ereignisses $\{x^\mu\}$ dürfen wir erwarten, dass dort ein lokales Koordinatensystem $\{\xi^\mu\}_x$ existiert, bezüglich dessen sich frei fallende Massenpunkte nach dem Gesetz

$$\frac{d^2\,\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \qquad (\alpha = 0,\,1,\,2,\,3) \tag{2.5}$$

bewegen, wobei das Eigenzeitelement $d\tau$ längs der Weltlinie gemäß der Lorentz-Metrik zu berechnen ist, d. h.

$$\begin{gathered}(d\tau)^2 = \eta_{\alpha\beta}\,d\xi^\alpha\,d\xi^\beta = (ds)^2 \\ (\text{in kleiner Umgebung von } \{x^\mu\})\ .\end{gathered} \tag{2.6}$$

c) Schließlich wagen wir mit Einstein die weitere Verallgemeinerung, dass nicht nur die Bewegung frei fallender Teilchen (Gln. 2.5/2.6), sondern *alle* Naturgesetze, z. B. auch die des elektromagnetischen Feldes und darin sich bewegender Teilchen, und schließlich auch die Gesetze der Gravitation selbst – etwa die Relativbewegung zweier gravitierender Massen unter dem Einfluss ihrer *wechselseitigen* Schwerkraft, im Gegensatz zur Bewegung in einem von außen vorgegebenen Schwerefeld – lokal auf die speziell-relativistische Form (ohne Gravitationsfeld) gebracht werden können. Damit haben wir (über die „schwache“ Aussage nur für frei fallende Körper hinaus) die „starke“ Fassung des **Äquivalenzprinzips**:

> In einem beliebigen Gravitationsfeld kann an jedem Raum-Zeit-Punkt x ein lokal inertiales Koordinatensystem $\{\xi^\mu_x\}$ derart gewählt werden, dass für ein hinreichend kleines Raum-Zeit-Gebiet um x die Naturgesetze in Bezug auf dieses System *die speziell-relativistische Form in Abwesenheit jenes Gravitationsfeldes* annehmen.

(2.7)

Eine so weitgehende Verallgemeinerung ist natürlich durch Experimente vom Eötvösschen Typ nicht vollständig empirisch abgesichert *) und war daher zunächst ein

*) Hinsichtlich der prinzipiellen Möglichkeit und praktischen Schwierigkeit, die stärkste Aussage des Prinzips – dass „die Naturgesetze“ in (2.7) auch die der inneren Bewegung gravitierender Systeme umfasst – direkt experimentell zu überprüfen, vgl. etwa [1], p. 70.

kühner und spekulativer Schritt. Erst die Erfolge der auf ihr basierenden Einsteinschen Gravitationstheorie haben sie nachträglich gerechtfertigt.

Betrachten wir nun einen Massenpunkt, der sich unter dem Einfluss eines reinen Schwerefeldes, also „frei fallend“ bewegt. (Dies trifft z. B. recht genau für einen antriebsfrei die Erde umkreisenden Satelliten zu). In der Umgebung eines beliebigen Weltpunktes X auf seiner Weltlinie gibt es nach dem „schwachen“ Äquivalenzprinzip lokal inertiale Koordinaten $\{\xi^\alpha\}$, die genauer als $\{\xi^\alpha_X\}$ zu bezeichnen wären, derart, dass in ihnen die Bewegung durch Gl. (2.5) und (2.6) beschrieben wird. Benutzen wir nun irgend ein anderes – im Beispiel des Satelliten etwa terrestrisches – Bezugssystem Σ mit *Koordinaten $\{x^\mu\}$, die nun nicht mehr unbedingt cartesische sein müssen*, sondern auch krummlinig-orthogonale, nichtorthogonale usw. sein dürfen, so werden die „frei fallenden“ Koordinaten ξ^α Funktionen der x^μ und umgekehrt. Die Wahl der x^μ soll lediglich durch die Bedingung eingeschränkt sein, dass bei festem X die Transformation

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha_X = \xi^\alpha_X\,(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (\alpha = 0 \ldots 3) \tag{2.8}$$

lokal, d. h. am Punkt X selbst, genügend oft differenzierbar und umkehrbar eindeutig sei. Das bedeutet, dass die Funktionalmatrix

$$\Phi^\alpha{}_\mu = \frac{\partial\,\xi^\alpha}{\partial\,x^\mu} \tag{2.9 a}$$

oder in genauerer Schreibweise

$$\Phi^\alpha{}_\mu\,(X) = \left(\frac{\partial\,\xi^\alpha_X\,(x)}{\partial\,x^\mu}\right)_{x=X} \tag{2.9 b}$$

existieren und nichtverschwindende Determinante besitzen soll. Dann existiert zumindest in einer Umgebung von X die Umkehrtransformation

$$x^\mu = x^\mu\,(\xi^0_X, \xi^1_X, \xi^2_X, \xi^3_X) \qquad (\mu = 0 \ldots 3) \tag{2.10}$$

und liefert die inverse Matrix zu Φ gemäß

$$(\Phi^{-1})^\mu{}_\alpha = \frac{\partial\,x^\mu}{\partial\,\xi^\alpha} \tag{2.11 a}$$

oder wieder in genauerer Schreibweise

$$(\Phi^{-1}\,(X))^\mu{}_\alpha = \left(\frac{\partial\,x^\mu\,(\xi)}{\partial\,\xi^\alpha}\right)_{x\,(\xi)=X}\;, \tag{2.11 b}$$

d. h. es gilt

$$\det \Phi(X) = \frac{1}{\det \Phi^{-1}(X)} \neq 0 \, , \tag{2.12}$$

$$(\Phi^{-1}\,\Phi)^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{\alpha}} \cdot \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \, . \tag{2.13}$$

Ebenso sollen hinreichend viele höhere partielle Ableitungen, wie $[\partial^2 \xi^\alpha / \partial x^\mu \, \partial x^\nu]_{x=X}$, existieren. Beachte, dass diese Annahmen über die *Parametrisierbarkeit des vom Gravitationsfeld erfüllten Raum-Zeit-Gebietes* in einem Punkte sehr schwach sind: es wird nur angenommen, dass Transformationen (2.8) und (2.10) lokal existieren, *nicht* dagegen, dass eine einzige globale Transformation existiert, die für alle X zugleich das Obige leistet.

Um die frei fallende Bewegung im x-Koordinatensystem zu beschreiben, rechnet man zunächst mittels

$$d\xi^{\alpha} = (\partial \xi^{\alpha} / \partial x^{\mu}) \, dx^{\mu} \tag{2.14}$$

das Linienelement (2.6) um und findet

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x) \, dx^{\mu} \, dx^{\nu} \quad (= d\tau^2)} \, , \tag{2.15}$$

mit dem nunmehr x-abhängigen *metrischen Tensor*

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}} \, . \tag{2.16}$$

Dies ist wieder als kompakte Schreibweise für

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \xi^{\alpha}_X(x)}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}_X(x)}{\partial x^{\nu}} \right)_{x=X} \tag{2.17}$$

zu verstehen. Beachte, dass im Gegensatz zum metrischen Tensor η des $\mathcal{M}^4$ dieser allgemeinere Tensor nun auch i. a. nichtverschwindende Diagonalelemente hat. Mit der Notation (2.9) lautet (2.16) in Matrixform

$$g(X) = \Phi^T(X) \, \eta \, \Phi(X) \, , \tag{2.18 a}$$

wo Φ^T die Transponierte zu Φ ist, d. h.

$$(\Phi^T(X))_{\mu}{}^{\alpha} = \Phi^{\alpha}{}_{\mu}(X) \, . \tag{2.18 b}$$

Diese Transformation ist keine Ähnlichkeitstransformation vom Typ $M \rightarrow A^{-1} M A$ mit det $A = 0$, denn das in (2.18 a) auftretende Φ^T ist i. a. von Φ^{-1} verschieden. Man nennt (2.18 a) mit nichtsingulärem Φ, d. h. Bedingung (2.12), eine **Kongruenztransformation**. Die Eigenwerte von $g(X)$ sind daher nicht dieselben – nämlich (+1, -1, -1, -1) – wie die von η. Jedoch besagt ein Satz der linearen Algebra (*Sylvesterscher Trägheitssatz*), dass die Anzahl der positiven, der verschwindenden und der negativen Eigenwerte einer Matrix, die zusammen die sog. Signatur der Matrix darstellen, unter Kongruenzen je für sich erhalten bleibt. Unter der Voraussetzung (2.12) ist also stets

$$\boxed{\text{Signatur } g(X) = \{+, -, -, -\}}\,, \tag{2.19}$$

d. h. $g_{\mu\nu}(X)$ hat für alle X einen positiven, drei negative und keine verschwindenden Eigenwerte. Diese Aussage charakterisiert in koordinatenunabhängiger Weise die Tatsache, dass unsere Welt eine (1 + 3)-dimensionale und nicht eine (0 + 4)-dimensionale (d. h. lokal vierdimensional-euklidische) oder (2 + 2)-dimensionale usw. ist.

Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Gln. (2.8) bis (2.19) geben einen ersten Hinweis auf die mathematische Natur der Räume, die in der Gravitationstheorie zu betrachten sind. Die der Gl. (2.8) vorangehende Diskussion zeigt zunächst, dass es in ihnen möglich sein muss, von Umgebungen eines Elementes (Punktes) – mathematisch also: von offenen Teilmengen, die diesen Punkt enthalten – zu sprechen; es muss sich also um *topologische Räume* handeln. Sodann müssen sich innerhalb jeder derartigen Umgebung U die Raumpunkte durch einen Satz von n *reellen Koordinaten* x^μ (hier mit $n = 4$) eindeutig charakterisieren lassen derart, dass die x^μ sich als hinreichend oft differenzierbare (glatte) Funktionen (2.10) der cartesischen Koordinaten ξ^α einer Teilmenge eines n-dimensionalen, reellen linearen Raumes (hier des $\mathcal{M}^4$) darstellen lassen, und dass diese Abbbildung umkehrbar und ihre Umkehrung wiederum glatt ist (Gln. (2.11a), (2.8) und (2.9)). Eine umkehrbare und in beiden Richtungen glatte Abbildung wird mathematisch bekanntlich als Diffeomorphismus bezeichnet; der hier benutzte Raum ist also dadurch charakterisiert, dass er **lokal ein diffeomorphes Bild eines Stücks des $\mathcal{R}^n$** ist. Dies ist in heutiger Sprechweise der wesentliche Gehalt des „allgemeinen Begriffs einer n-fach ausgedehnten Größe“, den Bernhard Riemann (1826–1866) in seinem berühmten Göttinger Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ von 1854 an den Anfang stellte.

Wesentlich ist weiter, wie schon betont, dass es i. a. nicht möglich sein wird, *global* auf dem gesamten Raum eine einzige diffeomorphe „Koordinatisierung“ $x = x(\xi)$ zu wählen. Der Versuch, die auf einer Teilmenge U benutzte Koordinatenabbildung auf den Gesamtraum auszudehnen, wird i. a. dazu führen, das zumindest in gewissen Ausnahmepunkten oder -Mengen die Diffeomorphie – d.h. die Differenzierbarkeit oder die Umkehrbarkeit oder beides – sich als gestört erweist. Das Standardbeispiel hierfür (mit $n = 2$) ist die zweidimensionale Kugeloberfläche $\mathcal{S}^2$ im $\mathcal{R}^3$, die sich etwa durch stereografische Projektion vom Nordpol her in die Tangentialebene des Südpols *fast* vollständig diffeomorph auf einen $\mathcal{R}^2$ abbilden lässt, aber für den Nordpol selbst ist diese Abbildung nicht mehr definiert; eine Umgebung von ihm muss herausgenommen und anders (etwa durch Projektion vom Südpol her) parametrisiert werden. Man bezeichnet in Analogie zu kartografischen Abbildungen der Erdoberfläche das Paar $\{U, x\}$ mit $U =$ offene Teilmenge des Raumes und $x = \{x^\mu\} =$ dort diffeomorphe Koordinatisierung als eine *Karte*. Die Räume der Gravitationstheorie sind dann von der Art, dass sie i.a. nicht durch eine einzige Karte, aber doch durch eine endliche oder wenigstens abzählbare Menge von in der Regel einander überlappenden Karten, einen *Atlas*, überdeckbar sind. Im Überlappungsgebiet $U \cap U'$ zweier Karten $\{U, x\}$ und $\{U', x'\}$ müssen dabei, damit eine Definition glatter Funktionen auf dem *gesamten* Raum dennoch möglich bleibt, die „Koordinatenwechselfunktionen" $x' = x'(x)$ wiederum diffeomorph sein. Ein derartiger Raum – überdeckbar durch einen Atlas, dessen Karten ihn lokal diffeomorph in einen $\mathcal{R}^n$ abbilden, und mit diffeomorphen Koordinatenwechselabbildungen in den Überlappungsgebieten – wird als **differenzierbare Mannigfaltigkeit** bezeichnet.

Schließlich ist für die Gravitationstheorie erforderlich, dass auf dieser Mannigfaltigkeit eine *Metrik*, d.h. eine Entfernung zwischen je zwei Punkten des Raumes definiert werden kann, welche lokal, d.h. für infinitesimal benachbarte Punktepaare mit Koordinaten x und $x + dx$ innerhalb einer Karte, durch Gl. (2.15) mit i.a. ortsabhängiger, symmetrischer Matrix $g_{\mu\nu}(x)$ gegeben ist. (Für endliche Abstände ist sie dann durch das Minimum des Bogenlängenintegrals (2.45) unten über alle Verbindungswege der zwei Punkte gegeben). Dabei muss $g_{\mu\nu}(x)$, damit der Abstandsbegriff eine von den jeweils benutzten Koordinaten unabhängige Bedeutung erhält, bei Koordinatenwechsel $x \to x'(x)$ die weiter unten zu diskutierende „tensorielle" Transformationseigenschaft (3.11) aufweisen (*metrischer Tensor*). Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer derartigen Metrikdefinition heisst **Riemannsche Mannigfaltigkeit**; der Begriff wird freilich in der Mathematik meist eingeengt auf den Fall, dass g die Signatur $\{-,-,-,-\}$ einer euklidischen Metrik hat. Der uns interessierende Raum mit der nichtdefiniten Metrik (2.19) wird dann als *Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit* bezeichnet.

Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld. Zur Transformation der Bewegungsgleichung (2.5) schreiben wir mit dem durch (2.15) definierten $d\tau = ds$,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\,\xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\,\xi^\alpha}{\partial\,x^\mu}\,\frac{dx^\mu}{\partial\,\tau}\right)\\ &= \frac{\partial\,\xi^\alpha}{\partial\,x^\mu}\,\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\,\xi^\alpha}{\partial\,x^\mu\,\partial\,x^\nu}\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0\;,\end{aligned}$$

multiplizieren mit $\partial\,x^\lambda\,/\,\partial\,\xi^\alpha$ und verwenden Gl. (2.13). Dies ergibt die **Bewegungsgleichung des frei fallenden Teilchens**,

$$\boxed{\frac{d^2\,x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x\,(\tau))\,\frac{dx^\mu}{d\tau}\,\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}\;, \tag{2.20}$$

mit den sog. **Koeffizienten des affinen Zusammenhanges** oder kurz „dem affinen Zusammenhang“,

$$\boxed{\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x) = \frac{\partial\,x^\lambda}{\partial\,\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial^2\,\xi^\alpha}{\partial\,x^\mu\,\partial\,x^\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}}\;. \tag{2.21}$$

Auch diese Relation stellt eine kompakte Kurzschreibweise dar; genauer wäre zu schreiben

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(X) = \Phi^{-1}\,(X)^\lambda{}_\alpha\cdot\left(\frac{\partial^2\,\xi^\alpha_X\,(x)}{\partial\,x^\mu\,\partial\,x^\nu}\right)_{x\,=\,X}\;. \tag{2.22}$$

Gleichung (2.20) besagt, dass in Bezug auf Koordinatensysteme, die nicht lokal-inertialer Natur sind, die Bewegung *beschleunigt* erscheint und dass der örtliche affine Zusammenhang (zusammen mit der momentanen Vierergeschwindigkeit) die Stärke dieser Beschleunigung bestimmt. Dies ist genau die Beschleunigung, die wir in der traditionellen Auffassung dem Vorhandensein einer Schwerkraft zuschreiben, d. h. *der affine Zusammenhang beschreibt die Gravitationskraft* auf Probekörper.

Die Gleichung für die Bewegung im lokal inertialen System, (2.5), gilt auch für masselose Teilchen wie Photonen oder Neutrinos mit der Einschränkung, dass τ nicht mehr als unabhängige Variable längs der Bahn verwendet werden kann, weil ja die rechte Seite von (2.6) längs der Bahn eines solchen Teilchens lokal überall verschwindet. Anstelle von τ kann man z. B.

$$\sigma \equiv \xi^0 \tag{2.23}$$

als Bahnparameter verwenden und hat dann statt (2.5)

$$\frac{d^2\,\xi_\alpha}{d\sigma^2} = 0 \qquad (\alpha = 0\ldots 3) \tag{2.24}$$

und an Stelle von (2.6)

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0 \; . \tag{2.25}$$

Die obigen Überlegungen führen dann analog zu der Bewegungsgleichung im allgemeinen Koordinatensystem,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \left(x\left(\sigma\right)\right) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \tag{2.26}$$

und der nun nicht als Definition des Bahnparameters, sondern als Zusatzbedingung – zur Aufprägung der einem masselosen Teilchen eigentümlichen Anfangsbedingungen – fungierenden Gleichung

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0 \; . \tag{2.27}$$

Sie besagt insbesondere für die Zeit dt, die ein Photon oder Neutrino zum Durchlaufen des Intervalls $d\vec{x}$ benötigt (Koordinatenwahl mit $x^0 = t$):

$$g_{00}\left(x\right)\left(dt\right)^2 + 2\, g_{m0}\left(x\right) dx^m\, dt + g_{mn}\left(x\right) dx^m\, dx^n = 0$$

(m, n summiert von 1 bis 3) oder, nach dt aufgelöst,

$$dt = \frac{-g_{m0}\left(x\right) dx^m - \sqrt{\left(g_{m0}\, g_{n0} - g_{mn}\, g_{00}\right) dx^m\, dx^n}}{g_{00}\left(x\right)} \; . \tag{2.28}$$

Durch Integration längs eines beliebigen Weges $\{x^m\left(\sigma\right)\}$ kann daraus die *Lichtlaufzeit* längs dieses Weges ermittelt werden.

Die Kenntnis des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}\left(X\right)$ und des affinen Zusammenhanges $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\left(X\right)$ an einem Punkt X im beliebigen Koordinatensystem $\{x^\mu\}$ erlaubt es bereits, die lokal inertialen Koordinaten $\xi^\alpha_X\left(x\right)$ in einer kleinen Umgebung von X zu berechnen. Dazu multipliziert man (2.22) mit der Matrix $\Phi^\beta{}_\lambda\left(X\right)$ von Gl. (2.9 b) und erhält

$$\left(\frac{\partial^2\, \xi^\alpha_X\left(x\right)}{\partial\, x^\mu\, \partial\, x^\nu}\right)_{x\,=\,X} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\left(X\right) \left(\frac{\partial\, \xi^\alpha_X\left(x\right)}{\partial\, x^\lambda}\right)_{x\,=\,X} \; , \tag{2.29 a}$$

oder in der abgekürzten Schreibweise

$$\frac{\partial^2\, \xi^\alpha}{\partial\, x^\mu\, \partial\, x^\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{\partial\, \xi^\alpha}{\partial\, x^\lambda} \; . \tag{2.29 b}$$

Gl. (2.29) drückt die zweiten Ableitungen der ξ^α bei $x = X$ durch $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ am Ort X und die ersten Ableitungen aus. Die Potenzreihenentwicklung von $\xi^\alpha_X\left(x\right)$ um $x = X$ beginnt also mit

$$\begin{aligned}\xi^\alpha\left(x\right) = {} & a^\alpha + b^\alpha{}_\mu\left(x - X\right)^\mu \\ & + \frac{1}{2}\left(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\, b^\alpha{}_\lambda\right)\left(x - X\right)^\mu \left(x - X\right)^\nu + \dots\end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei von den Größen

$$a^\alpha = \xi^\alpha(X) , \qquad b^\alpha{}_\lambda = \left(\frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\lambda}\right)_{x=X} = \Phi^\alpha{}_\lambda \tag{2.31}$$

die ersteren als Integrationskonstanten freibleiben, die letzteren jedoch durch die aus (2.17) folgende Bedingung

$$\eta_{\alpha\beta}\, b^\alpha{}_\mu\, b^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}(X) \tag{2.32}$$

eingeschränkt sind: diese Bedingung legt die b's offenbar bis auf eine homogene Lorentz-Transformation $b^\alpha{}_\mu \rightarrow b'^\alpha{}_\mu = \Lambda^\alpha{}_\beta\, b^\beta{}_\mu$ fest. Die in (2.30) verbleibende Freiheit der Konstantenwahl ist also derart, dass

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{mit } \xi^\alpha \text{ auch } \xi'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta\, \xi^\beta + c^\alpha \\ \text{lokal inertiale Koordinaten sind ,}\end{array}} \tag{2.33}$$

d. h. die Größen $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ bestimmen die lokal inertialen Koordinaten bis auf eine Poincaré-Transformation.

2.2 Die Metrik als Gravitationspotenzial. Geodätische.

Der affine Zusammenhang als die Gravitationskraft bestimmendes Feld steht bisher noch unverbunden neben dem metrischen Tensor, der das Linienelement zwischen benachbarten Weltpunkten festlegt. Wir zeigen nun, dass Γ tatsächlich aus den Ableitungen von g berechenbar, d. h. g ein (tensorielles) „Gravitationspotenzial“ ist.

Durch Differenzieren der Definition (2.16),

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

nach x^λ erhalten wir

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda\, \partial x^\nu}\right]$$

und durch Kombination mit (2.29 b)

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \left(\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}\right) + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \left(\eta_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\, \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}\right) .$$

Im Hinblick auf (2.16) bedeutet dies

$$\frac{\partial\, g_{\mu\nu}(x)}{\partial\, x^{\lambda}} = \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\, g_{\rho\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}\, g_{\rho\mu}\ . \tag{2.34}$$

Vor der weiteren Auswertung müssen wir auf eine Komplikation eingehen, die bisher durch die kompakte Schreibweise der Gl. (2.16) verdeckt wurde. Benutzt man die genauere Schreibweise der Gl. (2.17) – mit $\xi^{\alpha}_{X}(x)$ als lokal inertialen Koordinaten am Punkt X als Funktionen der beliebigen „Laborsystem"-Koordinaten x –, so erhält man beim Bilden der Ableitung $\partial\, g_{\mu\nu}(X) / \partial\, X^{\lambda}$ zunächst Beiträge mit Faktoren des Typs $(\partial^2\, \xi^{\alpha}_{X}(x) / \partial\, x^{\lambda}\, \partial\, x^{\mu})_{x\,=\,X}$, die nach Gl. (2.29 a) durch $\Gamma(X)$ ausgedrückt und damit in der obigen, zu (2.35) führenden Weise behandelt werden können, aber auch andere Beiträge mit Faktoren des Typs

$$\left(\frac{\partial^2\, \xi^{\alpha}_{X}(x)}{\partial\, X^{\lambda}\, \partial\, x^{\mu}}\right)_{x\,=\,X}\ , \tag{2.35}$$

die daher rühren, dass die lokal-inertialen Systeme als Ganze für benachbarte Punkte X und $X' = X + dX$ geringfügig gegeneinander verschoben und verdreht sind. Solche Terme haben keine Beziehung zum affinen Zusammenhang (2.22) und stören den Schluss auf (2.34). Ihre Weglassung impliziert tatsächlich eine Verschärfung der obigen Fassung des Äquivalenzprinzips bzw. des darin auftretenden Begriffs des lokal-inertialen Koordinatensystems, die bei genauer Diskussion eigens hervorgehoben werden muss. Um sie herauszuarbeiten, gehen wir davon aus, dass der in den lokal-inertialen Koordinaten ξ^{α}_{X} selbst berechnete metrische Tensor bei X definitionsgemäß einfach $\eta_{\alpha\beta}$ lautet und gemäß Gl. (2.6) die Berechnung des Linienelements $(ds^2)_{X\,\to\,X'}$ von X zu einem infinitesimal benachbarten Punkt $X' = X + dX$ (bzw. $\xi^{\alpha}_{X} = a^{\alpha} + b^{\alpha}{}_{\mu}\, dX^{\mu}$ nach Gl. (2.30)) gestattet. Es ist nun, wenn g eine vernünftige Maßbestimmung vermitteln soll, offensichtlich zu fordern, dass die Größe dieses Linienelementes zumindest in erster Ordnung in dX unverändert bleiben muss, wenn es umgekehrt von X' aus und mittels der dort gültigen Metrik $g_{\mu\nu}(X')$ zurück nach X gemessen wird. Die *Metrik g am Punkt $X' = X + dX$, berechnet bezüglich der lokal-inertialen Koordinaten von X* (nicht, wie in (2.17), bzgl. der „Laborkoordinaten"), ist (in unvermeidlich komplizierter Notation)

$$\begin{aligned} \underset{(X)}{g_{\gamma\delta}}\,(X') &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial\, \xi^{\alpha}_{X'}(x)}{\partial\, \xi^{\gamma}_{X}(x)}\, \frac{\partial\, \xi^{\beta}_{X'}(x)}{\partial\, \xi^{\delta}_{X}(x)}\right)_{x\,=\,X'} \\ &= \eta_{\gamma\delta} + \left[\frac{\partial}{\partial\, X'^{\,\eta}}\, \underset{(X)}{g_{\gamma\delta}}\,(X')\right]_{X'\,=\,X} dX^{\eta} + \ldots \end{aligned}$$

Soll das Linienelement $(ds^2)_{X' \to X}$ zurück nach X in erster Ordnung die Größe $\eta_{\gamma\delta}\, d\xi_X^\gamma\, d\xi_X^\delta$, wie vorher in umgekehrter Richtung gemessen, behalten, so muss die eckige Klammer in (2.37) verschwinden:

$$\left[\frac{\partial}{\partial X'^{\,\eta}}\, \underset{(X)}{g_{\gamma\delta}}\,(X') \right]_{X' = X} = 0 \qquad (\eta = 0 \ldots 3)\;. \tag{2.36}$$

Wir interpretieren daher künftig das Äquivalenzprinzip (2.7) so, dass die dort *postulierten lokal-inertialen Koordinaten bei jedem Punkt X so gewählt werden können, dass der in Bezug auf sie berechnete metrische Tensor in einer Umgebung von X bei X selbst stationär ist im Sinne von (2.36)*, wobei der stationäre Wert das Minkowskische η ist.

Stellen wir die Metrik bei X' nun wieder in den beliebigen Koordinaten x statt in den ξ_X^α auf,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\,(X') &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial\, \xi^\alpha_{X'}\,(x)}{\partial\, x^\mu}\, \frac{\partial\, \xi^\beta_{X'}\,(x)}{\partial\, x^\nu} \right)_{x = X'} \\ &= \underset{(X)}{g_{\gamma\delta}}\,(X') \cdot \left(\frac{\partial\, \xi^\gamma_X\,(x)}{\partial\, x^\mu}\, \frac{\partial\, \xi^\delta_X\,(x)}{\partial\, x^\nu} \right)_{x = X'} \;, \end{aligned} \tag{2.37}$$

differenzieren nach $X'^{\,\lambda}$ und setzen dann $X' = X$, dann ergibt sich wegen (2.36) :

$$\frac{\partial\, g_{\mu\nu}\,(X)}{\partial\, X^\lambda} = \underset{(X)}{g_{\gamma\delta}}\,(X) \left\{ \frac{\partial}{\partial\, x^\lambda} \left(\frac{\partial\, \xi^\gamma_X\,(x)}{\partial\, x^\mu}\, \frac{\partial\, \xi^\delta_X\,(x)}{\partial\, x^\nu} \right) \right\}_{x = X} \;,$$

d. h. die „exotischen“ Ableitungen vom Typ (2.35) treten nicht mehr auf, und nach Anwendung von (2.29 a) ergibt sich

$$\frac{\partial\, g_{\mu\nu}\,(X)}{\partial\, X^\lambda} = \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\,(X)\, g_{\rho\nu}\,(X) + \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\,(X)\, g_{\rho\mu}\,(X)\;,$$

also in der Tat Gl. (2.34) in einem nun präzisierten Sinne. Die Stationaritätsbedingung (2.36) gestattet uns, künftig stets abgekürzt mit der kompakten Schreibweise von (2.16), (2.21) und (2.34) zu arbeiten.

Um Gl. (2.34) nach Γ aufzulösen, addiert man dieselbe Gl. mit $(\mu \leftrightarrow \lambda)$ und subtrahiert die Gl. (mit $(\nu \leftrightarrow \lambda)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda} + \frac{\partial\, g_{\lambda\nu}}{\partial\, x^\mu} - \frac{\partial\, g_{\mu\lambda}}{\partial\, x^\nu} &= g_{\rho\nu}\, \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} + g_{\rho\mu}\, \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} \\ &\quad + g_{\rho\nu}\, \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} + g_{\rho\lambda}\, \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - g_{\rho\lambda}\, \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} - g_{\rho\mu}\, \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\;. \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie von ${\Gamma^\rho}_{\mu\nu}$ in seinen beiden unteren Indizes verdoppelt rechts der dritte Term den ersten, während die übrigen sich wegheben; es bleibt

$$2\, g_{\rho\nu}\, {\Gamma^\rho}_{\lambda\mu} \;=\; \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda} + \frac{\partial\, g_{\lambda\nu}}{\partial\, x^\mu} - \frac{\partial\, g_{\mu\lambda}}{\partial\, x^\nu} \;. \tag{2.38}$$

Der metrische Tensor (2.16/17) besitzt kraft unserer Forderungen bezüglich lokaler Umkehrbarkeit der x-Parametrisierung ein Inverses $g^{\rho\sigma}(x)$, nämlich

$$g^{\rho\sigma} \;=\; \frac{\partial\, x^\rho}{\partial\, \xi^\alpha}\, \frac{\partial\, x^\sigma}{\partial\, \xi^\beta}\, \eta^{\alpha\beta} \;, \tag{2.39}$$

mit

$$g^{\rho\mu}(x)\, g_{\mu\nu}(x) \;=\; {\delta^\rho}_\nu \;=\; {\eta^\rho}_\nu \qquad \forall\, x \;. \tag{2.40}$$

Damit lässt sich (2.38) nach Γ auflösen:

$$\boxed{{\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\, g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial\, g_{\nu\kappa}}{\partial\, x^\mu} + \frac{\partial\, g_{\kappa\mu}}{\partial\, x^\nu} - \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\kappa} \right]} \;. \tag{2.41}$$

Bei gegebener Metrik kann also der affine Zusammenhang aus deren Ableitungen berechnet werden; in diesem Sinne fungiert die *Metrik als tensorielles „Potenzial“* des die Gravitationskräfte beschreibenden Feldes. Die rechter Hand in (2.41) auftretende Kombination von Ableitungen wird auch als Christoffel-Symbol $\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ bezeichnet:

$${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}(x) \;=\; \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \;. \tag{2.42}$$

Zwei wichtige Konsequenzen dieser Beziehung zwischen Γ und g sind:

a) Die Bewegung des frei fallenden Massenpunktes erhält automatisch die Form (2.15) des Linienelementes ds^2 bzw. Eigenzeitintervalles $d\tau^2$. Denn aus (2.20) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{d\tau}\, \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \;&=\; \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda} \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\, \frac{dx^\mu}{d\tau}\, \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) + \\ &+ g_{\rho\nu}\, \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2}\, \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\rho}\, \frac{dx^\mu}{d\tau}\, \frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} \\ &= \left[\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda} - g_{\rho\nu}\, {\Gamma^\rho}_{\lambda\mu} - g_{\rho\mu}\, {\Gamma^\rho}_{\lambda\nu} \right] \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau}\, \frac{dx^\mu}{d\tau}\, \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \;=\; 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

wegen (2.34). Damit ist längs der Weltlinie

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \;=\; \text{const.}\; (d\tau)^2 \;. \tag{2.44}$$

Sind also die Anfangsbedingungen so gewählt, dass (2.15) gilt, d. h. const. = 1 in (2.44) ist, dann bleibt diese Beziehung längs der ganzen Weltlinie bestehen.

b) Die Bewegungsgleichung (2.20) des frei fallenden Körpers kann als Folge einer Stationaritätsbedingung (eines *Extremal- oder Variationsprinzips*) *für die Gesamteigenzeit T bzw. Gesamtbogenlänge L* zwischen Anfangspunkt A und Endpunkt B der Weltlinie,

$$\begin{aligned} L_{BA} = \int_A^B ds \;&=\; \int_A^B dp \sqrt{\left(\frac{ds}{dp}\right)^2} \\ &= \int_{p_A}^{p_B} dp \left[g_{\mu\nu}\,(x\,(p))\, \frac{dx^\mu}{dp}\, \frac{dx^\nu}{dp}\right]^{\frac{1}{2}} \;, \end{aligned} \tag{2.45}$$

aufgefasst werden, wobei p jetzt irgend ein längs der Weltlinie monoton und differenzierbar anwachsender Bahnparameter ist. Variiert man nämlich die tatsächlich durchlaufene Bahn $\{x^\mu\,(p)\}$ infinitesimal, wobei man die Endpunkte festhält

$$x^\mu\,(p) \;\to\; x^\mu\,(p) \;+\; \delta\, x^\mu\,(p) \;, \qquad \delta\, x^\mu\,(p_A) \;=\; \delta\, x^\mu\,(p_B) \;=\; 0 \;, \tag{2.46}$$

dann ergibt sich die entsprechende Änderung der Gesamtbahnlänge als

$$\begin{aligned} \delta\, L_{BA} = \int_{p_A}^{p_B} dp\, \frac{1}{2}\, \underbrace{\left[g_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{dp}\, \frac{dx^\nu}{dp}\right]^{-\frac{1}{2}}}_{=\, dp\,/\,ds} \Bigg\{ \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\rho}\, \delta\, x^\rho\,(p)\, \frac{dx^\mu}{dp}\, \frac{dx^\nu}{dp} + \\ + 2\, g_{\mu\nu}\, \frac{dx^\mu}{dp}\, \frac{d\,(\delta\, x^\nu)}{dp} \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.47 a}$$

oder bei Transformation auf s als Integrationsvariable

$$\delta\, L_{BA} \;=\; \int_{s_A}^{s_B} ds\, \left[\frac{1}{2}\, \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\rho}\, \frac{dx^\mu}{ds}\, \frac{dx^\nu}{ds}\, \delta\, x^\rho\,(s) \;+\; g_{\lambda\rho}\, \frac{dx^\lambda}{ds}\, \frac{d\,(\delta\, x^\rho\,(s))}{ds}\right] \;.$$

Im zweiten Term rechter Hand integriert man partiell, wobei nach (2.46) die ausintegrierten Terme wegfallen:

$$\delta L_{BA} = \int_{s_A}^{s_B} ds \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \right.$$
$$\left. - g_{\rho\lambda} \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} \right] \delta x^\rho (s) \ . \qquad (2.47\ \mathrm{b})$$

Hier kann die runde Klammer im Integranden, da sie mit dem in $(\mu,\, \nu)$ symmetrischen Produkt $\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$ kontrahiert erscheint, durch

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} \right)$$

ersetzt werden; Anwendung von (2.38) ergibt nun

$$\delta L_{BA} = - \int_{s_A}^{s_B} ds \left[\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right] g_{\lambda\rho}\, \delta x^\rho (s) \ , \qquad (2.47\ \mathrm{c})$$

d. h.

$$\boxed{\delta L_{BA} = 0} \ , \qquad (2.48)$$

da längs der tatsächlich durchlaufenen Weltlinie die Bewegungsgleichung (2.20) gilt: ein frei fallender Körper bewegt sich auf derjenigen Bahn, welche die Weglänge bzw. Eigenzeitdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt zu einem Extremum (in der Regel zu einem Minimum) macht. Ein solches Bahnstück heißt die geodätische Linie oder kurz **Geodäte** (zur Metrik g) zwischen A und B.

Während im Minkowski-Raum der speziellen Relativitätstheorie, wo die Metrik (1.38) gilt, die Geodätischen durch die vierdimensionalen Geraden (1.141) gegeben sind, sind also in einem von Gravitationsfeldern erfüllten Raum-Zeit-Gebiet mit der Metrik (2.15) die Geodätischen mit den Bahnen „frei fallender“ Körper identisch, also in unserem „Labor“-Koordinatensystem $\{x^\mu\}$ räumlich gekrümmte oder zeitlich beschleunigte Bewegungen. Dies führt zu der geometrischen Vorstellung, dass in der Nähe einer starken Gravitationsquelle, etwa der Sonne, die Raum-Zeit in metrischer Hinsicht „verzerrt“ ist, etwa so, wie eine Gummiplane durch ein daraufgelegtes Gewicht örtlich verzerrt wird, und dass eine Kometen- oder Satellitenbahn, um in diesem metrisch gekrümmten Kontinuum die kürzeste Bogenlänge zu finden, zur Sonne hin gekrümmt oder beschleunigt verläuft.

Bemerkung: Die durch (2.20) und (2.15/16) gegebene Formulierung der frei fallenden Bewegung ist so allgemein, dass sie auch die vielen denkbaren Fälle umfasst, wo tatsächlich nur die kräftefreie Bewegung im $\mathcal{M}^4$ ohne jedes Gravitationsfeld beschrieben wird, (d. h. die Metrik (1.38)), aber dies wegen der Verwendung unnötig komplizierter – nämlich nicht-cartesischer – Koordinaten $\{x^\mu\}$ nicht sofort sichtbar ist. Parametrisieren wir etwa den gewöhnlichen $\mathcal{M}^4$ durch $x^0 = t$ und die räumlichen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ statt der üblichen cartesischen Koordinaten x, y, z, so lautet das Linienelement

$$ds^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + (r \sin\vartheta)^2\, d\varphi^2) \tag{2.49}$$

und daher die Metrik

$$g_{tt} = 1\,, \qquad g_{rr} = -1\,, \qquad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2\,, \qquad g_{\varphi\varphi} = -(r \sin\vartheta)^2\,, \tag{2.50}$$
$$g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta\,.$$

Da die Elemente des metrischen Tensors in diesem Koordinatensystem nicht mehr sämtlich Konstanten sind, ergeben sich nach (2.41) eine Reihe nichtverschwindender Christoffel-Symbole (Übungsaufgabe!) und damit nach (2.20) Bewegungsgleichungen, denen man nicht ohne weiteres ansieht, dass sie tatsächlich nur eine unnötig komplizierte Beschreibung der geradlinig-gleichförmigen Bewegung darstellen. Es werden also Methoden zu entwickeln sein (Kapitel 4), um systematisch zu entscheiden, ob eine Metrik oder ein affiner Zusammenhang „echt gekrümmt" oder „versteckt trivial" ist; im letzteren Falle lässt der affine Zusammenhang Γ sich durch geeignete Koordinatenwahl im *ganzen* Raum auf Null transformieren.

2.3 Der Newtonsche Grenzfall

Die obige Formulierung der Bewegung im Gravitationsfeld muss für den Grenzfall langsamer Bewegung ($|\vec{v}\,| \ll 1$) in einem *stationären* und *schwachen* Gravitationsfeld (d. h. $g_{\mu\nu}$ zeitunabhängig und nur wenig abweichend vom Minkowskischen $\eta_{\mu\nu}$) in die der Newtonschen Mechanik, die sich ja bei der Beschreibung der Planetenbewegung bewährt, übergehen. Wir wählen cartesische Koordinaten $\{x^0 = t, \vec{x}\,\}$ und nehmen an, dass

$$\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^0} = 0 \qquad (\text{alle } \mu, \nu) \tag{2.51 a}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{x}\,)\,, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \tag{2.51 b}$$

gilt. Für den affinen Zusammenhang *in erster Ordnung in h* gibt dann (2.41)

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\kappa}\left[\frac{\partial\, h_{\nu\kappa}}{\partial\, x^{\mu}} + \frac{\partial\, h_{\kappa\mu}}{\partial\, x^{\nu}} - \frac{\partial\, h_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\kappa}}\right] . \tag{2.52}$$

In die Bewegungsgleichungen (2.20) geht für langsame Bewegung, wo man

$$\left|\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right| \ll 1 \qquad \text{gegenüber} \qquad \frac{dt}{d\tau} \approx 1 \tag{2.53}$$

vernachlässigen kann, nur der Koeffizient mit $\mu = \nu = 0$ ein:

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \approx 0 , \tag{2.54}$$

wobei infolge der Stationaritätseigenschaft (2.51 a)

$$\Gamma^{\lambda}{}_{00} \approx \frac{1}{2}\,\eta^{\lambda\kappa}\left(-\frac{\partial\, h_{00}}{\partial\, x^{\kappa}}\right) \tag{2.55 a}$$

ist, d. h.

$$\Gamma^{0}{}_{00} \approx -\frac{1}{2}\frac{\partial\, h_{00}}{\partial\, t} = 0 , \tag{2.55 b}$$

$$\Gamma^{l}{}_{00} \approx +\frac{1}{2}\frac{\partial\, h_{00}}{\partial\, x^{l}} = \frac{1}{2}\,(\vec{\nabla}\, h_{00})^{l} . \tag{2.55 c}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 , \qquad \frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\,(\vec{\nabla}\, h_{00}\,(\vec{x}\,))\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 . \tag{2.56}$$

Die Lösung der ersten Gleichung ist $dt\,/d\tau = \text{const.}$, d. h. Eigenzeit und Zeit im „Labor“-System $\{t,\, \vec{x}\,\}$ sind im wesentlichen dasselbe. Dividiert man die zweite Gl. (2.56) durch das Quadrat dieser Konstanten, so erhält man

$$\boxed{\frac{d^2\,\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\,h_{00}\,(\vec{x}\,)\right)} . \tag{2.57}$$

Dies ist genau die Newtonsche Bewegungsgl. für ein Teilchen im Gravitationsfeld mit der potenziellen Energie

$$V\,(\vec{x}\,) = m_G\,\Phi\,(\vec{x}\,) , \qquad m_G = m \tag{2.58}$$

wenn man identifiziert

$$\boxed{\Phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{2}\, h_{00}(\vec{x}) \;+\; \text{const.}} \quad . \tag{2.59}$$

Das Gravitationspotenzial hat die Dimension (Länge / Zeit)^2, ist also in unserem „natürlichen“ Einheitensystem mit $c = 1$ dimensionslos. Es wird üblicherweise so normiert, dass es in großem raumartigem Abstand von den das Schwerefeld erzeugenden Massen verschwindet:

$$\Phi(\vec{x}) \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad |\vec{x}\,| \;\to\; \infty \; . \tag{2.60 a}$$

In unserer allgemeinen Formulierung korrespondiert hierzu die Forderung, dass in großem raumartigem Abstand von den gravitierenden Massen die „Verbiegung“ der Minkowski-Metrik abklingen muss, d. h.

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) \;\to\; \eta_{\mu\nu} \quad \text{oder} \quad h_{\mu\nu}(x) \;\to\; 0 \qquad (x^{\alpha}\, x_{\alpha} \;\to\; -\infty)} \quad . \tag{2.60 b}$$

Daher ist die Konstante in (2.59) Null, und es gilt in „Newtonscher Näherung“:

$$g_{00}(t,\, \vec{x}\,) \;\approx\; 1 \,+\, 2\,\Phi(\vec{x}\,) \; . \tag{2.61}$$

Als Beispiel sei an das Gravitationspotenzial im Außenraum ($|\vec{x}\,| \;\geq\; R$) einer kugelsymmetrischen Massenverteilung von endlichem Radius R und Gesamtmasse M erinnert, wie sie in guter Näherung bei Erde und Sonne gegeben ist:

$$\Phi(\vec{x}\,) \;=\; -\frac{G\,M}{r} \; , \qquad r \;\equiv\; |\vec{x}\,| \;\geq\; R \tag{2.62}$$

wobei G die *Gravitationskonstante* bezeichnet:

$$\begin{aligned} G &= 6.672 \,\cdot\, 10^{-11}\, \frac{m^3}{s^2 \,\cdot\, kg} \\ &= \left(7.425 \,\cdot\, 10^{-28}\, \frac{m}{kg}\right) \,\cdot\, c^2 \; . \end{aligned} \tag{2.63}$$

Einen Eindruck von den Größenordnungen geben folgende Beispiele: das Gravitationspotenzial Φ ist von der Ordnung

$$\approx\; 10^{-39} \text{ an der Oberfläche eines Protons,} \tag{2.64 a}$$

$$\approx\; 10^{-9} \text{ an der Oberfläche der Erde,} \tag{2.64 b}$$

$$\approx\; 10^{-6} \text{ an der Oberfläche der Sonne,} \tag{2.64 c}$$

$$\approx 10^{-4} \text{ an der Oberfläche eines Weißen Zwergsterns,} \tag{2.64 d}$$

wobei der Weiße Zwerg ein kosmisches Objekt besonders hoher Massendichte repräsentiert. Die „Verbiegung" der Metrik, d. h. Abweichung von 1 in g_{00} gemäß (2.61), ist also im allgemeinen geringfügig; insbesondere zeigt (2.64 a), warum Gravitationskräfte in der Elementarteilchenphysik kaum eine Rolle spielen.

2.4 Frequenzverschiebung im Gravitationsfeld

Eine Uhr, die in Abwesenheit von Gravitationsfeldern und in ihrem Ruhesystem mit der Periode Δt tickt, werde auf beliebiger Bahn $\{x^\mu(t)\}$ – nicht notwendig frei fallend – durch ein Gravitationsfeld bewegt. Das zeitartige Linienelement längs ihrer Bahn – in unserem Maßsystem identisch mit dem Eigenzeitelement $d\tau$ – ist im lokal inertialen Koordinatensystem $\{\xi^\alpha\}$ an jedem Weltpunkt der Uhr jeweils dasselbe wie in Abwesenheit von Gravitation, d. h.

$$[\eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta]^{\frac{1}{2}} = \Delta t \,. \tag{2.65}$$

Im beliebigen Koordinatensystem, wo während der Periode eine Koordinatenverschiebung $\{dx^\mu\}$ erfolgt, gilt daher für die Periode dt des Tickens der Uhr

$$\begin{aligned} \Delta t &= [g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu]^{\frac{1}{2}} \\ &= [g_{\mu\nu}(x)\, \frac{dx^\mu}{dt}\, \frac{dx^\nu}{dt}]^{\frac{1}{2}}\, dt \,. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Insbesondere gilt für die in Anwesenheit eines Schwerefeldes ruhende Uhr $dx^\mu/dt = \eta^\mu{}_0$ und daher

$$\boxed{\frac{\Delta t}{dt} = [g_{00}(x)]^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{2.67}$$

Es ist nicht möglich, diesen Dilatationsfaktor an *einem* Ort direkt zu messen, weil der Eichstandard, mit dem die Uhr verglichen werden muss – etwa ein elektromagnetischer Standardoszillator, auf mikroskopischer Ebene etwa ein strahlendes angeregtes Atom – durch die Anwesenheit des Schwerefeldes genau so beeinflusst wird wie die Uhr selbst.

Dagegen ist es möglich, die Dilatationsfaktoren an *zwei* verschiedenen Punkten des Gravitationsfeldes messend zu vergleichen. Sind die Standardoszillatoren 1 und 2 beide an verschiedenen Punkten eines Schwerefeldes in Ruhe, dann ist die Zeit, in der ein Feldstärkenmaximum oder -minimum von 1 nach 2 läuft, eine Konstante (gegeben durch das Integral des Ausdrucks (2.28) längs der Bahn von 1 nach 2), und zwei Maxima, die bei 2 mit dem zeitlichen Abstand

$$dt_2 \;=\; \Delta\, t \,\cdot\, [g_{00}\,(x_2)]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.68}$$

emittiert wurden, kommen auch mit diesem zeitlichen Abstand bei 1 an. Emittiert dagegen derselbe Oszillator am Punkt 1 selbst, werden seine Wellenmaxima mit dem zeitlichen Abstand

$$dt_1 \;=\; \Delta\, t \,\cdot\, [g_{00}\,(x_1)]^{-\frac{1}{2}}$$

ausgesandt und beobachtet. Für einen gegebenen Standardoszillator (z. B. atomarer Strahlungsübergang) beobachtet man daher am Punkt 1 ein Frequenzverhältnis der bei 2 ausgesandten zu der bei 1 selbst emittierten Strahlung von

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \;=\; \left[\frac{g_{00}\,(x_2)}{g_{00}\,(x_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \;. \tag{2.69}$$

Im *schwachen* Gravitationsfeld, wo (2.61) mit $\Phi \,\ll\, 1$ gilt, wird also

$$\boxed{\frac{\nu_2}{\nu_1} \;\approx\; 1 \,+\, \frac{\Delta\,\nu}{\nu} \quad \text{mit} \quad \frac{\Delta\,\nu}{\nu} \;=\; \Phi\,(x_2) \;-\; \Phi\,(x_1)} \;. \tag{2.70}$$

Zur Abschätzung der Größenordnungen wenden wir (2.70) auf Licht an, das an einem Punkt der Sonnenoberfläche (= Punkt 2) emittiert und an einem Punkt 1 auf der Erde empfangen wird. Das Gravitationspotenzial auf der Sonne ist nach (2.62)

$$\Phi_\odot \;=\; -\frac{G\,M_\odot}{R_\odot} \;, \tag{2.71 a}$$

wo $M_\odot$ und $R_\odot$ Masse und Radius der Sonne bezeichnen:

$$M_\odot \;\approx\; 1.97 \,\cdot\, 10^{30}\; kg \;, \tag{2.71 b}$$

$$R_\odot \;\approx\; 6.95 \,\cdot\, 10^{8}\; m \;. \tag{2.71 c}$$

Man erhält, in Präzisierung von (2.64 c),

$$\Phi_\odot \;\approx\; -2.12 \,\cdot\, 10^{-6} \;. \tag{2.71 d}$$

Das Potenzial $\Phi\,(x_1)$ an der Erdoberfläche ist dagegen vernachlässigbar, d. h. man erhält

$$\frac{\Delta\,\nu}{\nu} \;\approx\; -2.12 \,\cdot\, 10^{-6} \;. \tag{2.71 e}$$

Das von einem Gasatom am Sonnenrand emittierte Licht sollte also eine *gravitative Rotverschiebung* ($\Delta \nu / \nu < 0$), verglichen mit dem Licht desselben Atoms im terrestrischen Experiment, von etwa zwei Millionstel zeigen. Dieser kleine Effekt ist messtechnisch vor allem deshalb schwer zu erfassen, weil er durch die weitgehend unbekannten und überdies örtlich auf der Sonne variierenden Dopplerverschiebungen überdeckt wird. Die mit den besten Beobachtungen und Korrekturmethoden erzielten Resultate *) bestätigen (2.71 e) innerhalb etwa 10 %.

Verbesserte empirische Evidenz für die gravitative Rotverschiebung in einem *rein terrestrischen Experiment* wurde zuerst von Pound und Rebka (1969) erzielt. Die γ-Strahlung des radioaktiven ^{57}Fe-Kerns (Quantenenergie $h\nu_0 = 14.4$ keV, natürliche Linienbreite $\Gamma = h/(2\pi\tau)$ mit $\tau \approx 10^{-7}\,s$) „durchfällt" eine Höhendifferenz $\Delta z = 22.6\,m$ und wird in einem anderen Fe-Kristall resonant absorbiert. (Die resonante Absorption wird möglich durch Ausnutzung des Mößbauer-Effekts, der zu praktisch rückstoß- und dadurch energieverlustfreier Emission und Absorption der γ-Quanten führt). Die Zählrate ohne Berücksichtigung einer Frequenzverschiebung – d. h. wenn das Lorentz-Profil der Emissions- genau auf dem der Absorptionslinie liegt – sei P_0; erleidet die γ-Strahlung auf dem Weg zum Absorber eine Frequenzverschiebung $\Delta\nu$, dann verschieben sich die beiden Lorentz-Profile gegeneinander und es ergibt sich eine Verringerung der Zählrate gemäß

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (h\,\Delta\nu)^2} = \frac{P_0}{1 + (h\,\Delta\nu/\Gamma)^2}\,. \tag{2.72}$$

Nach (2.70) erwartet man als Rotverschiebung

$$\frac{\Delta\nu_G}{\nu_0} = \Phi(\Delta z) - \Phi(0) = -\left(\frac{g_0}{c^2}\right)\Delta z = -2.46 \cdot 10^{-15}\,. \tag{2.73}$$

mit $g_0 =$ Erdbeschleunigung $\approx 9.81\,m\,s^{-2}$ und damit eine Zählratenänderung um den Bruchteil $\left(\frac{\Delta\nu_G}{\nu_0}\cdot\frac{h\nu_0}{\Gamma}\right)^2 \approx 2.5 \times 10^{-5}$. Dieser winzige Effekt wurde durch einen Kunstgriff gut messbar: die Quelle wurde periodisch mit Geschwindigkeit $v_0 \cos\omega t$, $v_0 \gg |\Delta\Phi|$, auf- und abbewegt, so dass der gravitativen Verschiebung $\Delta\nu_G$ eine wesentlich größere Dopplerverschiebung $\Delta\nu_D/\nu_0 = -v_0\cos\omega t$ sich überlagerte. Das ergibt eine Zählrate mit Zeitverlauf

$$P(t) = P_0\left\{1 + \left[\frac{h}{\Gamma}(\Delta\nu_g + \Delta\nu_D)\right]^2\right\}^{-1}$$

*) Für Literaturangaben zu allen hier erwähnten Experimenten siehe etwa [1], chap. 3.

$$\approx \frac{P_0}{1 + \left(\frac{h\,\nu_0}{\Gamma}\, v_0 \cos \omega\, t\right)^2} \left\{ 1 + \frac{2 \left(\frac{\Delta\,\nu_G}{\nu_0}\right) \left(\frac{h\,\nu_0}{\Gamma}\right)^2 v_0 \cos \omega\, t}{1 + \left(\frac{h\,\nu_0}{\Gamma}\, v_0 \cos \omega\, t\right)^2} \right\} , \tag{2.74}$$

aus der $\Delta\,\nu_G\,/\,\nu_0$ durch Herausfiltern des in $\cos \omega\, t$ linearen Terms sehr viel genauer als aus (2.72) bestimmt werden kann (man misst z. B. die Asymmetrie zwischen den Gesamtzählraten in den Zeitintervallen mit $\cos \omega\, t > \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\cos \omega\, t < -\frac{1}{\sqrt{2}}$). Nach sorgfältiger Korrektur für Differenzen zwischen Emitter- und Absorberkristall bestätigen die heute genauesten Experimente dieser Art die Vorhersage (2.73) auf etwa 1 % (bisher genaueste Bestätigung eines allgemein-relativistischen Effekts).

Instruktiv ist noch eine andere Herleitung der gravitativen Rotverschiebung, die direkteren Gebrauch von dem quantentheoretischen Resultat macht, dass eine Lichtwelle der Frequenz ν als aus Photonen (Lichtquanten) der Energie $h\,\nu$ bestehend aufgefasst werden kann. In einem Gravitationsfeld mögen sich an den Punkten 1 und 2 ein Emitter bzw. ein Absorber von Photonen befinden, die „schwer" sind in dem Sinne, dass sie bei Emission bzw. Absorption praktisch keinen Rückstoß (keine kinetische Energie) aufnehmen. Beide seien nun nicht aus dem „Labor-", sondern aus einem *frei fallenden* System heraus betrachtet. Von diesem System aus gesehen ändert sich die innere Energie und damit die Ruhemasse M_1 des Emitters bei Emission eines Photons der „Labor" -Frequenz ν_1 um $-h\,\tilde{\nu}_1$, wobei nach (2.67)

$$\tilde{\nu}_1 = \frac{1}{\Delta\, t_1} \approx \frac{\nu_1}{1 + \Phi_1}$$

ist. Ebenso ändert sich für diesen frei fallenden Beobachter die innere Energie des Absorbers, an dem dasselbe Photon mit Frequenz ν_2 absorbiert wird, um $+h\,\tilde{\nu}_2$. Da er kein Gravitationsfeld und eine Minkowskische Metrik sieht, wird für ihn der Energieerhaltungssatz in der Form $\Delta\, M_1 + \Delta\, M_2 = 0$, d. h.

$$h\,\tilde{\nu}_1 = h\,\tilde{\nu}_2 \tag{2.75 a}$$

oder

$$\frac{\nu_1}{1 + \Phi_1} = \frac{\nu_2}{1 + \Phi_2} \tag{2.75 b}$$

gelten, was wieder die Gl. (2.70) ergibt. Bei dieser Herleitung wird mehr als die „schwache" Form des Äquivalenzprinzips benutzt, nämlich dass im frei fallenden System nicht nur die Bewegungsgesetze materieller Körper, sondern auch die Energie-Frequenz-Relation der Quantentheorie so gilt, als ob kein Schwerefeld vorhanden wäre.

3 Tensoranalysis im Riemannschen Raum

3.1 Allgemeines Kovarianzprinzip

Bisher haben wir die physikalischen Gesetze in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes dadurch abgeleitet, dass wir die im lokal-inertialen Koordinatensystem gültige einfache, nämlich speziell-relativistische Form mittels der Transformation (2.8) direkt ins allgemeine Koordinatensystem umrechneten. Dieses Verfahren wird bei allen über das Problem des frei fallenden Massenpunktes hinausgehenden Problemen schwerfällig. Wir verwenden künftig eine äquivalente Methode, die auf dem sog. **allgemeinen Kovarianzprinzip** basiert, einer alternativen, abstrakteren Fassung des (starken) Äquivalenzprinzips. Es besagt:

> Ein physikalisches Gesetz gilt in einem beliebigen Gravitationsfeld, wenn es
>
> a) in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes, d. h. für $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu}$ und $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) \equiv 0$, mit einem korrekten speziell-relativistischen Gesetz identisch wird, und zugleich
>
> b) „*allgemein kovariant*“ ist, d. h. seine mathematische Form unter einer allgemeinen lokal umkehrbaren Koordinatentransformation $x \to x'(x)$ unverändert bleibt

(3.1)

Gehen wir vom Äquivalenzprinzip (2.7) aus und betrachten irgend eine Gleichung, die diesen beiden Bedingungen genügt. Um ihre Gültigkeit nachzuweisen, genügt es wegen b), zu zeigen, dass sie in irgend einem speziellen Koordinatensystem richtig ist. Aber nach dem Äquivalenzprinzip gibt es an jedem Weltpunkt ein Koordinatensystem bzw. ein ganze Klasse von Systemen, nämlich die lokal-inertialen, in denen keine Gravitationswirkungen feststellbar sind. In ihnen ist wegen *a)* die Gleichung richtig. Also ist sie überhaupt, d. h. in allen Koordinatensystemen richtig.

Es ist aufschlussreich, die allgemeine Kovarianzforderung mit der der Lorentz-Kovarianz, d. h. dem Speziellen Relativitätsprinzip, zu vergleichen. Man kann eine physikalische Gleichung, die man in einem speziellen Koordinatensystem als richtig erkannt hat, stets dadurch allgemein-kovariant machen, dass man ihre in einem beliebigen Koordinatensystem $\{x^{\mu}\}$ gültige Form durch explizites Transformieren aufstellt. Geht man in der Speziellen Relativitätstheorie ebenso vor und schreibt etwa die Gleichung der unkorrigierten Newtonschen Mechanik einfach durch Anwendung einer Lorentz-Transformation auf alle auftretenden Koordinaten um, so erhält man zwar eine formell kovariante Gl., die aber die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ zwischen altem und neuem System explizit enthält. Soll die allgemeine Fassung der Gleichung – und so haben wir das spezielle Relativitätsprinzip stillschweigend verstanden – diese Geschwindigkeit *nicht* enthalten, so stellt dies eine sehr starke einschränkende Bedingung für die Ausgangsgleichung dar, der z. B. die unkorrigierten Newtonschen Gln. nicht genügen. Poincaré-Invarianz stellt, wie schon ihre Spezialfälle Rotations- und Translationsinvarianz, ein *echtes Invarianz- oder Symmetrieprinzip dar, das die mögliche Form gültiger physikalischer Gleichungen stark beschränkt.*

Im Falle der allgemein-kovariant gemachten Gl. treten ebenfalls neue, zu $\vec{v}$ analoge Größen – nämlich die Metrik $g_{\mu\nu}$ und der affine Zusammenhang ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ – auf, aber hier wird – ein ganz tiefgreifender Unterschied! – nicht gefordert, dass diese Größen tatsächlich herausfallen, und daher ergeben sich auch keine wesentlichen Einschränkungen für die Ausgangsgleichung. Vielmehr wird das Auftreten von g und Γ gerade benutzt, um die Wirkung des Gravitationsfeldes zu beschreiben. Das *allgemeine Kovarianzprinzip* ist daher keine Invarianzforderung in demselben Sinne wie die Poincaré-Invarianz, sondern letztlich nichts anderes als eine *Aussage über die Wirkungen der Gravitation*. Ein derartiges Prinzip, das formal ähnlich wie ein Invarianzprinzip aussieht, tatsächlich aber nur die Wechselwirkungen eines bestimmten Feldes – hier des Schwerefeldes – festlegt und beschreibt, wird als *„dynamische Symmetrie“* bezeichnet. Dynamische Symmetrieen treten nicht nur in der Allgemeinen Relativitätstheorie, sondern z. B. auch in der Elektrodynamik auf, wo die Form der Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit geladener Materie als Folge einer dynamischen Symmetrie, der sog. lokalen Eichinvarianz, aufgefasst werden kann (vgl. Abschnitt 3.8).

Trotz dieses begrifflichen Unterschiedes sind die formalen Hilfsmittel zur Aufstellung allgemein-kovarianter Gleichungen weitgehend analog zu denen, die zur Durchführung des speziell-relativistischen Programms dienten. Bei allgemeinen Koordinatentransformationen

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(\{x^\mu\}) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3) \tag{3.2 a}$$

mit

$$\det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^\mu}\right) \neq 0 \tag{3.2 b}$$

transformieren sich die meisten Größen von physikalischem Interesse in einer überschaubaren, multilinearen Weise als sog. *Tensoren*, jetzt freilich nicht mehr als Tensoren in $\mathcal{M}^4$ wie in Kapitel 1, sondern als Tensoren bezüglich des allgemeinen, metrisch „gekrümmten" Raumes mit der Metrik $g_{\mu\nu}$. Zur Aufstellung allgemein-kovarianter Naturgesetze sind daher die Klassifikation und die Rechenregeln dieser allgemeineren Tensoren zu betrachten.

3.2 Tensoren und Tensoralgebra

a) Tensoren. Das einfachste Transformationsverhalten ist wieder das eines *Skalars*, d. h. nunmehr einer Größe, die bei *beliebigen* Koordinatentransformationen (3.2) unverändert bleibt: $S^{'}(x^{'}) \;=\; S(x)$. Einfachste Beispiele sind reine Zahlenkonstanten, wie 1 oder π, oder universelle Naturkonstanten, wie die Elektronenladung e oder die Gravitationskonstante (2.63). Als ein weniger triviales Beispiel wird sich das Linienelement ds^2 gemäß (2.15) erweisen:

$$ds^{'2} = ds^2 \quad \text{bei} \quad x^{'} = x^{'}(x) \quad \text{gemäß (3.2)}\ . \tag{3.3}$$

Als nächstes betrachten wir den *kontravarianten Vektor (oder Tensor 1. Stufe)*, d. h. eine Größe V^μ, die sich bei (3.2) gemäß

$$V^{'\mu} \;=\; \frac{\partial\, x^{'\mu}}{\partial\, x^\nu}\, V^\nu \tag{3.4 a}$$

bzw. bei einem Vektorfeld $V^\mu(x)$ gemäß

$$V^{'\mu}(x^{'}) \;=\; \frac{\partial\, x^{'\mu}}{\partial\, x^\nu}\, V^\nu(x) \tag{3.4 b}$$

transformiert. Z. B. ergeben die Regeln der partiellen Differentiation

$$dx^{'\mu} \;=\; \frac{\partial\, x^{'\mu}}{\partial\, x^\nu}\, dx^\nu\ , \tag{3.5}$$

d. h. die Koordinatendifferentiale dx^μ bilden einen kontravarianten Vektor. Ein *kovarianter Vektor*, U_μ, transformiert sich dagegen gemäß

$$U^{'}{}_{\mu} \;=\; U_\nu\, \frac{\partial\, x^\nu}{\partial\, x^{'\mu}}\ , \tag{3.6}$$

d. h. mit der inversen Funktionalmatrix. Ist z. B. $\varphi(x)$ ein Skalarfeld, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial\, x^{'\mu}}\, \varphi^{'}(x^{'}) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial\, x^\nu}\, \varphi(x)\right) \frac{\partial\, x^\nu}{\partial\, x^{'\mu}}\ , \tag{3.7}$$

d. h. die partiellen Ableitungen eines Skalarfeldes bilden einen kovarianten Vektor.

Die Verallgemeinerung auf Tensoren höherer Stufe ist klar: ein Satz von Größen

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n} \tag{3.8}$$

bildet einen *m-fach kontravarianten und n-fach kovarianten Tensor (m + n)-ter Stufe*, wenn er sich bei (3.2) wie das Produkt von m kontra- und n kovarianten Vektoren,

$$V^{\mu_1}\,V^{\mu_2}\;\dots\;V^{\mu_m}\,U_{\nu_1}\,U_{\nu_2}\;\dots\;U_{\nu_n}\;, \tag{3.9}$$

transformiert. Z. B. gilt für einen Tensor 3. Stufe mit zwei kontravarianten und einem kovarianten Index

$$T'^{\kappa\lambda}{}_{\mu} \;=\; \frac{\partial\,x'^{\kappa}}{\partial\,x^{\rho}}\,\frac{\partial\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\sigma}}\,\frac{\partial\,x^{\nu}}{\partial\,x'^{\mu}}\,T^{\rho\sigma}{}_{\nu}\;. \tag{3.10}$$

Das wichtigste Beispiel ist die Metrik (2.16): wegen

$$\frac{\partial\,\xi^{\alpha}}{\partial\,x'^{\mu}}\,\frac{\partial\,\xi^{\beta}}{\partial\,x'^{\nu}} \;=\; \left(\frac{\partial\,\xi^{\alpha}}{\partial\,x^{\rho}}\,\frac{\partial\,x^{\rho}}{\partial\,x'^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial\,\xi^{\beta}}{\partial\,x^{\sigma}}\,\frac{\partial\,x^{\sigma}}{\partial\,x'^{\nu}}\right)$$

transformiert sie sich gemäß

$$g'_{\mu\nu}\,(x') \;=\; g_{\rho\sigma}\,(x)\,\frac{\partial\,x^{\rho}}{\partial\,x'^{\mu}}\,\frac{\partial\,x^{\sigma}}{\partial\,x'^{\nu}} \tag{3.11}$$

und ist daher ein Tensor, der (zweifach kovariante) *„metrische Tensor“*. Ebenso rechnet man nach, dass das Inverse $g^{\mu\nu}$ gemäß (2.39) sich als *doppelt kontravarianter metrischer Tensor* transformiert. Das Kroneckersymbol $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ schließlich ist auf Grund der Beziehung

$$\delta^{\rho}{}_{\sigma}\,\frac{\partial\,x'^{\mu}}{\partial\,x^{\rho}}\,\frac{\partial\,x^{\sigma}}{\partial\,x'^{\nu}} \;=\; \frac{\partial\,x'^{\mu}}{\partial\,x^{\rho}}\,\frac{\partial\,x^{\rho}}{\partial\,x'^{\nu}} \;=\; \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.12}$$

ein gemischter Tensor mit einem kontra- und einem kovarianten Index, und zwar einer, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen dieselben sind (invarianter Tensor).

Zu beachten ist, dass die bloße Schreibung einer mehrkomponentigen Größe mit gewissen oberen und unteren Indizes noch nicht automatisch einen Tensorcharakter, d. h. ein linear-homogenes Transformationsverhalten bedeutet. Z. B. zeigt sich (siehe Abschnitt 3.4), dass der *affine Zusammenhang (2.21) bzw. (2.41) kein Tensor* ist, und zwar deshalb, weil die in (2.41) eingehende gewöhnliche partielle Differentiation eines Tensors – außer im Falle (3.7) des Tensors 0. Stufe, d. h. des Skalars – *nicht* wieder einen Tensor ergibt.

Analog wie in Abschnitt 1.5 können wir nun sofort eine *größere Klasse allgemein-kovarianter Gleichungen* angeben, zu der in der Tat fast alle für die Physik bedeutungsvollen gehören: jede Gleichung zwischen zwei Tensoren derselben Stufe und mit denselben oberen und unteren Indizes – oder, anders ausgedrückt, jede Gleichung vom Typ „Tensor (3.8) = 0“ – ist allgemein kovariant, d. h. sie hat bei allgemeinen Koordinatentransformationen (3.2) in „gestrichenen“ und „ungestrichenen“ Größen dieselbe Form.

Die *algebraischen Operationen zur Bildung neuer Tensoren* aus bekannten sind dieselben wie für die $\mathcal{M}^4$-Tensoren von Abschnitt 1.5:

(1) Linearkombination mit Skalaren. Die Linearkombination zweier Tensoren desselben Typs – d. h. mit denselben kontra- und kovarianten Indizes – mit beliebigen reellen (oder auch komplexen) Konstanten oder allgemeiner mit Skalaren ist wieder ein Tensor dieses Typs; z. B. ist mit $A^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ und $B^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ auch

$$T^{\kappa\lambda}{}_{\mu} = a\,A^{\kappa\lambda}{}_{\mu} + b\,B^{\kappa\lambda}{}_{\mu} \quad (a,\, b \text{ Skalare}) \tag{3.13}$$

ein zweifach kontra- und einfach kovarianter Tensor 3. Stufe.

(2) Direkte Produktbildung. Aus dem Transformationsgesetz folgt sofort, dass die Gesamtheit der Produkte der Komponenten zweier Tensoren sich als ein Tensor transformiert, dessen kontra- bzw. kovariante Indizes aus allen kontra- bzw. kovarianten Indizes der beiden Einzeltensoren bestehen. Z. B. entsteht aus den obigen $A^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ und $B^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ gemäß

$$A^{\kappa\lambda}{}_{\mu}\,B^{\rho\sigma}{}_{\nu} = T^{\kappa\lambda\rho\sigma}{}_{\mu\nu} \tag{3.14}$$

ein vierfach kontra- und zweifach kovarianter Tensor. (Diese Konstruktion wurde in (3.9) bereits benutzt).

(3) Kontraktion (Verjüngung). Setzt man einen oberen und einen unteren Index eines Tensors gleich, so dass nach der Summenkonvention automatisch über diesen Index von 0 bis 3 summiert wird, so entsteht, wie ebenfalls sofort aus dem Transformationsgesetz zu sehen, ein Tensor ohne diese beiden Indizes, d. h. mit um 2 erniedrigter Stufe. Z. B. kann man am Tensor $T^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ von (3.10) $\lambda = \mu$ setzen; wegen

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \delta^{\nu}{}_{\sigma}$$

hat dann die Größe

$$V^{\kappa} = T^{\kappa\mu}{}_{\mu} \tag{3.15}$$

das Transformationsverhalten (3.4 a) eine kontravarianten Vektors.

Eine wichtige Kombination dieser Operationen ist – wie im $\mathcal{M}^4$ – das *Herauf- und Herunterziehen von Indizes* durch direkte Produktbildung und darauffolgende Kontraktion mit dem metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$. Ist z. B. $T^{\kappa\lambda}{}_{\mu}$ der Tensor von (3.10), dann ist

$$S^{\kappa\lambda\mu} \,=\, T^{\kappa\lambda}{}_{\nu}\, g^{\nu\mu} \tag{3.16 a}$$

ein dreifach kontravarianter und

$$R_{\kappa\lambda\mu} \,=\, g_{\kappa\rho}\, g_{\lambda\sigma}\, T^{\rho\sigma}{}_{\mu} \tag{3.16 b}$$

ein dreifach kovarianter Tensor. Die Operationen sind zueinander invers in dem Sinne, dass aufeinanderfolgendes Herauf- und Herunterziehen desselben Index wegen Gl. (2.40) wieder den ursprünglichen Tensor ergibt; so ist im Beispiel (3.16 a)

$$S^{\kappa\lambda\nu}\, g_{\nu\mu} \,=\, T^{\kappa\lambda}{}_{\rho}\, \underbrace{g^{\rho\nu}\, g_{\nu\mu}}_{\delta^{\rho}{}_{\mu}} \,=\, T^{\kappa\lambda}{}_{\mu}\ . \tag{3.17}$$

Ein gegebener Tensor mit N Indizes kann auf diese Weise in 2^N äquivalenten Formen dargestellt werden. Es ist Konvention, diese alle mit demselben Symbol zu bezeichnen und nur durch die Indexstellung zu unterscheiden, d. h. in (3.16 a) bzw. (3.16 b) $T^{\kappa\lambda\mu}$ statt $S^{\kappa\lambda\mu}$ bzw. $T_{\kappa\lambda\mu}$ statt $R_{\kappa\lambda\mu}$ zu schreiben. Eine Ausnahme macht man meist beim metrischen Tensor; hier zeigt (2.40), dass *Heraufziehen eines Index an $g_{\mu\nu}$ oder Herunterziehen eines Index an $g^{\rho\sigma}$ gerade das Kroneckersymbol* ergibt, das meist als solches (und nicht als $g^{\mu}{}_{\nu}$ oder $g_{\nu}{}^{\mu}$) geschrieben wird.

b) Tensordichten. Eine große Klasse von nicht tensorartig sich transformierenden Größen wird von den Analoga der Pseudotensoren von Abschnitt 1.5 gebildet, den sog. Tensordichten. Ein Beispiel ist die Größe

$$g\,(x) \,=\, -\det\left(g_{\mu\nu}\,(x)\right)\ , \tag{3.18}$$

die negative Determinante des doppelt kovarianten (!) metrischen Tensors. Bildet man in der Transformationsgleichung (3.11) beiderseits die Determinante, so findet man

$$g'\,(x') \,=\, \left(\det\left(\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\right)\right)^{2} g\,(x) \,=\, \left(\det\left(\frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}}\right)\right)^{-2} g\,(x)\ , \tag{3.19}$$

d. h. das Transformationsverhalten von g unterscheidet sich von dem eines Skalars durch das Auftreten der inversen zweiten Potenz der Funktionaldeterminante

$$\det\left(\frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\rho}}\right) \tag{3.20}$$

der Transformation $x \rightarrow x'$. Eine solche Größe heißt skalare Dichte vom Gewicht -2. Allgemein bezeichnet man als *Tensordichte vom Gewicht W* eine mehrkomponentige Größe, die sich wie ein Tensor transformiert bis auf das Auftreten einer W-ten Potenz der Determinante (3.20); z. B. definiert die Transformationsgleichung

$$\mathcal{T}'^{\mu}{}_{\nu}(x') = \left(\det \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)^{W} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \mathcal{T}^{\kappa}{}_{\lambda} \tag{3.21}$$

eine gemischte Tensordichte 2. Stufe vom Gewicht W. Da aus Gl. (3.19)

$$g'^{\frac{W}{2}} = \left(\det \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)^{-W} g^{\frac{W}{2}} \tag{3.22}$$

folgt, kann man (3.21) auch in der Form

$$(g'^{\frac{W}{2}} \mathcal{T}'^{\mu}{}_{\nu}) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} (g^{\frac{W}{2}} \mathcal{T}^{\kappa}{}_{\lambda}) \tag{3.23}$$

schreiben, die besagt, dass die Größe $g^{\frac{W}{2}} \times$ Tensordichte vom Gewicht W sich wie ein gewöhnlicher Tensor transformiert. Umgekehrt lässt sich *jede Tensordichte vom Gewicht W in der Form*

$$\boxed{g^{-\frac{W}{2}} \times \qquad \text{(gewöhnlicher Tensor)}} \tag{3.24}$$

darstellen.

Eine weitere wichtige Tensordichte ist wieder das *Volumenelement*, das sich nach dem bekannten Satz der Integralrechnung unter (3.2) gemäß

$$d^4x' = \left(\det \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) \cdot d^4x \,, \tag{3.25}$$

d. h. als skalare Dichte vom Gewicht $+1$, transformiert. Das Produkt einer Tensordichte vom Gewicht -1 mit d^4x ist daher ein Tensor. Die Größe

$$\sqrt{g(x)}\, d^4x \tag{3.26}$$

ist ein Skalar und wird daher als *invariantes Volumenelement* bezeichnet.

Wie in $\mathcal{M}^4$ gibt es eine Tensordichte höherer Stufe, die in allen Koordinatensystemen dieselben (konstanten) Komponenten besitzt, die ε - *oder Levi-Cività-Dichte* $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$. Sie kann in den hier betrachteten allgemeinen Räumen nur mit Bezug auf eine willkürlich gewählte, aber feste *Standardreihenfolge der Koordinaten* definiert werden, z. B. $(t,\, x,\, y,\, z)$ oder $(t,\, r,\, \vartheta,\, \varphi)$ usw. Wie in (1.198) erklärt man dann

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } (\kappa,\lambda,\mu,\nu) \text{ gerade Permutation} \\ & \text{der Standardreihenfolge,} \\ 0\,, & \text{wenn 2 oder mehr Indizes gleich,} \\ -1\,, & \text{wenn } (\kappa,\lambda,\mu,\nu) \text{ ungerade Permutation} \\ & \text{der Standardreihenfolge} \end{cases} \quad . \tag{3.27}$$

Um zu zeigen, dass ε Tensordichte ist, betrachtet man die Größe

$$\frac{\partial\, x'^{\zeta}}{\partial\, x^{\kappa}}\, \frac{\partial\, x'^{\eta}}{\partial\, x^{\lambda}}\, \frac{\partial\, x'^{\rho}}{\partial\, x^{\mu}}\, \frac{\partial\, x'^{\sigma}}{\partial\, x^{\nu}}\, \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\ ; \tag{3.28}$$

sie ist vollständig antisymmetrisch in den Indizes $(\zeta,\, \eta,\, \rho,\, \sigma)$ und daher proportional zu $\varepsilon^{\zeta\eta\rho\sigma}$. Um die Proportionalitätskonstante zu bestimmen, setzt man für $(\zeta,\, \eta,\, \rho,\, \sigma)$ die Standardreihenfolge ein; dann wird aus (3.28) gerade die Funktionaldeterminante (3.20). Also gilt

$$\varepsilon^{\zeta\eta\rho\sigma} = \left(\det \frac{\partial\, x'^{\alpha}}{\partial\, x^{\beta}}\right)^{-1} \frac{\partial\, x'^{\zeta}}{\partial\, x^{\kappa}} \cdots \frac{\partial\, x'^{\sigma}}{\partial\, x^{\nu}}\, \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\ , \tag{3.29}$$

d. h. $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ *ist Tensordichte vom Gewicht -1 mit in allen Koordinatensystemen numerisch gleichen Komponenten.* Deshalb ist auch die Größe

$$[g\,(x)]^{-\frac{1}{2}}\, \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \qquad \text{gewöhnlicher Tensor 4. Stufe}\ . \tag{3.30}$$

Beachte, dass sie, anders als $\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ selbst, von x abhängt. Dasselbe gilt für die durch Herunterziehen der Indizes gebildete vierfach kovariante Tensordichte

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(x) \;=\; g_{\alpha\kappa}\,(x)\ g_{\beta\lambda}\,(x)\ g_{\gamma\mu}\,(x)\ g_{\delta\nu}\,(x)\ \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\ . \tag{3.31}$$

Da diese in den Indizes $(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta)$ vollständig antisymmetrisch ist, muss sie proportional zu $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ sein. Setzt man für diese Indizes wieder die Standardreihenfolge ein, so stellt die linke Seite von (3.31) die Proportionalitätskonstante, die rechte die Determinante von $g_{\alpha\beta}$, d. h. $-g\,(x)$, dar. Es gilt also die wegen ihrer Indexstellung (die bei echten Tensoren unmöglich wäre) merkwürdige Gleichung

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,(x) \;=\; -g\,(x)\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\ . \tag{3.32}$$

Die algebraischen Operationen für Tensordichten sind:

(1) Linearkombinationen zweier Tensordichten *desselben Gewichtes W* und desselben Typs mit echten Skalaren; sie ergeben wieder eine Dichte dieses Gewichtes und Typs;

(2) Direkte Produktbildung zweier Tensordichten der Gewichte W_1 und W_2; sie ergibt eine Dichte vom Gewicht $W_1 + W_2$;

(3) Kontraktion von Indizes an einer Tensordichte vom Gewicht $W \geq 2$; sie ergibt eine Dichte von um 2 niedrigerer Stufe, aber mit demselben Gewicht W. – Daraus folgt insbesondere, dass Herauf- und Herunterziehen von Indizes das Gewicht einer Tensordichte nicht ändert.

3.3 Transformation des affinen Zusammenhangs

Eine wichtige Größe, die weder ein Tensor noch eine Tensordichte ist, sondern ein ganz eigentümliches *inhomogenes* (statt, wie bei Tensoren und Tensordichten, homogenes) Transformationsverhalten aufweist, ist der affine Zusammenhang (2.21):

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x^{\lambda}}{\partial\, \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\nu}} \;, \tag{3.33}$$

wobei $\{\xi^{\alpha}(x)\}$ ein lokal inertiales Koordinatensystem ist. Für $x \rightarrow x'(x)$ findet man durch direkte Umrechnung

$$\begin{aligned}
\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x'^{\mu}\, \partial\, x'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial\, x'^{\mu}} \left(\frac{\partial\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\sigma}} \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \right) \\
&= \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, \xi^{\alpha}} \left(\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}} \frac{\partial^2\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\rho}\, \partial\, x^{\sigma}} + \frac{\partial^2\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\mu}\, \partial\, x'^{\nu}} \frac{\partial\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\sigma}} \right) \\
&= \left(\frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}} \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \right) \left(\frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2\, \xi^{\alpha}}{\partial\, x^{\rho}\, \partial\, x^{\sigma}} \right) + \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \delta^{\eta}{}_{\sigma} \frac{\partial^2\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\mu}\, \partial\, x'^{\nu}} \;.
\end{aligned}$$

Im ersten Term verwendet man (3.33) und hat

$$\boxed{\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}} \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \Gamma^{\eta}{}_{\rho\sigma} + \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} \cdot \frac{\partial^2\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\mu}\, \partial\, x'^{\nu}}} \;. \tag{3.34 a}$$

Der erste Term sieht ebenso aus wie bei einem dreistufigen Tensor; der zweite, inhomogene (d. h. Γ nicht enthaltende), zerstört das tensorartige Verhalten. Wir werden noch eine andere, äquivalente Form dieses Terms benötigen, die durch Differenzieren der Identität

$$\frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}}\,\frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\nu}} \;=\; \delta^{\lambda}{}_{\nu}$$

nach x'^{μ} zu erhalten ist:

$$\frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}}\,\frac{\partial^2\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\mu}\,\partial\, x'^{\nu}} \;=\; -\frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\nu}}\left(\frac{\partial^2\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}\,\partial\, x^{\rho}}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\right)\;. \tag{3.35}$$

Damit hat man die alternative Transformationsgleichung

$$\boxed{\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} \;=\; \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}}\,\Gamma^{\eta}{}_{\rho\sigma} \;-\; \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}}\,\frac{\partial^2\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\rho}\,\partial\, x^{\sigma}}}\;. \tag{3.34 b}$$

In beiden Formen ist die Symmetrie von Γ in den beiden unteren Indizes manifest.

Die Beziehung (2.41/42) für den Zusammenhang zwischen Γ und g lässt sich bei Kenntnis dieses Transformationsverhaltens sehr elegant durch ein tensoranalytisches Argument begründen. Wir betrachten das Transformationsverhalten des Christoffel-Symbols

$$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}\left[\frac{\partial\, g_{\kappa\nu}}{\partial\, x^{\mu}} + \frac{\partial\, g_{\kappa\mu}}{\partial\, x^{\nu}} - \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\kappa}}\right]\;. \tag{3.36}$$

Dazu berechnen wir

$$\frac{\partial\, g'_{\mu\nu}}{\partial\, x'^{\kappa}} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, x'^{\kappa}}\left(g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}}\right)$$

$$= \frac{\partial\, g_{\rho\sigma}}{\partial\, x^{\eta}}\left(\frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\kappa}}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}}\right) + g_{\rho\sigma}\left(\frac{\partial^2\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\kappa}\,\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} + \frac{\partial^2\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\kappa}\,\partial\, x'^{\nu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\mu}}\right) \tag{3.37 a}$$

und daraus durch Hinzunahme der Permutationen $\kappa \leftrightarrow \mu$, $\kappa \leftrightarrow \nu$:

$$\frac{\partial\, g'_{\kappa\nu}}{\partial\, x'^{\mu}} + \frac{\partial\, g'_{\kappa\mu}}{\partial\, x'^{\nu}} - \frac{\partial\, g'_{\mu\nu}}{\partial\, x'^{\kappa}} \;=\; \left(\frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\kappa}}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\, g_{\eta\sigma}}{\partial\, x^{\rho}} + \frac{\partial\, g_{\eta\rho}}{\partial\, x^{\sigma}} - \frac{\partial\, g_{\rho\sigma}}{\partial\, x^{\eta}}\right) + 2\,g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial^2\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}\,\partial\, x'^{\nu}}\,\frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\kappa}}\;. \tag{3.37 b}$$

Dies zeigt nebenbei, dass die partiellen Ableitungen eines Tensors *nicht*, wie im $\mathcal{M}^4$, als Tensor der nächsthöheren Stufe transformieren. – Kontrahiert man nun (3.37 b) mit $\frac{1}{2}\, g'^{\lambda\kappa}$ und benutzt die kontravariante Version von (3.11) in der Form

$$g'^{\lambda\kappa}\, \frac{\partial\, x^{\eta}}{\partial\, x'^{\kappa}} = g^{\zeta\eta}\, \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\zeta}}\ , \tag{3.38}$$

so erhält man für das Symbol (3.35)

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}' = \left(\frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\zeta}}\, \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\, \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \right) \left\{ \begin{matrix} \zeta \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\} + \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\rho}}\, \frac{\partial^2\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}\, \partial\, x'^{\nu}}\ . \tag{3.39}$$

Der vom tensoriellen Transformationsgesetz abweichende zweite Term ist, wie ein Blick auf (3.34 a) zeigt, derselbe wie bei ${\Gamma'}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$; die Differenz der beiden Größen ist daher ein dreistufiger Tensor

$${\Gamma'}^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\,\nu \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}}\, \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\mu}}\, \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\nu}} \left[\Gamma^{\eta}{}_{\rho\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \rho\,\sigma \end{matrix} \right\} \right] . \tag{3.40}$$

Nun existieren aber nach dem Äquivalenzprinzip Koordinatensysteme, nämlich die lokal inertialen, in denen keine Gravitationswirkungen feststellbar sind, d. h. $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \equiv 0$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{const.}$, also $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\,\nu \end{smallmatrix} \right\} \equiv 0$. Da (3.40) somit in diesen Koordinatensystemen verschwindet und zugleich ein Tensor ist, verschwindet es in *allen* Systemen, womit (2.42) bewiesen ist.

Eine verwandte Anwendung des Transformationsgesetzes von Γ betrifft die linke Seite der Bewegungsgleichung (2.20) im Gravitationsfeld. Für den Beschleunigungsterm gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2\, x'^{\lambda}}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\kappa}}\, \frac{dx^{\kappa}}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\kappa}}\, \frac{d^2\, x^{\kappa}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\kappa}\, \partial\, x^{\sigma}} \left(\frac{dx^{\kappa}}{d\tau}\, \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \right)\ , \end{aligned} \tag{3.41 a}$$

während für den Γ-Term aus der Form (3.34 b) des Transformationsgesetzes folgt :

$$\begin{aligned} {\Gamma'}^{\lambda}{}_{\mu\nu}\, \frac{dx'^{\mu}}{d\tau}\, \frac{dx'^{\nu}}{d\,\tau} = \frac{\partial\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\eta}} & \left(\Gamma^{\eta}{}_{\rho\sigma}\, \frac{dx^{\rho}}{d\tau}\, \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \right) \\ & - \frac{\partial^2\, x'^{\lambda}}{\partial\, x^{\rho}\, \partial\, x^{\sigma}} \left(\frac{dx^{\rho}}{d\tau}\, \frac{dx^{\sigma}}{d\tau} \right)\ . \end{aligned} \tag{3.41 b}$$

Addition der beiden Gln. zeigt, dass die linke Seite von (2.20) sich als Vektor transformiert:

$$\left(\delta^{\lambda}{}_{\mu}\,\frac{d}{d\tau} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\right)\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = (\text{Vektor})^{\lambda}\ . \tag{3.42}$$

Damit erkennen wir die *Bewegungsgleichung (2.20) als allgemein-kovariantes Naturgesetz.* – Die Feststellung (3.42) leitet zur Begriffsbildung des nächsten Abschnitts über.

3.4 Begriff der kovarianten Ableitung

a) Definition – Wie am Beispiel der Gl. (3.37 a) gezeigt, ergibt partielle Differentiation eines Tensorfeldes im allgemeinen (außer im Falle (3.7) des Skalarfeldes) nicht wieder einen Tensor. Ist $V^{\mu}(x)$ ein kontravarianter Vektor, so folgt aus seinem Transformationsgesetz

$$V'^{\mu} = \frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\, V^{\nu}$$

durch Differentiation nach x'^{λ}:

$$\frac{\partial}{\partial\, x'^{\lambda}}\, V'^{\mu} = \frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\,\frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\left(\frac{\partial}{\partial\, x^{\kappa}}\, V^{\nu}\right) + \frac{\partial^2\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}\,\partial\, x^{\rho}}\,\frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\lambda}}\, V^{\nu}\ . \tag{3.43}$$

Der erste Term hat wieder die Form, die man erwarten würde, wenn $(\partial\,/\,\partial\, x'^{\lambda})\, V'^{\mu}$ ein Tensor 2. Stufe wäre; der 2. Term stört dieses Transformationsverhalten. Wir können jedoch aus (3.43) einen Tensor konstruieren, wenn wir es mit der aus (3.34 b) folgenden Beziehung

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho}\, V'^{\rho} &= \left(\frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\,\frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\,\frac{\partial\, x^{\tau}}{\partial\, x'^{\rho}}\,\Gamma^{\nu}{}_{\kappa\tau} - \right.\\ &\quad \left. - \frac{\partial^2\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\kappa}\,\partial\, x^{\tau}}\,\frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\,\frac{\partial\, x^{\tau}}{\partial\, x'^{\rho}}\right)\frac{\partial\, x'^{\rho}}{\partial\, x^{\sigma}}\, V^{\sigma}\\ &= \frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\,\frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\,(\Gamma^{\nu}{}_{\kappa\sigma}\, V^{\sigma}) - \frac{\partial^2\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}\,\partial\, x^{\kappa}}\,\frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\, V^{\nu}\end{aligned} \tag{3.44}$$

kombinieren, denn beim Addieren dieser beiden Gln. heben die inhomogenen Terme sich offenbar weg:

$$\frac{\partial}{\partial\, x'^{\lambda}}\, V'^{\mu} + \Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho}\, V'^{\rho} = \frac{\partial\, x'^{\mu}}{\partial\, x^{\nu}}\,\frac{\partial\, x^{\kappa}}{\partial\, x'^{\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial\, x^{\kappa}}\, V^{\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\kappa\sigma}\, V^{\sigma}\right)\ . \tag{3.45}$$

Definieren wir also die *kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes* V^μ durch

$$\begin{aligned} V^\mu{}_{;\lambda} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} V^\rho \\ &\equiv \left(\delta^\mu{}_\rho \frac{\partial}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \right) V^\rho \ , \end{aligned} \tag{3.46}$$

dann ist diese Ableitung nach (3.45) ein gemischter zweistufiger Tensor:

$$\boxed{V'^\mu{}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} V^\nu{}_{;\kappa}} \ . \tag{3.47}$$

Für ein kovariantes Vektorfeld geht man völlig analog vor: die aus dem Transformationsgesetz

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu$$

durch Differentiation nach x'^λ folgende Relation

$$\frac{\partial}{\partial x'^\lambda} U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa} U_\nu \right) + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} U_\nu \tag{3.48}$$

und die aus der Form (3.34 a) des Γ-Transformationsgesetzes folgende Formel

$$\Gamma'^\rho{}_{\mu\lambda} U'_\rho = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} (\Gamma^\sigma{}_{\nu\kappa} U_\sigma) + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\mu \partial x'^\lambda} U_\nu \tag{3.49}$$

müssen diesmal, damit die inhomogenen Terme herausfallen, *subtrahiert* werden. Man definiert daher als *kovariante Ableitung eines kovarianten Vektorfeldes* U_μ die Größe

$$\begin{aligned} U_{\mu;\lambda} &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda} U_\mu - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} U_\rho \\ &\equiv \left(\delta_\mu{}^\rho \frac{\partial}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \right) U_\rho \ ; \end{aligned} \tag{3.50}$$

sie transformiert sich als doppelt kovarianter Tensor:

$$\boxed{U'_{\mu;\lambda} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\lambda} U_{\nu;\kappa}} \ . \tag{3.51}$$

Die Verallgemeinerung dieser Definitionen der kovarianten Ableitung auf beliebige Tensorfelder vom Typ (3.8) ergibt sich leicht, wenn man den Fall betrachtet, wo das Tensorfeld gemäß (3.9) durch direkte Produktbildung aus Vektoren V^{μ_m} und U_{ν_n} aufgebaut ist:

die gewöhnliche partielle Differentiation erzeugt hier nach der Produktregel eine Summe von Termen, in denen je einer der Faktoren differenziert ist, und jeder dieser Terme ist gemäß (3.46) oder (3.50) zu einem Tensor zu ergänzen. Damit ergibt sich folgende Vorschrift: die *kovariante Ableitung des allgemeinen Tensors (3.8) nach* x^λ enthält außer dem Term $(\partial / \partial x^\lambda)\, T$

– für jeden kontravarianten Index μ von T
einen Term $\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} \times$ (T mit μ ersetzt durch ρ)

– für jeden kovarianten Index ν von T
einen Term $-\,\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} \times$ (T mit ν ersetzt durch ρ) . (3.52)

Als Beispiel haben wir für $m = 2$ und $n = 1$ in (3.8):

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{\kappa;\,\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} T^{\mu\nu}{}_{\kappa} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} T^{\rho\nu}{}_{\kappa} + \Gamma^{\nu}{}_{\lambda\rho} T^{\mu\rho}{}_{\kappa} - \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\lambda} T^{\mu\nu}{}_{\rho}} \; . \tag{3.53}$$

Für Skalarfelder ($m = n = 0$) fällt die kovariante mit der gewöhnlichen partiellen Ableitung zusammen, die ja hier nach Gl. (3.7) in der Tat bereits ein Tensor (nämlich ein Vektor) ist:

$$S_{;\,\mu} = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \qquad (S \text{ Skalar}) \tag{3.54}$$

Der *„kovariante Gradient“ eines Skalarfeldes ist also gleich dem gewöhnlichen* Gradienten.

Die Erweiterung der Definition auf *Tensordichten* $\mathcal{T}$ ergibt sich leicht nach Gl. (3.24), wonach $g^{W/2}\,\mathcal{T}$ ein echter Tensor ist. Die kovariante Ableitung dieser Größe ist wieder ein Tensor; multipliziert man ihn mit $g^{-W/2}$, so erhält man wieder eine Tensordichte (der nächsthöheren Stufe). Definiert man also die *kovariante Ableitung einer Tensordichte* $\mathcal{T}$ *vom Gewicht* W durch

$$\boxed{\mathcal{T}^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n;\,\lambda} = g^{-\frac{W}{2}} \big(g^{\frac{W}{2}}\, \mathcal{T}^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}\big)_{;\,\lambda}} \; , \tag{3.55}$$

dann ist sie wiederum eine Tensordichte vom Gewicht W. Führt man die kovariante Ableitung in (3.55) nach dem Schema (3.52) aus, so ergibt sich, dass für Tensordichten dasselbe Schema gilt bis auf das Hinzutreten eines vom Differenzieren des Faktors $g^{\frac{W}{2}}$ herrührenden

$$\boxed{\text{Zusatzterms } \frac{W}{2} \left[\frac{1}{g\,(x)} \frac{\partial\, g\,(x)}{\partial x^\lambda}\right] \mathcal{T}^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n}} \; , \tag{3.56}$$

wenn $\mathcal{T}$ Tensordichte vom Gewicht W ist.

Als Beispiel führen wir an

$$\mathcal{T}^{\mu}{}_{\kappa;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \mathcal{T}^{\mu}{}_{\kappa} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} \mathcal{T}^{\rho}{}_{\kappa} - \Gamma^{\rho}{}_{\kappa\lambda} \mathcal{T}^{\mu}{}_{\rho} + \frac{W}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\lambda}} \mathcal{T}^{\mu}{}_{\kappa} . \tag{3.57}$$

Für die Kombination der kovarianten Ableitung mit den tensoralgebraischen Operationen von Abschnitt 3.2 ergeben sich unmittelbar aus der Definition die folgenden

b) Rechenregeln:

(1) Die Ableitung der Linearkombination von Tensoren mit *konstanten* Koeffizienten ist die entsprechende Linearkombination der kovarianten Ableitungen:

$$(\alpha A^{\mu}{}_{\nu} + \beta B^{\mu}{}_{\nu})_{;\lambda} = \alpha A^{\mu}{}_{\nu;\lambda} + \beta B^{\mu}{}_{\nu;\lambda} \qquad (\alpha,\ \beta \quad \text{Konstanten}) \tag{3.58}$$

Sind α, β skalare Felder, so treten natürliche Terme mit deren Gradienten (3.54) hinzu.

(2) Für die kovariante Ableitung eines direkten Produkts gilt die *Produktregel* der Differentialrechnung: z. B. ist

$$(A^{\mu}{}_{\nu} B_{\kappa})_{;\lambda} = A^{\mu}{}_{\nu;\lambda} B_{\kappa} + A^{\mu}{}_{\nu} B_{\kappa;\lambda} . \tag{3.59}$$

(3) Die kovariante Ableitung einer Kontraktion erhält man durch Ausführung der entsprechenden Kontraktion an der kovarianten Ableitung des unkontrahierten Tensors. Dies sieht man am besten an Beispielen; kontrahiert man etwa in Gl. (3.53) die Indizes ν, κ, so entsteht, da die beiden letzten Terme sich wegheben,

$$T^{\mu\nu}{}_{\nu;\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T^{\mu\nu}{}_{\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} T^{\rho\nu}{}_{\nu} , \tag{3.60}$$

d. h. die richtige Gleichung für die kovariante Ableitung des kontravarianten Vektors $T^{\mu\nu}{}_{\nu}$.

(4) Die kovariante Ableitung des Kronecker-Tensors $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ verschwindet identisch. Denn für die gewöhnliche Ableitung ist dies trivial, und der Zusatzterm nach (3.52),

$$\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} \delta^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} \delta^{\mu}{}_{\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} ,$$

verschwindet wegen der Symmetrie von Γ.

(5) Darüber hinaus sind auch die *kovarianten Ableitungen der metrischen Tensoren $g_{\mu\nu}(x)$ und $g^{\mu\nu}(x)$ identisch Null*; d. h. der metrische Tensor jeglicher Indexstellung

verhält sich bezüglich der kovarianten Ableitung wie eine Konstante. Zum Beweis für $g_{\mu\nu}$ schreibt man nach (3.52)

$$g_{\mu\nu;\,\lambda} \,=\, \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\lambda}} \,-\, \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\, g_{\rho\nu} \,-\, \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\, g_{\mu\rho} \;;$$

dies verschwindet aber nach Gl. (2.34) identisch. Für $g^{\mu\nu}$ erhält man durch kovariante Ableitung der Beziehung (2.40) nach den Regeln (2), (3) und (4)

$$g^{\rho\mu}{}_{;\,\lambda}\, g_{\mu\nu} \,=\, 0$$

und kontrahiert dies mit $g^{\nu\sigma}$. Insgesamt gilt also

$$\boxed{g_{\mu\nu;\,\lambda} \,\equiv\, 0 \;, \qquad g^{\rho\sigma}{}_{;\,\lambda} \,\equiv\, 0 \;.} \tag{3.61}$$

(6) Aus (2) bis (5) folgt schließlich unmittelbar, dass die *Operationen des Herauf- und Herunterziehens von Indizes und der kovarianten Ableitung vertauschbar* sind; z. B. ist

$$(g_{\mu\nu}\, V^{\nu})_{;\,\lambda} \,=\, g_{\mu\nu}\, (V^{\nu}{}_{;\,\lambda}) \;. \tag{3.62}$$

Die Bedeutung der kovarianten Ableitung für die Gravitationstheorie rührt daher, dass sie a) in Abwesenheit von Gravitationsfeldern, d. h. für $\Gamma \,\equiv\, 0$, in die gewöhnliche Differentiation übergeht, und b) Tensoren wieder in Tensoren überführt, d. h. den allgemein-kovarianten Charakter einer Gleichung bestehen lässt. Diese Eigenschaften führen zu folgendem einfachen *Schema für die Aufstellung von Naturgesetzen im Gravitationsfeld*:

> Man schreibe das korrekte speziell-relativistische Gesetz, das in Abwesenheit von Gravitationsfeldern gilt, auf und ersetze darin alle $\eta_{\mu\nu}$ durch $g_{\mu\nu}\,(x)$ und alle partiellen Ableitungen nach den Koordinaten durch kovariante Ableitungen mit dem aus $g_{\mu\nu}\,(x)$ gebildeten affinen Zusammenhang Γ.

(3.63)

Die resultierenden Gleichungen sind automatisch allgemein kovariant und in Abwesenheit von Gravitation korrekt; nach dem allgemeinen Kovarianzprinzip (3.1) sind sie daher die richtigen Gesetze im Gravitationsfeld.

c) Rotation und Divergenz. Als *„kovariante Rotation“ eines kovarianten Vektorfeldes* $U_\mu(x)$ bezeichnet man analog zu (1.178) den doppelt kovarianten, antisymmetrischen Tensor 2. Stufe

$$\begin{aligned} U_{\mu;\nu} - U_{\nu;\mu} &= \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\, U_\rho\right) - \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\, U_\rho\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\, U_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, U_\nu \; ; \end{aligned} \tag{3.64}$$

sie ist also identisch mit der gewöhnlichen Rotation. Dies gilt nicht für die analoge Bildung bei kontravarianten Vektorfeldern,

$$V^\mu{}_{;\nu} - V^\nu{}_{;\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\, V^\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V^\nu\right) + \left(\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}\right) V^\rho \; ,$$

wo die Γ-Terme sich nicht wegheben; es zeigt sich jedoch, dass nur (3.64) im weiteren Aufbau der Theorie benötigt wird, und nur diese Bildung wird daher in allgemeinen Räumen als Rotation eingeführt.

Die *„kovariante Divergenz“ eines kontravarianten Vektorfeldes* $V^\mu(x)$ wird entsprechend definiert durch

$$\boxed{V^\mu{}_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\rho}\, V^\rho} \; . \tag{3.65}$$

Der hier auftretende kontrahierte Spezialfall des affinen Zusammenhanges ist nach (2.41)

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu{}_{\mu\rho} &= \frac{1}{2}\, g^{\mu\kappa} \left(\frac{\partial g_{\rho\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa}\right) \\ &= \frac{1}{2}\, g^{\mu\kappa}\, \frac{\partial}{\partial x^\rho}\, g_{\kappa\mu} \; , \end{aligned} \tag{3.66}$$

da der erste und dritte Term in der Klammer eine in $(\kappa,\, \mu)$ antisymmetrische Größe bilden, die bei Kontraktion mit dem symmetrischen $g^{\mu\kappa}$ Null ergibt. Da $g^{\mu\nu}$ die zu $g_{\kappa\lambda}$ inverse Matrix ist, hat (3.66) die Form

$$\operatorname{tr}\left\{M^{-1}(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\rho}\, M(x)\right\} \; .$$

Um sie zu vereinfachen, gehen wir von der Beziehung

$$\det(\mathbb{1} + A) = 1 + \operatorname{tr} A + O(A^2) \tag{3.67}$$

aus, die für beliebige im Vergleich zur zugehörigen Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ „kleine“ Matrizen A gilt, und finden durch Logarithmieren

$$\ln\left[\det\left(\mathbb{1} + A\right)\right] = \ln\left(1 + \operatorname{tr} A + \ldots\right) = \operatorname{tr} A + \ldots \,, \tag{3.68}$$

wobei die weggelassenen Terme $O\left(A^2\right)$ sind. Für A wählen wir nun die infinitesimale Matrix $M^{-1}(x) \cdot \delta M(x)$, wo δM die bei infinitesimaler Koordinatenänderung $x \rightarrow x + \delta x$ induzierte Änderung der metrischen Matrix M ist:

$$M(x + \delta x) = M + \delta M \quad \text{mit} \quad \delta M = \frac{\partial M}{\partial x^\rho}\,\delta x^\rho \,. \tag{3.69}$$

Dann gilt nach (3.68)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(M^{-1}\,\delta M\right) &= \ln\left[\det\left(\mathbb{1} + M^{-1}\,\delta M\right)\right] \\ &= \ln\left[\det\left(M^{-1}\left(M + \delta M\right)\right)\right] \\ &= \ln\left[\frac{\det\left(M + \delta M\right)}{\det M}\right] \\ &= \ln\left[\det\left(M + \delta M\right)\right] - \ln\left[\det M\right] \\ &= \delta \ln\left(\det M\right) \,. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Vergleich der Koeffizienten von δx^ρ auf beiden Seiten dieser Gleichung ergibt die Formel

$$\operatorname{tr}\left(M^{-1}\,\frac{\partial M}{\partial x^\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[\ln\left(\det M\right)\right] \tag{3.71}$$

und Anwendung auf (3.66) führt wegen $\det M = -g$ schließlich auf

$$\boxed{\Gamma^\mu{}_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^\rho}\,\ln g(x) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\rho}\,\sqrt{g}} \,. \tag{3.72}$$

Einsetzen in (3.65) ergibt die kovariante Divergenz:

$$\boxed{V^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{g} \cdot V^\mu\right)} \,. \tag{3.73}$$

Aus dieser Formel folgt insbesondere eine kovariante Form des *Gaußschen Integralsatzes*: wenn $V^\mu(x)$ im Unendlichen – sowohl in raum- als auch in zeitartigen Richtungen – überall verschwindet, dann ist

$$\int d^4x\,\sqrt{g(x)}\,V^\mu{}_{;\mu}(x) = 0 \,. \tag{3.74}$$

Beachte das Auftreten des invarianten Volumenelements (3.26)!

Weiter kann man (3.72) auch zur Vereinfachung kovarianter Tensordivergenzen heranziehen. Ein häufig auftretender Fall ist

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} T^{\mu\rho} \; ; \tag{3.75}$$

hier gibt Anwendung von (3.72)

$$\boxed{T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g}\, T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho} T^{\mu\rho}} \; . \tag{3.76}$$

Speziell für $T^{\mu\rho} = -T^{\rho\mu}$ fällt wegen der Symmetrie von Γ der letzte Term weg, und man hat

$$A^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g}\, A^{\mu\nu}) \qquad (A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}) \; . \tag{3.77}$$

Als letzter Spezialfall, für den sich eine besondere Vereinfachung ergibt, sei die *kovariante Ableitung eines antisymmetrischen doppelt kovarianten Tensors* betrachtet:

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} A_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} A_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} A_{\mu\rho} \qquad (A_{\nu\mu} = -A_{\mu\nu}) \; . \tag{3.78}$$

Addiert man zu diesem Tensor die zyklisch indexpermutierten Tensoren $A_{\lambda\mu;\,\nu}$ und $A_{\nu\lambda;\,\mu}$, so heben sich kraft der Symmetrie von Γ und der Antisymmetrie alle Γ-Terme heraus, und es bleibt

$$A_{\mu\nu;\,\lambda} + A_{\lambda\mu;\,\nu} + A_{\nu\lambda;\,\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \qquad (A \text{ antisymmetrisch}) \; . \tag{3.79}$$

3.5 Kovariante Ableitung längs Kurven. Paralleltransport.

Bisher haben wir Tensorfelder behandelt, die auf dem gesamten Raum-Zeit- Kontinuum oder zumindest auf endlichen Gebieten darin definiert sind. Wir betrachten nun *Tensoren $T(p)$, die nur in den Punkten einer Kurve* $x^\mu(p)$, d. h. auf einer eindimensionalen Untermannigfaltigkeit, definiert sind. Dabei ist p irgend ein invarianter Kurvenparameter; wir werden im Folgenden meist die Bogenlänge $s = \tau$ längs einer Kurve benutzen. Beispiele für derartige Tensoren sind der Viererimpuls $P^\mu(\tau)$ oder der relativistische Spinvektor $S_\mu(\tau)$ eines Teilchens längs seiner Weltlinie. Für diese Größen ist es offenbar sinnlos, von einer kovarianten Ableitung nach x^μ zu reden, aber eine kovariante Ableitung bezüglich des Kurvenparameters p lässt sich sinnvoll definieren.

Als erstes betrachten wir längs der Kurve einen kontravarianten Vektor $A^\mu(\tau)$ mit der Transformationsregel

$$A'^{\mu}(\tau) = \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu}\right)_{x=x(\tau)} \cdot A^\nu(\tau) \,. \tag{3.80}$$

Die Spezifikation $x = x(\tau)$, d. h. Einschränkung auf die Punkte der Kurve, an der Funktionalmatrix werden wir künftig nicht eigens notieren, werden aber stets bedenken, dass diese Matrix dadurch von τ abhängt. Differentiation nach τ ergibt

$$\frac{d}{d\tau} A'^{\mu}(\tau) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu}\left(\frac{d}{d\tau} A^\nu(\tau)\right) + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^\kappa\, \partial x^\nu}\, \frac{\partial x^\kappa}{\partial \tau} A^\nu(\tau) \tag{3.81}$$

Der zweite Term, der die 2. Ableitung $\partial^2 x'^{\mu} / \partial x^\nu\, \partial x^\kappa$ enthält, entspricht genau demjenigen in (3.43) und hat wie jener denselben Ursprung wie der inhomogene Term in der Transformation (3.34 b) das affinen Zusammenhangs. Wir werden also dazu geführt, die kovariante Ableitung eines *kontravarianten Vektors* längs einer Kurve, hier bezeichnet durch das Symbol $D / D\tau$, in Analogie zu Gl. (3.46) zu definieren als

$$\boxed{\frac{D}{D\tau} A^\mu(\tau) = \frac{d}{d\tau} A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}(x(\tau))\, \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\rho} \,. \tag{3.82}$$

Man prüft leicht nach, dass dies wieder ein kontravarianter Vektor ist: aus (3.34 b) folgt

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\rho}} \left(\Gamma^\nu{}_{\kappa\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau}\right) - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^\kappa\, \partial x^\sigma}\, \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\rho}}\, \frac{dx^\kappa}{d\tau}$$

und Kombination mit (3.80) ergibt

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho} \frac{dx'^{\lambda}}{d\tau} A'^{\rho} = {} & \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu} \left(\Gamma^\nu{}_{\kappa\sigma} \frac{dx^\kappa}{d\tau} A^\sigma\right) \\ & - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^\kappa\, \partial x^\sigma}\, \frac{dx^\kappa}{d\tau} A^\sigma \,.\end{aligned}$$

Addiert man dies zu (3.81), so fallen in der Tat die nichttensoriellen Terme heraus, und man hat

$$\boxed{\frac{D}{D\tau} A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^\nu} \left(\frac{D}{D\tau} A^\nu\right)} \tag{3.83}$$

in Analogie zu (3.45).

Entsprechende Überlegungen anhand der Form (3.34 a) des Γ-Transformationsgesetzes führen dazu, die kovariante Ableitung längs einer Kurve für einen *kovarianten Vektor* $B_\mu(\tau)$ zu definieren als

$$\boxed{\frac{D}{D\tau} B_\mu(\tau) \;=\; \frac{d}{d\tau} B_\mu \;-\; \Gamma^\rho{}_{\mu\kappa}(x(\tau))\, \frac{dx^\kappa}{d\tau}\, B_\rho} \quad ; \qquad (3.84)$$

sie erweist sich dann als kovarianter Vektor:

$$\boxed{\frac{D}{D\tau} B'{}_\mu \;=\; \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \left(\frac{D}{D\tau} B_\nu \right)} \quad . \qquad (3.85)$$

Die kovariante Differentiation längs Kurven lässt also den Vektorcharakter in beiden Fällen unverändert.

Die Verallgemeinerung auf höhere Tensoren ist naheliegend: für einen *allgemeinen Tensor $T(\tau)$ auf der Kurve $x(\tau)$ wird die kovariante Ableitung $DT\,/\,D\tau$ längs der Kurve definiert* als $dT\,/\,d\tau$, plus ein Zusatzterm wie in (3.82) für jeden oberen Index, minus ein Term wie in (3.84) für jeden unteren Index von T. Als Beispiel diene ein zweistufiger gemischter Tensor auf $x(\tau)$:

$$\frac{D}{D\tau} T^\mu{}_\nu \;=\; \frac{d}{d\tau} T^\mu{}_\nu \;+\; \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}\, \frac{dx^\lambda}{d\tau}\, T^\rho{}_\nu \;-\; \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu}\, \frac{dx^\lambda}{d\tau}\, T^\mu{}_\rho \;. \qquad (3.86)$$

Ist ein Tensorfeld $T(x)$ auch außerhalb der Kurve definiert, so kann seine kovariante Ableitung längs der Kurve $x(\tau)$ aus seiner gewöhnlichen kovarianten Ableitung berechnet werden. Z. B. kann wegen

$$\frac{dx^\lambda}{d\tau}\, \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \;=\; \frac{d}{d\tau} \qquad (3.87)$$

die Gl. (3.86) in diesem Falle geschrieben werden

$$\frac{D}{D\tau} T^\mu{}_\nu \;=\; T^\mu{}_{\nu;\,\lambda}\, \frac{dx^\lambda}{d\tau} \;. \qquad (3.88)$$

Wir werden jedoch Tensoren begegnen, die tatsächlich nur längs gewisser Kurven definiert und nicht in den übrigen Raum fortsetzbar sind; für diese hat nur die Ableitung $D\,/\,D\tau$ einen Sinn.

Eine wichtige Anwendung der kovarianten Ableitung längs Kurven ergibt sich, wenn etwa ein Massenpunkt beim Durchlaufen seiner Weltlinie $x(\tau)$ einen Vektor $A^\mu(\tau)$ mit sich führt derart, dass *vom lokal inertialen System* $\{\xi_{x(\tau)}\}$ *bei* $x(\tau)$ *aus beurteilt dieser Vektor sich lokal und momentan nicht ändert*, d. h. $d A^\mu / d\tau = 0$ erfüllt. Geometrisch besagt dies, dass der Vektor von τ bis $\tau + d\tau$, da weder seine Größe noch seine Richtung sich in diesem Zeitraum verändert, eine infinitesimale Verschiebung parallel zu sich selbst erfährt. (Vgl. Abschnitt 3.6: Viererimpuls und Spin eines frei fallenden Teilchens). Da in diesem Bezugssystem zugleich $\Gamma \equiv 0$ ist, gilt dort nach (3.82)

$$\frac{D}{D\tau} A^\mu = 0 \,. \tag{3.89 a}$$

Da dies aber eine allgemein-kovariante Gleichung ist, ist sie, da im lokal inertialen System richtig, in allen Koordinatensystemen gültig. Die Komponenten dieses Vektors erfüllen also die Gleichungen

$$\boxed{\frac{d A^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}(x(\tau))\,\frac{dx^\lambda}{d\tau} \cdot A^\rho(\tau) \qquad (\mu = 0 \ldots 3)}\,, \tag{3.89 b}$$

d. h. ein System von gekoppelten linearen Dgln. 1. Ordnung, die bei Vorgabe von Anfangswerten $A^\mu(\tau_0)$ die Entwicklung des Vektors längs der Weltlinie eindeutig bestimmen. Von einem derart bestimmten Vektor sagt man, er werde *längs der Kurve parallel transportiert.* Analog können auch *höhere Tensoren durch Paralleltransport längs einer gegebenen Kurve* $x(\tau)$ *definiert* werden durch die Forderung, dass ihre kovariante Ableitung, wie z. B. (3.86), längs dieser Kurve verschwindet.

Im übrigen kann *infinitesimale* Parallelverschiebung auch ohne Bezug auf eine Kurve durch die (formal aus (3.89 b) durch Multiplizieren mit $d\tau$ zu erhaltende) Formel

$$d A^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}(x)\, dx^\lambda A^\rho \tag{3.90}$$

definiert werden: „bei infinitesimaler Verschiebung eines Vektors A^μ parallel zu sich selbst von x nach $x + dx$ ist seine Änderung $d A^\mu$ linear in den Komponenten A^ρ selbst und in den Komponenten dx^λ der Verschiebung, und der Proportionalitätsfaktor ist durch den lokalen Wert des affinen Zusammenhangs gegeben.“

Vom mathematischen Standpunkt aus kann diese Beziehung benutzt werden, um den *affinen Zusammenhang ohne Bezug auf eine Metrik* zu definieren. Ein derartiger Raum, in dem an jedem Punkt eine infinitesimale Parallelverschiebung von Vektoren und damit gemäß (3.90) ein affiner Zusammenhang $\Gamma(x)$ definiert ist, der aber i. a. keine weitere – insbesondere metrische – Struktur besitzt, heißt *affiner Raum*; er ist eine schwächer strukturierte Vorstufe des für die Gravitationstheorie benötigten metrischen Raumes.

3.6 Anwendung auf die Punktmechanik

Das Schema (3.63) zur richtigen Ankopplung des Gravitationsfeldes an nichtgravitative physikalische Systeme soll nun zunächst auf die Bewegung eines Teilchens (d. h. Massenpunktes) angewandt werden, wobei von vornherein auch *Teilchen mit innerem Drehimpuls (Spin)* zugelassen seien.

Speziell-relativistisch wird die Bewegung des Teilchens beschrieben durch Angabe seines Weltpunktes $x\,(\tau)$, seiner Vierergeschwindigkeit $u^\lambda = dx^\lambda \,/\, d\tau$ und seines relativistischen Spinvektors oder besser -Pseudovektors $S^\lambda\,(\tau)$ gemäß den Gln. (1.303 - 307) als Funktionen der Eigenzeit τ. Für ein kräftefreies Teilchen gelten (1.141 a) und (1.304):

$$\frac{d}{d\tau}\, u^\lambda\,(\tau) \;=\; 0 \;; \qquad \frac{d}{d\tau}\, S^\lambda\,(\tau) \;=\; 0 \;, \tag{3.91 a/b}$$

wobei die lorentzinvariante Zusatzbedingung

$$u_\lambda\,(\tau)\, S^\lambda\,(\tau) \;=\; 0 \qquad \text{(für alle } \tau) \tag{3.92}$$

erfüllt ist, d. h. nur 3 Komponenten von S^λ sind unabhängig.

Um die Bewegungsgleichung des frei fallenden Teilchens im Gravitationsfeld hieraus abzuleiten, gehen wir davon aus, dass für Vierergeschwindigkeit und Spinvektor bezüglich des lokal inertialen („frei fallenden“) Koordinatensystems $\{\xi^\alpha\} = \{\xi^\alpha_{x\,(\tau)}\}$ am Weltpunkt $x\,(\tau)$,

$$u^\lambda_{(f)} \;=\; d\,\xi^\lambda \,/\, d\,\tau \;; \qquad S^\lambda_{(f)} \;, \tag{3.93}$$

die speziell-relativistischen Gln. (3.91/92) gültig bleiben. Die Vierergeschwindigkeit u^λ bezüglich eines allgemeinen Koordinatensystems berechnet sich daraus nach dem Tensortransformationsgesetz:

$$u^\lambda\,(\tau) \;=\; \frac{dx^\lambda}{d\tau} \;=\; \left(\frac{\partial\, x^\lambda}{\partial\, \xi^\alpha}\right)_\tau u^\alpha_{(f)}\,(\tau) \;. \tag{3.94}$$

Dagegen ist S^λ, das sich im gravitationsfreien Fall auf den Pseudovektor (1.303) reduzieren muss, eine *(auf die Weltlinie $x\,(\tau)$ eingeschränkte) Tensordichte*, und zwar, da es mit dem $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$-Tensor gebildet ist, nach (3.29) eine Dichte vom Gewicht -1:

$$S^\lambda\,(\tau) \;=\; \left[\det\left(\frac{\partial\, x^\mu}{\partial\, \xi^\nu}\right)\right]^{-1}_\tau \left(\frac{\partial\, x^\lambda}{\partial\, \xi^\alpha}\right)_\tau S^\alpha_{(f)}\,(\tau) \;. \tag{3.95}$$

Um für diese Größen die *Bewegungsgln. im Schwerefeld* aufzustellen, ist nach dem Schema (3.63) lediglich die Ableitung $d \,/\, d\tau$ in (3.91 a/b) durch die kovariante Ableitung längs der Weltlinie zu ersetzen:

$$\boxed{\frac{D}{D\,\tau}\,u^\lambda\,(\tau)\;=\;0\;;\qquad \frac{D}{D\,\tau}\,S^\lambda\,(\tau)\;=\;0\;.} \tag{3.96 a/b}$$

Im freien Fall werden also *Vierergeschwindigkeit und Spinviererverktor längs der Weltlinie parallel transportiert.* Die Bedingung (3.92) bleibt dabei, sofern sie für die Anfangswerte erfüllt war, in der modifizierten Form

$$u_\lambda \tilde{S}^\lambda \;=\; \text{const.} \;=\; 0$$

erhalten, denn da für einen Skalar kovariante und gewöhnliche Ableitung dasselbe sind, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\,\tau}\,(g^{-\frac{1}{2}}\,u_\lambda\,S^\lambda) \;&=\; \frac{D}{D\,\tau}\,(g^{-\frac{1}{2}}\,u_\lambda\,S^\lambda) \\ &=\; \left(\frac{D}{D\,\tau}\,g^{-\frac{1}{2}}\right)\,(u_\lambda\,S^\lambda)\;+\;g^{-\frac{1}{2}}\,\frac{D}{D\,\tau}\,(u_\lambda\,S^\lambda)\;, \end{aligned} \tag{3.97 a}$$

und hier verschwindet, da $g \;=\; -\det\,(g_{\mu\nu})$, der 1. Term wegen (3.61), während der 2. wegen (3.96) Null bleibt:

$$\frac{D}{D\,\tau}\,(u_\lambda\,S^\lambda) \;=\; \left(\frac{D}{D\,\tau}\,u_\lambda\right)\cdot\,S^\lambda\;+\;u_\lambda\,\cdot\,\left(\frac{D}{D\,\tau}\,S^\lambda\right)\;=\;0\;. \tag{3.97 b}$$

Die letztere Gl. lässt sich ebenso für die Viererbeträge $u \cdot u$ und $S \cdot S$ aufstellen und zeigt, dass beide längs der Bahn konstant bleiben. Dabei hat $u \cdot u$ in den lokal-inertialen und daher in allen Systemen den Wert $c^2 \;=\; 1$, während von $S \cdot S$, einer für den Massenpunkt charakteristischen Konstanten, nur bekannt ist, dass es raumartig ist ($\{S^\lambda\}$ wird im Ruhesystem zu $\{0,\,\vec{S}_R\}$!):

$$\boxed{u_\lambda\,u^\lambda\;=\;1\;,\quad S_\lambda\,S^\lambda\;=\;\text{const.}\;<\;0\qquad (\text{für alle } \tau)\,.} \tag{3.98 a/b}$$

Die Bewegungsgleichungen (3.96) lauten ausführlich

$$\frac{d}{d\tau}\,u^\lambda\;+\;\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x\,(\tau))\,u^\mu\,u^\nu\;=\;0\;, \tag{3.99 a}$$

$$\frac{d}{d\tau}\,S^\lambda\;+\;\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x\,(\tau))\,u^\mu\,S^\nu\;-\;\frac{1}{2}\,\frac{d\,\ln\,g\,(x\,(\tau))}{d\,\tau}\,S^\lambda\;=\;0\;. \tag{3.99 b}$$

Natürlich ist (3.99 a) wieder die Bewegungsgleichung (2.20) des frei fallenden Massenpunktes. Die neue Herleitung aus dem allgemeinen Kovarianzprinzip ist nicht nur eleganter, sondern liefert auch ohne besonderen Aufwand die *„Spinpräzessionsgleichung“*

(3.99 b) gleich mit. Die letztere kann wegen

$$\left(\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2g}\frac{dg}{d\tau}\right) S^\lambda = g^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\tau}(g^{-\frac{1}{2}} S^\lambda) \tag{3.100}$$

auch als Gleichung

$$\left[\delta^\lambda{}_\nu \frac{d}{d\tau} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x(\tau))\, u^\mu\right] \tilde{S}^\nu = 0 \qquad (\tilde{S}^\nu = g^{-\frac{1}{2}} S^\nu) \tag{3.101}$$

für den echten Vektor $g^{-\frac{1}{2}} S^\lambda$ geschrieben werden.

Wirken *nichtgravitative*, z. B. elektromagnetische Kräfte auf das Teilchen – d. h. bewegt es sich nicht mehr frei fallend – , dann ist zunächst (3.96 a) bzw. (3.99 a) abzuändern:

$$\boxed{\frac{D}{D\tau} u^\lambda = \frac{1}{m} K^\lambda \, ; \qquad K^\lambda = K^\lambda(x(\tau), u(\tau))} \, . \tag{3.102}$$

Daher ist *m die Teilchenruhemasse*, von der hier die stillschweigende Annahme eingeht, dass sie wie im speziell-relativistischen Fall ein *konstanter Skalar* ist, d. h. nicht etwa durch die Wechselwirkung mit dem Schwerefeld selbst in orts- und zeitabhängiger Weise verändert wird. Der durch diese Gl. längs der Weltlinie definierte Vierervektor K^λ ist der *(kontravariante) Kraftvektor* auf das Teilchen. Meist ist K in Form von $K_{(f)}$ bekannt, dem Kraftvektor im lokal-inertialen System, wo er sich auf die speziell-relativistische Viererkraft (1.133) reduziert; im allgemeinen Koorinatensystem ist dann

$$K^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha}\right)_\tau K^\alpha_{(f)}(\tau) \, , \tag{3.103}$$

da K sich wie u als Vektor transformieren muss. Da die Größe $u_\lambda K^\lambda$ ein Skalar ist und sich in den lokal-inertialen Systemen auf das nach (1.138) verschwindende $u \cdot K$ der speziell-relativistischen Mechanik reduziert, gilt

$$u_\lambda K^\lambda = 0 \qquad (\text{für alle } \tau) \, , \tag{3.104}$$

d. h. von den Komponenten von K sind nur 3 unabhängig. Aus (3.104) und (3.102) folgt dann

$$u_\lambda \frac{D}{D\tau} u^\lambda = \frac{1}{2}\frac{D}{D\tau}(u_\lambda u^\lambda) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(u_\lambda u^\lambda) = 0 \, , \tag{3.105}$$

d. h. $u_\lambda u^\lambda$ *behält auch für das nicht frei fallende Teilchen seinen Wert 1* gemäß (3.98 a). Schreibt man (3.102) in der Form

$$m\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} = K^\lambda(x(\tau), u(\tau)) - m\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x(\tau))\, u^\mu u^\nu \, , \tag{3.106}$$

so stellt der 2. Term rechter Hand die beschleunigende Wirkung des Gravitationsfeldes im System $\{x^\mu\}$ dar; er zeigt die *für Gravitationskräfte typische Proportionalität zur trägen Masse m.*

Auch die Spinpräzessionsgleichung (3.99 b / 3.101) ist im Allgemeinen – nämlich, wenn mit K^μ auch ein am Spin angreifendes Drehmoment verbunden ist – um einen dieses Drehmoment vierdimensional repräsentierenden Term zu ergänzen. Wir behandeln hier nur den einfachen Spezialfall, dass das Teilchen – zunächst in Abwesenheit von Gravitationsfeldern speziell-relativistisch beschrieben – *in seinem momentanen Ruhesystem jeweils zwar eine Viererkraft K^μ, aber kein Drehmoment* erfährt. Für den Beobachter im momentanen Ruhesystem ist also in jedem Augenblick $d\vec{S}_R \,/\, dt \;=\; 0$, obwohl $\vec{a}_R \;=\; (d\vec{u} \,/\, dt)_R \;\neq\; 0$ ist. Im momentanen Ruhesystem ist auch stets $\vec{u}_R \;=\; \vec{v}_R \;=\; 0$ (und $S^0 \;=\; 0$, aber nicht $d\,S^0 \,/\, d\,t \;=\; 0$)!. Daher gilt

$$\frac{d}{d\tau}\, S^\lambda \;=\; R\, u^\lambda \tag{3.107}$$

in allen Lorentz-Systemen, wobei R ein Pseudoskalar sein muss. Um diesen Proportionalitätsfaktor zu bestimmen, benutzt man Gl. (3.92) in der Form

$$\frac{d}{d\tau}\,(u_\lambda\, S^\lambda) \;=\; R\, \underbrace{(u_\lambda\, u^\lambda)}_{=1} \;+\; \left(\frac{d}{d\tau}\, u_\lambda\right)\, S^\lambda \;=\; 0\;; \tag{3.108 a}$$

sie ergibt mit (1.133)

$$R \;=\; \left(-\frac{1}{m}\, K_\mu\right)\, S^\mu\;. \tag{3.108 b}$$

Obwohl also im momentanen Ruhesystem jeweils kein Drehmoment wahrnehmbar ist, findet vom allgemeinen Lorentz-System aus gesehen – als reiner Effekt der relativistischen Kinematik – eine Spinpräzession statt gemäß der Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\, S^\lambda \;=\; \left(-\frac{1}{m}\, u^\lambda\, K_\mu\right)\, S^\mu}\;. \tag{3.109}$$

Die durch diese gekoppelten Dgln. erster Ordnung beschriebene Spinbewegung wird als **Thomas-Präzession** bezeichnet.

Führt man nun zusätzlich das Gravitationsfeld ein, dann ist nach dem Schema (3.63) die Gl. (3.109) in die allgemein-kovariante Gleichung

$$\frac{D}{D\tau}\, S^\lambda \;=\; \left(-\frac{1}{m}\, u^\lambda\, K_\mu\right)\, S^\mu \;=\; \left(-u^\lambda\, \frac{D}{D\tau}\, u_\mu\right)\, S^\mu \tag{3.110}$$

zu übersetzen, deren linke Seite durch (3.99 b) oder (3.101) (mal $g^{\frac{1}{2}}$) gegeben ist. Diese Gl. beschreibt eine Verallgemeinerung des (als Grenzfall $K_\mu = 0$ entstehenden) Paralleltransports, den sog. *Fermi-Walker-Transport*, bei dem der Spin-Vektor, obwohl kein Drehmoment direkt an ihm angreift, durch die in (3.108 b) eingehende kinematische Zwangsbedingung $u_\lambda S^\lambda = 0$ genötigt wird, eine der Änderung von u gemäß (3.102) folgende Anpassungsbewegung zu vollführen. Die Voraussetzung $d\vec{S}_R / dt = 0$ im momentanen Ruhesystem ist z. B. immer dann erfüllt, wenn das Teilchen tatsächlich ein kleiner ausgedehnter Körper ist und die Kraft $\vec{K}_R$ an seinem Schwerpunkt angreift.

Den *Energie-Impuls-Tensor* eines Massenpunktsystems hatten wir speziell-relativistisch durch (1.270) definiert:

$$\Theta^{\mu\lambda}_{(pt)}(x) = \sum_n m_n \int d\tau_n \, u_n^\mu(\tau_n) \, u_n^\lambda(\tau_n) \, \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \; ; \tag{3.111}$$

er gehorcht der Bewegungsgleichung (1.276):

$$\partial_\lambda \Theta^{\lambda\mu}_{(pt)}(x) = f^\mu(x) \; , \tag{3.112}$$

mit f^μ = Kraftdichte auf das Teilchensystem. Um diese Gln. allgemein-kovariant zu übersetzen, ist zunächst die δ-Distribution in (3.111) zu verallgemeinern. Es soll

$$\int d^4(x) \, \Phi(x) \, \delta^4(x - y) = \Phi(y) \; , \tag{3.113}$$

wo Φ ein Skalar oder eine Tensorkomponente ist, eine allgemein-kovariante Gl. sein. Da $\sqrt{g(x)}\, d^4x$ Invariante ist, muss also δ^4 im Riemannschen Raum so definiert werden, dass gilt:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \, \delta^4(x - y) = \text{Skalar} \, ,} \tag{3.114}$$

d. h. $\delta^4(x - y)$ = Tensordichte vom Gewicht -1. Daher ist der doppelt kovariante Tensor, der sich in Abwesenheit von Schwerefeldern auf (3.111) reduziert, und damit die korrekte Form des Energie-Impuls-Tensors im Schwerefeld, gegeben durch

$$\boxed{\Theta^{\mu\lambda}_{(pt)}(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_n m_n \int d\tau_n \, u_n{}^\mu(\tau_n) \, u_n{}^\lambda(\tau_n) \, \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \, .} \tag{3.115}$$

Um (3.112), d. h. die Energie-Impuls-Bilanz, zu übersetzen, muss die *allgemein-kontravariante Viererkraftdichte* $G^\mu(x)$, die sich in Abwesenheit von Gravitation auf die speziell-relativistische Kraftdichte f^μ reduziert, gegeben sein. Die linke Seite von (3.112) ist dann durch die kovariante Tensordivergenz (3.75/76) zu ersetzen, d. h. wir haben

$$\Theta^{\lambda\mu}_{(pt);\,\lambda} \;=\; G^\mu \tag{3.116 a}$$

oder ausführlicher mit (3.76)

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^\lambda}\,(\sqrt{g}\,\Theta^{\lambda\mu}_{(pt)}) \;=\; G^\mu \;-\; \Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}\,\Theta^{\lambda\kappa}_{(pt)}\;.} \tag{3.116 b}$$

Die $\sqrt{g}$-Faktoren berücksichtigen, dass (3.26) das invariante Volumenelement ist. Der 2. Term rechter Hand kann als *Kraftdichte des Gravitationsfeldes* auf die Teilchen interpretiert werden; die Kraftdichte *hängt von dem System, auf das sie wirkt, nur über dessen Energie-Impuls-Tensor* ab.

Aus (3.115) folgt für $\lambda \;=\; 0$ (mit $u_n{}^0 \;=\; \frac{dx_n{}^0}{d\,\tau_n} \;=\; \frac{dx^0}{d\,\tau_n}$ für alle n) durch Integration über den Ortsraum

$$\int\limits_V d^3x\,\left[\sqrt{g\,(x)}\,\Theta^{\mu 0}_{(pt)}\,(t,\,\vec{x}\,)\right] \;=\; \sum_n\, m_n\,\frac{dx_n{}^\mu}{d\,\tau}\,(\tau_n(t))\;, \tag{3.117}$$

wobei die Summe alle zum Zeitpunkt t im Volumen V anwesenden Teilchen erfasst. Es läge daher nahe, die Größe $\sqrt{g}\,\Theta^{\mu 0}$ als räumliche Energie-Impuls-Dichte zu interpretieren und damit Gesamtviererimpuls P^μ und Drehimpulstensor $J^{\rho\sigma}$ analog zu (1.293) und (1.299) zu definieren. Es würde sich jedoch schnell zeigen, dass die so definierten Größen, anders als im $\mathcal{M}^4$, *keine* kontravarianten Tensoren sind. Wir müssen auf die Frage der allgemein-kovarianten Formulierung der Energie-Impuls-Bilanz in Kap. 5 zurückkommen.

3.7 Anwendung auf die Elektrodynamik

Die Modifikation der Gesetze der Elektrodynamik in Gegenwart eines Gravitationsfeldes beginnt bei den geladenen Quellen, d. h. dem *Viererstrom* $J^\mu\,(x)$. Er ist speziell-relativistisch durch (1.217) gegeben; für die allgemein-kovariante Übersetzung hat man wie bei (3.115) vorzugehen, d. h. (3.114) zu berücksichtigen:

$$J^\mu\,(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{g\,(x)}}\,\sum_n\,q_n\,\int dx_n{}^\mu\,\delta^4\,(x\;-\;x_n)\;. \tag{3.118}$$

Die speziell-relativistische Kontinuitätsgleichung (1.218) als lokale Form des Erhaltungssatzes der Ladung ist nach dem Schema (3.63) zu übersetzen:

$$J^{\mu}{}_{;\mu}\,(x) \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial\, x^{\mu}}\,(\sqrt{g}\,J^{\mu}) \;=\; 0\;. \tag{3.119}$$

Der Faktor $\sqrt{g}$ wird benötigt, um in (3.118) mit Hilfe der Beziehung (1.215) die Konstanz der q_n nachzuweisen.

Die Maxwellschen Gln. sind in Abwesenheit von Gravitationsfeldern durch (1.251) (homogene Gln.) und (1.256) (inhomogene Gln.) gegeben. Die zugehörigen allgemein-kovarianten Gln. erhält man nach dem Schema (3.63):

$$F_{\lambda\mu;\,\nu} \,+\, F_{\mu\nu;\,\lambda} \,+\, F_{\nu\lambda;\,\mu} \;=\; 0\;, \tag{3.120 a}$$

$$F^{\lambda\mu}{}_{;\,\lambda} \;=\; \mu_0\,J^{\mu}\;. \tag{3.120 b}$$

Dabei ist $F^{\lambda\mu}\,(x) \;=\; -F^{\mu\lambda}\,(x)$ der antisymmetrische, doppelt kontravariante *Feldstärkentensor im allgemeinen Koordinatensystem* $\{x^{\mu}\}$. Sind $F^{\alpha\beta}_{(f)}\,(\xi)$ seine Messwerte in einem lokal-inertialen Koordinatensystem $\{\xi^{\alpha}\}$, so ist $F^{\lambda\mu}$ aus ihnen nach dem Tensortransformationsgesetz zu berechnen:

$$F^{\lambda\mu}\,(x) \;=\; \frac{\partial\, x^{\lambda}}{\partial\, \xi^{\alpha}}\,\frac{\partial\, x^{\mu}}{\partial\, \xi^{\beta}}\,F^{\alpha\beta}_{(f)}\,(\xi\,(x))\;. \tag{3.121}$$

Da $F^{\lambda\mu}$ und $F_{\lambda\mu}$ antisymmetrisch sind, kann man (3.79) und (3.77) anwenden und erhält als *allgemein-kovariante Erweiterung der Maxwell-Gleichungen*:

$$\frac{\partial}{\partial\, x^{\nu}}\,F_{\lambda\mu} \,+\, \frac{\partial}{\partial\, x^{\lambda}}\,F_{\mu\nu} \,+\, \frac{\partial}{\partial\, x^{\mu}}\,F_{\nu\lambda} \;=\; 0\;; \tag{3.122 a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\, x^{\lambda}}\left[\sqrt{g\,(x)}\,F^{\lambda\mu}\,(x)\right] \;=\; \sqrt{g}\,\mu_0\,J^{\mu}\;. \tag{3.122 b}$$

Insbesondere sind also die homogenen Gln. formal unverändert gegenüber dem speziell-relativistischen Fall. Die in den inhomogenen Gln. auftretende metrische Determinante beschreibt den *Einfluss des Schwerefeldes auf elektromagnetische Wellen*:

Schließlich ist die *Lorentz-Kraft* auf ein geladenes Teilchen der Ladung q in Verallgemeinerung von (1.266) durch den allgemein-kovarianten Ausdruck

$$K^{\lambda} \;=\; q\,F^{\lambda\mu}\,(x\,(\tau))\,u_{\mu}\,(\tau) \tag{3.123}$$

und analog die Viererkraftdichte $G^\mu(x)$, die in Gl. (3.116) eingeht, für die Wirkung des elektromagnetischen Feldes auf ein Quellensystem $J^\mu(x)$ durch

$$\boxed{G^\mu(x) \;=\; F^{\mu\nu}(x)\, J_\nu(x)} \tag{3.124}$$

gegeben, wobei natürlich $J_\nu \;=\; g_{\nu\rho}(x)\, J^\rho(x)$ zu beachten ist.

Der *Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes in Abwesenheit von Gravitation* ist durch die kovariante Verallgemeinerung von (1.279) gegeben:

$$\mu_0\, \Theta^{\lambda\mu}_{(em)}(x) \;=\; F^\lambda{}_\nu(x)\, F^{\nu\mu}(x) \;-\; \frac{1}{4}\, g^{\lambda\mu}(x)\, F_{\rho\sigma}(x)\, F^{\sigma\rho}(x)\ . \tag{3.125}$$

Er erfüllt analog zu (1.281) die allgemein-kovariante Tensordivergenzgleichung

$$\Theta^{\lambda\mu}_{(em);\,\lambda} \;=\; -G^\mu\ , \tag{3.126}$$

so dass die lokale Energie-Impuls-Bilanz für ein *Gesamtsystem* aus geladenen Teilchen und Strahlungsfeld sich als *kovariante Kontinuitätsgleichung*

$$\left[\Theta^{\mu\lambda}_{(em)}(x) \;+\; \Theta^{\lambda\mu}_{(pt)}(x)\right]_{;\,\lambda} \;=\; 0 \tag{3.127}$$

schreiben lässt; die auftretenden Tensordivergenzen sind wieder gemäß (3.76) zu bilden. Der Tensor (3.125) ist wegen $g^\mu{}_\mu(x) \;=\; \delta^\mu{}_\mu \;=\; 4$ ebenso wie sein speziell-relativistisches Gegenstück spurfrei,

$$\Theta^\mu{}_\mu(x)_{(em)} \;=\; 0\ , \tag{3.128}$$

während für das Teilchensystem der Tensor (3.115) wieder eine punktartig längs der Weltlinienschar konzentrierte Spur (mit den Ruhemassen m_n als Gewichten) aufweist.

3.8 Analogie zu Eichfeldtheorien

Als formales Prinzip, das die Wechselwirkung des Gravitationsfeldes mit anderen Systemen nach dem Schema (3.63) festlegt, hat die allgemeine Kovarianz Ähnlichkeit mit der sog. lokalen Eichinvarianz, die z. B. die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit geladener Materie bestimmt. Diese Analogie ist auch für die weitere Entwicklung der Gravitationstheorie selbst von heuristischem Wert.

(a) Abelsche lokale Eichinvarianz (Elektrodynamik). – Wir betrachten ein geladenes Materiesystem, das durch eine komplexe Feldamplitude $\varphi(x)$ beschrieben wird. Dabei kann $\varphi(x)$ eine rein klassische, d. h. zahlenwertige und im Prinzip direkt messbare, Amplitude sein, etwa das klassisch aufgefasste Materiewellenfeld in der Klein-Gordon-Wellengleichung (1.189), die in Abwesenheit elektromagnetischer Felder gilt:

$$(\Box + \kappa^2)\,\varphi(x) = 0\;; \qquad \Box = \eta^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\,\partial_\beta\;. \tag{3.129}$$

Es kann aber auch z. B. die komplexe Wellenfunktion $\psi(x)$ eines geladenen Teilchens in der Quantenmechanik bedeuten, die in Abwesenheit von elektromagnetischen Feldern der bekannten kräftefreien Schrödinger-Gleichung genügt:

$$\left[\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\,m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\vec{\nabla}\right)^2\right]\psi(t,\,\vec{x}) = 0\;. \tag{3.130}$$

Schließlich kann $\varphi(x)$ auch, wie im Rahmen der Quantenfeldtheorie, eine (nichthermitische) operatorwertige Feldfunktion darstellen. Wir benutzen im Folgenden als konkretes Beispiel überwiegend das klassische „geladene Klein-Gordon-Feld“ von Gl. (3.129).

Lokale Eichinvarianz nennt man die Forderung, dass die Feldgleichungen, welche das gekoppelte System aus $\varphi(x)$ und dem elektromagnetischen Feld – letzteres beschrieben durch das Vektorpotential $A^\mu(x)$ – bestimmen, forminvariant sein sollen gegenüber der gleichzeitigen Transformation („Eichtransformation“)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\to \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,q\,\Lambda(x)}\,\varphi(x)\;,\\ \varphi^*(x) &\to \varphi^{*'}(x) = \varphi^*(x)\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,q\,\Lambda(x)}\;,\end{aligned} \tag{3.131 a}$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\,\Lambda(x) \tag{3.131 b}$$

der beiden Felder mit einer beliebigen reellen Raum-Zeit-Funktion $\Lambda(x)$, der „Eichfunktion“. Dabei ist q die Ladung der dem Feld φ entsprechenden Teilchen (in der Regel ein ganzes Vielfaches der Elektronenladung $-e$).

Die Eichtransformationen (3.131) heißen *lokal*, weil Λ an jedem Raum-Zeit-Punkt einen anderen Wert annehmen kann, im Gegensatz zu den *„globalen“* Eichtransformationen mit $\Lambda \equiv$ const., die φ nur um eine konstante Phase und A_μ überhaupt nicht verändern. Sie heißen *abelsch*, weil sie bei festem x bezüglich Nacheinanderausführung offenbar eine abelsche, d. h. kommutative Gruppe bilden:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,q\,\Lambda_2(x)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,q\,\Lambda_1(x)}\,\varphi(x)\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,q\,[\Lambda_1(x)+\Lambda_2(x)]}\,\varphi(x)\;, \tag{3.132 a}$$

$$[A_\mu(x) - \partial_\mu\,\Lambda_1(x)] - \partial_\mu\,\Lambda_2(x) = A_\mu - \partial_\mu\,[\Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)]\;. \tag{3.132 b}$$

Dabei ist (3.131 b) die aus der Elektrodynamik geläufige Eichtransformation (1.236) des Viererpotentials. Da diese die messbaren Feldstärken unverändert lässt, ergibt sich von selbst das Problem, für das Gesamtsystem „eichinvariante" Feldgleichungen aufzustellen.

Die Lösung geht aus von der Beobachtung, dass die in einer Feldgleichung wie (3.129) oder (3.130) stets auftretenden Ableitungen $\partial_\alpha \varphi$ sich unter den Eichtransformationen (3.131) nicht wie φ selbst transformieren, sondern wegen der x-Abhängigkeit von Λ einen Zusatzterm im Transformationsgesetz enthalten:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, q\, \Lambda(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \varphi(x) - \mathrm{i}\, q \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x^\alpha} \right) \varphi(x) \right] . \tag{3.133}$$

Dies erinnert an das nichttensorartige Transformationsverhalten der gewöhnlichen partiellen Ableitungen eines Tensors; vgl. etwa (3.43). Eine Wellengleichung wie (3.129/130) ist daher nicht lokal eichinvariant. – Zugleich erinnert der „inhomogene" zweite Term im Transformationsgesetz (3.131 b) des Vektorpotentials, der ebenfalls von der x-Abhängigkeit von Λ herrührt, an den inhomogenen Term im Transformationsgesetz (3.34) des affinen Zusammenhangs.

Analog zur Definition der kovarianten Ableitung in der Riemannschen Geometrie, mit der tensorielle, d. h. allgemein-kovariante Feldgleichungen konstruiert werden können, kombiniert man hier daher die gewöhnliche Ableitung (3.133) und die Multiplikation mit dem Vektorpotential zu einer *„eichkovarianten Ableitung"*

$$\boxed{\mathcal{D}_\alpha \varphi(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \mathrm{i}\, q\, A_\alpha(x) \right] \varphi(x)} \tag{3.134}$$

derart, dass die nicht einer reinen Phasentransformation entsprechenden Terme herausfallen. In der Tat ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\alpha \varphi)' &= [\partial_\alpha - \mathrm{i}\, q\, A'_\alpha]\, \varphi' \\ &= [\partial_\alpha - \mathrm{i}\, q\, A_\alpha + \mathrm{i}\, q\, (\partial_\alpha \Lambda)]\, [\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, q\, \Lambda}\, \varphi] \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, q\, \Lambda}\, [\partial_\alpha - \mathrm{i}\, q\, A_\alpha]\, \varphi \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, q\, \Lambda}\, (\mathcal{D}_\alpha \varphi) . \end{aligned} \tag{3.135}$$

Die neue Ableitung transformiert sich also „eichkovariant", d. h. ebenso wie das Feld φ selbst. Eine Feldgleichung, die unter globalen Phasentransformationen $\Lambda \equiv$ const. invariant ist (diese Invarianz entspricht einfach dem Erhaltungssatz der elektrischen Ladung), bleibt daher auch unter den lokalen Transformationen (3.131) invariant, wenn in ihr überall ∂_α durch $\mathcal{D}_\alpha$ ersetzt wird. Auf diese Weise entsteht z. B. aus (3.129) die Feldgl. des an das elektromagnetische Feld gekoppelten Klein-Gordon-Feldes,

$$[\eta^{\alpha\beta}\,\mathcal{D}_\alpha\,\mathcal{D}_\beta \,+\, \kappa^2]\,\varphi\,(x) \,=\, 0 \tag{3.136 a}$$

oder ausführlicher

$$[\Box \,-\, 2\,\mathrm{i}\,q\,A^\alpha\,\partial_\alpha \,-\, \mathrm{i}\,q\,(\partial_\alpha\,A^\alpha) \,-\, q^2\,A^\alpha\,A_\alpha \,+\, \kappa^2]\,\varphi \,=\, 0\;. \tag{3.136 b}$$

Sie ist natürlich durch eine ebenfalls eichinvariante Feldgl. für das elektromagnetische Feld zu ergänzen, die ihrerseits Kopplungsterme an das φ-Feld enthalten muss. Dafür kommt nur die inhomogene Maxwellsche Gl. (1.256) in Frage, deren linke Seite bereits eichinvariant ist, da sie $A^\mu\,(x)$ nur in Form der gegen (3.131 b) invarianten Viererrotation

$$F^{\mu\nu}\,(x) \,=\, \partial^\mu\,A^\nu\,(x) \,-\, \partial^\nu\,A^\mu\,(x) \tag{3.137}$$

enthält. Es fehlt daher nur die Definition eines *eichinvarianten und zugleich „erhaltenen“ Viererstromes $J^\mu\,(x)$ für das geladene Materiefeld $\varphi\,(x)$*, der die rechte Seite von (1.256) liefert. Ein solcher Strom lässt sich für eichkovariante Felder wie (3.131 a / 3.136) tatsächlich immer bilden; in diesem Beispiel etwa ist

$$J_\mu\,(x) \,=\, -\mathrm{i}\,q\,[\varphi^*\,(x)\,\mathcal{D}_\mu\,\varphi\,(x) \,-\, \varphi\,(x)\,(\mathcal{D}_\mu\,\varphi\,(x))^*]\;. \tag{3.138}$$

(In Quantenfeldtheorien mit operatorwertigem φ tritt an die Stelle des Komplex-Konjugierten φ^* das Hermitesch-Adjungierte $\varphi^\dagger$). Die Eichinvarianz dieses Ausdrucks folgt unmittelbar aus (3.131 a) und (3.135), die Divergenzfreiheit aus

$$\begin{aligned}
\partial^\mu\,J_\mu \,=\, &-\mathrm{i}\,q\,\{(\partial^\mu\,\varphi^*)\,(\mathcal{D}_\mu\,\varphi) \,-\, (\partial^\mu\,\varphi)\,(\mathcal{D}_\mu\,\varphi)^* \,+\\
&+\varphi^*\,(\partial^\mu\,\mathcal{D}_\mu\,\varphi) \,-\, \varphi\,(\partial^\mu\,\mathcal{D}_\mu\,\varphi)^*\}\\
=\, &-\mathrm{i}\,q\,\{\varphi^*\,(\mathcal{D}^\mu\,\mathcal{D}_\mu\,\varphi) \,-\, \varphi\,(\mathcal{D}^\mu\,\mathcal{D}_\mu\,\varphi)^* \,+\\
&+\underbrace{(\partial^\mu\,\varphi^* \,+\, \mathrm{i}\,q\,A^\mu\,\varphi^*)\,(\mathcal{D}_\mu\,\varphi) \,-\, (\partial^\mu\,\varphi \,-\, \mathrm{i}\,q\,A^\mu\,\varphi)\,(\mathcal{D}_\mu\,\varphi)^*}_{=0}\}\\
=\, &-\mathrm{i}\,q\,\{\varphi^*\,(-\kappa^2\,\varphi) \,-\, \varphi\,(-\kappa^2\,\varphi)^*\} \,=\, 0
\end{aligned} \tag{3.139}$$

wegen der eichinvarianten Feldgl. (3.136 a) und der Realität von κ^2. Dieser Viererstrom kann daher in die rechte Seite von (1.256) eingesetzt werden. Diese Konstruktion wird sich bei der Aufstellung der Einsteinschen Feldgln. der Gravitation in Kap. 5 in vielen Zügen wiederholen.

Eine wichtige Beobachtung bezieht sich auf die *Nichtvertauschbarkeit der eichkovarianten Ableitungen in verschiedenen Richtungen*, im Gegensatz zur Vertauschbarkeit der gewöhnlichen partiellen Ableitungen. Aus (3.134) folgt der Kommutator

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\,\varphi(x) \;=\; \mathcal{D}_\mu(\mathcal{D}_\nu\,\varphi) \;-\; \mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_\mu\,\varphi)$$

$$= (\partial_\mu - \mathrm{i}\,q\,A_\mu)(\partial_\nu\,\varphi - \mathrm{i}\,q\,A_\nu\,\varphi) - (\partial_\nu - \mathrm{i}\,q\,A_\nu)(\partial_\mu\,\varphi - \mathrm{i}\,q\,A_\mu\,\varphi)$$

$$= (\partial_\mu\,\partial_\nu - \partial_\nu\,\partial_\mu)\,\varphi - q^2\,(A_\mu\,A_\nu - A_\nu\,A_\mu)\,\varphi$$

$$-\mathrm{i}\,q\,[A_\mu\,\partial_\nu\,\varphi + \partial_\mu\,(A_\nu\,\varphi) - \partial_\nu\,(A_\mu\,\varphi) - A_\nu\,\partial_\mu\,\varphi]$$

$$= -\mathrm{i}\,q\,(\partial_\mu\,A_\nu - \partial_\nu\,A_\mu)\,\varphi$$

oder nach (3.137)

$$\boxed{\frac{\mathrm{i}}{q}\,[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\,\varphi \;=\; F_{\mu\nu}\cdot\varphi} \;. \tag{3.140}$$

Durch Berechnung des Vertauschungsdefekts zweier eichkovarianter Ableitungen kann also aus dem „Eichvektorfeld“ A^μ, das als Analogon des affinen Zusammenhangs in der Ableitung auftritt, die Größe herauspräpariert werden, die das „echte“, messbare elektromagnetische Feld darstellt und nicht nur ein bloßes „Eichartefakt“ (nämlich ein Vierergradientenanteil in A^μ) ist. Diese Beobachtung wird in Kap. 4 bei der Berechnung des „echten Gravitationsanteils“ in $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ ihr Gegenstück finden.

Die durch Ersetzung von ∂_α durch $\mathcal{D}_\alpha$ in eine freie Feldgl. eingeführten Wechselwirkungsterme mit dem elektromagnetischen Feld, wie etwa in Gl. (3.136), werden als *minimale Kopplung* bezeichnet; die Ersetzung $\partial_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha$ selbst heißt daher auch minimale Substitution. Nach heutiger Kenntnis sind auf mikroskopischem Niveau, d. h. für die geladenen Elementarteilchen, alle elektromagnetischen Wechselwirkungen minimaler Natur; „nichtminimale“ Kopplungen ergeben sich nur als effektive Kopplungen für kompliziertere Systeme bei Mittelung über deren innere Freiheitsgrade. Im Falle der Schrödinger-Gleichung (3.130) führt die minimale Substitution, die dann – ebenso wie die Eichtransformation (3.131 a) – mit einem $(-q\,/\,\hbar)$ statt q zu definieren ist, also

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\vec{\nabla} \;\to\; \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\vec{\nabla} - q\,\vec{A}(t, \vec{x}) \;, \tag{3.141 a}$$

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} - q\cdot\Phi(t,\vec{x})\;, \tag{3.141 b}$$

zur bekannten Schrödinger-Gl. eines (spinlosen) Teilchens im elektromagnetischen Feld.

(b) Nichtabelsche Eichfeldtheorie. Auch die übrigen bekannten nichtgravitativen Kräfte in der Natur – „starke“ und „schwache“ Wechselwirkungen – werden in der heutigen Elementarteilchenphysik mit gutem Erfolg als minimale Kopplungen aus einem lokalen Eininvarianzprinzip abgeleitet; jedoch muss dazu Forminvarianz unter einer komplizierteren, nämlich nichtabelschen Gruppe von Eichtransformationen gefordert werden. Auf diese Transformationen wird man durch Verallgemeinerung von (3.131 a) dann geführt, wenn die Feldamplitude außer ihrer Abhängigkeit vom Raum-Zeit-Punkt x noch einen diskreten, endlich vieler Werte fähigen „inneren“ Freiheitsgrad n aufweist, d. h. eine mehrkomponentige Größe

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \cdots\cdots \\ \varphi_N(x) \end{pmatrix} \tag{3.142}$$

darstellt. (Diese Mehrkomponentigkeit hat mit der durch den Spin bedingten nichts zu tun; letztere kommt zusätzlich hinzu). Man kann dann fragen, wie die Feldgln. des wechselwirkungsfreien φ-Feldes – etwa (3.129) für jede Komponente φ_n von φ separat – invariant gemacht werden können unter einer lokalen Eichtransformation, die – in Verallgemeinerung von (3.131 a), wo φ mit einer Zahl vom Betrag 1 multipliziert wird – in der Anwendung einer *unitären, x-abhängigen $N\times N$-Matrix* auf (3.142) besteht, d. h. auch an der Komponentenstruktur von φ (dem diskreten „Eichfreiheitsgrad“) angreift:

$$\varphi'(x) = U(x)\,\varphi(x)\;; \qquad \varphi^{\dagger\,\prime}(x) = \varphi^{\dagger}(x)\,U^{\dagger}(x) \tag{3.143}$$

mit

$$U^{\dagger}(x)\,U(x) = U(x)\,U^{\dagger}(x) = 1\!\!1_{N\times N} \quad \text{für alle } x\;. \tag{3.144}$$

Da U unitär ist, kann es in komplexer Exponentialform mit hermiteschem Generator

$$U(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,g\,G(x)}\;, \qquad G^{\dagger} = G \qquad \text{für alle } x \tag{3.145}$$

geschrieben werden. Nun gibt es in N komplexen Dimensionen nur endlich viele, nämlich N^2 linear unabhängige hermitesche Matrizen, von denen eine als die Einheitsmatrix $1\!\!1_{N\times N}$, die übrigen N^2-1 als spurfrei gewählt werden können. Da ein Anteil

$\exp\left[-\mathrm{i}\, g\, \Lambda_0\,(x) \cdot 1\!\!1_{N\times N}\right]$ in U mit dem Rest der Transformation und allen übrigen Transformationen kommutiert, stellt er im wesentlichen nur wieder die abelsche Transformation (3.131 a) dar; man isoliert daher den eigentlich nichtabelschen Teil der Transformation durch die Einschränkung

$$\mathrm{tr}\, G \,=\, 0 \quad \Rightarrow \quad \det U \,=\, \exp\left[\mathrm{tr}\,(\ln U)\right] \,=\, 1 \;. \tag{3.146}$$

Da das Produkt zweier unitärer $N \times N$-Matrizen mit Determinante 1 wieder diese Eigenschaften besitzt, bilden diese Transformationen eine Gruppe, die *spezielle unitäre Gruppe in N komplexen Dimensionen SU (N).*

Als Beispiel betrachten wir den Fall $N \,=\, 2$, der für die Teilchenphysik tatsächlich Bedeutung hat [*]; hier wird eine Basis im Raume der spinfreien hermiteschen 2×2-Matrizen bekanntlich von den 3 Paulischen Spinmatrizen

$$\tau^1 \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;, \qquad \tau^2 \,=\, \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \;, \qquad \tau^3 \,=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.147}$$

gebildet. Die Gruppe $SU(2)$ der Transformationen

$$U \,=\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, g \sum\limits_{k=1}^{3} \Lambda_k \left(\frac{1}{2}\,\tau^k\right)} \,=\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, g \left(\vec{\Lambda} \cdot \frac{1}{2}\,\vec{\tau}\right)} \tag{3.148}$$

mit im vorliegenden Falle raumzeitlich variablen Koeffizienten

$$\Lambda_k \,=\, \Lambda_k\,(x) \;; \qquad k \,=\, 1,\, 2,\, 3 \tag{3.149}$$

ist bei festem x isomorph zur quantenmechanischen Drehgruppe und identisch mit deren fundamentaler Darstellung im zweidimensionalen Raum der Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens ($\vec{\Lambda}$ ist dort der „Drehvektor“, der auf den Bereich $|\vec{\Lambda}| \,\leq\, 2\,\pi$ eingeschränkt werden kann). Ihr nichtabelscher Charakter drückt sich in den nichtverschwindenden Kommutatoren der Generator-Matrizen aus:

$$\left[\frac{1}{2}\,\tau^k,\, \frac{1}{2}\,\tau^l\right] \,=\, i \sum_{m\,=\,1}^{3} \varepsilon^{klm} \left(\frac{1}{2}\,\tau^m\right) \;, \tag{3.150}$$

wo ε^{klm} der dreidimensionale, vollständig antisymmetrische ε-Tensor ist. Ihre Normierung ist durch

$$tr\,\left(\frac{1}{2}\tau^k\, \frac{1}{2}\tau^l\right) \,=\, \delta^{kl}$$

[*] Der zweiwertige innere Freiheitsgrad fasst bei der Anwendung in der Teilchenphysik die Feldamplituden eines Neutrinos als φ_1 und die des zugehörigen Leptons (Elektron, Myon) – genauer deren linkshändigen Anteil – als φ_2 zusammen, wobei beide Felder in diesem Falle noch Spinstruktur besitzen; er heißt „leptonischer Iospin“.

gegeben.

Die Konstruktion der unter (3.143) invarianten Feldgln. verläuft weitgehend analog zum abelschen Fall: um den beim Differenzieren von (3.143) auf Grund der x-Abhängigkeit der Λ_k entstehenden matrixwertigen Zusatzterm

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} U(x)\right] \varphi(x)$$

zu kompensieren, muss $\partial / \partial x^\mu$ durch eine nunmehr matrixwertige eichkovariante Ableitung ersetzt werden:

$$\boxed{\partial_\mu \;\rightarrow\; \mathcal{D}_\mu \;=\; 1\!\!1_{2\times 2}\, \partial_\mu \;-\; \mathrm{i}\, g\, \mathcal{A}_\mu(x)}\,, \tag{3.151}$$

wobei $\mathcal{A}_\mu(x)$ nun ein matrixwertiges Analogon des elektromagnetischen Viererpotentials, das *„nichtabelsche Eichvektorfeld“*, darstellt, d. h. es steht für die spurfreie hermitesche 2×2-Matrix

$$\mathcal{A}_\mu(x) \;=\; \sum_{k=1}^{3} A_\mu{}^k(x) \left(\frac{1}{2}\,\tau^k\right) \;. \tag{3.152}$$

Dieses Feld muss, wenn es den Zusatzterm kompensieren und zum eichkovarianten Transformationsverhalten

$$(\mathcal{D}_\mu\, \varphi)' \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, g\, (\vec{\Lambda}\cdot \frac{1}{2}\vec{\tau})}\, (\mathcal{D}_\mu\, \varphi) \tag{3.153}$$

führen soll, wieder eine inhomogene Eichtransformation

$$\mathcal{A}'_\mu(x) \;=\; U(x)\, \mathcal{A}_\mu(x)\, U^\dagger(x) \;+\; \frac{1}{\mathrm{i}\, g}\, [\partial_\mu\, U(x)]\, U^\dagger(x) \tag{3.154}$$

erfahren, die sich im abelschen Falle auf (3.131 a) reduziert. Durch die Substitution (3.151) in den Feldgleichungen für φ werden wieder *„minimale“ Kopplungen an die $N^2 - 1$ Eichvektorfelder* $A_\mu{}^k(x)$ induziert:

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu \;+\; \kappa^2 1\!\!1\right)\, \varphi(x) \;=\; 0\,.$$

Die physikalisch wesentlichen Unterschiede zur abelschen Eichtheorie treten bei der Aufstellung der Feldgln. für das Eichvektorfeld (3.151) hervor. Einmal enthält der analog zu (3.140) durch Kommutierung der eichkovarianten Ableitungen (3.151) berechnete *nichtabelsche Feldstärkentensor*

$$\boxed{\mathcal{F}_{\mu\nu} \;=\; \frac{\mathrm{i}}{g}\, [\mathcal{D}_\mu,\, \mathcal{D}_\nu] \;=\; \partial_\mu\, \mathcal{A}_\nu \;-\; \partial_\nu\, \mathcal{A}_\mu \;-\; \mathrm{i}\, g\, [\mathcal{A}_\mu,\, \mathcal{A}_\nu]} \tag{3.155}$$

nun gegenüber (3.137) auch in $\mathcal{A}$ bilineare, vom nichtkommutativen Matrixcharakter von $\mathcal{A}$ herrührende Terme. (Natürlich ist (3.155) selbst matrixwertig mit

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^{3} F_{\mu\nu}{}^{k} \left(\frac{1}{2}\tau^{k}\right) , \quad F_{\mu\nu}{}^{k} = \partial_\mu A_\nu{}^{k} - \partial_\nu A_\mu{}^{k} + g\,\varepsilon^{klm} A_\mu{}^{l} A_\nu{}^{m} , \tag{3.156}$$

wie aus (3.150) sofort folgt). – Zum anderen enthält die zu (1.256) analoge inhomogene Feldgleichung des Eichfeldes selbst,

$$\left[\mathcal{D}_\lambda \,,\, \mathcal{F}^{\lambda\mu}\right] = J^{\mu}_{(\varphi)} \,,$$

in der Form

$$\partial_\lambda \mathcal{F}^{\lambda\mu}(x) = J^{\mu}_{(\varphi)}(x) + J^{\mu}_{(\mathcal{A})}(x) \tag{3.157}$$

nun einen matrixwertigen Viererstrom J^μ, der nicht nur den gemäß Gl. (3.138) – mit g statt q – gebildeten Anteil $J^{\mu}_{(\varphi)}$ des Materiefeldes $\varphi(x)$, sondern zusätzlich einen von $\mathcal{A}$ selbst herrührenden Anteil

$$J^{\mu}_{(\mathcal{A})}(x) = \mathrm{i}\, g\, [\mathcal{A}_\lambda(x), \mathcal{F}^{\lambda\mu}(x)] \,, \tag{3.158}$$

umfasst. Letzterer ist nach (3.155) trilinear in $\mathcal{A}$. Daher sind – im Gegensatz zu den quellenfreien Maxwell-Gln. – die *Feldgln. des nichtabelschen Eichfeldes bereits ohne jede Kopplung an Materiefelder nichtlinear*, d. h. dieses Feld besitzt **Selbstwechselwirkungen**. Das Vektorfeld greift nicht nur an der „Eichladung“ des Materiefeldes an, sondern besitzt diese Ladung auch selbst. Diese Besonderheit werden wir beim Gravitationsfeld wiederfinden. – Zu den Gleichungen. (3.157) treten als homogene Feldgleichungen in Analogie zu den homogenen Maxwell-Gln. (1.251) die *Bianchi-Identitäten*

$$[\mathcal{D}_\lambda \,, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + [\mathcal{D}_\mu \,, \mathcal{F}_{\nu\lambda}] + [\mathcal{D}_\nu \,, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] = 0 \,, \tag{3.159}$$

hinzu, die direkt aus der Kommutatordefinition (3.155) durch Anwendung der allgemeinen Jacobi-Identität für Kommutatoren, $[A,[B,C]] + \text{zykl.} = 0$, folgen.

Die Analogie Gravitationstheorie – Eichfeldtheorie ist unvollständig insofern, als die Eichtheorie in der Regel kein Gegenstück zum metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ kennt; der „eich-affine Zusammenhang“ A_μ oder $\mathcal{A}_\mu$ ist i. a. nicht seinerseits aus einem übergeordneten Potential ableitbar. Ansonsten lässt sich die Analogie in folgender Tabelle zusammenfassen:

Gravitationstheorie	**Eichfeldtheorie**
Allgemeine Kovarianz unter $x \to x^{'}(x)$	Lokale Eichinvarianz unter $\varphi \to \varphi^{'} = U\varphi$
Metrischer Tensor $g_{\mu\nu}(x)$	–
affiner Zusammenhang $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x)$	Eichvektorfeld $A_{\mu}(x)$ bzw. $\mathcal{A}_{\mu}(x)$
Kovariante Ableitung $_{;\mu}$	eichkov. Ableitung $\mathcal{D}_{\mu}$
Riemannscher Krümmungstensor $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}(x)$	Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}(x)$ bzw. $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$

Die letzte Zeile diese Schemas leitet zum nächsten Kapitel über.

4 Beschreibung der Raumkrümmung

4.1 Definition des Krümmungstensors

Es gilt nun diejenigen Eigenschaften einer gegebenen Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ und des damit gegebenen affinen Zusammenhangs ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}(x) = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ herauszuarbeiten, die echte Gravitationswirkungen darstellen und nicht nur einer Umrechnung tatsächlich gravitationsfreier physikalischer Gesetze im $\mathcal{M}^4$ auf krummlinige Koordinatensysteme entspringen. Die Beschreibung dieser Eigenschaften sollte in einer gegen Koordinatenwechsel forminvarianten Weise, d. h. durch Angabe eines geeigneten *Tensorfeldes* geschehen. Dieses Tensorfeld muss einerseits aus $g_{\mu\nu}(x)$ und seinen Ableitungen eindeutig berechenbar, andererseits aber gleich sein für zwei Metriken, die dasselbe Gravitationsfeld beschreiben.

Es ist leicht zu sehen, dass mit $g_{\mu\nu}$ und ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ allein – oder, wegen (2.34), mit $g_{\mu\nu}$ und seinen ersten partiellen Ableitungen – kein wesentlich neuer Tensor konstruiert werden kann, denn an jedem Weltpunkt existiert ein Koordinatensystem, in dem $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ und ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = 0$, also $\partial g_{\mu\nu} / \partial x^\lambda = 0$ wird, und in diesem System – und damit in allen Koordinatensystemen – müsste der betreffende Tensor einem aus $g_{\mu\nu}$ allein konstruierbaren gleich sein. Die Analogie zur Eichfeldtheorie im vorigen Abschnitt lässt in der Tat vermuten, dass erste Ableitungen von Γ (und evtl. noch Γ selbst), also *zweite* und erste Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ benötigt werden, so wie der das messbare elektromagnetische Feld beschreibende Feldstärkentensor in (3.137) durch erste Ableitungen aus dem Viererpotential hervorgeht.

Um zu sehen, wie aus Γ und seinen ersten Ableitungen ein Tensor konstruiert werden kann, gehen wir vom nichttensorartigen Transformationsgesetz (3.34 a) für Γ (mit vertauschten Rollen von „gestrichenen“ und „ungestrichenen“ Größen) aus:

$$ {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} {\Gamma'^\kappa}_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \left(\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) , \tag{4.1} $$

und isolieren zunächst den „inhomogenen“ zweiten Term bzw. die dort auftretende zweite Ableitung:

$$ \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\lambda} {\Gamma^\lambda}_{\mu\nu} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} {\Gamma'^\kappa}_{\rho\sigma} . \tag{4.2} $$

Um zu einer Beziehung zu gelangen, die nur Γ und seine ersten Ableitungen, aber keinen inhomogenen Term mehr enthält, benutzen wir die Vertauschbarkeit der partiellen

Ableitungen nach verschiedenen Koordinaten. Wir differenzieren (4.2) partiell nach x^η und setzen für dabei auftretende zweite Ableitungen von $x^{'}$ nach x wieder (4.2) selbst ein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^\eta\,\partial x^\mu\,\partial x^\nu} &= \left(\frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^\zeta}\,\Gamma^\zeta{}_{\eta\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\eta}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\right)\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\\
&\quad - \left\{\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\zeta}\,\Gamma^\zeta{}_{\eta\nu} - \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^\eta}\,\frac{\partial x'^{\vartheta}}{\partial x^\nu}\,\Gamma'^{\sigma}{}_{\xi\vartheta}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\zeta}\,\Gamma^\zeta{}_{\eta\mu} - \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^\eta}\,\frac{\partial x'^{\vartheta}}{\partial x^\mu}\,\Gamma'^{\rho}{}_{\xi\vartheta}\right)\right\}\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\\
&\quad + \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x^\eta}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x'^{\xi}}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\right) .\end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung von Termen mit der gleichen Anzahl von Transformationsmatrizen und einigen Umbenennungen von Summationsindizes wird daraus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^\eta\,\partial x^\mu\,\partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x^\eta}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\eta\zeta}\,\Gamma^\zeta{}_{\mu\nu}\right]\\
&\quad - \left[\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\eta} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\eta}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\eta\mu}\,\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\nu}\right]\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\lambda}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma}\\
&\quad - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^\eta}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\xi}}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma} - \Gamma'^{\vartheta}{}_{\xi\sigma}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\vartheta} - \Gamma'^{\vartheta}{}_{\xi\rho}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\vartheta\sigma}\right] .\end{aligned} \tag{4.3}$$

Hiervon subtrahiert man dieselbe Gleichung mit Vertauschung von ν und η, wobei die „inhomogene“ linke Seite, aber auch der „gemischte“ (d. h. Γ und $\Gamma^{'}$ zugleich enthaltende) zweite Term rechter Hand wegfallen:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x^\eta}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\eta} + \Gamma^\zeta{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\lambda{}_{\eta\zeta} - \Gamma^\zeta{}_{\mu\eta}\,\Gamma^\lambda{}_{\nu\zeta}\right]\\
&\quad - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^\nu}\,\frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^\eta}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\xi}}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma} - \frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\xi} - \Gamma'^{\vartheta}{}_{\xi\rho}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\vartheta\sigma} + \Gamma'^{\vartheta}{}_{\sigma\rho}\,\Gamma'^{\kappa}{}_{\vartheta\xi}\right] .\end{aligned} \tag{4.4}$$

Nach der Multiplikation mit drei Funktionalmatrizen $(\partial\, x \,/\, \partial\, x^{'})$ zwecks Isolierung des Ausdrucks in der zweiten eckigen Klammer nimmt dies die Form eines Tensortransformationsgesetzes 4. Stufe,

$$R'^{\kappa}{}_{\rho\sigma\xi} = \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^\lambda}\,\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\rho}}\,\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\sigma}}\,\frac{\partial x^\eta}{\partial x'^{\xi}}\,R^\lambda{}_{\mu\nu\eta}\,, \tag{4.5}$$

für die aus Γ und seinen ersten Ableitungen gebildete Größe

$$\boxed{R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa} + \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}} \tag{4.6}$$

an, die demnach ein Tensor ist, der **Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor**.

Nehmen wir nun an, es gäbe noch einen weiteren, von $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ verschiedenen Tensor, der aus $g_{\mu\nu}(x)$ und dessen ersten und zweiten Ableitungen aufgebaut und in den zweiten Ableitungen linear ist. Wir wählen in der Umgebung eines Punktes X das lokal inertiale Koordinatensystem, in dem $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x = X) = 0$ ist, und betrachten das Verhalten jenes Tensors unter der speziellen Klasse von Koordinatentransformationen, die Γ bei $x = X$ unverändert, d. h. $\Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma}(x'(x = X)) = 0$ lassen. Nach (4.1) sind das die Transformationen mit

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right)_{x = X} = 0 \, . \tag{4.7}$$

Mit Γ verschwinden nach (2.34) in diesen Systemen auch alle ersten Ableitungen des metrischen Tensors bei $x = X$; der postulierte Tensor muss sich also dort allein als Linearkombination der *zweiten* Ableitungen der Metrik bzw. nach (2.34) der ersten Ableitungen von Γ darstellen lassen. Diese ersten Ableitungen von Γ befolgen nach (4.3), wenn $\Gamma = 0$ und $\Gamma' = 0$ gilt, das Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\xi}} \Gamma'^{\kappa}{}_{\rho\sigma} = & \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\xi}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} \right) \\ & - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\xi}} \left(\frac{\partial^3 x'^{\kappa}}{\partial x^{\eta} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

bei $x = X$, wo

$$\Gamma'(X) = \Gamma(X) = 0 \, .$$

Eine Linearkombination der Ableitungen von Γ, die sich als Tensor transformieren soll, muss jedenfalls so gebaut sein, dass sie den inhomogenen Term in diesem Transformationsgesetz zum Verschwinden bringt. Dieser inhomogene Term ist eine vollständig symmetrische, aber ansonsten beliebige Funktion der Indices (ρ, σ, ξ). Die einzige Linearkombination der $\partial \Gamma / \partial x$, die sich unter allen Transformationen der speziellen Klasse (4.7) wie ein Tensor verhält, ist daher die in ξ und σ (oder, was auf dasselbe hinausläuft, in ξ und ρ) antisymmetrisierte Form von (4.8), bei der der störende Term allein auf Grund seiner Indexsymmetrie wegfällt. Es ist also

$$T'^{\kappa}{}_{\rho\sigma\xi} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\xi}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\lambda}} T^{\lambda}{}_{\mu\nu\eta} \qquad \text{bei } x = X \tag{4.9 a}$$

mit

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu\eta} = \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\eta} \qquad \text{bei } x = X \,. \tag{4.9 b}$$

Der postulierte Tensor muss also am Punkt $x = X$ in den Koordinatensystemen, die durch (4.7) erhalten werden und in denen daher $\Gamma(X) = 0$ ist, die Form (4.9 b) annehmen, und dies muss an *jedem beliebigen Punkt* X gelten. Der Krümmungstensor (4.6) hat aber für $\Gamma(X) = 0$ diese Eigenschaft; in den lokal inertialen Systemen ist also $T^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}(X) = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}(X)$. Da dies aber eine Gleichung zwischen Tensoren ist, gilt sie in allen Koordinatensystemen. Diese Überlegung zeigt:

> *Der einzige Tensor, der aus der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ und ihren ersten und zweiten Ableitungen aufgebaut und in den zweiten Ableitungen linear ist, ist der Krümmungstensor $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$.*

(4.10)

Anmerkung: die Existenz des Tensors $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ wirft hinsichtlich der Anwendung des allgemeinen Kovarianzprinzips ein Mehrdeutigkeitsproblem auf, denn bei der Übertragung eines physikalischen Gesetzes ins Gravitationsfeld lassen sich außer den durch das Schema (3.62) erzeugten (sog. minimalen) Gravitationstermen mit $g_{\mu\nu}$ und Γ oft auch weitere tensorielle Terme mit R aufbauen, die für $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}$ verschwinden. Z. B. könnte die Bewegungsgleichung (3.95 a) eines frei fallenden Massenpunktes, wenn dieser noch einen Spin $S^{\lambda}(\tau)$ aufweist, auch die Form

$$\frac{D}{D\tau} u^{\lambda} + f(x(\tau))\, R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}(x(\tau))\, u^{\mu} u^{\nu} \tilde{S}^{\kappa} = 0 \tag{4.11}$$

besitzen, wo $\tilde{S}^{\kappa} = g^{-1/2} S^{\kappa}$ und $f(x)$ ein Skalar ist, denn auch diese Gleichung ist allgemein-kovariant und reduziert sich in Abwesenheit von Gravitation auf $d u^{\lambda} / d\tau = 0$. Die Entscheidung zwischen diesen beiden Formen hängt von den beteiligten Größenskalen ab: da der Krümmungstensor gegenüber dem „minimalen" Γ-Term in $D / D\tau$ eine zusätzliche Ableitung der Metrik nach dem Ort enthält, ist der Zusatzterm in (4.11) relativ zum minimalen Term i. a. von der Größenordnung d / D, wo d die typische Lineardimension des Teilchens und D die des Gravitationsfeldes ist. Der Zusatzterm wird also um so besser vernachlässigbar und die minimale Vorschrift (3.62) um so genauer, je besser die Idealisierung des punktförmigen Teilchens zutrifft. Ist das „Teilchen" tatsächlich ein ausgedehnter Körper, dann ist die minimale Vorschrift auf seine infinitesimalen Massenelemente anzuwenden, und für die durch Integration über alle Massenelemente entstehenden komplizierteren Bewegungsgleichungen kann eine Gleichung wie (4.11) dann eine „phänomenologische" Näherung darstellen.

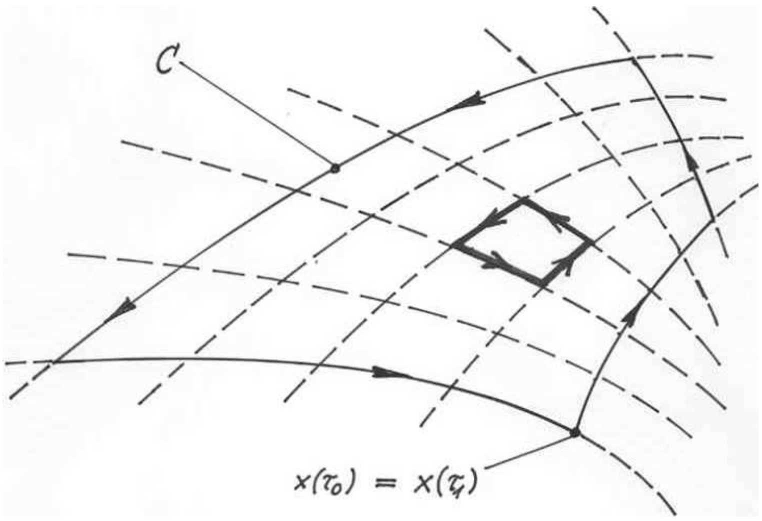
4.2 Wegabhängigkeit des Paralleltransports; Nichtvertauschbarkeit kovarianter Ableitungen.

Die Bedeutung des in (4.6) formal eingeführten Krümmungstensors $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ ergibt sich bei der Untersuchung der Frage, ob ein längs einer *geschlossenen Kurve C* gemäß der Vorschrift (3.88),

$$\frac{d}{d\tau} A^{\mu} = -\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x(\tau)) \frac{d x^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu} , \tag{4.12}$$

parallel transportierter Vektor A^{μ} bei Rückkehr an den Ausgangspunkt auf der Kurve seinen ursprünglichen Wert wieder annimmt oder nicht, bzw. ob das Resultat des Paralleltransports eines Vektors von einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 unabhängig vom zwischen diesen Punkten durchlaufenen Weg ist. Die Fragestellung ist analog derjenigen nach der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals in der Newtonschen Mechanik; dort ergibt sich bekanntlich, dass in einem (einfach zusammenhängenden) Raumgebiet die Wegunabhängigkeit genau dann gegeben ist, wenn das dort herrschende Kraftfeld überall wirbelfrei ist ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$).

Es genügt, die Frage für infinitesimale, d. h. im Vergleich zur charakteristischen Längenskala des Gravitationsfeldes sehr kleine Kurven zu betrachten, denn man kann



stets C als Rand $\partial\mathcal{A}$ einer gewissen zweidimensionalen Fläche $\mathcal{A}$ auffassen, $\mathcal{A}$ in viele kleine aneinandergrenzende Flächenstücke aufteilen (vgl. Skizze!) und die Gesamtänderung eines Vektors bei Paralleltransport längs C aus den Gesamtänderungen bei Transport längs der kleinen Randkurven dieser Stücke additiv zusammensetzen,

$$\Delta A^\mu = \sum_N (\Delta A^\mu)_N \;, \tag{4.13}$$

da die Änderungen längs der „inneren" Kurvenstücke in dieser Summe sich wegheben.

Für hinreichend kleine geschlossene C kann man den in (4.12) eingehenden affinen Zusammenhang Γ um einen Punkt X auf der Kurve – etwa den willkürlich gewählten Ausgangs- und Endpunkt $X = x(\tau_0) = x(\tau_1)$ – entwickeln:

$$\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x) = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X) + \left[\frac{\partial}{\partial X^\kappa}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X)\right](x^\kappa - X^\kappa) + \ldots \tag{4.14}$$

Andererseits ergibt Integration der Dgl. (4.12) des Paralleltransports in erster Ordnung in $x - X$:

$$A^\mu(\tau) = A^\mu(\tau_0) - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X)\,[x^\lambda(\tau) - X^\lambda]\,A^\nu(\tau_0) + \ldots \tag{4.15}$$

Beide Beziehungen zusammen in (4.12) eingesetzt gestatten die Integration in zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
A^\mu(\tau) \approx\; & A^\mu(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left(\frac{dx^\lambda}{d\tau'}\right)\Big[\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X) + (x^\kappa(\tau') - X^\kappa)\;\times \\
\times\; & \frac{\partial}{\partial X^\kappa}\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X)\Big]\Big[A^\nu(\tau_0) - \Gamma^\nu{}_{\rho\sigma}(X)\,(x^\rho(\tau') - X^\rho)\,A^\sigma(\tau_0)\Big] \\
\approx\; & A^\mu(\tau_0) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(X)\,A^\nu(\tau_0)\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\,\frac{dx^\lambda}{d\tau'} + \\
+\; & \left[\frac{\partial}{\partial X^\kappa}\Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}(X) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(X)\Gamma^\nu{}_{\sigma\kappa}(X)\right]A^\sigma(\tau_0)\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'\,\frac{dx^\lambda}{d\tau'}\,(x^\kappa(\tau') - X^\kappa)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Kehrt nun $x(\tau)$ für $\tau = \tau_1 > \tau_0$ zum Ausgangspunkt $x(\tau_0) = X$ zurück, dann ist offensichtlich

$$\oint dx^\lambda \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau'\,\frac{dx^\lambda}{d\tau'} = x(\tau_1) - x(\tau_0) = 0 \;,$$

d. h. der Term erster Ordnung in (4.16) verschwindet. Das im Term zweiter Ordnung verbleibende Integral

$$\oint x^\kappa\,dx^\lambda \equiv \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau'\,x^\kappa(\tau')\,\frac{dx^\lambda}{d\tau'} \tag{4.17 a}$$

verschwindet dagegen im Allgemeinen nicht. Ist z. B. die Kurve, wie in der Skizze angedeutet, ein von infinitesimalen Vektoren $\delta\, a^{\mu}$, $\delta\, b^{\mu}$ aufgespanntes kleines Parallelogramm, so ist auf seinen vier Stücken

$$x^{\mu}(\tau') - X^{\mu} = \begin{cases} \dfrac{\tau' - \tau_0}{\tau_a - \tau_0}\,\delta\, a^{\mu} & (\tau' = \tau_0 \ldots \tau_a)\ , \\[2ex] \delta\, a^{\mu} + \dfrac{\tau' - \tau_a}{\tau_{a+b} - \tau_a}\,\delta\, b^{\mu} & (\tau' = \tau_a \ldots \tau_{a+b})\ , \\[2ex] \delta\, b^{\mu} + \dfrac{\tau_b - \tau'}{\tau_b - \tau_{a+b}}\,\delta\, a^{\mu} & (\tau' = \tau_{a+b} \ldots \tau_b)\ , \\[2ex] \dfrac{\tau' - \tau_1}{\tau_b - \tau_1}\,\delta\, b^{\mu} & (\tau' = \tau_b \ldots \tau_1)\ , \end{cases}$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \oint x^{\kappa}\, d\, x^{\lambda} &= \frac{1}{2}\,\delta\, a^{\kappa}\,\delta\, a^{\lambda} + \left(\delta\, a^{\kappa} + \frac{1}{2}\,\delta\, b^{\kappa}\right)\delta\, b^{\lambda} \\ &+ \left(\delta\, b^{\kappa} + \frac{1}{2}\,\delta\, a^{\kappa}\right)(-\delta\, a^{\lambda}) - \frac{1}{2}\,\delta\, b^{\kappa}\,\delta\, b^{\lambda} \\ &= \delta\, a^{\kappa}\,\delta\, b^{\lambda} - \delta\, b^{\kappa}\,\delta\, a^{\lambda}\ . \end{aligned} \tag{4.17 b}$$

Dieses Integral ist jedoch, wie im Beispiel und allgemein anhand der partiellen Integration

$$\oint x^{\kappa}\, d\, x^{\lambda} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\,\tau\, \frac{d}{d\,\tau}\,(x^{\kappa}\, x^{\lambda}) - \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\,\tau\, \frac{d\, x^{\kappa}}{d\,\tau}\, x^{\lambda} = -\oint x^{\lambda}\, d\, x^{\kappa} \tag{4.17 c}$$

zu sehen ist, antisymmetrisch in den Indizes, so dass sein Koeffizient in (4.16), wenn man dort zum vollen Umlauf $\tau = \tau_1$ übergeht, durch den in (κ, λ) antisymmetrischen Teil

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big[&\frac{\partial}{\partial\, X^{\kappa}}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}(X) - \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\kappa}(X)\,\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(X) \\ &- \frac{\partial}{\partial\, X^{\lambda}}\,\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\kappa}(X) + \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\lambda}(X)\,\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\nu}(X)\Big]\, A^{\sigma}(\tau_0) \end{aligned}$$

ersetzt werden darf. Hier steht aber in eckigen Klammern der Krümmungstensor (4.6), der somit gemäß

$$\boxed{(\Delta\, A^{\mu})_C = A^{\mu}(\tau_1) - A^{\mu}(\tau_0) = \frac{1}{2}\, R^{\mu}{}_{\sigma\lambda\kappa}(X)\, A^{\sigma}(\tau_0)\left(\oint x^{\kappa}\, d\, x^{\lambda}\right)} \tag{4.18}$$

die Änderung des Vektors A^μ bei Paralleltransport längs einer infinitesimalen geschlossenen Kurve C bestimmt. Durch Übertragung auf endliche geschlossene Kurven gemäß (4.13) finden wir: *verschwindet in einem Raumgebiet der Krümmungstensor $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$, dann kehrt bei Paralleltransport längs jeder in diesem Gebiet verlaufenden geschlossenen Kurve ein Vektor zu seinem Anfangswert zurück, bzw. der Paralleltransport eines Vektors zwischen zwei Punkten ist unabhängig vom durchlaufenen Weg*, sofern dieser Weg im Gebiet mit $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = 0$ verläuft:

$$(\Delta_{1\to 2}\, A^\mu)_{C_1} = (\Delta_{1\to 2}\, A^\mu)_{C_2} \qquad (R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \equiv 0)$$
$$(C_1,\, C_2 \text{ verschiedene Wege von 1 nach 2}). \tag{4.19}$$

Laufen z. B. zwei Kreisel, die als Massenpunkte mit Spin betrachtet werden können, auf verschiedenen, aber sich schneidenden Bahnen antriebsfrei um die Erde, so dass (3.101) für sie gilt, und haben ihre Spinvektoren $\tilde{S}^\lambda$ bei einer Begegnung am Punkt X dieselbe Größe und Richtung, dann wird jeder bei der nächsten Begegnung gemessene Unterschied ihrer Orientierung ein (längs der Bahnen gemitteltes) Maß für die Krümmung darstellen, die dem erdnahen Raum vom Gravitationsfeld der Erde aufgeprägt wird.

Bei einem Kraftfeld der Newtonschen Mechanik, dessen Rotation in einem gewissen Gebiet verschwindet, kann man bekanntlich ein Potenzialfeld $V(\vec{x}\,)$ auf diesem ganzen Gebiet eindeutig (bis auf eine additive Konstante) definieren, indem man einen Ausgangspunkt willkürlich wählt und jedem anderen Punkt des Gebietes den Wert des wegunabhängigen Arbeitsintegrals vom Ausgangspunkt dorthin als Potenzialwert zuweist. Analog kann man *auf einem Gebiet G des vierdimensionalen semi-Riemannschen Raumes, wo der Krümmungstensor $R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}$ verschwindet, ein Vektorfeld $A^\mu(x)$ eindeutig definieren*, wenn ein Ausgangswert $A^\mu(X)$ an irgend einem Punkt $X \in G$ gegeben ist: man transportiert einfach $A^\mu(X)$ längs einer beliebigen Kurve parallel bis zum Punkt x; das Resultat ist nach (4.19) unabhängig von der Wahl dieser Kurve. Für die Änderung dieses Vektorfeldes längs einer Kurve gilt einerseits (4.12), andererseits

$$\frac{d\,A^\mu}{d\,\tau} = \frac{\partial\,A^\mu(x)}{\partial\,x^\lambda}\,\frac{d\,x^\lambda}{d\,\tau}\;, \tag{4.20}$$

und da beides für *jede* Kurve $x^\lambda(\tau)$ in G richtig ist, folgt durch Vergleich

$$\frac{\partial\,A^\mu}{\partial\,x^\lambda} = -\Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}\,A^\nu\;, \tag{4.21 a}$$

das heißt aber

$$\boxed{A^\mu{}_{;\lambda} = 0\;.} \tag{4.21 b}$$

Das durch Paralleltransport konstruierte Vektorfeld ist also dadurch ausgezeichnet, dass seine sämtlichen kovarianten Ableitungen verschwinden.

Existiert umgekehrt auf einem Gebiet G ein überall eindeutig definiertes kontravariantes Vektorfeld $A^\mu(x)$ mit lauter verschwindenden kovarianten Ableitungen, dann gilt einerseits (4.12) längs jeder, also auch jeder geschlossenen Kurve in G, andererseits ist die Änderung des Vektors bei Paralleltransport längs geschlossener Kurven Null, da das Feld ja eindeutig definiert ist. Wir können deshalb in (4.18) $(\Delta A^\mu)_C = 0$ setzen und schließen, dass auf dem Gebiet, wo (4.21 b) gilt, überall

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}(x)\, A^\mu(x) = 0 \tag{4.22}$$

sein muss.

Alle obigen Überlegungen gelten natürlich entsprechend auch für ein kovariantes Vektorfeld $B_\mu(x)$, wenn man die Gln. (4.12) und (4.21) gemäß (3.49) und (3.83) abändert; an Stelle von (4.18) hat man dann

$$(\Delta B_\mu)_C = B_\mu(\tau_1) - B_\mu(\tau_0) = \frac{1}{2} R^\sigma{}_{\mu\lambda\kappa}(X)\, B_\sigma(\tau_0) \oint x^\kappa\, d x^\lambda \tag{4.23}$$

und an Stelle von (4.22)

$$R^\mu{}_{\lambda\nu\kappa}(x)\, B_\mu(x) = 0 \tag{4.24}$$

in einem Gebiet, wo überall $B_{\mu;\lambda} = 0$ gilt.

Kommutator kovarianter Ableitungen. Die Aussage von (4.18) zusammen mit (4.17 b) lässt sich auch so formulieren, dass das Resultat der Nacheinanderausführung zweier infinitesimaler Paralleltransporte eines Vektors längs zweier verschiedener Koordinatenrichtungen von der Reihenfolge abhängt – d. h. die Nacheinanderausführung nichtkommutativ ist – , wenn in der Umgebung ein nichtverschwindender Wert des Krümmungstensors herrscht. Eine damit eng verwandte Fragestellung ist – in Analogie zu (3.140) und (3.155) bei den Eichfeldern – die nach der *Vertauschbarkeit kovarianter Ableitungen* $_{;\mu}$ *und* $_{;\nu}$ *mit* $\mu \neq \nu$. Wir berechnen etwa für ein kontravariantes Vektorfeld

$$\begin{aligned}
(V^\lambda{}_{;\mu})_{;\nu} &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} V^\lambda{}_{;\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} V^\rho{}_{;\mu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} V^\lambda{}_{;\rho} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} V^\rho\right] + \\
&\quad + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\rho + \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} V^\sigma\right] - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma} V^\sigma\right] \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^\mu\, \partial x^\nu} V^\lambda + \left[\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right] V^\rho - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\lambda \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\right) + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\rho\sigma}\right] V^\sigma
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Terme mit zweiten und ersten Ableitungen von V^λ in der ersten Zeile von (4.25) sind offensichtlich symmetrisch in μ und ν; von den Termen mit V^σ in der zweiten Zeile hat nur der letzte diese Eigenschaft. Die beiden anderen geben einen in (μ, ν) antisymmetrischen Teil in $(V^\lambda{}_{;\mu})_{;\nu}$ und damit einen Vertauschungsdefekt:

$$\begin{aligned}(V^\lambda{}_{;\mu})_{;\nu} - (V^\lambda{}_{;\nu})_{;\mu} &= \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}\Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\sigma\nu}\right] V^\sigma \\ &= R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu}\, V^\sigma\ . \end{aligned} \tag{4.26}$$

In analoger Weise erhält man für kovariante Vektorfelder

$$(V_{\kappa;\mu})_{;\nu} - (V_{\kappa;\nu})_{;\mu} = -R^\sigma{}_{\kappa\mu\nu}\, V_\sigma\ . \tag{4.27}$$

Analoge Formeln lassen sich nach der Vorschrift (3.52) für beliebige Tensoren aufstellen, z. B.

$$\begin{aligned}(T^\lambda{}_{\kappa;\mu})_{;\nu} \;&-\; (T^\lambda{}_{\kappa;\nu})_{;\mu} = \\ &= R^\lambda{}_{\rho\mu\nu}\, T^\rho{}_\kappa - R^\rho{}_{\kappa\mu\nu}\, T^\lambda{}_\rho\ . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Kovariante Ableitungen sind also in einem Raumgebiet vertauschbar genau dann, wenn dort der Krümmungstensor verschwindet.

4.3 Gravitationsfeld oder krummlinige Koordinaten?

Mit Hilfe des Krümmungstensors lässt sich nun auch die Frage beantworten, wie man herausfinden kann, ob ein gegebener Zusammenhang $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)$ bzw. die zugrundeliegende Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ die *Anwesenheit eines echten Gravitationsfeldes beschreibt oder ob* $g_{\mu\nu}(x)$ *in Wahrheit „flach“, d. h. Minkowskisch ist* und seine x-Abhängigkeit nur einer Wahl komplizierter – nämlich nichtcartesischer – Koordinaten verdankt, also auch durch bloße Wahl anderer Koordinaten *überall* im Raum auf die Form $\eta_{\alpha\beta}$ transformiert werden kann. (Lokal an einem bestimmten Punkt lässt sich dies nach dem Äquivalenzprinzip stets erreichen; es kommt auf das „überall“ an.) Es gilt folgender Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, dass eine gegebene Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ äquivalent zur Minkowski-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ ist, d. h. dass ein Satz $\{\xi^\alpha = \xi^\alpha(x)\}$ von Minkowskischen Koordinaten existiert derart, dass für alle x zugleich

$$\frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta(x)}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\alpha\beta} \tag{4.29 a}$$

gilt, ist, dass *a)* der aus $g_{\mu\nu}$ gebildete Krümmungstensor überall verschwindet (4.29)

$$\boxed{R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}(x) = 0 \quad \text{für alle } x\,;}$$

und dass *b)* zugleich an mindestens einem Punkt X die Matrix $g^{\mu\nu}(X)$die Signatur von $\eta^{\mu\nu}$, d. h. einen positiven und drei negative Eigenwerte aufweist.

Notwendiger Charakter der Bedingungen: angenommen, ein Koordinatensystem $\{\xi^\alpha(x)\}$, das (4.29 a) für alle x erfüllt, sei gefunden. (Beispiel: für die durch (2.50) gegebene Metrik in räumlichen Polarkoordinaten plus t, d. h. $\{x^\mu\} = \{t, r, \vartheta, \varphi\}$, leisten die Koordinaten

$$\xi^0 = x^0 = t\,, \quad \xi^1 = r\sin\vartheta\,\cos\varphi\,, \quad \xi^2 = r\sin\vartheta\,\sin\varphi\,, \quad \xi^3 = r\cos\vartheta\,, \tag{4.30}$$

das Gewünschte, da sie

$$d s^2 = (d\xi^0)^2 - \left[(d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2 + (d\xi^3)^2\right]$$

ergeben. Dies sind natürlich die bekannten cartesischen Koordinaten, geschrieben als Funktionen der Kugelkoordinaten.) In diesem Koordinatensystem ist die Metrik konstant, d. h. der Zusammenhang Γ verschwindet identisch und damit auch der Krümmungstensor. Da aber das Verschwinden eines Tensors eine invariante Aussage ist, verschwindet der Krümmungstensor in jedem Koordinatensystem (nicht dagegen der Zusammenhang, da er kein Tensor ist). – Die Signaturbedingung *b)* ist nach dem bei Gl. (2.18 a) Gesagten überall erfüllt, da (4.29 a) eine Kongruenztransformation ist.

Hinreichender Charakter der Bedingungen: er wird durch explizite Konstruktion der „global inertialen" Koordinaten $\xi^\alpha(x)$ gezeigt. An dem Punkt X von b) lässt sich die reell-symmetrische Matrix $g^{\mu\nu}(X)$ durch eine reell-orthogonale Transformation O diagonalisieren ($g \to O\,g\,O^T$ diagonal), wobei ein positiver Eigenwert, der o. B. d. A. E^0 genannt sei, und drei negative Eigenwerte E^1, E^2, $E^3 < 0$ entstehen:

$$O^\alpha{}_\mu\, g^{\mu\nu}(X)\, O^\beta{}_\nu = \left\{ \begin{array}{cc} E^\alpha & (\alpha = \beta) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{array} \right\} . \tag{4.31 a}$$

Definiert man also die Matrix

$$d^\alpha{}_\mu = \left\{ \begin{array}{ll} O^0{}_\mu / \sqrt{E^0} & (\alpha = 0) \\ O^a{}_\mu / \sqrt{-E^a} & (\alpha = a = 1, 2, 3)\ , \end{array} \right. \tag{4.31 b}$$

dann gilt

$$d^\alpha{}_\mu\, d^\beta{}_\nu\, g^{\mu\nu}(X) = \eta^{\alpha\beta}\ . \tag{4.31 c}$$

Diese bei X gefundenen Größen $d^\alpha{}_\mu$ setzen wir nun zu überall definierten Feldern $D^\alpha{}_\mu(x)$ fort: da der Krümmungstensor nach Voraussetzung verschwindet, können durch Lösung der Dgln. des Paralleltransports

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} D^\alpha{}_\mu(x) = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(x)\, D^\alpha{}_\rho(x) \qquad (\alpha = 0 \ldots 3) \tag{4.32 a}$$

mit dem aus $g_{\mu\nu}(x)$ berechneten Zusammenhang Γ und den Anfangsbedingungen

$$D^\alpha{}_\mu(x = X) = d^\alpha{}_\mu \tag{4.32 b}$$

vier kovariante Vektorfelder $D^0{}_\mu(x) \ldots D^3{}_\mu(x)$ eindeutig auf dem ganzen Raum bestimmt werden.

Dabei ist nach (4.32 a) $\partial D^\alpha{}_\mu / \partial x^\nu$ symmetrisch in μ und ν, d. h. die Rotation jedes der vier Vektorfelder verschwindet. Jedes von ihnen kann daher als Gradient eines Skalars $\xi^\alpha(x)\,(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ geschrieben werden,

$$\boxed{D^\alpha{}_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, \xi^\alpha(x) \qquad (\alpha = 0 \ldots 3)}\ , \tag{4.33}$$

wobei die Anfangswerte $\xi^\alpha(X)$ freibleibende Konstanten darstellen.

Nun besagt (4.32 a) nichts anderes als $D^\alpha{}_{\mu;\nu} \equiv 0$, und da auch die kovariante Ableitung von $g^{\mu\nu}$ verschwindet, gilt

$$[g^{\mu\nu}(x)\, D^\alpha{}_\mu(x)\, D^\beta{}_\nu(x)]_{;\rho} \equiv 0$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 0) \ldots (3, 3)$$

Aber die in der eckigen Klammer stehenden 16 Größen sind Skalare, und ihre kovariante ist daher ihre gewöhnliche Ableitung, d. h. sie sind Konstanten:

$$g^{\mu\nu}(x)\, D^{\alpha}{}_{\mu}(x)\, D^{\beta}{}_{\nu}(x) \;=\; (\text{const.})^{\alpha\beta}\ . \tag{4.34}$$

Aber nach (4.31 c) und (4.32 b) ist $(\text{const.})^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ bei $x = X$ und damit überall, d. h. es gilt (4.29 a), wenn man (4.33) berücksichtigt.

Durch (4.33) sind die „global inertialen" Koordinaten ξ^α bis auf je eine additive Konstante (d. h. insgesamt eine Translation im $\mathcal{M}^4$) explizit gegeben.

4.4 Formale Eigenschaften des Krümmungstensors

a) Symmetrieeigenschaften. Die algebraischen Eigenschaften des Krümmungstensors treten viel klarer hervor, wenn man an Stelle der gemischten Form (4.6) die vierfach kovariante Form

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa}(x) \;=\; g_{\lambda\rho}(x)\, R^{\rho}{}_{\mu\nu\kappa}(x) \tag{4.35}$$

betrachtet. Nach (4.6) und (2.41) ist dies

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;&=\; g_{\lambda\rho}\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left[\frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial\, g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\, g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)\right] \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial\, g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\, g_{\sigma\mu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial\, g_{\mu\kappa}}{\partial x^\sigma}\right)\right]\Bigg\} \\ &\quad + \; g_{\lambda\rho}\left\{\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\,\Gamma^{\rho}{}_{\nu\eta}\right\}\ . \end{aligned}$$

Nun ist nach (2.40) und (2.34)

$$\begin{aligned} g_{\lambda\rho}\,\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\, g^{\rho\sigma} &= -g^{\rho\sigma}\,\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\, g_{\lambda\rho} + \frac{\partial}{\partial x^\kappa}\,(\underbrace{g_{\lambda\rho}\, g^{\rho\sigma}}_{\delta_\lambda{}^\sigma\,=\,\text{const.}}) \\ &= -g^{\rho\sigma}\left[\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\lambda}\, g_{\eta\rho} + \Gamma^{\eta}{}_{\kappa\rho}\, g_{\eta\lambda}\right] \end{aligned} \tag{4.36}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\,\delta_\lambda{}^\sigma &\Bigg\{\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\sigma} \\ &\quad - \frac{\partial^2 g_{\kappa\sigma}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu\,\partial x^\kappa} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu\,\partial x^\sigma}\Bigg\} \\ &- \left[\Gamma^{\eta}{}_{\kappa\lambda}\, g_{\eta\rho} + \Gamma^{\eta}{}_{\kappa\rho}\, g_{\eta\lambda}\right]\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \left[\Gamma^{\eta}{}_{\nu\lambda}\, g_{\eta\rho} + \Gamma^{\eta}{}_{\nu\rho}\, g_{\eta\lambda}\right]\Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa} \\ &+ g_{\lambda\rho}\left[\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}{}_{\mu\kappa}\,\Gamma^{\rho}{}_{\nu\eta}\right]\ . \end{aligned}$$

Hier heben sich mehrere Terme weg, und es bleibt

$$\boxed{\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa\,\partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu\,\partial x^\lambda}\right) \\ &+ g_{\eta\rho}\left(\Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}\,\Gamma^\rho{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\eta{}_{\kappa\lambda}\,\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\right)\ . \end{aligned}} \tag{4.37}$$

Aus diesem Ausdruck liest man folgende Eigenschaften von R direkt ab: die Symmetrieeigenschaft

$$R_{\nu\kappa\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\nu\kappa}, \tag{4.38}$$

die Antisymmetrieeigenschaften bezüglich des „vorderen“ und „hinteren“ Indexpaares

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} \tag{4.39 a}$$

$$= -R_{\lambda\mu\kappa\nu} \tag{4.39 b}$$

$$= +R_{\mu\lambda\kappa\nu} \tag{4.39 c}$$

und die „Zyklizitätseigenschaft“ bezüglich zyklischer Permutation von drei der vier Indices,

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0\,.} \tag{4.40}$$

Aus diesen Eigenschaften folgt u. a., wie im übernächsten Abschnitt allgemeiner für N Dimensionen ausgeführt, dass der Krümmungstensor statt der $4^4 = 256$ Komponenten eines allgemeinen Tensors 4. Stufe nur *20 unabhängige Komponenten* besitzt.

b) Kontraktionen; Ricci-Tensor. Die Antisymmetrieeigenschaften (4.39) zeigen, dass durch Kontraktion von zwei Indices aus $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ im wesentlichen, d. h. bis auf Vorzeichen, nur ein Tensor 2. Stufe erhalten werden kann, nämlich der sog. Ricci-Tensor

$$\boxed{R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\kappa}}\ . \tag{4.41}$$

Denn nach (4.39 a/b) geben

$$g^{\nu\kappa}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\lambda\mu}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0 \tag{4.42}$$

den Nulltensor, und die übrigen Kontraktionsmöglichkeiten ergeben, ebenfalls nach (4.39),

$$g^{\lambda\kappa}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\kappa}\,R_{\lambda\mu\kappa\nu} = -R_{\mu\nu}\ , \tag{4.43 a}$$

$$g^{\mu\nu}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;=\; -g^{\mu\nu}\,R_{\mu\lambda\nu\kappa} \;=\; -R_{\lambda\kappa}\;, \tag{4.43 b}$$

$$g^{\mu\kappa}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;=\; +g^{\mu\kappa}\,R_{\mu\lambda\kappa\nu} \;=\; +R_{\lambda\nu}\;. \tag{4.43 c}$$

Auf Grund der Symmetrieeigenschaft (4.38) ist der *Ricci-Tensor symmetrisch*:

$$R_{\kappa\mu} \;=\; R_{\mu\kappa}\;. \tag{4.44}$$

Der Ricci-Tensor tritt insbesondere in den kontrahierten Formen der Gln. (4.27/28) für den Vertauschungsdefekt kovarianter Ableitungen auf: beide geben

$$(V^{\mu}{}_{;\mu})_{;\nu} \;-\; (V^{\mu}{}_{;\nu})_{;\mu} \;=\; R_{\nu\sigma}\,V^{\sigma}\;. \tag{4.45}$$

Eine Anwendung hiervon betrifft die Elektrodynamik in Gegenwart eines Gravitationsfeldes (Abschnitt 3.7): die homogenen Maxwell-Gln. (3.122 a) können – wie in Abwesenheit des Gravitationsfeldes – durch die Darstellung von $F_{\lambda\mu}$ als Viererrotation eines Viererpotenzials gelöst werden:

$$F_{\lambda\mu} \;=\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,A_{\mu} \;-\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\mu}}\,A_{\lambda} \;=\; A_{\mu;\lambda} \;-\; A_{\lambda;\mu}\;. \tag{4.46}$$

Um eine *kovariante Wellengleichung für das Vektorpotenzial* aufzustellen, setzt man diese Darstellung in die inhomogenen Maxwell-Gln. (3.120 b) ein und benutzt (4.45):

$$\begin{aligned} F^{\lambda}{}_{\mu;\lambda} \;=\; g^{\kappa\lambda}\,F_{\lambda\mu;\kappa} &= g^{\kappa\lambda}\,[(A_{\mu;\lambda})_{;\kappa} \;-\; (A_{\lambda;\mu})_{;\kappa}] \\ &= g^{\lambda\kappa}\,A_{\mu;\kappa;\lambda} \;-\; (A^{\kappa}{}_{;\mu})_{;\kappa} \\ &= g^{\kappa\lambda}\,A_{\mu;\kappa;\lambda} \;-\; (A^{\kappa}{}_{;\kappa})_{;\mu} \;+\; R_{\mu\sigma}\,A^{\sigma}\;. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Die Differentialoperation 2. Ordnung

$$\boxed{\Box_{cov}\,A_{\mu} \;=\; g^{\kappa\lambda}\,(x)\,A_{\mu;\kappa;\lambda}\,(x)} \tag{4.48 a}$$

ist offenbar die kovariante Verallgemeinerung des Wellenoperators

$$\Box\,A_{\mu} \;=\; \eta^{\kappa\lambda}\,\partial_{\kappa}\,\partial_{\lambda}\,A_{\mu}$$

aus (1.176). Nach Gleichung (4.25) ist genauer

$$\begin{aligned} \Box_{cov}\,A^{\mu} = & \left(g^{\kappa\lambda}\,\frac{\partial^2}{\partial\,x^{\kappa}\,\partial\,x^{\lambda}}\right)\,A^{\mu} \;+\; 2\,g^{\kappa\lambda}\,\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\rho}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,A^{\rho} \\ & -\,g^{\kappa\lambda}\,\Gamma^{\rho}{}_{\kappa\lambda}\,\left(\frac{\partial}{\partial\,x^{\rho}}\,A^{\mu} \;+\; \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}\,A^{\sigma}\right) \\ & +\,g^{\kappa\lambda}\,\left[\left(\frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,\Gamma^{\mu}{}_{\kappa\sigma}\right) \;+\; \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\kappa\sigma}\right]\,A^{\sigma}\;. \end{aligned} \tag{4.48 b}$$

Die *Wellengleichung des elektromagnetischen Viererpotentials in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes* lautet damit

$$\boxed{\Box_{cov}\, A_\mu \;-\; \frac{\partial}{\partial\, x^\mu}\, A^\kappa{}_{;\kappa} \;+\; R_{\mu\sigma}\, A^\sigma \;=\; \mu_0\, J_\mu \;,} \tag{4.49}$$

da die kovariante Ableitung des Skalars $A^\kappa{}_{;\kappa}$ gleich der gewöhnlichen ist. Dies ist die allgemein-kovariante Erweiterung der speziell-relativistischen Gl. (1.234). Für $A^\kappa{}_{;\kappa}$ beachte Gl. (3.72); Nullsetzen dieser kovarianten Divergenz unter Ausnutzung der Eichfreiheit von A^μ stellt die die allgemein-kovariante Version der Lorentz-Eichung dar.

Aus (4.42) und (4.43) sieht man, dass die Bildung eines Skalars aus dem Krümmungstensor durch zweifache Kontraktion im wesentlichen nur auf eine Art möglich ist. Die Größe

$$\boxed{R \;=\; g^{\mu\kappa}\, g^{\lambda\nu}\, R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;=\; g^{\mu\kappa}\, R_{\mu\kappa} \;=\; R^\mu{}_\mu} \tag{4.50}$$

heißt der **Krümmungsskalar**.

Schließlich könnte man daran denken, durch Kontraktion von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ mit der Tensordichte $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}$ über alle 4 Indizes eine pseudoskalare Dichte und daraus durch Multiplikation mit $g^{-1/2}$ einen weiteren Skalar zu erzeugen. In dieser Kontraktion kann aber $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, da eine zyklische Permutation seiner drei letzten Indizes durch eine gerade Permutation der Indizes von $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}$ rückgängig gemacht werden kann, durch die linke Seite von (4.40) ersetzt werden, d. h. dieser Skalar verschwindet identisch:

$$g^{-\frac{1}{2}}\, \varepsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}\, R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;\equiv\; 0 \;. \tag{4.51}$$

c) Bianchi-Identitäten. Neben obigen rein algebraischen Beziehungen erfüllt der Krümmungstensor Differentialidentitäten, die zu den homogenen Maxwell-Gleichungen (1.251) des elektromagnetischen Feldstärkentensors analog sind. Zu ihrer Herleitung betrachtet man, um nicht mit der komplizierten vollständigen Form von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ gemäß (4.37) arbeiten zu müssen, an einem gegebenen Punkt x ein lokal-inertiales Koordinatensystem $\{\xi^\alpha_x\}$, in dem die $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ – aber nicht ihre Ableitungen – bei x verschwinden. Bildung der kovarianten Ableitung nach ξ^η, die bei x selbst mit der gewöhnlichen Ableitung übereinstimmt, von Gl. (4.37) gibt dann

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\eta} \Bigg(& \frac{\partial^2\, g_{\lambda\nu}}{\partial\, \xi^\kappa\, \partial\, \xi^\mu} \;-\; \frac{\partial^2\, g_{\mu\nu}}{\partial\, \xi^\kappa\, \partial\, \xi^\lambda} \\ & - \frac{\partial^2\, g_{\kappa\lambda}}{\partial\, \xi^\mu\, \xi^\nu} \;+\; \frac{\partial^2\, g_{\mu\kappa}}{\partial\, \xi^\nu\, \partial\, \xi^\lambda} \Bigg) \quad \text{bei } x \;. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Zu diesem Ausdruck fügt man die beiden zyklischen Permutationen der 3 letzten Indizes $(\nu,\ \kappa,\ \eta)$ hinzu. Mit der Kurzschreibweise $\partial^3 g_{\mu\nu} \,/\, \partial\xi^\alpha\, \partial\xi^\beta\, \partial\xi^\gamma \;=\; \frac{\mu\nu}{\alpha\,\beta\,\gamma}$ erhält man

$$\begin{aligned}
&2\,(R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} \,+\, R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} \,+\, R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu}) \;=\\
&= \frac{\lambda\,\nu}{\eta\,\kappa\,\mu} - \frac{\mu\,\nu}{\eta\,\kappa\,\lambda} - \frac{\kappa\,\lambda}{\eta\,\mu\nu} + \frac{\mu\,\kappa}{\eta\,\nu\,\lambda}\\
&+ \frac{\lambda\,\eta}{\kappa\,\nu\,\mu} - \frac{\mu\,\eta}{\kappa\,\nu\,\lambda} - \frac{\nu\,\lambda}{\kappa\,\mu\,\eta} + \frac{\mu\nu}{\kappa\,\eta\,\lambda}\\
&+ \frac{\lambda\,\kappa}{\nu\,\eta\,\mu} - \frac{\mu\,\kappa}{\nu\,\eta\,\lambda} - \frac{\eta\,\lambda}{\nu\,\mu\,\kappa} + \frac{\mu\,\eta}{\nu\,\kappa\,\lambda}\ .
\end{aligned}$$

Bei Berücksichtigung der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen und der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ heben sich alle Terme rechter Hand paarweise weg, und man erhält die *Bianchi-Identitäten*

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} \,+\, R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} \,+\, R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} \;=\; 0\ .} \tag{4.53}$$

Diese Identitäten sind jedoch manifest kovariant (die linke Seite ist ein fünffach kovarianter Tensor) und daher nicht nur in den lokal inertialen, sondern in allen Koordinatensystemen gültig.

Kontrahiert man in (4.53) λ und ν und benutzt die Definition (4.41) des Ricci-Tensors und das Verschwinden kovarianter Ableitungen von $g^{\lambda\nu}$, so erhält man die kontrahierte Form

$$R_{\mu\kappa;\eta} \,-\, R_{\mu\eta;\kappa} \,+\, g^{\lambda\nu}\,(-R_{\mu\lambda\kappa\eta})_{;\nu} \;=\; 0\ . \tag{4.54}$$

Nochmalige Kontraktion von μ, κ unter Verwendung von (4.50) liefert

$$R_{;\eta} \,-\, R^{\mu}{}_{\eta;\mu} \,-\, R^{\nu}{}_{\eta;\nu} \;=\; 0\ .$$

Der zweite und dritte Term linker Hand sind gleich, d. h. es gilt

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta} \,-\, \frac{1}{2}\,\delta^{\mu}{}_{\eta}\,R\right)_{;\mu} \;=\; 0 \tag{4.55 a}$$

oder nach Heraufziehen des Index η

$$\boxed{\left(R^{\mu\nu} \,-\, \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,R\right)_{;\mu} \;=\; 0}\ . \tag{4.55 b}$$

Die Bianchi-Identitäten führen somit zur Identifikation eines *aus* $g_{\mu\nu}$ *und seinen ersten und zweiten Ableitungen aufgebauten Tensors 2. Stufe, dessen kovariante Tensordivergenz identisch verschwindet.*

Dass derartige Identitäten bestehen müssen, folgt im übrigen auch aus der Definition des Krümmungstensors durch den Kommutator (4.27) zweier kovarianter Ableitungen. Da für die Kommutatoren irgend dreier linearer Operatoren A, B, C (mit einem gemeinsamen Definitionsbereich) stets die Jacobi-Identität

$$[A,\,[B,\,C]] + [B,\,[C,\,A]] + [C,\,[A,\,B]] = 0 \tag{4.56}$$

erfüllt ist und kovariante Ableitungen lineare Operationen sind, gilt mit der abgekürzten Schreibweise

$$[\mu,\,\nu]\,V_\alpha = V_{\alpha;\mu;\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu} \tag{4.57}$$

die Beziehung

$$\{[\eta,\,[\kappa,\,\nu]] + [\kappa,\,[\nu,\,\eta]] + [\nu,\,[\eta,\,\kappa]]\}\,V_\mu = 0 \tag{4.58}$$

für beliebige Vektoren V_μ. Nach (4.27) ist nun etwa

$$\begin{aligned} [\eta,\,[\kappa,\,\nu]]\,V_\mu &= (-R^\lambda{}_{\mu\kappa\nu}\,V_\lambda)_{;\eta} - [\kappa,\,\nu]\,V_{\mu;\eta} \\ &= R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa;\eta}\,V_\lambda + R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}\,V_{\lambda;\eta} + [\nu,\,\kappa]\,V_{\mu;\eta} \end{aligned} \tag{4.59 a}$$

und entsprechend der Gl. (4.28) berechnet man

$$[\nu,\,\kappa]\,V_{\mu;\eta} = -R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}\,V_{\lambda;\eta} - R^\lambda{}_{\nu\eta\kappa}\,V_{\mu;\lambda} \tag{4.59 b}$$

und erhält

$$[\eta,\,[\kappa,\,\nu]]\,V_\mu = R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa;\eta}\,V_\lambda - R^\lambda{}_{\nu\eta\kappa}\,V_{\mu;\lambda}\,. \tag{4.59 c}$$

Nach Hinzufügen der beiden bzgl. $(\eta,\,\kappa,\,\nu)$ zyklisch permutierten Ausdrücke nimmt also (4.58) die Form

$$\begin{aligned} &(R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa;\eta} + R^\lambda{}_{\mu\eta\nu;\kappa} + R^\lambda{}_{\mu\kappa\eta;\nu})\,V_\lambda \\ &-(R^\lambda{}_{\nu\eta\kappa} + R^\lambda{}_{\eta\kappa\nu} + R^\lambda{}_{\kappa\nu\eta})\,V_{\mu;\eta} = 0 \end{aligned} \tag{4.60}$$

an. Hier verschwindet aber wegen der Zyklizitätseigenschaft (4.40) des Krümmungstensors die zweite Zeile identisch, d. h. es muss die erste Zeile für beliebige V_λ Null sein. Damit folgen wieder die Bianchi-Identitäten (4.53).

4.5 Geodätische Abweichung

In Abwesenheit von Gravitationsfeldern sind die geodätischen Linien, auf denen frei fallende Teilchen laufen, die Geraden (1.141) im $\mathcal{M}^4$ (bei Verwendung cartesischer Koordinaten). Die Separation $\Delta\, x^\mu\,(\tau) \;=\; x^\mu_{(2)}\,(\tau) \;-\; x^\mu_{(1)}\,(\tau)$ zweier Teilchen variiert daher linear mit τ, bzw. ihre zweite Ableitung nach τ verschwindet. Dabei kann τ sowohl τ_1 als auch τ_2 als auch die (zu jeder von beiden proportionale) Zeit t eines dritten Systems sein.

Im Gravitationsfeld erscheint zwar die Bewegung des frei fallenden Teilchens im jeweiligen lokal-inertialen Koordinatensystem ebenfalls als kräftefrei; aber die eines benachbarten frei fallenden Teilchens wird i. a. von ihr anders als linear divergieren, d. h. die Separation der benachbarten Teilchen wird beschleunigt verlaufen. Um dies genauer zu sehen, betrachten wir zwei auf *„infinitesimal benachbarten"* Trajektorien

$$x^\mu_{(1)}\,(\tau) \;=\; x^\mu\,(\tau) \;-\; \frac{1}{2}\,\delta\, x^\mu\,(\tau) \tag{4.61 a}$$

$$x^\mu_{(2)}\,(\tau) \;=\; x^\mu\,(\tau) \;+\; \frac{1}{2}\,\delta\, x^\mu\,(\tau) \tag{4.61 b}$$

laufende Teilchen, d. h. es darf in der Separation

$$\delta\, x^\mu\,(\tau) \;=\; x^\mu_{(2)}\,(\tau) \;-\; x^\mu_{(1)}\,(\tau) \tag{4.61 c}$$

linearisiert werden. Dabei ist τ ein gemeinsamer invarianter Bahnparameter, den wir mit Bezug auf die „mittlere" Trajektorie $x^\mu\,(\tau)$ so wählen, dass

$$(d\,\tau)^2 \;=\; g_{\mu\nu}\,(x)\,d\,x^\mu\;d\,x^\nu \tag{4.62 a}$$

oder

$$g_{\mu\nu}\,(x\,(\tau))\,u^\mu\,(\tau)\,u^\nu\,(\tau) \;=\; 1 \tag{4.62 b}$$

gilt ($u^\mu \;=\; d\,x^\mu\,/\,d\,\tau$). Fallen die Teilchen frei, so sind ihre Trajektorien (4.61 a/b) Lösungen der Bewegungsgleichungen

$$\frac{D}{D\,\tau_1}\left(\frac{d\,x^\lambda_{(1)}}{d\,\tau_1}\right) \;\equiv\; \frac{d^2\,x^\lambda_{(1)}}{d\,\tau_1^2} \;+\; \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x_1)\,\frac{d\,x^\mu_{(1)}}{d\,\tau_1}\,\frac{d\,x^\nu_{(1)}}{d\,\tau_1} \;=\; 0\;, \tag{4.63 a}$$

$$\frac{D}{D\,\tau_2}\left(\frac{d\,x^\lambda_{(2)}}{d\,\tau_2}\right) \;\equiv\; \frac{d^2\,x^\lambda_{(2)}}{d\,\tau_2^2} \;+\; \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,(x_2)\,\frac{d\,x^\mu_{(2)}}{d\,\tau_2}\,\frac{d\,x^\nu_{(2)}}{d\,\tau_2} \;=\; 0\;, \tag{4.63 b}$$

die zunächst mit Bezug auf die zwei verschiedenen Eigenzeiten

$$(d\,\tau_i)^2 \;=\; g_{\mu\nu}\,(x_{(i)})\,d\,x^{\mu}_{(i)}\,d\,x^{\nu}_{(i)} \qquad (i \;=\; 1,\,2) \tag{4.64}$$

formuliert sind. Um zu einer prägnanten Aussage über den Verlauf der Separation (4.61 c) zu gelangen, wird man zunächst beide Gleichungen auf den gemeinsamen Parameter τ von (4.62) beziehen. Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\,\tau_i^2}\,f\,(\tau) &= \frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\,\frac{d}{d\,\tau}\,\left[\frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\,\frac{d}{d\,\tau}\,f\,(\tau)\right] \\
&= \left(\frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\right)^2\,\frac{d^2\,f}{d\,\tau^2} \;+\; \left[\frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\,\frac{d}{d\,\tau}\,\left(\frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\right)\right]\,\frac{d\,f}{d\,\tau} \\
&= \left(\frac{d\,\tau_i}{d\,\tau}\right)^{-2}\,\left[\frac{d^2}{d\,\tau^2} \;+\; \left(\frac{d}{d\,\tau}\,\ln\,\frac{d\,\tau}{d\,\tau_i}\right)\,\frac{d}{d\,\tau}\right]\,f\,(\tau) \\
&= \left(\frac{d\,\tau_i}{d\,\tau}\right)^{-2}\,\left\{\left[\frac{d}{d\,\tau} \;-\; \frac{1}{2}\,\psi_i\,(\tau)\right]\,\frac{d}{d\,\tau}\right\}\,f\,(\tau)
\end{aligned} \tag{4.65 a}$$

mit

$$\psi_i\,(\tau) \;=\; \frac{d}{d\,\tau}\,\ln\,\left(\frac{d\,\tau_i}{d\,\tau}\right)^2 \tag{4.65 b}$$

für $i \;=\; 1,\,2$. Nach Multiplikation mit $(d\,\tau_1\,/\,d\,\tau)^2$ nimmt daher etwa die Gl. (4.63 a) die Gestalt

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[\frac{d}{d\,\tau} \;-\; \frac{1}{2}\,\psi_1\,(\tau)\right]\,\delta^{\lambda}{}_{\nu} \;+\; \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,\left(x \;-\; \frac{1}{2}\,\delta\,x\right)\,\frac{d\,\left(x^{\mu} \;-\; \frac{1}{2}\,\delta\,x^{\mu}\right)}{d\,\tau}\right\} \\
&\qquad \times\,\frac{d\,\left(x^{\nu} \;-\; \frac{1}{2}\,\delta\,x^{\nu}\right)}{d\,\tau} \;=\; 0
\end{aligned}$$

an. Linearisierung in $\delta\,x$ – wobei zu beachten ist, dass die Größen (4.65 b) nach Linearisierung bereits von erster Ordnung in $\delta\,x$ sind – ergibt

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{d}{d\,\tau}\,\delta^{\lambda}{}_{\nu} \;+\; \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x)\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau}\right]\,\frac{d\,x^{\nu}}{d\,\tau} \;-\; \frac{1}{2}\,\times \\
&\times\,\left\{\left[\frac{d}{d\,\tau}\,\delta^{\lambda}{}_{\nu} \;+\; \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x)\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau}\right]\,\frac{d\,(\delta\,x^{\nu})}{d\,\tau} \;+\; \psi_1\,(\tau)\,\frac{d\,x^{\lambda}}{d\,\tau}\right. \\
&+\,\left.\left[\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x)}{\partial\,x^{\kappa}}\,\delta\,x^{\kappa}\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\,\tau} \;+\; \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x)\,\frac{d\,(\delta\,x^{\mu})}{d\,\tau}\right]\,\frac{d\,x^{\nu}}{d\,\tau}\right\} \;=\; 0\;.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

In 0. Ordnung ergibt sich, wie zu erwarten,

$$\left[\delta^{\lambda}{}_{\nu}\,\frac{d}{d\tau}\;+\;\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x)\,\frac{d\,x^{\mu}}{d\tau}\right]\frac{d\,x^{\nu}}{d\tau}\;=\;\frac{D}{D\,\tau}\left(\frac{d\,x^{\lambda}}{d\tau}\right)\;=\;0\;, \tag{4.67}$$

als Bewegungsgleichung der „mittleren" Trajektorie. Die Terme 1. Ordnung liefern

$$\begin{aligned}&\frac{D}{D\,\tau}\left(\frac{d}{d\tau}\,\delta\,x^{\lambda}\right)\;+\;u^{\lambda}\,\psi_1\,(\tau)\;=\\&=\;-\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}}\,u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\;-\;\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\,u^{\mu}\,\frac{d}{d\tau}\,\delta\,x^{\kappa}\end{aligned}$$

oder bei Verwendung von (4.67)

$$\begin{aligned}&\frac{D}{D\,\tau}\left[\frac{d}{d\tau}(\delta\,x^{\lambda})\;+\;\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\,u^{\mu}\,\delta\,x^{\kappa}\right]\;+\;u^{\lambda}\,\psi_1\,(\tau)\;=\\&=\;\left(-\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}}\;+\;\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial\,x^{\nu}}\right)u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\;+\;\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\kappa}\,u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\\&+\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}\left(\frac{d}{d\tau}\,u^{\mu}\right)\delta\,x^{\kappa}\\&=\;-\left(\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}}\;-\;\frac{\partial\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa}}{\partial\,x^{\nu}}\;+\;\Gamma^{\lambda}{}_{\kappa\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\;-\;\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\kappa}\right)u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\\&=\;-R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}\,u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\;.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Wir schreiben nun zur Abkürzung $(D\,/\,D\,\tau)\,\delta\,x^{\lambda}$ für die eckige Klammer linker Hand in (4.68), ohne Rücksicht auf die Frage des Vektorcharakters von $\delta\,x^{\lambda}$. Für die Funktion $\psi_1\,(\tau)$ folgt aus (4.64) mit $i\,=\,1$ durch Linearisierung

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\,\tau_1}{d\tau}\right)^2&=g_{\mu\nu}\left(x\;-\;\frac{1}{2}\,\delta\,x\right)\frac{d\,\left(x\;-\;\frac{1}{2}\,\delta\,x\right)^{\mu}}{d\tau}\,\frac{d\,\left(x\;-\;\frac{1}{2}\,\delta\,x\right)^{\nu}}{d\tau}\\&=\underbrace{g_{\mu\nu}\,(x)\,u^{\mu}\,u^{\nu}}_{=1}-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,g_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}}\,u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\;+\;2\,g_{\mu\nu}\,u^{\mu}\,\frac{d\,\delta\,x^{\nu}}{d\tau}\right]\\&=1\;-\;\left[g_{\mu\nu}\,u^{\mu}\,\frac{d}{d\tau}\,(\delta\,x^{\nu})\;+\;\frac{1}{2}\,(g_{\mu\rho}\,\Gamma^{\rho}{}_{\nu\kappa}\;+\;g_{\nu\rho}\,\Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa})\,u^{\mu}\,u^{\nu}\,\delta\,x^{\kappa}\right]\\&=1\;-\;g_{\mu\,\nu}\,u^{\mu}\left[\frac{d}{d\tau}\,(\delta\,x^{\nu})\;+\;\Gamma^{\nu}{}_{\rho\kappa}\,u^{\rho}\,\delta\,x^{\kappa}\right]\\&=1\;-\;u^{\mu}\,g_{\mu\kappa}\left(\frac{D}{D\,\tau}\,\delta\,x^{\kappa}\right)\;.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Da $(d\tau_1 \,/\, d\tau)^2$ ein Skalar, $u^\mu\, g_{\mu\kappa}$ ein Vektor und $D\,/\,D\,\tau$ eine skalare Operation ist, zeigt diese Beziehung zunächst, dass die *infinitesimale* Separation $\delta\, x^\kappa$ der Trajektorien – im Gegensatz zum endlichen $x_{(2)} - x_{(1)}$ – ein *Vektor* ist. Nach Linearisierung $\ln(1-\varepsilon) \;\approx\; -\varepsilon$ wird daher (4.65 b) zu

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau) &= \frac{D}{D\,\tau}\left[-u^\mu\, g_{\mu\kappa}\left(\frac{D}{D\,\tau}\,\delta\, x^\kappa\right)\right] \\ &= -u^\mu\, g_{\mu\kappa}\left(\frac{D^2}{D\,\tau^2}\,\delta\, x^\kappa\right)\;. \end{aligned} \tag{4.70}$$

(Ebenso erhält man $\psi_2 \;=\; -\psi_1$, so dass (4.63 b) dieselbe Gleichung 1. Ordnung, (4.68), liefert wie (4.63 a)). Die linke Seite von (4.68) erhält damit die Form

$$\frac{D^2}{D\,\tau^2}\,\delta\, x^\lambda \;-\; u^\lambda\, u^\mu\, g_{\mu\kappa}\left(\frac{D^2}{D\,\tau^2}\,\delta\, x^\kappa\right) \;=\; [\delta^\lambda{}_\kappa \;-\; u^\lambda\, u_\kappa]\left(\frac{D^2}{D\,\tau^2}\,\delta\, x^\kappa\right) \tag{4.71}$$

mit $u_\kappa(\tau) \;=\; g_{\mu\kappa}(x(\tau))\, u^\mu$. Die Matrix

$$P^\lambda{}_\kappa(\tau) \;=\; \delta^\lambda{}_\kappa \;-\; u^\lambda(\tau)\, u_\kappa(\tau) \tag{4.72}$$

besitzt die Eigenschaften

$$P^\lambda{}_\kappa\, u^\kappa \;=\; u^\lambda \;-\; u^\lambda\, \overbrace{(u_\kappa\, u^\kappa)}^{=1} \;=\; 0\;, \tag{4.73 a}$$

$$P^\lambda{}_\mu\, P^\mu{}_\kappa \;=\; \delta^\lambda{}_\kappa \;-\; 2\, u^\lambda\, u_\kappa \;+\; u^\lambda\,(u_\mu\, u^\mu)\, u_\kappa \;=\; P^\lambda{}_\kappa \tag{4.73 b}$$

und stellt daher den Projektor auf die zur momentanen Vierergeschwindigkeit orthogonalen (transversalen) Richtungen dar. Das Endresultat lautet

$$\boxed{P^\lambda{}_\kappa(\tau)\left(\frac{D^2}{D\,\tau^2}\,\delta\, x^\kappa\right) \;=\; -R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}\, u^\mu\, u^\nu\, \delta\, x^\kappa}\;. \tag{4.74}$$

Die Separation der beiden frei fallenden Teilchen quer zur Richtung ihrer mittleren Geschwindigkeit u^μ beschleunigt sich also nach Maßgabe des Krümmungstensors des Gravitationsfeldes. Dieser Effekt kann im Prinzip zur experimentellen Ausmessung des Krümmungstensors verwendet werden.

4.6 Raumkrümmung in N Dimensionen

Wir betrachten den Krümmungstensor $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ in einem allgemeinen Riemannschen Raum von N Dimensionen. Um zunächst die Anzahl seiner „algebraisch" (d. h. linear) unabhängigen Komponenten abzuzählen, fassen wir die Indexpaare (λ, μ) und (ν, κ) als „Superindizes" auf. Wegen der Antisymmetrieeigenschaften (4.39 a/b) nimmt jeder dieser beiden Superindizes soviele unabhängige Werte an, wie eine antisymmetrische Matrix in N Dimensionen unabhängige Elemente besitzt, also $N' = \frac{1}{2} N (N - 1)$ Werte. Nach (4.38) ist $R_{(\lambda, \mu)(\nu, \kappa)}$ eine in diesen Superindizes symmetrische Matrix in N' Dimensionen, hat also nach (4.38/4.39) allein

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N' (N' + 1) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} N (N - 1)\right] \left[\frac{1}{2} N (N - 1) + 1\right] \\ &= \frac{1}{8} N (N - 1) (N^2 - N + 2) \end{aligned}$$

unabhängige Elemente. Diese Zahl wird jedoch durch die Zyklizitätsbedingungen (4.40) weiter eingeschränkt: die zyklische Dreiersumme auf der linken Seite dieser Bedingungen ist infolge von (4.38/4.39) vollständig antisymmetrisch in $(\lambda, \mu, \nu, \kappa)$, d. h. (4.40) gibt weitere

$$\binom{N}{4} = \frac{1}{4!} N (N - 1) (N - 2) (N - 3)$$

lineare Gleichungen zwischen den R-Elementen. Es bleiben also

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{8} N (N - 1) (N^2 - N + 2) - \frac{1}{24} N (N - 1) (N - 2) (N - 3) \\ &= \frac{1}{24} N (N - 1) [3 (N^2 - N + 2) - (N^2 - 5 N + 6)] \,, \end{aligned}$$

d. h.

$$\boxed{Z_N = \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1)} \tag{4.75}$$

linear unabhängige Elemente von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$.

In einer Dimension wird $Z_1 = 0$, d. h. der Krümmungs-„Tensor" R_{1111} ist dort identisch Null, wie auch aus (4.39) hervorgeht. Ein eindimensionaler Raum – d. h. eine Kurve – hat also stets Krümmung Null. Diese von der Anschauung her widersinnig klingende Aussage zeigt lediglich, dass *die durch $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ gemessene Krümmung eine innere Eigenschaft des betreffenden Raumes* darstellt im Gegensatz zu Eigenschaften, die erst nach Einbettung des Raumes in einen höherdimensionalen euklidischen angebbar werden. Innere Eigenschaften sind solche, die ein völlig an den betreffenden Raum gebundener Beobachter, der nicht in zusätzliche Dimensionen „ausweichen" kann, durch Messung feststellt. Für ein völlig an eine Kurve gebundenes eindimensionales Lebewesen erscheint diese überall gerade; erst ein Beobachter in 2 oder mehr euklidischen Dimensionen, in dessen Raum die Kurve eingebettet wird, kann sie als „gekrümmt" ansprechen. Man sieht dies auch daran, dass die Transformationsregel (3.11) in einer Dimension einfach

$$g'_{11}(x') = \left(\frac{dx}{dx'}\right)^2 g_{11}(x) \tag{4.76 a}$$

lautet: man kann daher durch die Koordinatenwahl

$$x' = \int^{x} d\overline{x}\,\sqrt{\pm\, g_{11}(\overline{x})} \tag{4.76 b}$$

$g'_{11}(x')$ gleichzeitig im ganzen „Raum" zu ± 1, d. h. zur flachen Metrik machen.

In 2 Dimensionen gibt (4.75) $Z_2 = 1$, d. h. der Krümmungstensor hat dort nur 1 unabhängiges Element. Als solches kann per Konvention etwa R_{1212} gewählt werden. Die übrigen Komponenten folgen dann aus (4.39):

$$R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} = R_{1212}$$

und

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0\,.$$

Diese Beziehungen können unter Verwendung von

$$g = \det(g_{\mu\nu})_{2\times 2} = g_{11}\,g_{22} - g_{12}^2$$

sehr kompakt in der einzigen Formel

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (g_{\lambda\nu}\,g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}\,g_{\mu\nu})\,\frac{R_{1212}}{g} \qquad (N = 2) \tag{4.77}$$

zusammengefasst werden. Durch Kontraktion von λ mit ν folgt daraus der Ricci-Tensor

$$R_{\mu\kappa} = g_{\mu\kappa}\,\frac{R_{1212}}{g} \qquad (N = 2) \tag{4.78}$$

und daraus der Krümmungsskalar

$$R = 2\,\frac{R_{1212}}{g}\,. \tag{4.79}$$

Daher kann hier der ganze Krümmungstensor allein durch den Krümmungsskalar (und die Metrik) ausgedrückt werden:

$$\boxed{R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\,(g_{\lambda\nu}\,g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}\,g_{\mu\nu})\,R \qquad (N = 2)} \,. \tag{4.80}$$

R ist bis auf einen konventionellen Faktor identisch mit der Gaußschen Flächenkrümmung K:

$$-\frac{1}{2}\,R = K = \frac{1}{\rho_1\,\rho_2}\,, \tag{4.81}$$

wo ρ_1, ρ_2 die örtlichen Hauptkrümmungsradien der Fläche sind.

In *3 Dimensionen gibt (4.75)* $Z_3 = 6$ *unabhängige Elemente von* $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$. Da dies zugleich die Zahl der unabhängigen Komponenten des Ricci-Tensors in $N = 3$ ist ($\frac{1}{2}\,3\,(3 + 1) = 6$), ist zu erwarten, dass $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ sich hier vollständig durch die Elemente von $R_{\mu\kappa}$ ausdrücken lässt. Tatsächlich gilt hier in Analogie zu (4.80) die Formel

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= g_{\lambda\nu}\,R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}\,R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\,R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa}\,R_{\lambda\nu} \\ &- \frac{1}{2}\,(g_{\lambda\nu}\,g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}\,g_{\mu\nu})\,R \qquad (N = 3)\,. \end{aligned} \tag{4.82}$$

Um dies zu zeigen, wählt man als unabhängige Elemente etwa

$$R_{1212}, \quad R_{2323}, \quad R_{3131} \tag{4.83 a}$$

$$R_{1323}, \quad R_{2131}, \quad R_{3212} \tag{4.83 b}$$

und verifiziert (4.82) für jeweils das erste Element von (4.83 a) und (4.83 b); für die übrigen folgt die Aussage dann durch zyklische Permutation von (1, 2, 3). Es ist zweckmäßig, ein Koordinatensystem zu wählen, in dem $g_{\mu\nu}\,(x)$ am betrachteten Punkt x diagonal ist; dies kann stets erreicht werden, indem man die Transformationsmatrix $\partial\,x'^{\mu}\,/\,\partial\,x^{\lambda}$ als die orthogonale Matrix wählt, die $g_{\mu\nu}\,(x)$ diagonalisiert. Die inverse Matrix $g^{\mu\nu}\,(x)$ ist dann ebenfalls diagonal mit $g^{11} = 1\,/\,g_{11}$ usw., und die Definition des Ricci-Tensors vereinfacht sich *lokal bei* x zu

$$R_{\mu\kappa} = g^{11}\,R_{1\mu\,1\kappa} + g^{22}\,R_{2\mu\,2\kappa} + g^{33}\,R_{3\mu\,3\kappa}\,. \tag{4.84}$$

Aufgrund der Antisymmetrieeigenschaften des Krümmungstensors gibt dies für $(\mu,\,\kappa) =$ (1, 1) und (2, 2)

$$R_{11} = g^{22}\,R_{2121} + g^{33}\,R_{3131}$$

$$R_{22} = g^{33}\,R_{3232} + g^{11}\,R_{1212}$$

und daher

$$\begin{aligned} g_{22}\, R_{11} \,+\, g_{11}\, R_{22} &= 2\, R_{1212} \,+\, g^{33}\, (g_{22}\, R_{3131} \,+\, g_{11}\, R_{2323}) \\ &= R_{1212} \,+\, g_{11}\, g_{22}\, (g^{11}\, g^{22}\, R_{1212} \,+\, g^{22}\, g^{33}\, R_{2323} \,+\, g^{33}\, g^{11}\, R_{3131}) \;. \end{aligned}$$

Die runde Klammer in der letzten Zeile ist $\frac{1}{2}\, R$, also ist im geschilderten Koordinatensystem bei x

$$R_{1212} \;=\; g_{22}\, R_{11} \,+\, g_{11}\, R_{22} \,-\, \frac{1}{2}\, g_{11}\, g_{22}\, R \;,$$

was mit (4.82) für $(\lambda,\, \mu,\, \nu,\, \kappa) \;=\; (1,\, 2,\, 1,\, 2)$ übereinstimmt. Weiter folgt aus (4.84)

$$R_{12} \;=\; g^{33}\, R_{3132} \;=\; g^{33}\, R_{1323}$$

und daher

$$R_{1323} \;=\; g_{33}\, R_{12} \;,$$

ebenfalls in Übereinstimmung mit (4.82). Damit ist in diesem Koordinatensystem (4.82) richtig; wegen ihres manifest kovarianten Charakters gilt die Gleichung daher in allen Systemen. Man sieht unmittelbar, dass (4.82) alle zu fordernden Symmetrie- und Kontraktionseigenschaften besitzt.

Für $N \;=\; 4$ gibt (4.75) $Z_4 \;=\; 20$ unabhängige Komponenten von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, während der Ricci-Tensor hier $\frac{1}{2}\, 4\, (4 \,+\, 1) \;=\; 10$ unabhängige Komponenten hat. $N \;=\; 4$ ist also die kleinste Raumdimension, in der der Krümmungstensor nicht schon durch seine Kontraktionen niedrigerer Stufe festgelegt ist, sondern zusätzliche Information enthält.

Die Z_N Komponenten von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ beschreiben die Krümmung eines N-dimensionalen Raumes zwar in kovarianter, aber nicht in invarianter Weise, da sie als Elemente eines Tensors vom Koordinatensystem abhängen. Eine nur von der inneren Eigenschaften des Raumes selbst abhängige, d. h. invariante Charakterisierung der Raumkrümmung muss durch Skalare erfolgen, die aus $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ und $g_{\mu\nu}$ gebildet werden. Nun können die N^2 Transformationsmatrixelemente $\partial\, x'^{\mu} \,/\, \partial\, x^{\lambda}$ an einem gegebenen Punkt x durch Wahl einer hinreichend allgemeinen Koordinatentransformation beliebige Werte annehmen, d. h. die Z_N Elemente von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ und die $\frac{1}{2}\, N\, (N \,+\, 1)$ Elemente von $g_{\mu\nu}$ können an einem gegebenen Punkt noch N^2 algebraischen Relationen unterworfen werden. Die Zahl der aus ihnen konstruierbaren Skalare ist daher

$$I_N \;=\; \frac{1}{12}\, N^2\, (N^2 \,-\, 1) + \frac{1}{2}\, N\, (N+1) - N^2 = \frac{1}{12}\, N\, (N-1)\, (N-2)\, (N+3) \;. \quad (4.85)$$

Diese Abzählung erweist sich allerdings *nur für $N \;\neq\; 2$* als gültig; für $N \;=\; 2$ geht sie fehl, weil sie die Anzahl Null liefert, während wir aus (4.80/81) wissen, dass hier *eine*

Krümmungsinvariante (R bzw. K) existiert. Der Grund hierfür, den wir ohne weitere Vertiefung nur erwähnen können, liegt in der besonderen Eigenschaft der Räume mit $N = 2$, eine einparametrige Untergruppe der Gruppe aller Koordinatentransformationen zuzulassen, die $g_{\mu\nu}$ und $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ *global* unverändert lässt, so dass hier nur $N^2 - 1$, nicht N^2 Bedingungen durch Koordinatentransformation aufgeprägt werden können. Gleichung (4.85) gilt jedoch für $N \geq 3$. Insbesondere gibt es *für* $N = 3$ *gerade drei Krümmungsinvarianten*, die z. B. als

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \; , \quad R_{\mu\nu} \, R^{\mu\nu} \; , \quad \frac{\det\left(R_{\mu\nu}\right)}{\det\left(g_{\mu\nu}\right)} \tag{4.86}$$

gewählt werden können. Da diese 3 Größen im Wesentlichen die Koeffizienten von λ^2, λ^1 und λ^0 in der Säkulargleichung des Eigenwertproblems von $R_{\mu\nu}$,

$$\det\left(R_{\mu\nu} - \lambda \, g_{\mu\nu}\right) = 0 \; ,$$

darstellen, kann man statt (4.86) auch die 3 Wurzeln dieser Säkulargleichung, d. h. die *Eigenwerte des Ricci-Tensors*, als Krümmungsskalare angeben.

Für $N = 4$ *gibt es nach (4.85) bereits 14 Krümmungsskalare*, und ihre Zahl steigt für $N > 4$ rasch an. Für ihre Aufzählung nimmt man zweckmäßig Bezug auf eine allgemeine Zerlegung von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ (für $N \geq 3$) in Terme, die allein durch den Ricci-Tensor festgelegt sind und bei Kontraktion von λ, ν auch gerade diesen Tensor liefern, und einen für $N \geq 4$ auftretenden Zusatzterm $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$, der dann keinerlei nichtverschwindende Kontraktionen mehr besitzt:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = {} & \frac{1}{N-2} \left(g_{\lambda\nu} \, R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} \, R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \, R_{\lambda\kappa} + g_{\mu\kappa} \, R_{\lambda\nu}\right) \\ & - \frac{R}{(N-1)(N-2)} \left(g_{\lambda\nu} \, g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa} \, g_{\mu\nu}\right) + C_{\lambda\mu\nu\kappa} \qquad (N \geq 3) \; . \end{aligned} \tag{4.87}$$

Der Tensor $C_{\lambda\mu\nu\kappa}$ heißt *Weylscher oder konformer Tensor*. Er besitzt alle Symmetrieeigenschaften von $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ und erfüllt, da kontraktionsfrei, die $\frac{1}{2} N (N + 1)$ zusätzlichen Bedingungen

$$C^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa} = 0 \qquad (\mu, \kappa = 1 \ldots. N \text{ bzw. } 0 \ldots. N - 1) \; . \tag{4.88}$$

Die Anzahl seiner linear unabhängigen Elemente ist daher nur

$$Z_N - \frac{1}{2} N (N + 1) = \frac{1}{12} N (N + 1) (N + 2) (N - 3) \tag{4.89 a}$$

$$= I_N - N \; . \tag{4.89 b}$$

Die I_N Krümmungsinvarianten können dann gewählt werden als die N Eigenwerte des Ricci-Tensors, sofern diese nichtentartet sind, und $I_N - N$ weitere, die erhalten werden als die sämtlichen Komponenten des Weyl-Tensors in einem speziellen Koordinatensystem, das an einem Punkt x $R_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ zugleich diagonal und die Diagonalelemente von $g_{\mu\nu}$ zu $+1$, -1, 0 macht.

Von den Fällen, in denen diese Konstruktion infolge Entartung der Ricci-Eigenwerte nicht anwendbar ist, erwähnen wir nur den physikalisch wichtigen *Fall* $R_{\mu\kappa} = 0$, da er, wie im nächsten Kapitel zu zeigen, ein Gravitationsfeld im „leeren“, d. h. quellenfreien Raum beschreibt. *Für* $N = 4$ sind in diesem Falle die 14 Krümmungsinvarianten gegeben durch die 10 verschwindenden Komponenten von $R_{\mu\kappa}$ (da das Verschwinden eines Tensors eine invariante Aussage ist!) und die 4 bi- und trilinearen Bildungen

$$\begin{aligned} &C^{\lambda\mu\nu\kappa}\, C_{\lambda\mu\nu\kappa}\ , \qquad && \frac{1}{\sqrt{g}}\, \varepsilon^{\lambda\mu}{}_{\rho\sigma}\, C^{\rho\sigma\nu\kappa}\, C_{\lambda\mu\nu\kappa}\ , \\ &C_{\lambda\mu\nu\kappa}\, C^{\nu\kappa\rho\sigma}\, C_{\rho\sigma}{}^{\lambda\mu}\ , \qquad && \frac{1}{\sqrt{g}}\, \varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\zeta\eta}\, C_{\zeta\eta}{}^{\lambda\mu}\, C_{\lambda\mu}{}^{\nu\kappa}\, C_{\nu\kappa}{}^{\rho\sigma} \end{aligned} \tag{4.90}$$

in den Elementen des Weyl-Tensors.

Die Abzählung (4.85) von I_N gibt zwar die Anzahl der *linear (algebraisch) unabhängigen*, nicht aber der funktional unabhängigen Krümmungsskalare an. Letztere ist kleiner als I_N, da *Differentialbeziehungen* zwischen den Invarianten bestehen, wie z. B. die Bianchi-Identitäten (4.55) für den Ricci-Tensor zeigen.

4.7 Killing-Vektoren und symmetrische Räume

Die Metrik im Gravitationsfeld besitzt nicht die hohe Symmetrie der Minkowski-Metrik (1.77), die ja unter der vollen 10-parametrigen Poincaré-Gruppe invariant ist. Trotzdem lassen viele Metriken, insbesondere die heute gebräuchlichen kosmologischen Modelle, gewisse Gruppen von Invarianztransformationen zu, die das Studium der Raumzeit erheblich vereinfachen können. Wir müssen zunächst sehen, wie man derartige Symmetrien in kovarianter Weise beschreibt.

Eine Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ heißt *forminvariant* unter der Koordinatentransformation $x \to x'$, wenn die transformierte Metrik $g'_{\mu\nu}(x')$ die gleiche Funktion ihrer Argumente x'^{μ} ist, wie es die ursprüngliche Metrik als Funktion ihrer Argumente x^{μ} war, d. h.

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \qquad \forall\ y \tag{4.91}$$

[Man beachte den Unterschied zur Definition eines Skalars, die

$$S^{'}(x^{'}) \,=\, S\,(x)$$

lautet; die funktionale Form von $S^{'}(x^{'0} \ldots x^{'3})$ kann hier ganz anders als die von $S\,(x)$ sein, wenn nur die Zahlenwerte beider Funktionen an zueinander korrespondierenden Koordinatenquadrupeln gleich sind.] Da sich allgemein bei $x \,\rightarrow\, x^{'}$ die Metrik gemäß

$$g_{\mu\nu}\,(x) \;=\; \frac{\partial\, x^{'\rho}}{\partial\, x^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{'\sigma}}{\partial\, x^{\nu}}\,g^{'}_{\rho\sigma}\,(x^{'}) \tag{4.92}$$

transformiert, erhält man aus (4.91) die grundlegende *Bedingung für Forminvarianz der Metrik*

$$\boxed{g_{\mu\nu}\,(x) \;=\; \frac{\partial\, x^{'\rho}}{\partial\, x^{\mu}}\,\frac{\partial\, x^{'\sigma}}{\partial\, x^{\nu}}\,g_{\rho\sigma}\,(x^{'})} \tag{4.93}$$

Lässt eine Transformation $x \,\rightarrow\, x^{'}$ die Metrik eines Riemannschen Raumes invariant im Sinne von (4.93), so heißt sie eine *Isometrie* dieses Raumes.

Die Gleichungen (4.93) stellen ein im Allgemeinen sehr kompliziertes System von Bedingungen für die Funktionen $x^{'\mu}\,(x)$ dar, das schon deshalb keine Lösungen zu haben braucht, weil es sich im allgemeinsten Falle um 10 Gleichungen für nur 4 Funktionen handelt; das allgemeinste Gravitationsfeld besitzt keinerlei Symmetrien. Die Frage nach der Existenz von Isometrien wird überschaubarer, wenn man zunächst *infinitesimale* Koordinatentransformationen

$$x^{'\mu} \;=\; x^{\mu} \,+\, \varepsilon\,\xi^{\mu}\,(x) \qquad \mathit{mit} \quad |\varepsilon| \,\ll\, 1 \tag{4.94}$$

betrachtet, aus denen man die endlichen durch Iteration aufbauen kann. Für sie lauten die Bedingungen (4.93) nach Linearisierung in ε

$$\frac{\partial\,\xi^{\rho}\,(x)}{\partial\, x^{\mu}}\,g_{\rho\nu}\,(x) \,+\, \frac{\partial\,\xi^{\sigma}\,(x)}{\partial\, x^{\nu}}\,g_{\mu\sigma}\,(x) \,+\, \xi^{\lambda}\,(x)\,\frac{\partial\, g_{\mu\nu}\,(x)}{\partial\, x^{\lambda}} \;=\; 0\;. \tag{4.95}$$

In den kovarianten Komponenten $\xi_{\mu}\,(x) \;=\; g_{\mu\nu}\,(x)\,\xi^{\nu}\,(x)$ geschrieben lautet dies

$$\frac{\partial\,\xi_{\nu}}{\partial\, x^{\mu}} \,+\, \frac{\partial\,\xi_{\mu}}{\partial\, x^{\nu}} \,+\, \xi_{\kappa}\,g^{\kappa\lambda}\left[-\frac{\partial\, g_{\lambda\nu}}{\partial\, x^{\mu}} \,-\, \frac{\partial\, g_{\lambda\mu}}{\partial\, x^{\nu}} \,+\, \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\lambda}}\right] \;=\; 0$$

oder mit (2.41)

$$\frac{\partial\,\xi_{\nu}}{\partial\, x^{\mu}} \,+\, \frac{\partial\,\xi_{\mu}}{\partial\, x^{\nu}} \,-\, 2\,\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}\,\xi_{\kappa} \;=\; 0\;, \tag{4.96 a}$$

d. h.

$$\boxed{\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \, .} \tag{4.96 b}$$

Ein Vektorfeld $\xi_\mu(x)$, das diesen Dgln. genügt, heißt ein *Killingsches Vektorfeld* oder kurz Killing-Vektor der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$. Die kovarianten Ableitungen eines kovarianten Killing-Vektors bilden also einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe.

Die Ermittlung der infinitesimalen Isometrien einer gegebenen Metrik ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung ihrer sämtlichen Killing-Vektoren. Wegen der Linearität der Dgln. (4.96) ist jede Linearkombination von Killing-Vektoren mit *konstanten* Koeffizienten wieder ein Killing-Vektor, d. h. die Killing-Vektoren bilden eine *linearen Raum*, und dieser Raum bestimmt die infinitesimalen Isometrien der Metrik.

Die Killing-Gleichungen (4.96) gestatten es, das Vektorfeld $\xi_\mu(x)$ aus den Werten von ξ_μ und $\xi_{\mu;\nu}$ an einem beliebigen Punkt X zu berechnen. Nach Gleichung (4.27) für den Kommutator kovarianter Ableitungen gilt

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} = -R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\mu}\,\xi_\lambda \tag{4.97}$$

Addiert man zu dieser Gleichung ihre beiden zyklischen Permutationen bezüglich (ρ, σ, μ), so tritt rechter Hand die Kombination

$$R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\mu} + R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\rho} + R^{\lambda}{}_{\mu\rho\sigma}$$

auf, die nach dem Zyklizitätssatz (4.40) für den Krümmungstensor verschwindet, und man erhält

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} + \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\sigma;\rho;\mu} + \xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = 0 \tag{4.98}$$

für jeden kovarianten Vektor ξ_μ. Speziell für Killing-Vektoren bedeutet dies wegen Gl. (4.96 b)

$$\xi_{\rho;\sigma;\mu} - \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = 0 \tag{4.99}$$

und daher wird (4.97) zu

$$\boxed{\xi_{\mu;\sigma;\rho} = -R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\mu}\,\xi_\lambda \qquad (\xi_\mu \text{ Killing-Vektor})} \, . \tag{4.100}$$

Diese Gleichungen gestatten, sofern sie miteinander verträglich sind, die Berechnung der zweiten Ableitungen $\partial^2 \xi_\mu / \partial x^\sigma \, \partial x^\rho$ eines Killing-Vektors an einem Punkt X, wenn $\xi_\mu(X)$ und $\xi_{\mu;\sigma}(X)$ an diesem Punkt gegeben sind; durch Bildung von Ableitungen in Gleichung (4.100) können auch die höheren Ableitungen von ξ_μ bei X sukzessive bestimmt werden. Sie alle ergeben sich als Linearkombinationen von $\xi_\mu(X)$ und $\xi_{\mu;\sigma}(X)$.

Mit ihnen kann $\xi_\mu(x)$ als Potenzreihe in $x - X$ in einem gewissen Gebiet um X konstruiert werden. Jeder Killing-Vektor $\xi_\mu^{(n)}(x)$ einer Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ kann damit in der Form

$$\xi_\mu^{(n)}(x) = A_\mu{}^\kappa(x, X)\,\xi_\kappa{}^{(n)}(X) + B_\mu{}^{\kappa\lambda}(x, X)\,\xi_{\kappa;\lambda}^{(n)}(X) \tag{4.101}$$

geschrieben werden, wobei die Funktionen $A_\mu{}^\kappa$, $B_\mu{}^{\kappa\lambda}$ nur von der Metrik und vom Punkt X abhängen und daher allen Killing-Vektoren gemeinsam sind. Jeder Killing-Vektor $\xi_\mu{}^{(n)}(x)$ einer gegebenen Metrik ist damit durch die Werte $\xi_\mu{}^{(n)}(X)$ und $\xi_{\mu;\nu}^{(n)}(X)$ an einem beliebigen Punkt X bereits eindeutig festgelegt.

Ein Satz von Killing-Vektoren derselben Metrik wird wie üblich linear unabhängig (l. u.) genannt, wenn eine lineare Beziehung

$$\sum_n c_n\,\xi_\mu{}^{(n)}(x) = 0 \tag{4.102}$$

mit konstanten Koeffizienten c_n nur in trivialer Form, d. h. mit allen $c_n = 0$ bestehen kann. Betrachten wir in N Dimensionen einen Satz von M Killing-Vektoren $\xi_\mu{}^{(n)}$, $n = 1 \ldots M$. Für jedes n gibt es N Größen $\xi_\mu{}^{(n)}(X)$ und, da nach (4.96 b) der Tensor $\xi_{\mu;\nu}$ antisymmetrisch ist, $\frac{1}{2}N(N-1)$ Größen $\xi_{\mu;\nu}^{(n)}(X)$. Man kann die Größen $\{\xi_\mu{}^{(n)}(X);\, \xi_{\mu;\nu}^{(n)}(X)\}$ als die Komponenten von M Vektoren in einem $\frac{1}{2}N(N+1)$-dimensionalen Raum auffassen. Für $M > \frac{1}{2}N(N+1)$ können diese Vektoren nicht l. u. sein, d. h. es müssen nichttriviale Beziehungen der Form

$$\sum_{n=1}^{M} c_n\,\xi_\mu{}^{(n)}(X) = \sum_{n=1}^{M} c_n\,\xi_{\mu;\nu}^{(n)}(X) = 0$$

zwischen ihnen bestehen. Dann erfüllen aber nach (4.101) die Killing-Vektoren $\xi_\mu{}^{(n)}$ an *allen* Raumpunkten Relationen vom Typ (4.102). Also gibt es *in N Dimensionen höchstens $\frac{1}{2}N(N+1)$ – in 4 Dimensionen demnach höchstens 10 – unabhängige Killing-Vektoren.* (Natürlich werden in N Dimensionen bereits für jeden Satz von mehr als N Vektoren lineare Abhängigkeiten bestehen, aber deren Koeffizienten sind bei Vektor*feldern* i. a. x-abhängig, nicht Konstanten.)

Ein Raum, dessen Metrik mindestens einen Killing-Vektor zulässt, heißt allgemein ein *symmetrischer* Raum. Insbesondere heißt ein Raum *homogen*, wenn es in ihm infinitesimale Isometrien (4.94) gibt, die jeden beliebigen Punkt X in jeden anderen Punkt einer (hinreichend kleinen) Umgebung von X überführen. Die Metrik muss also Killing-Vektoren besitzen, die an jedem gegebenen Punkt X alle möglichen vektoriellen Werte annehmen. In einem N-dimensionalen Raum muss es dann mindestens N Killing-Vektoren ${\xi_\mu}^{(\lambda)}(x;\, X)$ geben, die man so wählen kann, dass

$$ {\xi_\mu}^{(\lambda)}(X;\, X) \,=\, {\delta_\mu}^\lambda \qquad (\mu,\, \lambda \,=\, 1 \ldots N) \tag{4.103} $$

gilt; sie sind offensichtlich linear unabhängig.

Ein Raum heißt weiter *isotrop bezüglich eines Punktes* X, wenn er infinitesimale Isometrien (4.94) zulässt, die den Punkt X unverändert lassen (d. h. $\xi_\mu(X) \,=\, 0$) und deren Tensor kovarianter Ableitungen $\xi_{\mu;\,\nu}(X)$ alle mit der Antisymmetriebedingung (4.96 b) verträglichen Werte annimmt. Insbesondere kann man in N Dimensionen dann einen Satz von $\frac{1}{2}\, N\,(N \,-\, 1)$ Killing-Vektoren

$$ {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X) \,=\, -{\xi_\mu}^{(\lambda\,\kappa)}(x;\, X) \tag{4.104 a} $$

wählen mit den Eigenschaften

$$ {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(X;\, X) \,=\, 0 \;, \tag{4.104 b} $$

$$ {\xi_{\mu;\,\nu}}^{(\kappa\,\lambda)}(X;\, X) \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\, x^\nu}\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X)\right]_{x\,=\,X} \,=\, {\delta_\mu}^\kappa\, {\delta_\nu}^\lambda \,-\, {\delta_\mu}^\lambda\, {\delta_\nu}^\kappa \;. \tag{4.104 c} $$

Diese Killing-Vektoren sind l. u., denn jede Relation der Form $\sum\limits_{\kappa\,\lambda} c_{\kappa\,\lambda}\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X) \,=\, 0$ mit konstanten $c_{\kappa\,\lambda}$, die o. B. d. A. $c_{\kappa\,\lambda} \,=\, -c_{\lambda\,\kappa}$ erfüllen, würde nach (4.104 c) bei X die Beziehung $c_{\mu\nu} \,-\, c_{\nu\,\mu} \,=\, 2\, c_{\mu\nu} \,=\, 0$ zur Folge haben.

Ein Raum heißt *isotrop um jeden Punkt*, wenn Killing-Vektoren ${\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X)$ und ${\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X + d\,X)$ bei X *und* bei $X + d\,X$ mit beliebigem $d\,X$ existieren. Da jede Linearkombination dieser Vektoren wieder ein Killing-Vektor ist, ist dann $\partial\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X)\, /\, \partial\, X^\rho$ für $\rho \,=\, 1 \ldots N$ ebenfalls je ein Killing-Vektor dieser Metrik. Um diese Killing-Vektoren bei X zu berechnen, beachtet man, dass ${\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(X;\, X)$ hier identisch in X verschwindet; daher gilt

$$ 0 \,=\, \frac{\partial}{\partial\, X^\rho}\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(X;\, X) \,=\, \left[\frac{\partial {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}}{\partial\, x^\rho}\right]_{x\,=\,X} \,+\, \left[\frac{\partial\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}}{\partial\, X^\rho}\right]_{x\,=\,X} $$

und somit nach (4.104 c)

$$ \left[\frac{\partial\, {\xi_\mu}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X)}{\partial\, X^\rho}\right]_{x\,=\,X} \,=\, -{\delta_\mu}^\kappa\, {\delta_\rho}^\lambda \,+\, {\delta_\mu}^\lambda\, {\delta_\rho}^\kappa \;. \tag{4.105} $$

Aus diesen Killing-Vektoren lässt sich nun leicht zu jedem gegebenen Vektor a_μ ein Killing-Vektor $\xi_\mu(x)$ konstruieren, der bei $x = X$ den Wert a_μ annimmt; z. B. leistet

$$\xi_\mu(x) = \frac{1}{N-1}\, a_\lambda \frac{\partial}{\partial X^\kappa}\, \xi_\mu{}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X) \tag{4.106}$$

wegen (4.105) und

$$-\delta_\mu{}^\kappa\, \delta_\kappa{}^\lambda + \delta_\mu{}^\lambda\, \delta_\kappa{}^\kappa = (N-1)\, \delta_\mu{}^\lambda \tag{4.107}$$

das Gewünschte. Somit ist *ein um jeden Punkt isotroper Raum auch homogen.*

Ein Raum heißt *maximal symmetrisch*, wenn seine Metrik die Höchstzahl von $\frac{1}{2}N(N+1)$ – in vier Dimensionen als von 10 – Killing-Vektoren besitzt. Insbesondere gibt es in einem homogenen und zugleich um einen Punkt X isotropen Raum die N Killing-Vektoren $\xi_\mu{}^{(\lambda)}(x;\, X)$ und die $\frac{1}{2}N(N-1)$ Killing-Vektoren $\xi_\mu{}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X)$. Diese insgesamt $\frac{1}{2}N(N+1)$ Killing-Vektoren sind auch l. u., denn aus dem Bestehen einer Relation

$$c_\lambda\, \xi_\mu{}^{(\lambda)}(x;\, X) + c_{\kappa\,\lambda}\, \xi_\mu{}^{(\kappa\,\lambda)}(x;\, X) = 0 \qquad (c_{\lambda\,\kappa} = -c_{\kappa\lambda})$$

mit konstanten Koeffizienten c_λ, $c_{\kappa\lambda}$ folgt durch Differenzieren nach x^ρ und Übergang zu $x = X$ wegen (4.104 c) sofort $c_{\mu\,\rho} = 0$; Übergang zu $x = X$ in der Relation selbst gibt dann $c_\mu = 0$. Ein *homogener und um einen Punkt isotroper Raum ist also maximal symmetrisch.* Damit ist auch *ein um jeden Punkt isotroper Raum maximal symmetrisch.*

Umgekehrt ist ein *maximal symmetrischer Raum notwendig homogen und um jeden Punkt isotrop.* Existieren nämlich $\frac{1}{2}N(N+1)$ linear unabhängige Killing-Vektoren $\xi_\mu{}^{(m)}(x)$, durchnumeriert mit dem Index m, so können wir die $\left[\frac{1}{2}N(N+1)\right]^2$ Größen

$$\xi_\mu{}^{(m)}(X) \qquad (\mu = 1 \ldots N) \qquad \text{und} \qquad \xi_{\mu;\,\nu}{}^{(m)}(X) \qquad (\mu > \nu) \tag{4.108}$$

als Elemente einer $\frac{1}{2}N(N+1)$-dimensionalen Matrix mit Zeilenindex m auffassen. Diese Matrix ist nichtsingulär, denn andernfalls bestünde eine lineare Abhängigkeit

$$\sum_m c_m \begin{pmatrix} \xi_\mu{}^{(m)}(X) \\ \xi_{\mu;\,\nu}{}^{(m)}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwischen ihren Zeilen, und nach (4.101) wären die Killing-Vektoren dann, entgegen der Voraussetzung, nicht l. u. Wegen der Nichtsingularität der Matrix hat für jeden vorgegebenen $\frac{1}{2}N(N+1)$-komponentigen Spaltenvektor mit Komponenten

$$a_\mu \quad (\mu = 1 \ldots N) \quad \text{und} \quad b_{\mu\nu} = -b_{\nu\,\mu} \quad (\mu,\, \nu = 1 \ldots N \quad \text{mit} \quad \mu > \nu) \tag{4.109}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\sum_m d_m \begin{pmatrix} {\xi_\mu}^{(m)}(X) \\ {\xi_{\mu;\,\nu}}^{(m)}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_\mu \\ b_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{4.110}$$

eine eindeutige Lösung $\{d_m\}$. Der Vektor

$$\xi_\mu(x) = \sum_m d_m\, {\xi_\mu}^{(m)}(x) \tag{4.111}$$

ist daher ein Killing-Vektor mit den beliebig vorgegebenen Anfangsdaten $\xi_\mu(X) = a_\mu$, $\xi_{\mu;\,\nu}(X) = b_{\mu\nu}$. Da a_μ ein beliebiger Vektor ist, ist der Raum somit homogen, und da $b_{\mu\nu}$ eine beliebige antisymmetrische $N \times N$-Matrix ist, ist der Raum auch isotrop um X und (da X beliebig war) sogar um jeden Punkt.

Das einfachste Beispiel eines maximal symmetrischen Raumes ist ein *N-dimensionaler flacher Raum*, dessen Metrik verschwindende Krümmung $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ besitzt. Dort kann man Koordinaten (nämlich cartesische) wählen, in denen $g_{\mu\nu}$ konstante Diagonalmatrix und der affine Zusammenhang Null ist. Dann lautet Gleichung (4.100) für Killing-Vektoren einfach

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\sigma\, \partial x^\rho}\, \xi_\mu = 0 \tag{4.112 a}$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu}\, x^\nu \qquad (a_\mu,\, b_{\mu\nu} \text{ Konstanten})\ . \tag{4.112 b}$$

Damit dies auch Lösung der Killing-Gleichungen (4.96) ist (mit gewöhnlichen statt kovarianten Ableitungen!), muss offenbar

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\,\mu} \tag{4.112 c}$$

sein. Wir können daher einen Satz von $\frac{1}{2}\, N\,(N + 1)$ Killing-Vektoren folgendermaßen wählen:

$${\xi_\mu}^{(\kappa)}(x) = {\delta_\mu}^\kappa \qquad (\forall\, x)\ \ (\kappa = 1 \ldots N)\ , \tag{4.113 a}$$

$$\begin{gathered} {\xi_\mu}^{(\kappa,\,\lambda)}(x) = {\delta_\mu}^\kappa\, x^\lambda - {\delta_\mu}^\lambda\, x^\kappa \\ (\kappa,\, \lambda = 1 \ldots N \quad \text{mit z. B.} \quad \kappa > \lambda)\ . \end{gathered} \tag{4.113 b}$$

Diese sind l. u., und damit ist jeder flache Raum maximal symmetrisch. (Die Umkehrung gilt nicht!) Die N Vektoren (4.113 a) stellen Translationen in den N möglichen

Richtungen, die $\frac{1}{2}N(N-1)$ Vektoren (4.113 b) infinitesimale Drehungen bzw. (bei Lorentz-artiger Signatur der flachen Metrik) Lorentz-Transformationen dar.

Als weiteres Beispiel betrachten wir S^2, die *zweidimensionale Kugeloberfläche*, in den Koordinaten

$$x^1 = \vartheta\ , \qquad x^2 = \varphi\ ,$$

d. h. in Polarkoordinaten ($\vartheta = 0 \ldots \pi$, $\varphi = 0 \ldots 2\pi$). Ihre Metrik

$$d\,s^2 = d\,\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\,\varphi^2\ , \tag{4.114 a}$$

d. h.

$$g_{11} = 1 = \text{const.}\ , \qquad g_{22} = \sin^2 x^1\ , \qquad g_{12} = 0 \tag{4.114 b}$$

wird z. B. als Winkelanteil in den „statisch-isotropen“ Metriken von Abschnitt 6.1 und 6.2 auftreten. Die $\frac{1}{2}2(2+1) = 3$ Killing-Gleichungen (4.96) oder (4.95) lauten hier

$$(\mu,\nu) = (1,1): \qquad \frac{\partial}{\partial\,\vartheta}\,\xi^1(\vartheta,\varphi) = 0\ , \tag{4.115 a}$$

$$(\mu,\nu) = (1,2): \qquad \frac{\partial}{\partial\,\varphi}\,\xi^1(\vartheta,\varphi) + \sin^2\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\,\vartheta}\,\xi^2(\vartheta,\varphi) = 0\ , \tag{4.115 b}$$

$$(\mu,\nu) = (2,2): \qquad \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\,\varphi}\,\xi^2(\vartheta,\varphi) + \cos\vartheta\,\xi^1(\vartheta,\varphi) = 0\ . \tag{4.115 c}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\xi^1(\varphi) = a\,\sin(\varphi+\delta) \tag{4.116 a}$$

$$\xi^2(\vartheta,\varphi) = a\,\cot\vartheta\,\cos(\varphi+\delta) + b \tag{4.116 b}$$

mit 3 freien Konstanten a, b, δ. Man kann daher sofort drei l. u. Killing–Vektoren angeben, z. B.

$$\{\xi^{(1)\,\mu}\} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cot\vartheta\,\cos\varphi \end{pmatrix}\ , \qquad \begin{array}{l} \leftarrow\ \mu = 1 \text{ bzw. } \vartheta \\ \leftarrow\ \mu = 2 \text{ bzw. } \varphi \end{array} \tag{4.117 a}$$

$$\{\xi^{(2)\,\mu}\} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \cot\vartheta\,\sin\varphi \end{pmatrix}\ , \tag{4.117 b}$$

$$\{\xi^{(3)\,\mu}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ . \tag{4.117 c}$$

Die *Kugeloberfläche besitzt* also ebenso wie der flache zweidimensionale Raum (der einen rotations- und zwei translationsartige Vektoren (4.113) zulässt), *drei l. u. Killing-Vektoren.* Wir erinnern nochmals an die Bedeutung von (4.117) gemäß (4.94): z. B. besagt (4.117 c), dass die Metrik unter den Transformationen

$$\vartheta \to \vartheta\,, \qquad \varphi \to \varphi + \varepsilon \qquad (|\varepsilon| \ll 1)$$

forminvariant ist im Sinne von (4.93), was in diesem Falle wegen der φ-Unabhängigkeit von (4.114 b) offensichtlich und sogar für endliche ε gültig ist.

Ob ein Raum ein symmetrischer Raum ist, d. h. seine Metrik gewisse Killing-Vektoren besitzt, hängt davon ab, ob die DGln. (4.100) für einen gegebenen Satz $\xi_\mu\,(X)$, $\xi_{\mu;\,\nu}\,(X)$ von Anfangsdaten eine Lösung besitzen, und damit von der *Integrabilität*, d. h. wechselseitigen Verträglichkeit dieser DGln. Diese wiederum hängt von der speziellen Metrik ab; wie schon betont, gibt es Metriken, die keinerlei Symmetrie besitzen, weil (4.100) nichtintegrabel ist. Eine wichtige *notwendige* Bedingung für die Integrabilität lässt sich angeben, wenn man von der Formel (4.28) für die Vertauschung kovarianter Ableitungen eines Tensors ausgeht:

$$\xi_{\sigma;\,\mu;\,\rho;\,\nu} - \xi_{\sigma;\,\mu;\,\nu;\,\rho} = -R^\lambda{}_{\sigma\rho\nu}\,\xi_{\lambda;\,\mu} - R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}\,\xi_{\sigma;\,\lambda}\,. \tag{4.118}$$

Verwendung von (4.100) auf der linken Seite ergibt die Bedingung

$$-R^\lambda{}_{\rho\mu\sigma}\,\xi_{\lambda;\,\nu} - R^\lambda_{\rho\mu\sigma;\,\nu}\,\xi_\lambda + R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma}\,\xi_{\lambda;\,\rho} + R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma;\,\rho}\,\xi_\lambda$$

$$= -R^\lambda{}_{\sigma\rho\nu}\,\xi_{\lambda;\,\mu} + R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}\,(-\xi_{\sigma;\,\lambda})$$

oder nach Anwendung der Killing-Gleichungen (4.96 b) im letzten Term

$$\boxed{\begin{aligned}&\Big[-R^\lambda{}_{\sigma\rho\nu}\,\delta^\kappa{}_\mu + R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}\,\delta^\kappa{}_\sigma - R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu}\,\delta^\kappa{}_\nu + R^\lambda{}_{\nu\sigma\mu}\,\delta^\kappa{}_\rho\Big] \times \\ &\times \xi_{\lambda;\,\kappa} = (R^\lambda{}_{\rho\sigma\mu;\,\nu} - R^\lambda{}_{\nu\sigma\mu;\,\rho})\,\xi_\lambda\,.\end{aligned}} \tag{4.119}$$

Diese Bedingungen sind nur im flachen Raume leer; im allgemeinen Fall stellen sie lineare Bedingungen zwischen den $\xi_\lambda\,(x)$ und den $\xi_{\lambda;\,\kappa}\,(x)$ an jedem Punkt x dar, die insbesondere von den Anfangsdaten für (4.100) erfüllt werden müssen. Andererseits enthält Gl. (4.119) Information über die Krümmung und damit die Metrik, wenn man Vorkenntnisse über die evtl. vorhandenen Killing-Vektoren besitzt.

Der symmetrische Charakter eines Raumes, d. h. die Existenz einer gewissen Anzahl von Killing-Vektoren, ist eine vom Koordinatensystem unabhängige *innere Eigenschaft* des Raumes. Hat eine Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ Killing-Vektoren $\xi_\mu^{(n)}(x)$ und transformiert sie sich bei $x \to x'(x)$ gemäß (3.11), so hat, da die Killing-Gleichungen (4.96) allgemein kovariant sind, die transformierte Metrik $g'_{\mu\nu}(x')$ die transformierten Vektoren

$$\xi'^{\,\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\,\mu}}{\partial x^\nu}\,\xi^\nu(x)$$

wiederum als Killing-Vektoren, und diese sind. l. u., wenn die Ausgangsvektoren es waren. Insbesondere sind Aussagen wie die der Homogenität oder Isotropie eines Raumes unabhängig vom Koordinatensystem.

Killing-Vektoren und Erhaltungssätze. Besitzt ein Raum Symmetrieeigenschaften, d. h. hat seine Metrik Killing-Vektoren, so folgen daraus Erhaltungssätze für in diesem Raum frei fallende Probekörper, für darin vorhandene nichtgravitative Felder usw. Wie betrachten zunächst die Bewegungsgleichungen für freien Fall,

$$\frac{D}{D\tau}\,u^\lambda(\tau) = 0\,, \qquad u^\lambda = \frac{d\,x^\lambda}{d\tau} \quad \text{mit} \quad u^\lambda\,u_\lambda = 1\,. \tag{4.120}$$

Besitzt die Metrik ein Killing-Vektorfeld $\xi_\lambda(x)$, so folgt durch Kontraktion von (4.120) mit diesem Vektor am Bahnpunkt $x = x(\tau)$

$$\begin{aligned}\xi_\lambda(x(\tau))\,\frac{D}{D\tau}\,u^\lambda(\tau) &= \xi_\lambda\left[\delta^\lambda{}_\nu\,\frac{d}{d\tau} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\,u^\mu\right]u^\nu \\ &= \frac{d}{d\tau}\,(\xi_\lambda\,u^\lambda) - u^\nu\left[\frac{d}{d\tau}\,\xi_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\,u^\mu\,\xi_\lambda\right] \\ &= \frac{d}{d\tau}\,(\xi_\lambda\,u^\lambda) - u^\nu\left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\xi_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\,\xi_\lambda\right]u^\mu \\ &= \frac{d}{d\tau}\,(\xi_\lambda\,u^\lambda) - \xi_{\nu;\,\mu}\,u^\mu\,u^\nu = 0\,,\end{aligned} \tag{4.121}$$

wobei (3.84) und (3.87) verwendet wurden. Nun ist aber nach den Killing-Gleichungen (4.96 b) $\xi_{\nu;\,\mu}$ antisymmetrisch, d. h. der letzte Term in (4.121) verschwindet. Es folgt

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\,[\xi_\lambda(x(\tau))\,u^\lambda(\tau)] = 0\,,} \tag{4.122}$$

d. h. *zu jedem Killing-Vektor einer Metrik gibt es eine Erhaltungsgröße der frei fallenden Bewegung*, die durch Kontraktion dieses Vektors mit der Vierergeschwindigkeit der Bewegung zu konstruieren ist.

Im flachen Raum mit den $\frac{1}{2}\,N\,(N\,+\,1)$ Killing-Vektoren (4.113 a/b) gibt es dementsprechend $\frac{1}{2}\,N\,(N\,+\,1)$ Erhaltungsgrößen (in vier Dimensionen 10) bei der kräftefreien Bewegung.

Als nichttriviales Beispiel betrachten wir die in Abschnitt 6.1 zu diskutierende *statisch-isotrope Metrik* in der Standardform (6.9), die auf Koordinaten

$$\{x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3\} \;=\; \{t,\, r,\, \vartheta,\, \varphi\}$$

bezogen ist. Ihr ϑ- φ-Anteil ist, von dem Vorfaktor $-r^2$ abgesehen, identisch mit der Kugelflächenmetrik (4.114 a) und gestattet daher 3 Killing-Vektoren, deren kontravariante ϑ- und φ-Komponenten durch (4.117) gegeben und deren t- und r-Komponenten Null sind (d. h. t und r bleiben bei den entsprechenden infinitesimalen Isometrien untransformiert). Wir bilden aus (4.117) kovariante Komponenten mittels

$$\xi_\vartheta \;=\; g_{\vartheta\vartheta}\,\xi^\vartheta \;=\; -r^2\,\xi^\vartheta$$

$$\xi_\varphi \;=\; g_{\varphi\varphi}\,\xi^\varphi \;=\; -r^2\,\sin^2\vartheta\,\xi^\varphi$$

und haben daher die *kovarianten Killing-Vektoren*

$$\{\xi_\lambda{}^{(1)}\} \;=\; r^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \quad \lambda = t \\ \leftarrow \quad \lambda = r \\ \leftarrow \quad \lambda = \vartheta \\ \leftarrow \quad \lambda = \varphi \end{array} \tag{4.123 a}$$

$$\{\xi_\lambda{}^{(2)}\} \;=\; r^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\varphi \\ -\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,sin\varphi \end{pmatrix} \quad , \tag{4.123 b}$$

$$\{\xi_\lambda{}^{(3)}\} \;=\; r^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin^2\,\vartheta \end{pmatrix} \quad . \tag{4.123 c}$$

Dann besagt (4.122), dass beim freien Fall eines Teilchens in dieser Metrik die Größen

$$\xi_\lambda^{(1)}\,u^\lambda \;\equiv\; r^2\left(-\sin\varphi\,\frac{d\,\vartheta}{d\,\tau} \;-\; \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\cos\varphi\,\frac{d\,\varphi}{d\,\tau}\right) \;=\; J^1 \tag{4.124 a}$$

$$\xi_\lambda^{(2)}\,u^\lambda \;\equiv\; r^2\left(\cos\varphi\,\frac{d\,\vartheta}{d\,\tau} \;-\; \sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\sin\varphi\,\frac{d\,\varphi}{d\,\tau}\right) \;=\; J^2 \tag{4.124 b}$$

$$\xi^{(3)}_{\lambda}\, u^{\lambda} \;=\; r^2\, \sin^2\vartheta\, \frac{d\,\varphi}{d\,\tau} \;=\; J^3 \tag{4.124 c}$$

Konstanten der Bewegung sind. Wie man leicht nachrechnet, sind diese Größen die 3 Komponenten des „Quasi-Drehimpulses“

$$\vec{J} \;=\; \vec{x}\,(\tau) \;\times\; \frac{d\,\vec{x}}{d\,\tau} \tag{4.125}$$

mit

$$\vec{x} \;=\; r\,\cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\,\cos\varphi \\ \sin\vartheta\,\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \;. \tag{4.126}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Drehimpulserhaltung im Zentralkraftproblem der Newtonschen Mechanik. – Wir erwähnen noch, dass diese Metrik nur noch einen weiteren l. u. Killing-Vektor, nämlich

$$\{\xi^{(4)\,\mu}\} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;, \tag{4.127}$$

zulässt, der zum Quasi-Energieerhaltungssatz (Gl. (6.63) weiter unten in Kap.6) Anlass gibt: nach (4.122) ist

$$\xi^{(4)}_{\lambda}\, u^{\lambda} \;=\; \xi^{(4)\,t}\, g_{tt}\, u^{t} \;=\; g_{tt}\, \frac{d\,t}{d\,\tau}$$

Erhaltungsgröße, d. h.

$$\frac{d\,t}{d\,\tau} \;=\; \frac{\text{const.}}{g_{tt}\,(r\,(\tau))} \;. \tag{4.128}$$

Diese Beziehung zusammen mit der Konstanz von (4.125) wird zum Erhaltungssatz (6.63) führen.

4.8 Maximal symmetrische Räume

Wir untersuchen nun die maximal symmetrischen Räume genauer und zeigen, dass sie mit den sog. Räumen konstanter Krümmung identisch sind. Zwar sind vierdimensionale Räume maximaler Symmetrie – abgesehen vom Trivialfall des Minkowski-Raumes – keine Lösungen der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen. Wohl aber spielen, wie im nächsten Abschnitt genauer auszuführen sein wird, Räume mit zwei- oder dreidimensionalen maximal symmetrischen *Unterräumen* für die Gravitationstheorie eine wichtige Rolle. Wir lassen daher auch die Dimensionszahl N zunächst allgemein.

Ein maximal symmetrischer, d. h. die Höchstzahl $\frac{1}{2}\,N\,(N\,+\,1)$ von unabhängigen infinitesimalen Isometrien zulassender Raum ist, wie im vorigen Abschnitt betont, insbesondere isotrop um jeden Punkt. An *jedem* Punkt x eines solchen Raumes gibt es also Killing-Vektoren ξ_μ mit $\xi_\mu\,(x) \,=\, 0$ und $\xi_{\mu;\,\nu}\,(x) \,=$ beliebige antisymmetrische Matrix. Die Integrabilitätsbedingung (4.119) kann daher nur erfüllt sein, weil der antisymmetrische Anteil in $(\lambda,\, \kappa)$ des in eckigen Klammern stehenden Koeffizienten von $\xi_{\lambda;\,\kappa}$ identisch verschwindet. Wir erhalten also über den Krümmungstensor eines maximal symmetrischen Raumes die Aussage

$$\begin{aligned} &-R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\nu}\,\delta^{\kappa}{}_{\mu} \,+\, R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu}\,\delta^{\kappa}{}_{\sigma} \,-\, R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\mu}\,\delta^{\kappa}{}_{\nu} \,+\, R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\mu}\,\delta^{\kappa}{}_{\rho} \,= \\ &=\, -R^{\kappa}{}_{\sigma\rho\nu}\,\delta^{\lambda}{}_{\mu} \,+\, R^{\kappa}{}_{\mu\rho\nu}\,\delta^{\lambda}{}_{\sigma} \,-\, R^{\kappa}{}_{\rho\sigma\mu}\,\delta^{\lambda}{}_{\nu} \,+\, R^{\kappa}{}_{\nu\sigma\mu}\,\delta^{\lambda}{}_{\rho}\;. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Der maximal symmetrische Raum ist auch homogen, d. h. zu jedem Punkt x gibt es Killing-Vektoren, die dort jeden beliebigen vektoriellen Wert annehmen. Die Bedingung (4.119) – nach (4.129) nunmehr mit Null als linker Seite – kann also nur erfüllt sein, weil außerdem auf der rechten Seite

$$R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\mu;\,\nu} \,=\, R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\mu;\,\rho} \tag{4.130}$$

ist. Es wird uns genügen, die Eigenschaft (4.129) für alle x auszuwerten; (4.130) gibt dann nichts Neues, weil, wie wir oben sahen, die Isotropie um jeden Punkt bereits die Homogenität impliziert.

Aus (4.129) folgt durch Kontraktion von κ mit μ und Benutzung der Eigenschaften des Krümmungstensors

$$\begin{aligned} &-\underbrace{\delta^{\kappa}{}_{\kappa}}_{=N}\,R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\nu} \,+\, R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu} \,-\, R^{\lambda}{}_{\rho\sigma\nu} \,+\, R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\rho} \\ &=\, -R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\nu} \,+\, \underbrace{R^{\mu}{}_{\mu\rho\nu}}_{=0}\,\delta^{\lambda}{}_{\sigma} \,-\, \underbrace{R^{\mu}{}_{\rho\sigma\mu}}_{=-R_{\rho\sigma}}\,\delta^{\lambda}{}_{\nu} \,+\, \underbrace{R^{\mu}{}_{\nu\sigma\mu}}_{=-R_{\nu\sigma}}\,\delta^{\lambda}{}_{\rho} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(-N\,+\,1)\,R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\nu} \,+\, \underbrace{(R^{\lambda}{}_{\sigma\rho\nu} \,+\, R^{\lambda}{}_{\rho\nu\sigma} \,+\, R^{\lambda}{}_{\nu\sigma\rho})}_{=0} \\ &=\, \delta^{\lambda}{}_{\nu}\,R_{\rho\sigma} \,-\, \delta^{\lambda}{}_{\rho}\,R_{\nu\sigma} \end{aligned}$$

oder schließlich nach Herunterziehen von λ

$$\boxed{(N\,-\,1)\,R_{\lambda\sigma\rho\nu} \,=\, g_{\lambda\rho}\,R_{\nu\sigma} \,-\, g_{\lambda\nu}\,R_{\rho\sigma}\;.} \tag{4.131}$$

Das bedeutet, dass in einem maximal symmetrischen Raum der Krümmungstensor bereits vollständig durch den Ricci-Tensor festgelegt ist. Da nun $R_{\lambda\sigma\rho\nu}$ linker Hand antisymmetrisch in (λ, σ) ist, muss auch die rechte Seite es sein, d. h. es folgt weiter

$$g_{\lambda\rho}\, R_{\nu\sigma} - g_{\lambda\nu}\, R_{\rho\sigma} = -g_{\sigma\rho}\, R_{\nu\lambda} + g_{\sigma\nu}\, R_{\rho\lambda} \tag{4.132}$$

und daraus durch Kontraktion von λ mit ν

$$(1 - N)\, R_{\rho\sigma} = -g_{\rho\sigma}\, \overbrace{R^{\lambda}{}_{\lambda}}^{=R} + R_{\rho\sigma}\ ,$$

oder

$$\boxed{R_{\rho\sigma} = \frac{1}{N}\, g_{\rho\sigma}\, R\ .} \tag{4.133}$$

Einsetzen in (4.131) ergibt den Krümmungstensor, ausgedrückt durch den Krümmungsskalar R und die Metrik:

$$\boxed{R_{\lambda\sigma\rho\nu} = (g_{\lambda\rho}\, g_{\nu\sigma} - g_{\lambda\nu}\, g_{\rho\sigma})\, \frac{R}{N\,(N-1)}}\ . \tag{4.134}$$

Diese Form erfüllt (4.129) bereits identisch, so dass der Informationsgehalt jener Bedingung bereits ausgeschöpft ist. Aber (4.133) muss an *jedem* Punkt x gelten, und man kann daher die kontrahierten Bianchi-Identitäten (4.55 b) zur Bestimmung der x-Abhängigkeit des Skalars R heranziehen:

$$\left(R^{\rho}{}_{\sigma} - \frac{1}{2}\, \delta^{\rho}{}_{\sigma}\, R\right)_{;\,\rho} = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial\, R}{\partial\, x^{\sigma}} = 0\ . \tag{4.135}$$

Dies ist für $N = 2$ leer, was nicht überrascht, weil wir aus Gl. (4.80) schon wissen, dass in 2 Dimensionen der Krümmungstensor immer die Form (4.134) hat und somit (4.133) auch ohne Symmetrieannahme gilt. Für $N \geq 3$ folgt jedoch $R\,(x) = \text{const.}$ Man führt zweckmäßig eine *Krümmungskonstante* K durch

$$R = -N\,(N-1)\, K = \text{const.} \tag{4.136}$$

ein und hat dann die allgemeine Form

$$\boxed{R_{\lambda\sigma\rho\nu} = K\,(\, g_{\lambda\nu}\, g_{\rho\sigma} - g_{\lambda\rho}\, g_{\nu\sigma}\,) \quad \text{für maximal symmetrische Räume}} \tag{4.137}$$

mit der Konsequenz

$$\boxed{R_{\rho\sigma}(x) = -(N-1)\, K\, g_{\rho\sigma}(x)} \quad . \tag{4.138}$$

für den Ricci-Tensor. (Für $N = 2$ muss man Bedingung (4.130) heranziehen, um zu zeigen, dass auch hier im maximal symmetrischen Fall R eine Konstante ist.)

Bei gegebener Krümmungskonstante K ist (4.138) ein Differential-Gleichungssystem von der Form der Einsteinschen Feldgleichungen (5.17 b) mit dem speziellen Quellentensor $\Theta_{\mu\nu} = -\frac{(N-1)\,K}{8\,\pi\,G}\, g_{\mu\nu}$ (dies ist formal ein zulässiger Energie-Impuls-Tensor, denn er ist symmetrisch und kovariant divergenzfrei!). Diese Gleichungen bestimmen, wie wir zeigen werden, die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ eindeutig bis auf Äquivalenz, d. h. bis auf Koordinatentransformationen. Die äquivalenten maximal-symmetrischen Metriken haben dabei nach (2.18 a) dieselbe Signatur. Damit gilt:

Ein maximal symmetrischer Raum ist durch seine Dimensionszahl N, seine Krümmungskonstante K und die Signatur seiner Metrik eindeutig bestimmt. Seine Metrik ist aus den Dgln. (4.138) bis auf Äquivalenz eindeutig berechenbar; sein Krümmungstensor ist dann durch Gleichung (4.137) gegeben. (4.139)

Wegen (4.137) heißen die maximal symmetrischen Räume auch *Räume konstanter Krümmung.*

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes (4.139) kann man sich die tatsächliche Lösung von (4.138) sparen, wenn man irgend eine spezielle Konstruktion angeben kann, die in beliebiger Dimension N Räume konstanter Krümmung zu beliebiger Konstante K liefert; die so konstruierten maximal symmetrischen Räume sind dann auch tatsächlich alle. Eine derartige Konstruktion geben wir nun an.

Wir betrachten einen *(N + 1)-dimensionalen, metrisch flachen Raum* mit dem Linienelement

$$\begin{aligned} d\,s^2 &= g_{A\,B}\, d\,x^A\, d\,x^B \qquad (A,\, B \text{ summiert über } 1 \ldots N+1) \\ &= C_{\mu\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu + \frac{1}{K}\,(d\,z)^2 \qquad (\mu,\, \nu \text{ summiert über } 1 \ldots N) \end{aligned} \tag{4.140}$$

($C_{\mu\nu} = C_{\nu\mu}$ konstante $N \times N$-Matrix, K Konstante.) In diesen Raum können wir einen i. a. nicht flachen N-dimensionalen Raum „einbetten“ dadurch, dass wir die Koordinaten $\{x^\mu\}$ und z auf die verallgemeinerte Kugelfläche

$$\boxed{K\, C_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu + z^2 = 1} \tag{4.141}$$

einschränken (Analogie zu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ für die 2-dimensionale Kugelfläche mit Radius 1 im $\mathbb{R}^3$). Auf dieser Hyperfläche ist dann

$$K\, C_{\mu\nu}\,(x^\mu\, d\,x^\nu + d\,x^\mu\, x^\nu) + 2\,z\,d\,z = 0\ ,$$

d. h.

$$d\,z = -\frac{K\, C_{\mu\nu}\, x^\mu\, d\,x^\nu}{z}$$

und somit nach Einsetzen von z^2 aus (4.141)

$$(d\,z)^2 = \frac{(K\, C_{\mu\nu}\, x^\mu\, d\,x^\nu)^2}{1 - K\, C_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu}\ . \tag{4.142}$$

Daher gibt (4.140) als Linienelement auf der N-dimensionalen Hyperfläche (4.141)

$$d\,s^2 = C_{\mu\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu + K\,\frac{(C_{\kappa\,\mu}\, x^\kappa\, d\,x^\mu)\,(C_{\lambda\,\nu}\, x^\lambda\, d\,x^\nu)}{1 - K\, C_{\mu\nu}\, x^\mu\, x^\nu} \tag{4.143}$$

und daher als Metrik dieses N-dimensionalen Raumes

$$\boxed{g_{\mu\nu}\,(x) = C_{\mu\nu} + K\,\frac{C_{\kappa\,\mu}\, C_{\lambda\,\nu}\, x^\kappa\, x^\lambda}{1 - K\, C_{\rho\,\sigma}\, x^\rho\, x^\sigma}}\ . \tag{4.144}$$

Der Spezialfall $K = 0$ entspricht offenbar einem flachen Raum.

Es ist nun leicht zu sehen, dass diese N-dimensionale Hyperfläche ein maximal symmetrischer N-dimensionaler Raum ist: die Metrik (4.144) besitzt $\frac{1}{2}\,N\,(N + 1)$ unabhängige Isometrien. Der Grund dafür ist einfach, dass sowohl das ursprüngliche $(N + 1)$-dimensionale Linienelement (4.140) als auch die „Einbettungsbedingung" (4.141), mit der die Hyperfläche von N Dimensionen ausgesondert wurde, manifest invariant sind gegenüber verallgemeinerten Drehungen des $(N + 1)$-dimensionalen Raumes, d. h. linearen Transformationen

$$x^A \to x'^A = R^A{}_B\, x^B \tag{4.145 a}$$

oder im Einzelnen

$$x^\mu \to x'^\mu = R^\mu{}_\nu\, x^\nu + R^\mu{}_z\, z\ , \tag{4.145 b}$$

$$z \to z' = R^z{}_\mu\, x^\mu + R^z{}_z\, z\ , \tag{4.145 c}$$

deren konstante Matrix $R^A{}_B$ die verallgemeinerte Orthogonalitätsbedingung

$$R^T \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathcal{C} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \cdots 0 & & 1\,/\,K \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathcal{C} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \cdots 0 & & 1\,/\,K \end{pmatrix} \tag{4.146 a}$$

erfüllt, d. h. genauer die Bedingungen

$$R^\mu{}_\rho \, C_{\mu\nu} \, R^\nu{}_\sigma + \frac{1}{K} \, R^z{}_\rho \, R^z{}_\sigma = C_{\rho\,\sigma} \, , \tag{4.146 b}$$

$$R^\mu{}_\rho \, C_{\mu\nu} \, R^\nu{}_z + \frac{1}{K} \, R^z{}_\rho \, R^z{}_z = 0 \, , \tag{4.146 c}$$

$$R^\mu{}_z \, C_{\mu\nu} \, R^\nu{}_z + \frac{1}{K} \, (R^z{}_z)^2 = \frac{1}{K} \, . \tag{4.146 d}$$

Dabei gibt Gl. (4.146 b) – als Gleichung zwischen 2 symmetrischen $N \times N$-Matrizen – $\frac{1}{2}\, N\,(N+1)$ Bedingungen, Gl. (4.146 c) weitere N und (4.146 d) schließlich eine, so dass die Matrix R

$$(N+1)^2 - \left[\frac{1}{2} \, N\,(N+1) + N + 1 \right] = \frac{1}{2} \, N\,(N+1) \tag{4.147}$$

unabhängige Elemente bzw. frei wählbare Parameter besitzt. Diese $\frac{1}{2}\, N\,(N+1)$ unabhängigen Isometrien lassen sich aus zwei Basistypen aufbauen, die analoge Rollen spielen wie homogene L. T. und Translationen für die Poincaré-Gruppe:

(A) *N*-dimensionale starre Drehungen

(bzw. Pseudodrehungen, wenn die Metrik (4.144) nicht die euklidische Signatur hat):

$$R = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \mathcal{R} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \cdots 0 & & 1 \end{pmatrix} \, , \tag{4.148}$$

d. h.

$$z' = z \tag{4.149 a}$$

und

$$x'^\mu = \mathcal{R}^\mu{}_\nu \, x^\nu \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}^\mu{}_\rho \, C_{\mu\nu} \, \mathcal{R}^\nu{}_\sigma = C_{\rho\sigma} \, . \tag{4.149 b}$$

Unter dieser Transformation sind Größen wie

$$C_{\mu\nu}\, d\,x^{\mu}\, d\,x^{\nu}\ , \qquad C_{\kappa\mu}\, x^{\kappa}\, d\,x^{\mu}$$

usw., die im Linienelement (4.143) auftreten, offensichtlich forminvariant. Mit der Bezeichnung

$$\overline{A}_{\mu} \,=\, C_{\mu\nu}\, A^{\nu} \tag{4.150}$$

hat man

$$d\,\overline{x}'_{\mu}\, d\,x'^{\mu} \,=\, d\,\overline{x}_{\mu}\, d\,x^{\mu}\ , \qquad d\,\overline{x}'_{\mu}\, x'^{\mu} \,=\, d\,\overline{x}_{\mu}\, x^{\mu}\ , \tag{4.151}$$

usw., analog wie für Minkowski-Skalarprodukte.

(B) „Quasitranslationen“ der Form

$$R^{\mu}{}_{\nu} \,=\, \delta^{\mu}{}_{\nu} \,-\, b\,(a)\, K\, C_{\rho\nu}\, a^{\rho}\, a^{\mu}\ , \tag{4.152 a}$$

$$R^{\mu}{}_{z} \,=\, a^{\mu}\ , \qquad R^{z}{}_{\nu} \,=\, -K\, C_{\nu\lambda}\, a^{\lambda}\ , \tag{4.152 b}$$

$$R^{z}{}_{z} \,=\, \sqrt{1 \,-\, KC_{\rho\sigma}\, a^{\rho} a^{\sigma}}\,, \tag{4.152 c}$$

mit

$$b(a) \,=\, \frac{1 \,-\, \sqrt{1 \,-\, KC_{\rho\sigma} a^{\rho} a^{\sigma}}}{KC_{\kappa\lambda} a^{\kappa} a^{\lambda}}\,, \tag{4.152 d}$$

wobei a^{μ} ein konstanter N-Vektor ist; er ist beliebig bis auf die Bedingung

$$K\, C_{\rho\sigma}\, a^{\rho}\, a^{\sigma} \,=\, K\, a^{\rho}\, \overline{a}_{\rho} \,\leq\, 1\ , \tag{4.153}$$

die sicherstellt, dass $R^{z}{}_{z}$ reell bleibt. Die explizite Form dieser Transformationen ist

$$x'^{\mu} \,=\, x^{\mu} \,+\, \left(\sqrt{1 \,-\, KC_{\rho\sigma}\, x^{\rho}\, x^{\sigma}} \,-\, b\,(a)\, K\, C_{\kappa\lambda}\, a^{\kappa}\, x^{\lambda}\right) \cdot\, a^{\mu}\ ; \tag{4.154}$$

sie zeigt, dass der Ursprung $x^{\mu} \,=\, 0$ dabei nach a^{μ} verschoben wird.

Die Existenz der Isometrien (4.154), die den Ursprung – innerhalb der durch (4.153) gegebenen Grenzen – in jeden Punkt überführen, und die der Isometrien (4.149), die alle starren „Drehungen“ um den Ursprung umfassen, bedeutet, dass der N-dimensionale Raum mit der Metrik (4.143/144) homogen und bezüglich des Ursprungs isotrop, also tatsächlich *maximal symmetrisch* ist. Dies lässt sich auch formal zeigen, indem man die infinitesimalen Formen der beiden grundlegenden Typen betrachtet und daraus ihre Killing-Vektoren gemäß (4.94) abliest: für die Transformationen (A) hat

$$\mathcal{R}^{\mu}{}_{\nu} \,=\, \delta^{\mu}{}_{\nu} \,+\, \varepsilon\, \omega^{\mu}{}_{\nu} \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{4.155 a}$$

und

$$\omega^{\mu}{}_{\rho}\, C_{\mu\sigma} \,+\, C_{\rho\nu}\, \omega^{\nu}{}_{\sigma} \,=\, 0 \tag{4.155 b}$$

die Killing-Vektoren

$$\xi^{\mu}{}_{(\omega)}\,(x) \,=\, \omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \;, \tag{4.156}$$

und für die Transformationen (B) gibt

$$a^{\mu} \,=\, \varepsilon\, \alpha^{\mu} \quad \text{mit} \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{4.157}$$

nach (4.154) die Killing-Vektoren

$$\xi^{\mu}{}_{(\alpha)}\,(x) \,=\, \alpha^{\mu} \sqrt{1 \,-\, K\, C_{\mu\nu}\, x^{\mu}\, x^{\nu}} \;. \tag{4.158}$$

Wir haben hier N freie Parameter α^{μ} und wegen der verallgemeinerten Antisymmetriebedingung (4.155 b) $\frac{1}{2}\, N\,(N-1)$ freie Parameter in $\omega^{\mu}{}_{\nu}$, insgesamt also die Maximalzahl von $\frac{1}{2}\, N\,(N\,+\,1)$ l. u. Killing-Vektoren. Man prüft durch direkte Rechnung nach, dass (4.156) und (4.158) die Killing-Bedingungen (4.96 b) erfüllen. Dazu verwendet man den affinen Zusammenhang zur Metrik (4.144), der sich gemäß (2.41) berechnet:

$$\boxed{\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\,(x) \,=\, K\, x^{\lambda}\, g_{\mu\nu} \;.} \tag{4.159}$$

Damit nimmt auch die Geodätengleichung (2.20) eine sehr einfache Form an:

$$\frac{d^2\, x^{\lambda}}{d\,\tau^2} \,+\, K\, x^{\lambda} \,=\, 0 \;. \tag{4.160}$$

Die Teilchenbahnen $x^{\lambda}\,(\tau)$ im maximal symmetrischen Raum (4.144) sind also

- Linearkombinationen von $\sin\,(\tau\,\sqrt{K})$ und $\cos\,(\tau\,\sqrt{K})$ für

$$K \,>\, 0 \;, \tag{4.161 a}$$

- Linearkombinationen von $\sinh\,(\tau\,\sqrt{-K})$ und $\cosh\,(\tau\,\sqrt{-K})$ für

$$K \,<\, 0 \;, \tag{4.161 b}$$

- lineare Funktionen von τ für

$$K \,=\, 0 \;. \tag{4.161 c}$$

Der vollständige Krümmungstensor lässt sich nach (4.37) aus (4.159) berechnen; man erhält

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\kappa\nu} \;&=\; K\,(C_{\lambda\kappa}\,C_{\mu\nu} \,-\, C_{\lambda\nu}\,C_{\kappa\mu}) \\ &+ K^2\,\frac{C_{\lambda\kappa}\,\overline{x}_\mu\,\overline{x}_\nu \,-\, C_{\lambda\nu}\,\overline{x}_\kappa\,\overline{x}_\mu \,+\, C_{\mu\nu}\,\overline{x}_\kappa\,\overline{x}_\lambda \,-\, C_{\mu\kappa}\,\overline{x}_\lambda\,\overline{x}_\nu}{1 \,-\, K\,C_{\rho\sigma}\,x^\rho\,x^\sigma} \end{aligned} \tag{4.162 a}$$

oder durch Vergleich mit (4.144)

$$R_{\lambda\mu\kappa\nu} \;=\; K\,\left[\,g_{\lambda\kappa}\,g_{\mu\nu} \,-\, g_{\lambda\nu}\,g_{\kappa\mu}\,\right]\,. \tag{4.162 b}$$

Dies ist die allgemeine Form (4.137) für maximal symmetrische Räume; die durch die $(N\,+\,1)$-dimensionale Einbettungskonstruktion (4.140/141) eingeführte Konstante K erweist sich als identisch mit der durch (4.136) definierten Krümmungskonstanten.

Der Eindeutigkeitssatz (4.139) garantiert, dass die durch diese scheinbar ganz spezielle Konstruktion gefundene *Metrik (4.144) tatsächlich bis auf Äquivalenz die allgemeinste maximal symmetrische Metrik* ist.

Während K nach (4.136) eine Invariante gegen Koordinatentransformationen ist, kann die Matrix $C_{\mu\nu}$ nach (4.143) durch eine lineare Transformation

$$x \,\rightarrow\, x^{'} \quad \text{mit} \quad x^{'\mu} \,=\, A^\mu{}_\nu\, x^\nu$$

abgeändert werden zu

$$C^{'}_{\mu\nu} \;=\; A^\rho{}_\mu\, C_{\rho\sigma}\, A^\sigma{}_\nu\;.$$

Für $\det A \,\neq\, 0$ ist dies eine Kongruenztransformation, mit der $C_{\mu\nu}$ in jede andere reell-symmetrische Matrix derselben Signatur, insbesondere in die Signaturmatrix selbst,

$$(C^{'}{}_{\mu\nu}) \,=\, \mathrm{diag}\,(+1,\,...\,+1,\,-1,\,...\,-1)\;,$$

überführt werden kann; diese Form wird i. a. als Normalform gewählt. Als Spezialfälle betrachten wir:

1) $K\,=\,0$ und Signatur von C vollständig positiv (nur Diagonalelemente $+1$ in $C^{'}$). Dann ist C o. B. d. A. die $N\,\times\,N$-Einheitsmatrix, und mit der Zusammenfassung $\{x^1,\,x^2,\,...\,x^N\} \,=\, \vec{x}$ haben wir

$$d\,s^2 \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N}(d\,x^i)^2 \,=\, d\,\vec{x}^{\,2} \qquad (K\,=\,0)\;, \tag{4.163}$$

d. h. die flache Euklidische Metrik in N Dimensionen.

2) $K > 0$ und C von rein positiver Signatur. Dann kann o. B. d. A.

$$C_{\mu\nu} = \frac{1}{K}\,\delta_{\mu\nu} \tag{4.164 a}$$

gewählt werden und man erhält

$$d\,s^2 = \frac{1}{K}\left\{d\,\vec{x}^{\,2} + \frac{(\vec{x}\cdot d\,\vec{x}\,)^2}{1-\vec{x}^{\,2}}\right\} . \tag{4.164 b}$$

Nach Konstruktion (Gl. (4.141)) ist dies die Metrik auf der N-dimensionalen Kugeloberfläche

$$\vec{x}^{\,2} + z^2 = 1 \tag{4.165}$$

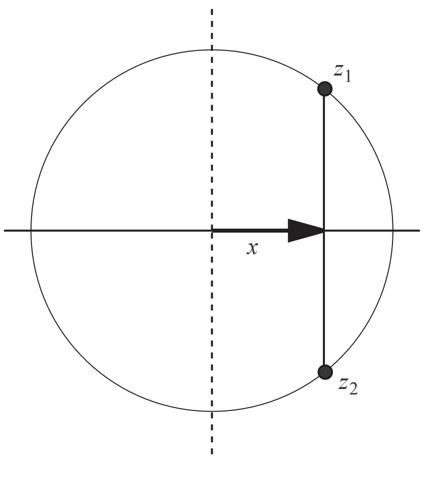
in einem $(N + 1)$-dimensionalen Raum mit Metrik

$$d\,s^2 = \frac{1}{K}\,(d\,\vec{x}^{\,2} + d\,z^2)\ , \tag{4.166}$$

also auf einer in einen euklidischen Raum eingebetteten Kugelfläche vom Radius $K^{-1/2}$, die üblicherweise mit S^N bezeichnet wird. Der Variablenbereich ist

$$|\vec{x}\,|^2 \leq 1\ , \tag{4.167}$$

und es ist zu beachten, dass *jedem $\vec{x}$ nach (4.165) zwei Punkte*, nämlich die 2 Wurzeln $z_{1,2} = \pm\sqrt{1-\vec{x}^{\,2}}$ entsprechen. Z. B. sind für $N = 2$ (x^1, x^2) cartesische Koordinaten in einer Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel; zu (x^1, x^2) gehören die 2 „senkrecht“ über und unter diesem Ebenenpunkt liegenden Punkte der Kugelfläche.



Der Raum mit der Metrik (4.164 b) hat daher das endliche *Volumen*

$$\begin{aligned} V_N &= 2 \int\limits_{|\vec{x}^{\,2}| \leq 1} d\,x^1 \,....\, d\,x^N \sqrt{g\,(x)} \\ &= 2\,K^{-\frac{N}{2}} \int\limits_{|\vec{x}^{\,2}| \leq 1} \frac{d\,x^1 \,...\, d\,x^N}{\sqrt{1 - \vec{x}^{\,2}}} \\ &= \frac{2\,\pi^{\frac{1}{2}\,(N+1)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\,(N+1)\right)}\,K^{-\frac{N}{2}} \ . \end{aligned} \tag{4.168}$$

Z. B. hat man für die niedrigsten Dimensionszahlen

$$V_1 \;=\; 2\,\pi\,K^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(Kreisumfang in Ebene)} \ , \tag{4.169 a}$$

$$V_2 \;=\; 4\,\pi\,(K^{-\frac{1}{2}})^2 \qquad \text{(Kugeloberfläche im } \mathbb{R}^3) \ , \tag{4.169 b}$$

$$V_3 \;=\; 2\,\pi^2\,(K^{-\frac{1}{2}})^3 \qquad \begin{matrix}\text{(3-dimensionaler Raum konst.} \\ \text{positiver Krümmung im } \mathbb{R}^4) \ .\end{matrix} \tag{4.169 c}$$

Man kann ebenso den „Umfang“, d. h. die Maximallänge einer Geodäte eines solchen Raumes angeben; nach (4.161 a) ist

$$\vec{x} \;=\; \vec{e}\,\sin\,(s\,\sqrt{K}) \quad \text{mit} \quad \vec{e}^{\,2} \;=\; 1 \tag{4.170}$$

eine bei $s = 0$ in $\vec{x} = 0$ (etwa am „Nordpol“) beginnende Geodäte; sie umläuft für $s = 0 \ldots 2\,\pi\,/\,\sqrt{K}$ den Raum einmal vollständig, d. h. in einem Raum konstanter positiver Krümmung ist *für jede Dimension N die Weglänge* von einem Punkt „um den ganzen Raum herum und zurück“ längs einer Geodäte durch

$$L \;=\; \frac{2\,\pi}{\sqrt{K}} \tag{4.171}$$

gegeben.

3) $K < 0$ und C von positiver Signatur. O. B. d. A. ist dann

$$C_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{|K|}\,\delta_{\mu\nu} \tag{4.172 a}$$

und die Metrik ist gegeben durch

$$d\,s^2 \;=\; \frac{1}{|K|}\left\{d\,\vec{x}^{\,2} \;-\; \frac{(\vec{x}\cdot d\,\vec{x}\,)^2}{1 + \vec{x}^{\,2}}\right\} \ . \tag{4.172 b}$$

Die Koordinaten $\vec{x}$ werden durch die Einbettungsgleichung

$$-\vec{x}^{\,2} + z^2 = 1 \tag{4.173}$$

nicht auf einen endlichen Bereich beschränkt; die Einbettung geschieht im übrigen in einen $(N + 1)$-dimensionalen Raum mit der *nichteuklidischen* flachen Metrik

$$d s^2 = \frac{1}{|K|} \left(d \vec{x}^{\,2} - d z^2 \right) \tag{4.174}$$

und ist daher auch nicht leicht zu veranschaulichen. Für $N = 2$ ist (4.172 b) die von Gauß, Bólyai und Lobatschewski im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts entdeckte erste nichteuklidische Geometrie. Die Geodäten, z. B.

$$\vec{x} = \vec{e} \sinh (s\sqrt{-K}) \quad \text{mit} \quad \vec{e}^{\,2} = 1 \; , \tag{4.175}$$

sind von unendlicher Länge.

4) $K > 0$ und C von Minkowski-Signatur: de Sitter-Metrik. Betrachten wir der Einfachheit halber den Fall $N = 4$, so ist o. B. d. A.

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \tag{4.176}$$

und daher mit $\{x^\mu\} = \{t, \vec{x}\}$ nach (4.143)

$$d s^2 = d t^2 - d \vec{x}^{\,2} + K \, \frac{(t \cdot d t - \vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - K (t^2 - \vec{x}^{\,2})} \, . \tag{4.177}$$

Für $K > 0$ kann man durch die Transformation

$$t (t', \vec{x}\,') = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[\frac{K r'^2}{2} \cosh(t' \sqrt{K}) + \left(1 + \frac{K r'^2}{2} \right) \sinh(t' \sqrt{K}) \right] \tag{4.178 a}$$

$$\vec{x} (t', \vec{x}\,') = \vec{x}\,' \exp (t' \sqrt{K}) \; , \tag{4.178 b}$$

Koordinaten einführen, in denen der „räumliche“ Teil dieser Metrik flach, jedoch mit einem zeitlich expandierenden Skalenfaktor versehen ist:

$$d s^2 = d t'^2 - \mathrm{e}^{2 t' \sqrt{K}} (d \vec{x}\,')^2 \; . \tag{4.179}$$

Andererseits lassen sich auch Koordinaten finden, in denen dieselbe Metrik zeitunabhängig erscheint, nämlich

$$t'' (t', \vec{x}\,') = t' - \frac{1}{2 \sqrt{K}} \ln \left[1 - K \, \mathrm{e}^{2 t' \sqrt{K}} \, \vec{x}\,'^2 \right] \; , \tag{4.180 a}$$

$$\vec{x}''(t', \vec{x}') = \vec{x}' \exp(t' \sqrt{K}) \qquad (= \vec{x}) \,. \tag{4.180 b}$$

Dann nimmt diese maximal symmetrische 4-dimensionale Metrik (*de Sitter-Raum*) die Form

$$d s^2 = (1 - K \vec{x}''^2) \, d t''^2 - \left[d \vec{x}''^2 + K \frac{(\vec{x}'' \cdot d \vec{x}'')^2}{1 - K \vec{x}''^2} \right] \tag{4.181}$$

an. Wie alle maximal symmetrischen Metriken erfüllt sie Gleichung (4.138), ist also nicht Lösung der Vakuumfeldgln. $R_{\mu\nu} = 0$. Sie spielt jedoch als Modell eines materieerfüllten Universums in der sog. steady-state-Kosmologie, einer speziellen Klasse kosmologischer Modelle, eine Rolle.

In einem maximal symmetrischen Raum kann man nicht nur für die Metrik, sondern *auch für andere Tensorfelder die Eigenschaft maximaler Symmetrie* fordern. Ein Tensorfeld $T_{\mu\nu} \dots (x)$ heißt forminvariant unter der Transformation $x \to x'$, wenn $T'_{\mu\nu} \dots (x')$ dieselbe Funktion seiner Argumente x'^{μ} ist, wie es $T_{\mu\nu} \dots$ als Funktion der x^{μ} war, d. h.

$$T'_{\mu\nu}(y) = T_{\mu\nu} \dots (y) \qquad (\text{alle } y) \,. \tag{4.182}$$

Die Forminvarianzbedingung lautet analog zu (4.93)

$$T_{\mu\nu} \dots (x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \dots T_{\rho\sigma} \dots (x') \,. \tag{4.183}$$

Wir betrachten wieder infinitesimale Transformationen (4.94); für sie wird aus (4.183) die Bedingung

$$\boxed{\frac{\partial \xi^{\rho}(x)}{\partial x^{\mu}} T_{\rho\nu} \dots (x) + \frac{\partial \xi^{\sigma}(x)}{\partial x^{\nu}} T_{\mu\sigma} \dots (x) + \dots + \xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} T_{\mu\nu} \dots (x) = 0} \,. \tag{4.184}$$

Existieren $\frac{1}{2} N (N + 1)$ unabhängige infinitesimale Isometrien (Killing-Vektoren), und erfüllt ein auf diesem maximal symmetrischen Raum definiertes Tensorfeld $T_{\mu\nu} \dots (x)$ die Bedingung (4.184) für jeden der $\frac{1}{2} N (N + 1)$ unabhängigen Killing-Vektoren $\xi^{\mu}(x)$, so heißt es ein *maximal forminvarianter Tensor*.

Für ein Skalarfeld $S(x)$ besagt (4.184)

$$\xi^{\lambda}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} S(x) = 0 \tag{4.185}$$

Gilt dies für alle unabhängigen Killing-Vektoren ξ^{λ} eines maximal symmetrischen Raumes, dann kann ξ^{λ} an jedem Punkt jeden gewünschten vektoriellen Wert annehmen, und es folgt

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\lambda}} = 0 \qquad (\lambda = 1 \dots N) \,, \tag{4.186}$$

d. h. *ein maximal forminvarianter Skalar ist eine Konstante.*

Zur Diskussion maximal forminvarianter Tensoren höherer Stufe wählt man zunächst einen Killing-Vektor $\xi^\lambda(x)$, der an einem gewissen Punkt X verschwindet,

$$\xi^\lambda(X) = 0 , \tag{4.187}$$

und für den die kovarianten Ableitungen dort,

$$\xi_{\kappa;\mu}(X) = g_{\kappa\lambda}(X) \left(\frac{\partial \xi^\lambda(x)}{\partial x^\mu} \right)_{x=X} , \tag{4.188}$$

eine beliebige antisymmetrische Matrix bilden. Dann lautet die Bedingung (4.184) bei $x = X$

$$\xi_{\kappa;\lambda} \left[\delta^\lambda{}_\mu T^\kappa{}_{\nu\ldots} + \delta^\lambda{}_\nu T_\mu{}^\kappa{}_{\ldots} + \ldots \right] = 0 ,$$

d. h. der antisymmetrische Teil der eckigen Klammer muss verschwinden:

$$\begin{aligned} &\delta^\lambda{}_\mu T^\kappa{}_{\nu\ldots} + \delta^\lambda{}_\nu T_\mu{}^\kappa{}_{\ldots} + \ldots \\ &= \delta^\kappa{}_\mu T^\lambda{}_{\nu\ldots} + \delta^\kappa{}_\nu T_\mu{}^\lambda{}_{\ldots} + \ldots \end{aligned} \tag{4.189}$$

Da X beliebig war, gilt dies für alle x.

Für einen maximal forminvarianten Vektor $A_\mu(x)$ lautet die Bedingung (4.189)

$$\delta^\lambda{}_\mu A^\kappa(x) = \delta^\kappa{}_\mu A^\lambda(x) .$$

Kontraktion von λ mit μ ergibt

$$(N - 1) A^\kappa(x) = 0 ,$$

d. h.

$$A^\mu(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad N \neq 1 . \tag{4.190}$$

Es gibt also *kein nichttriviales maximal forminvariantes Vektorfeld.*

Für einen maximal forminvarianten Tensor 2. Stufe $B_{\mu\nu}(x)$ folgt aus

$$\delta^\lambda{}_\mu B^\kappa{}_\nu(x) + \delta^\lambda{}_\nu B_\mu{}^\kappa(x) = \delta^\kappa{}_\mu B^\lambda{}_\nu(x) + \delta^\kappa{}_\nu B_\mu{}^\lambda(x)$$

durch Kontraktion von λ mit μ und Herunterziehen von κ

$$(N - 1) B_{\kappa\nu}(x) + B_{\nu\kappa}(x) = g_{\kappa\nu}(x) B_\mu{}^\mu(x) \tag{4.191}$$

und durch Subtraktion derselben Gl. mit Vertauschung von κ und ν

$$(N - 2)\,[B_{\kappa\nu}\,(x) - B_{\nu\kappa}\,(x)] = 0 \ ,$$

d. h. [*)]

$$B_{\nu\mu}\,(x) = B_{\mu\nu}\,(x) \quad \text{für} \quad N \neq 2 \ . \tag{4.192}$$

Einsetzen in (4.191) ergibt die Darstellung (für $N \neq 2$)

$$B_{\mu\nu}\,(x) = f\,(x)\,g_{\mu\nu}\,(x) \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{N}\,B^{\mu}{}_{\mu} \ . \tag{4.193}$$

Die Koordinatenabhängigkeit von $f\,(x)$ lässt sich bestimmen, indem man (4.193) in die ursprüngliche Forminvarianzbedingung (4.184) – für Rang 2 – einsetzt:

$$f(x)\left(\frac{\partial\,\xi^{\rho}}{\partial\,x^{\mu}}\,g_{\rho\nu} + \frac{\partial\,\xi^{\sigma}}{\partial\,x^{\nu}}\,g_{\mu\sigma}\right) + \xi^{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,(f\,g_{\mu\nu}) = 0 \ .$$

Da wir uns aber nach Voraussetzung in einem maximal symmetrischen Raum befinden, erfüllt die Metrik $g_{\mu\nu}$ selbst die Killing-Bedingung (4.95); es folgt

$$\boxed{g_{\mu\nu}\,(x)\,\xi^{\lambda}\,(x)\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,f\,(x) = 0 \,.} \ . \tag{4.194}$$

Aber in diesem Raum können wir ξ^{λ} an jedem beliebigen Ort jeden gewünschten Wert erteilen; also ist $\partial\,f\,/\,\partial\,x^{\lambda} = 0$, $f = \text{const.}$: *Für $N \neq 2$ ist der einzige maximal forminvariante Tensor 2. Stufe ein konstantes Vielfaches des (maximal symmetrischen) metrischen Tensors.*

4.9 Räume mit maximal-symmetrischen Unterräumen

In der Kosmologie sind die wichtigsten Raumtypen solche, die nicht maximal symmetrisch sind, aber in maximal symmetrische Unterräume niedrigerer Dimensionen zerlegt werden können. Auch diese Maximalsymmetrie von Unterräumen impliziert noch sehr starke Einschränkungen für die Metrik des Gesamtraumes.

Es sei N die Dimension des Gesamtraumes, $M < N$ die Dimension einer Familie maximal symmetrischer Unterräume. Wir führen ein Koordinatensystem $\{v, u\}$ ein derart, dass

$$v = \{v^{a}\} = \{v^{1},\, v^{2},\, \ldots v^{N-M}\} \tag{4.195}$$

[*)] In 2 Dimensionen kann $B_{\mu\nu}$ einen antisymmetrischen Teil enthalten, nämlich const. $\times\ [g\,(x)]^{-1/2} \times \varepsilon_{\mu\nu}$ mit dem zweidimensionalen ε-Tensor.

die verschiedenen Unterräume unterscheidet, während innerhalb eines Unterraumes ein Punkt durch

$$u = \{u^i\} = \{u^1, u^2, \dots u^M\} \tag{4.196}$$

charakterisiert wird. Beispiel: der $\mathbb{R}^3$ besitzt die zweidimensionalen maximalsymmetrischen Unterräume konstanter positiver Krümmung, die von den Kugelflächen $|\vec{x}\,| = r =$ const. um den Ursprung gebildet werden; vgl. (4.114) bis (4.117). Als u-Koordinaten können $(u^1, u^2) = (\vartheta, \varphi)$, als v-Koordinate $v^1 = r$ (oder jede monotone glatte Funktion von r, z. B. $\mathrm{e}^{r\,/\,a}$ mit $a =$ const.) dienen.

Man nennt die *Unterräume* $v =$ const. *maximal symmetrisch*, wenn die Metrik des *Gesamtraumes* unter einer Gruppe infinitesimaler Transformationen

$$u^i \;\rightarrow\; u'^i \;=\; u^i + \varepsilon\, \xi^i\,(u,\, v) \qquad |\varepsilon| \ll 1\;, \tag{4.197 a}$$

$$v^a \;\rightarrow\; v'^a \;=\; v^a \tag{4.197 b}$$

mit $\frac{1}{2}\,M\,(M + 1)$ *unabhängigen Killing-Vektoren* ξ^i invariant ist. „Unabhängig" heißt dabei in diesem Falle, dass *keine linearen Relationen mit u-unabhängigen Koeffizienten* zwischen diesen Killing-Vektoren bestehen. Die Transformationen (4.197) sind infinitesimale Isometrien des Typs (4.94), aber mit der Besonderheit, dass die Koordinaten v^a unverändert bleiben, d. h. die Komponenten der ξ in den v-Richtungen verschwinden:

$$\xi^a\,(u,\, v) \;=\; 0 \qquad (a \;=\; M + 1 \dots N)\;. \tag{4.198}$$

Die nichtverschwindenden Komponenten ξ^i können deshalb trotzdem noch parametrisch von den v abhängen. Die wesentliche Aussage über derartige Räume bzw. Metriken enthält folgender Satz:

Die u-Koordinaten können so gewählt werden, dass das Linienelement die Form

$$\boxed{d\,s^2 \;=\; g_{\mu\nu}\, d\,x^\mu\, d\,x^\nu \;=\; g_{ab}\,(v)\, d\,v^a\, d\,v^b \;+\; f\,(v)\, \tilde{g}_{ij}\,(u)\, d\,u^i\, d\,u^j\;,} \tag{4.199}$$

d. h. der metrische Tensor Blockdiagonalform bzgl. der v- und u-Räume annimmt, wobei g_{ab} *und* f *nur von den v-Koordinaten abhängen und* $\tilde{g}_{ij}\,(u)$ *für sich die Metrik eines* M*-dimensionalen maximal symmetrischen Raumes ist.*

Zum Beweis gehen wir aus von der allgemeinen Isometriebedingung in der Form (4.95), angewandt auf die spezielle Transformation (4.197). Die Summationsindizes

ρ, σ, λ laufen wegen (4.198) nur über den Bereich $k = 1 \dots M$. Man erhält 3 Teilgleichungen

$$(\mu,\, \nu) = (i,\, j): \qquad \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, u^i}\, g_{kj} + \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, u^j}\, g_{ki} + \xi^k\, \frac{\partial\, g_{ij}}{\partial\, u^k} = 0\,, \tag{4.200 a}$$

$$(\mu,\, \nu) = (i,\, a): \qquad \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, u^i}\, g_{ka} + \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, v^a}\, g_{ik} + \xi^k\, \frac{\partial\, g_{ia}}{\partial\, u^k} = 0\,, \tag{4.200 b}$$

$$(\mu,\, \nu) = (a,\, b): \qquad \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, v^a}\, g_{kb} + \frac{\partial\, \xi^k}{\partial\, v^b}\, g_{ka} + \xi^k\, \frac{\partial\, g_{ab}}{\partial\, u^k} = 0\,. \tag{4.200 c}$$

Da wir annehmen, dass $\frac{1}{2}\, M\, (M + 1)$ im obigen Sinne unabhängige Killing-Vektoren $\xi^i\,(u,\, v)$ existieren, besagt die erste Teilgl. (4.200 a) einfach, dass $g_{ij}\,(u,\, v)$ für festes v die Metrik eines maximal symmetrischen M-dimensionalen Raumes ist. Insbesondere ist für festes v der von den u^i parametrisierte Raum sowohl homogen als auch um jeden beliebigen Punkt u_0 isotrop.

Die in den beiden anderen Gln. (4.200 b/c) enthaltene Information lässt sich am saubersten trennen, wenn man zunächst *neue u-Koordinaten* $u^{'}\,(u,\, v)$ *für die maximal symmetrischen Unterräume einführt derart, dass die Metrikelemente mit* $\mu = i$, $\nu = a$ *verschwinden*:

$$g^{'}_{ia} = 0 \qquad (i = 1 \dots M\,, \quad a = M + 1 \dots N)\,. \tag{4.201}$$

Die entsprechende Transformation setzen wir an als

$$u^i = U^i\,(v^{'};\, u^{'}) \qquad (i = 1 \dots M) \tag{4.202 a}$$

$$v^a = v^{'a} \qquad (a = M + 1 \dots N)\,. \tag{4.202 b}$$

Die transformierte Metrik hat dann die i-a-Elemente

$$g^{'}_{\;ia}\,(u^{'},\, v^{'}) = \frac{\partial\, u^k}{\partial\, u^{'i}}\, \frac{\partial\, u^l}{\partial\, v^{'a}}\, g_{kl} + \frac{\partial\, u^k}{\partial\, u^{'i}}\, \underbrace{\frac{\partial\, v^b}{\partial\, v^{'a}}}_{=\,\delta^b{}_a}\, g_{kb}$$

oder

$$g^{'}_{\;ia}\,(u^{'},\, v^{'}) = \frac{\partial\, U^k\,(v^{'};\, u^{'})}{\partial\, u^{'i}} \left\{ \frac{\partial\, U^l\,(v^{'};\, u^{'})}{\partial\, v^{'a}}\, g_{kl}\,(U,\, v^{'}) + g_{ka}\,(U,\, v^{'}) \right\}\,.$$

Wenn man also die Funktionen U^i in der Transformation (4.202) so wählen kann, dass sie die gekoppelten Dgln.

$$g_{kl}\,(U,\, v)\, \frac{\partial\, U^l\,(v;\, u^{'})}{\partial\, v^a} + g_{ka}\,(U,\, v) = 0 \tag{4.203}$$

erfüllen, dann ist (4.201) gegeben. Führt man die zu g_{ij} inverse Submetrik $\overline{g}^{kl}$ ein mit

$$\overline{g}^{ki}\, g_{ij} \;=\; \delta^k{}_j \tag{4.204}$$

(sie ist natürlich etwas anderes als die Kollektion g^{ij} der $i-j$-Elemente der zu $g_{\mu\nu}$ inversen Gesamtmetrik $g^{\mu\nu}$!), so lauten die Dgln.

$$\boxed{\frac{\partial\, U^k}{\partial\, v^a} \;=\; -F^k{}_a\,(U\,(v),\, v)} \tag{4.205}$$

mit den Funktionen

$$F^k{}_a\,(U,\, v) \;=\; \overline{g}^{ki}\,(U,\, v)\, g_{ia}\,(U,\, v)\ . \tag{4.206}$$

Als Anfangsbedingung können wir etwa vorgeben, dass an einem bestimmten v-Punkt v_0 die Transformation (4.202) die Identität wird, d. h.

$$U^k\,(v_0;\, u^{'}) \;=\; u^{'k} \qquad (k \;=\; 1,\, 2,\, \ldots M)\ . \tag{4.207}$$

In dem häufigsten und insbesondere im Bereich der kosmologischen Modelle überwiegenden Fall, dass nur eine v-Koordinate $v^1 \;=\; v$ auftritt, ist (4.205 – 207) ein Anfangswertproblem für ein System gekoppelter *gewöhnlicher* Dgln. 1. Ordnung für die M Funktionen $U^k\,(v)$ und somit nach bekannten Sätzen über derartige Systeme eindeutig lösbar.

[Im allgemeineren Falle mit 2 oder mehr v-Koordinaten müssen *Integrabilitätsbedingungen* für die Funktionen $F^k{}_v\,(U,\, v)$ von (4.206) erfüllt sein, die daher rühren, dass die Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen,

$$\frac{\partial^2\, U^k}{\partial\, v^a\, \partial\, v^b} \;=\; \frac{\partial^2\, U^k}{\partial\, v^b\, \partial\, v^a}\ ,$$

durch die Lösung gewahrt bleiben muss. Dies ergibt nach (4.205) die Bedingungen

$$\frac{\partial\, F^k{}_a}{\partial\, U^i}\, \frac{\partial\, U^i}{\partial\, v^b} + \frac{\partial\, F^k{}_a}{\partial\, v^b} \;=\; \frac{\partial\, F^k{}_b}{\partial\, U^i}\, \frac{\partial\, U^i}{\partial\, v^a} + \frac{\partial\, F^k{}_b}{\partial\, v^a}$$

oder nach erneuter Benutzung von (4.205)

$$F^i{}_b\, \frac{\partial\, F^k{}_a}{\partial\, U^i} - F^i{}_a\, \frac{\partial\, F^k{}_b}{\partial\, U^i} \;=\; \frac{\partial\, F^k{}_a}{\partial\, v^b} - \frac{\partial\, F^k{}_b}{\partial\, v^a}\ . \tag{4.208}$$

Dass diese Integrabilitätsbedingungen unter den hier gemachten Voraussetzungen in der Tat erfüllt sind, lässt sich aus den Gln. (4.200 a/b) herleiten; wir verweisen, da dieser Fall für uns weniger wichtig ist, für die Einzelheiten auf [1], S. 399/400].

Haben wir nun durch Lösung des Anfangswertproblems (4.205 – 207) die Transformation (4.202) konstruiert, so können wir (4.201) als erfüllt annehmen und die Striche wieder weglassen, d. h. o. B. d. A.

$$\boxed{g_{ia} = 0 \qquad (i = 1 \ldots M,\ a = M + 1 \ldots N)} \tag{4.209}$$

setzen. Die Teile (4.200 b/c) der Isometriebedingung lauten dann in den neuen Koordinaten

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial v^a}\, g_{ik} = 0\ , \tag{4.210}$$

$$\xi^k\, \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k} = 0\ . \tag{4.211}$$

Aus (4.210) folgt, da g_{ik} nichtsingulär ist

$$\boxed{\frac{\partial \xi^k}{\partial v^a} = 0\ ,} \tag{4.212}$$

d. h. in den neuen Koordinaten hängen die $\xi^k\,(u,\,v)$ von Gl. (4.197 a) sogar nur noch von u ab. Aus (4.211) folgt, da es an jedem Punkte Killing-Vektoren gibt, deren ξ^k-Anteil beliebige M-dimensionale Werte annimmt,

$$\boxed{\frac{\partial g_{ab}}{\partial u^k} = 0\ ,} \tag{4.213}$$

wie in (4.199) behauptet.

Für den g_{ij}-Anteil der Metrik besagt (4.200 a) zusammen mit (4.212) insbesondere, dass es bei beliebig gewähltem, festem v_0 $\frac{1}{2}\,M\,(M+1)$ unabhängige Killing-Vektoren für $g_{ij}\,(u,\,v_0)$ gibt, die zugleich auch Killing-Vektoren für g_{ij} bei jedem anderen v sind:

$$\frac{\partial \xi^k\,(u)}{\partial u^i}\, g_{kj}\,(u,\,v_0) + \frac{\partial \xi^k\,(u)}{\partial u^j}\, g_{ki}\,(u,\,v_0) + \xi^k\,(u)\, \frac{\partial g_{ij}\,(u,\,v_0)}{\partial u^k} = 0\ . \tag{4.214 a}$$

$$\frac{\partial \xi^k\,(u)}{\partial u^i}\, g_{kj}\,(u,\,v) + \frac{\partial \xi^k\,(u)}{\partial u^j}\, g_{ki}\,(u,\,v) + \xi^k\,(u)\, \frac{\partial g_{ij}\,(u,\,v)}{\partial u^k} = 0\ . \tag{4.214 b}$$

Im Hinblick auf Gl. (4.184) für maximal forminvariante Tensoren kann (4.214) so interpretiert werden, dass $g_{ij}\,(u,\,v)$ ein maximal forminvarianter Tensor in dem maximal symmetrischen M-dimensionalen Raum mit Metrik $g_{ij}\,(u,\,v_0)$ ist. Nach unserem Resultat

(4.194) ist dann $g_{ij}(u,\, v)$ proportional zu $g_{ij}(u,\, v_0)$ mit u-unabhängigen Koeffizienten $f(v,\, v_0)$. Legen wir den Bezugspunkt v_0 ein für allemal fest, so können wir ihn weglassen und $\tilde{g}_{ij}(u)$ für $g_{ij}(u,\, v_0)$, $f(v)$ für $f(v,\, v_0)$ schreiben:

$$g_{ij}(u,\, v) \;=\; f(v)\, \tilde{g}_{ij}(u)\;. \tag{4.215}$$

Damit ist der Satz (4.199) vollständig bewiesen. Die Voraussetzung der maximalen Symmetrie der Unterräume $v = \text{const.}$ kann nach dem früher Gesagten auch ersetzt werden durch die Annahme, dass diese Unterräume um jeden Punkt isotrop sind.

In allen praktisch wichtigen Fällen sind die maximal symmetrischen Unterräume raumartig, d. h. die Untermatrix g_{ij} hat lauter negative Eigenwerte. Dann können wir für die Größe $-\tilde{g}_{ij}\, du^i\, du^j$ in (4.199) die Resultate (4.163) für $K = 0$, (4.164 b) für $K > 0$ und (4.172 b) für $K < 0$ verwenden und in den beiden letzteren Fällen den Faktor $1/|K|$ in die Funktion $f(v)$ einbeziehen. Dann ergibt sich als *Standardform für das Linienelement eines Raumes mit maximal symmetrischen Unterräumen der Krümmung K und rein negativer Signatur*:

$$ds^2 \;=\; g_{ab}(v)\, dv^a\, dv^b \;-\; f(v)\left[d\vec{u}^{\,2} \;+\; \frac{k\,(\vec{u}\cdot d\vec{u}\,)^2}{1 \;-\; k\,\vec{u}^{\,2}}\right]\;, \tag{4.216 a}$$

$$f(v) \;>\; 0\;, \qquad k \;=\; \begin{cases} +1 & (K > 0) \\ \;\;\,0 & (K = 0) \\ -1 & (K < 0) \end{cases} \tag{4.216 b}$$

Als Spezialfälle seien diskutiert:

A) Kugelsymmetrischer dreidimensionaler Raum. Der Gesamtraum habe $N = 3$, eine Metrik rein positiver Signatur $+++$, und eine Schar maximal symmetrischer zweidimensionaler Unterräume ($M = 2$) mit positiver Krümmung. Hier haben wir eine v-Koordinate, die mit r bezeichnet sei, und zwei u-Koordinaten u^1, u^2. Die Metrik hat nach (4.216) (mit $k = +1$) die Form

$$ds^2 \;=\; g(r)\, dr^2 \;+\; f(r)\left\{(du^1)^2 \;+\; (du^2)^2 \;+\; \frac{(u^1\, du^1 \;+\; u^2\, du^2)^2}{1 \;-\; (u^1)^2 \;-\; (u^2)^2}\right\}\;. \tag{4.217}$$

Transformation von u^1, u^2 auf Unterraumkoordinaten ϑ, φ gemäß

$$u^1 \;=\; \sin\vartheta\, \cos\varphi\;, \qquad u^2 \;=\; \sin\vartheta\, \sin\varphi \tag{4.218}$$

bringt dies auf die vertraute Form

$$\boxed{\; ds^2 \;=\; g(r)\, dr^2 \;+\; f(r)\left[\, d\vartheta^2 \;+\; \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\,\right] \;} \tag{4.219}$$

mit positiven Funktionen $f(r)$, $g(r)$.

B) Kugelsymmetrische vierdimensionale Raumzeit. Es sei $N = 4$ und die Signatur der Gesamtmetrik sei vom Minkowskischen Typ $\{+ - - -\}$. Der Raum besitze maximal symmetrische zweidimensionale ($M = 2$) Unterräume negativer Signatur und positiver Krümmung. Für letztere verwenden wir statt der 2 u-Koordinaten wieder ϑ und φ wie in (4.218). Außerdem gibt es 2 v-Koordinaten, die t und r genannt seien. Damit wird (4.216) zu

$$\begin{aligned} ds^2 \,=\, & g_{tt}(t,\, r)\, dt^2 \,+\, 2\, g_{tr}(t,\, r)\, dt\; dr \,+\, g_{rr}(t,\, r)\, dr^2 \\ & -f(t,\, r)\, [d\vartheta^2 \,+\, \sin^2\vartheta\, d\varphi^2] \end{aligned} \tag{4.220 a}$$

mit

$$f(t,\, r) \,>\, 0\;, \tag{4.220 b}$$

$$g_{ab}(t,\, r) \,=\, (2 \,\times\, 2) - \text{Matrix mit Signatur}\{+-\}\;. \tag{4.220 c}$$

Diese Metrik ist insbesondere in der relativistischen Astrophysik Ausgangspunkt für die Behandlung von Sternstruktur- und Sternentwicklungsproblemen mit Kugelsymmetrie.

Die Beispiele *A)* und *B)* führen auf die Metriken, die man auch auf Grund elementarer Argumente – wie z. B. bei der statisch-kugelsymmetrischen Metrik von Gl. (6.5) unten – angegeben hätte. Sie zeigen beide, wie man den wesentlichen Gehalt des Begriffs „Kugelsymmetrie“ durch Angaben über Raumdimensionen, Signaturen, Krümmungen und die Existenz maximal symmetrischer Unterräume erfassen kann.

C) Kugelsymmetrische und homogene Raumzeit. Der Gesamtraum habe wieder $N = 4$ und metrische Signatur $\{+ - - -\}$. Er besitze nun *drei*dimensionale ($M = 3$) maximal symmetrische Unterräume mit rein negativer Signatur (d. h. vom „raumartigen“ Typ) und *beliebiger Krümmung* $K = k \cdot |K|$. Wir benötigen hier 3 u-Koordinaten, für die wir $\vec{u} = \{u^1,\, u^2,\, u^3\}$ schreiben, und eine v-Koordinate. Gln. (4.216) ergeben

$$ds^2 \,=\, g(v)\, dv^2 \,-\, f(v)\, \left[d\vec{u}^{\,2} \,+\, \frac{k\,(\vec{u}\,\cdot\, d\vec{u}\,)^2}{1 \,-\, k\,\vec{u}^{\,2}}\right] \tag{4.221 a}$$

$$f(v) \,>\, 0\;, \qquad g(v) \,>\, 0\;. \tag{4.221 b}$$

Wir führen statt u^1, u^2, u^3 Polarkoordinaten r, ϑ, φ durch die Transformation (6.3/6.4) von Kap. 6 unten und statt v die Koordinate t durch

$$t \,=\, \int\limits_{v_0}^{v} dv'\, \sqrt{g(v')} \tag{4.222 a}$$

$$dt = \sqrt{g(v)}\, dv \tag{4.222 b}$$

ein und setzen $f(v(t)) = R^2(t)$. Dann wird

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right]} \tag{4.223}$$

$$k = +1 \quad \text{oder} \quad 0 \quad \text{oder} \quad -1\,.$$

Diese Metrik ist die Grundlage der heute gebräuchlichen kosmologischen Modelle, die durchweg von der Annahme räumlicher Homogenität und Isotropie ausgehen. Die Größe $R(t)$ wird in diesem Zusammenhang dann als „kosmischer Skalenfaktor“ bezeichnet.

5 Die Feldgleichungen der Gravitation

5.1 Heuristische Aufstellung der Feldgleichungen

Bisher haben wir das Gravitationsfeld in Gestalt der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ – bzw. ihrer Abweichung von der Minkowski-Metrik – als gegeben angenommen und seine Wechselwirkung mit anderen physikalischen Systemen formuliert. Wir gehen nun zur Aufstellung der Gleichungen über, die das Gravitationsfeld bzw. die Metrik selbst aus ihren Quellen zu berechnen gestatten. Als Quellen des Gravitationsfeldes identifizieren wir zunächst in der Newtonschen Mechanik die gravitierenden Massen, aber da wir schon in der Speziellen Relativitätstheorie die Masse als eine spezielle Form von Energie und damit von Viererimpuls erkannt haben, erwarten wir, dass *jede raumzeitliche Konzentration von Viererimpuls als Gravitationsquelle* wirken wird. Da das Gravitationsfeld selbst Träger von Energie und Impuls ist, befinden wir uns in einer ähnlichen Situation wie bei der nichtabelschen Eichfeldtheorie von Abschnitt 3.8 b): das Feld trägt zu seiner eigenen Quelle bei, und seine Feldgleichungen werden daher schon ohne Ankopplung an andere physikalische Systeme die für Selbstwechselwirkungen charakteristische Nichtlinearität aufweisen.

Für eine heuristische Herleitung dieser Feldgleichungen gehen wir nochmals vom Äquivalenzprinzip aus: in einem beliebigen Gravitationsfeld existiert an jedem Punkt X ein lokal inertiales Koordinatensystem $\{\xi_x^\alpha\}$ mit $\xi_x^\alpha(x = X) = \xi_0^\alpha$ derart, dass gilt:

$$g_{\alpha\beta}(\xi)\Big|_{\xi=\xi_0} = \eta_{\alpha\beta} , \tag{5.1 a}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}(\xi)}{\partial \xi^\gamma}\Big|_{\xi=\xi_0} = 0 . \tag{5.1 b}$$

In einer genügend kleinen Umgebung von X bzw. ξ_0 ist also das Gravitationsfeld „schwach“ in dem Sinne, dass die Abweichungen der Metrik von $\eta_{\alpha\beta}$ zweiter Ordnung in $\xi - \xi_0$ sind. In dieser kleinen Umgebung kann man daher hoffen, das Feld durch lineare partielle Dgln. zu beschreiben. Auch diese linearen Dgln. werden wir freilich noch weitgehend erraten müssen, weil über ihre Lösungen empirisch weniger bekannt ist als etwa im Falle des elektromagnetischen Feldes.

Nach Gl. (2.61) ist die Komponente g_{00} des metrischen Tensors für ein schwaches und statisches Gravitationsfeld, das von einer nichtrelativistischen Massenverteilung $\rho(\vec{x})$ erzeugt wird, gegeben durch

$$g_{00} = 1 + 2\,\Phi , \tag{5.2 a}$$

wobei das Newtonsche Gravitationspotenzial $\Phi(\vec{x})$ seinerseits aus der Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x}) \tag{5.2 b}$$

zu bestimmen ist; G ist die Gravitationskonstante (2.63). Wir bemerken nun, dass die Energiedichte, d. h. die Θ_{00}-Komponente des Energie-Impuls-Tensors, für nichtrelativistische Materie (und in unseren Einheiten mit $c = 1$) gleich der Massendichte ist:

$$\Theta_{00}(\vec{x}) \approx \rho(\vec{x}) \,. \tag{5.2 d}$$

Dies sieht man z. B. für ein Massenpunktsystem aus Gl. (1.268 a) im statischen Grenzfall. Kombination der Gleichungen (5.2 a-c) ergibt

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 g_{00} = 8\pi G \Theta_{00}} \,. \tag{5.2 d}$$

Diese einfache, nichtkovariante Feldgl. gilt nur für schwache, statische und von nichtrelativistischen Massenverteilungen erzeugte Felder.

Wir erraten jedoch rein heuristisch aus der Form dieser Gleichung, dass die Feldgleichungen eines *schwachen* Gravitationsfeldes für eine allgemeine Energie-Impuls-Verteilung, beschrieben durch den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\alpha\beta}(t, \vec{x})$, die Form

$$L^{(2)}_{\alpha\beta}[g] = 8\pi G \Theta_{\alpha\beta} \tag{5.3}$$

haben werden, wo $L^{(2)}[g]$ einen auf die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ wirkenden *linearen* Differentialoperator 2. Ordnung bezeichnet, der für den statischen Grenzfall in $\vec{\nabla}^2 g_{00}$ übergeht. Aus dem Äquivalenzprinzip folgt dann, dass für Gravitationsfelder beliebiger Stärke die Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu}(x) = 8\pi G \Theta_{\mu\nu}(x) \tag{5.4}$$

lauten, wobei $G_{\mu\nu}(x)$ ein Tensor 2. Stufe ist, der aus $g_{\mu\nu}$ und seinen ersten und zweiten Ableitungen i. a. nichtlinear aufgebaut ist und sich für schwache Felder (bzw. in lokal inertialen Koordinatensystemen für kleine Umgebungen des Bezugspunktes) auf den linearen Ausdruck $L^{(2)}_{\alpha\beta}[g]$ reduziert.

Natürlich gibt es viele Tensoren $G_{\mu\nu}$, die bei gegebenem $L^{(2)}[g]$ diese Eigenschaften besitzen. Um die Vieldeutigkeit einzuschränken, denken wir uns $G_{\mu\nu}$ in eine Summe von Produkten von Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ entwickelt und klassifizieren die Terme dieser Entwicklung nach ihrer Gesamt-Ableitungszahl N. Z. B. umfasst $N = 3$ die Terme, die linear in den dritten partiellen Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ sind oder Produkte einer zweiten mit einer ersten Ableitung oder Produkte dreier erster Ableitungen enthalten. Als Ganzes muss $G_{\mu\nu}$ nach (5.2 d) die Dimension einer zweiten Ableitung von $g_{\mu\nu}$ haben; jeder Term mit $N \neq 2$ muss daher mit einer Naturkonstanten der Dimension (Länge)$^{N-2}$ als Vorfaktor auftreten. Solche Terme würden bei Gravitationsfeldern mit sehr großen ($N > 2$) oder sehr kleinen ($N < 2$) charakteristischen Längenskalen vernachlässigbar. Wir lassen uns hier vom heuristischen Prinzip der Einfachheit leiten und stellen die Zusatzforderung auf, dass die Feldgleichungen der Gravitation in Abwesenheit von Quellen ($\Theta_{\mu\nu} \equiv 0$), d. h. die Struktur des Tensors $G_{\mu\nu}$ linker Hand in (5.4), *skaleninvariant* sein sollen; dann sind nur noch Terme mit $N = 2$ möglich. Wir haben damit folgende Forderungen an die linke Seite $G_{\mu\nu}$ der Feldgleichungen:

(a) $G_{\mu\nu}$ muss Tensor 2. Stufe sein, damit (5.4) ein allgemein-kovariantes Naturgesetz wird.

(b) $G_{\mu\nu}$ besteht nur aus Termen, die entweder linear in den zweiten oder bilinear in den ersten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ sind.

(c) $G_{\mu\nu}$ muss symmetrisch sein, da $\Theta_{\mu\nu}$ symmetrisch ist.

(d) Da $\Theta_{\mu\nu}$ im Sinne der Gl. (3.127) „kovariant erhalten“ ist, muss dies auch für $G_{\mu\nu}$ zutreffen:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} \equiv 0\ . \tag{5.5}$$

(e) Für das schwache und statische Feld einer nichtrelativistischen Massenverteilung muss die $(\mu, \nu) = (0, 0)$-Komponente von (5.4) sich auf Gl. (5.2 d) reduzieren, d. h.

$$G_{00} \approx \vec{\nabla}^{\,2} g_{00} \tag{5.6}$$

Aus den Forderungen (a) und (b) folgt wegen des Eindeutigkeitssatzes (4.10) bereits, dass $G_{\mu\nu}$ aus Spezialfällen, genauer: aus Kontraktionen des Krümmungstensors $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ aufgebaut sein muss. Nach Abschnitt 4.4 b) gibt es nur zwei wesentlich verschiedene Kontraktionen, den Ricci-Tensor $R_{\mu\kappa}$ und die Krümmungsinvariante $R = R^{\kappa}{}_{\kappa}$. Ein aus diesen beiden und evtl. der Metrik $g_{\mu\nu}$ selbst aufgebauter Tensor 2. Stufe kann daher nur die allgemeine Form

$$G_{\mu\nu} = C_1\, R_{\mu\nu} + C_2\,(g_{\mu\nu}\, R) \tag{5.7}$$

haben. Da $R_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ symmetrische Tensoren sind, ist damit Forderung (c) automatisch erfüllt.

Um Forderung (d) anzuwenden, schreiben wir

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \right) + \left(\frac{1}{2}\, C_1 + C_2 \right) g_{\mu\nu}\, R$$

und beachten, dass nach Aussage der kontrahierten Bianchi-Identität (4.55 b) die kovariante Divergenz des 1. Terms verschwindet. Gleichung (5.5) gibt also

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = \left(\frac{1}{2}\, C_1 + C_2 \right) R_{;\,\nu} \; . \tag{5.8}$$

Man kann also Forderung (d) einerseits dadurch erfüllen, dass man $R_{;\,\nu} = \partial\, R \,/\, \partial\, x^{\nu} \equiv 0$ fordert. Diese Möglichkeit ist aber auszuschließen, denn aus (5.4) und (5.7) folgt durch Spurbildung

$$G^{\mu}{}_{\mu} = (C_1 + 4\, C_2)\, R = 8\, \pi\, G\, \Theta^{\mu}{}_{\mu} \tag{5.9}$$

und $\Theta^{\mu}{}_{\mu;\,\nu} = \partial\, \Theta^{\mu}{}_{\mu} \,/\, \partial\, x^{\nu}$ ist für eine allgemeine, nämlich inhomogene nichtrelativistische Massenverteilung nicht identisch Null. Aus (5.8) schließen wir daher $C_2 = -\frac{1}{2}\, C_1$ und somit

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \right) \; , \tag{5.10}$$

d. h. $G_{\mu\nu}$ ist konstantes Vielfaches der in der kontrahierten Bianchi-Identität (4.55 b) auftretenden, kovariant-divergenzfreien Kombination. In einer Feldgleichung von der Form (5.4) ist damit die *„kovariante Erhaltung der Quelle“ $\Theta_{\mu\nu}$ in ähnlicher Weise gewährleistet wie die Kontinuitätsgleichung $\partial_{\mu}\, J^{\mu} = 0$ des elektromagnetischen Viererstroms durch Gleichung (1.256)* und die Antisymmetrie des Feldstärkentensors $F^{\nu\mu}$.

Die Konstante C_1 wird nun durch Forderung (e) fixiert. Zunächst betrachten wir die Näherung des *schwachen Feldes*, wo in der Abweichung $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ linearisiert werden darf. Hier können im Krümmungstensor (4.37) die in der 2. Zeile vorkommenden, in Γ bzw. den ersten Ableitungen von g quadratischen Terme vernachlässigt werden:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\, g_{\lambda\nu}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\kappa}} - \frac{\partial^2\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^{\kappa}\, \partial\, x^{\lambda}} - \frac{\partial^2\, g_{\kappa\lambda}}{\partial\, x^{\mu}\, \partial\, x^{\nu}} + \frac{\partial^2\, g_{\mu\kappa}}{\partial\, x^{\lambda}\, \partial\, x^{\nu}} \right) \tag{5.11 a}$$

(schwaches Feld, d. h. $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$).

Die entsprechende linearisierte Näherung für den Ricci-Tensor entsteht durch Kontraktion mit $g^{\lambda\nu}$, das in dieser Näherung aber durch $\eta^{\lambda\nu}$ zu ersetzen ist:

$$\boxed{R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left[\Box\, g_{\mu\nu} - \eta^{\kappa\lambda}\, \partial_{\lambda}\, (\partial_{\mu}\, g_{\nu\kappa} + \partial_{\nu}\, g_{\mu\kappa}) + \eta^{\kappa\lambda}\, \partial_{\mu}\, \partial_{\nu}\, g_{\kappa\lambda} \right]} \tag{5.11 b}$$

(schwaches Feld, d. h. $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$).

Für den Krümmungsskalar schließlich ergibt sich durch weitere Kontraktion mit $\eta^{\mu\nu}$:

$$R \approx \eta^{\mu\nu} \, g_{\mu\nu} - \overbrace{\eta^{\kappa\lambda} \, \eta^{\mu\nu} \, \partial_\lambda \, \partial_\nu}^{\partial^\kappa \, \partial^\mu} \, g_{\mu\kappa} \tag{5.11 c}$$

(schwaches Feld, d. h. $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$).

Wir haben die Schreibweisen $\partial_\lambda = \partial \, / \, \partial \, x^\lambda$ und $\Box = \eta^{\kappa\lambda} \, \partial_\kappa \, \partial_\lambda$ verwendet. Von (5.11 b) werden wir insbesondere das Element

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \left[\Box \, g_{00} - 2 \, \eta^{\kappa\lambda} \, \partial_\lambda \, \partial_0 \, g_{0\kappa} + \eta^{\kappa\lambda} \, (\partial_0)^2 \, g_{\kappa\lambda} \right] \tag{5.11 d}$$

benötigen. Für *statische* Felder können alle Terme mit ∂_0 vernachlässigt werden:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \, \nabla^2 \, g_{00} \quad \text{(schwaches und statisches Feld)} \; . \tag{5.12}$$

Schließlich bringen wir die Annahme ins Spiel, dass das durch $\Theta_{\mu\nu}$ beschriebene Quellensystem im gewählten Koordinatensystem nichtrelativistisch sei. Für ein solches System ist stets $|\Theta_{mn}| \ll |\Theta_{00}|$ mit $m, n = 1, 2, 3$ und daher, wenn (5.4) gelten soll, $|G_{mn}| \ll |G_{00}|$. Nach (5.10) muss also

$$R_{mn} - \frac{1}{2} \, g_{mn} \, R \approx 0 \qquad (m, n = 1, 2, 3) \tag{5.13 a}$$

werden relativ zum dominierenden $R_{00} - \frac{1}{2} \, g_{00} \, R$. Für schwache Felder nichtrelativistischer Quellen gilt daher

$$\begin{aligned} R = g^{\mu\nu} \, R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} \, R_{\mu\nu} &= R_{00} - \sum_{m=1}^{3} R_{mm} \\ &\approx R_{00} - \sum_{m=1}^{3} \left(\frac{1}{2} \, g_{mm} \, R \right) \approx R_{00} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{3} (\eta_{mm} \, R) \\ &= R_{00} + \frac{3}{2} \, R \end{aligned} \tag{5.13 b}$$

oder

$$R \approx -2 \, R_{00} \; . \tag{5.13 c}$$

Mit allen diesen Näherungen wird also

$$\begin{aligned} G_{00} &\approx C_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} \, \eta_{00} \, R \right) \approx 2 \, C_1 \, R_{00} \\ &\approx (-C_1) \, \vec{\nabla}^2 \, g_{00} \; . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Vergleich mit der Forderung (5.6) ergibt $C_1 = -1$. Der derart bestimmte Tensor

$$\boxed{-G_{\mu\nu}(x) \,=\, R_{\mu\nu}(x) \,-\, \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\, R(x)} \tag{5.15}$$

wird als *Einstein-Tensor* bezeichnet. Die Feldgleichung (5.4) kann auch in einer alternativen Form geschrieben werden: Kontraktion von μ und ν ergibt

$$-R \,+\, 2\,R \,=\, 8\,\pi\, G\, \Theta^{\mu}{}_{\mu} \;. \tag{5.16}$$

Damit erhalten wir die berühmten **Einsteinschen Feldgleichungen des Gravitationsfeldes** in den beiden äquivalenten Formen

$$\boxed{R_{\mu\nu}(x) \,-\, \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\, R(x) \,=\, -8\,\pi\, G\, \Theta_{\mu\nu}(x)} \tag{5.17 a}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu}(x) \,=\, -8\,\pi\, G \left[\Theta_{\mu\nu}(x) \,-\, \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}(x)\, \Theta^{\mu}{}_{\mu}(x)\right]} \tag{5.17 b}$$

Als Nebenprodukt notieren wir die in (5.11 b/c) enthaltene linearisierte Form des Einstein-Tensors im Sinne von (5.3):

$$\begin{aligned} -G_{\alpha\beta}(x) \,\approx\, -L^{(2)}_{\alpha\beta}[g(x)] \,=\, \frac{1}{2}\, &[\Box\, g_{\alpha\beta} \,+\, \partial_\alpha\, \partial_\beta\, \eta^{\kappa\lambda}\, g_{\kappa\lambda} \\ -\partial^\kappa\, (\partial_\alpha\, g_{\beta\kappa} \,+\, \partial_\beta\, g_{\alpha\kappa}) \,-\, \eta_{\alpha\beta}\, &(\eta^{\kappa\lambda}\, \Box\, g_{\kappa\lambda} \,-\, \partial^\kappa\, \partial^\mu\, g_{\mu\kappa})] \;, \end{aligned} \tag{5.18}$$

Es ist instruktiv, noch einen weiteren, etwas verschiedenen heuristischen Weg zu den Feldgleichungen zu betrachten. Um die linke Seite $G_{\mu\nu}$ von (5.4) an einem Punkt $x = X$ zu erhalten, könnte man zunächst in den lokal-inertialen Koordinaten $\{\xi^\alpha_X\}$ bei X, in denen das Gravitationsfeld lokal schwach ist, den allgemeinsten linearen Differentialausdruck 2. Ordnung in der Metrik, $\tilde{G}^X_{\alpha\beta}(\xi)$, aufstellen, der mit den Forderungen der Lorentz-Kovarianz und Symmetrie in den Indizes verträglich ist,

$$\begin{aligned} \tilde{G}^X_{\alpha\beta}(\xi) = a_1 &\Bigg(\underbrace{\eta^{\gamma\delta}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\gamma}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\delta}}_{\Box_\xi}\Bigg)\, g_{\alpha\beta}(\xi) \,+\, a_2\, \eta^{\gamma\delta}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\delta} \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial\, \xi^\alpha}\, g_{\beta\gamma}(\xi) \,+\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\beta}\, g_{\alpha\gamma}(\xi)\right] \,+\, a_3\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\alpha}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\beta}\, [\eta^{\kappa\lambda}\, g_{\kappa\lambda}(\xi)] \\ &+ b_1\, \eta_{\alpha\beta}\, \Box_\xi\, [\eta^{\kappa\lambda}\, g_{\kappa\lambda}(\xi)] \,+\, b_2\, \eta_{\alpha\beta}\, \eta^{\kappa\lambda}\, \eta^{\mu\nu}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\lambda}\, \frac{\partial}{\partial\, \xi^\nu}\, g_{\kappa\mu} \;, \end{aligned} \tag{5.19}$$

mit 5 freien reellen Konstanten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2. Den Tensor $G_{\mu\nu}(x)$ im allgemeinen Koordinatensystem würde man dann durch die Transformation

$$G_{\mu\nu}(x) = \left\{ \frac{\partial \xi_X^\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_X^\beta(x)}{\partial x^\nu} \tilde{G}_{\alpha\beta}^X(\xi(x)) \right\}_{x=X} \tag{5.20}$$

erhalten; er ließe sich i. a. nicht mehr durch die Metrik und ihre bis zu zweiten Ableitungen bezüglich der x-Koordinaten ausdrücken, sondern enthielte allgemeinere funktionale Abhängigkeiten.

Wir erhalten jedoch für die Konstanten $a_1 \dots b_2$ sofort weitgehende Einschränkungen aus der Energie-Impuls-Bilanz (3.127): für schwache Felder kann dort die kovariante durch die gewöhnliche Ableitung ersetzt werden, so dass die Kontinuitätsgleichung in den ξ-Koordinaten lokal bei X die Form

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \tilde{\Theta}_{\alpha\beta}(\xi) = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \equiv \eta^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial \xi^\gamma} \right) \tag{5.21 a}$$

annimmt. Daher muss auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \tilde{G}_{\alpha\beta}(\xi) &= (a_1 + a_2) \Box_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} g_{\beta\gamma}(\xi) \right] + (a_2 + b_2) \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} g_{\kappa\lambda}(\xi) \right] + (a_3 + b_1) \Box_\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \eta^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda}(\xi) \right] = 0 \end{aligned} \tag{5.21 b}$$

werden, d. h.

$$a_2 = -a_1 \,, \qquad b_2 = -a_2 = +a_1 \,, \qquad a_3 = -b_1 \,. \tag{5.21 c}$$

Um die noch freibleibenden Konstanten a_1 und b_1 zu bestimmen, ziehen wir wieder den Newtonschen Limes heran: für statische Felder, wo Terme mit $\partial / \partial \xi^0$ wegfallen, ergibt (5.19) mit (5.21 c)

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{00} + \tilde{G}_{mm} \approx &-a_1 \vec{\nabla}_\xi^2 (g_{00} + g_{mm}) \\ &+ b_1 \vec{\nabla}_\xi^2 (g_{00} - g_{mm}) \end{aligned} \tag{5.22}$$

(Summation über m von 1 bis 3). Dabei wurde $\eta^{\kappa\lambda} g_{\kappa\lambda} = g_{00} - g_{mm}$ benutzt. Für nichtrelativistische Quellen ist $|\Theta_{mn}| \ll |\Theta_{00}|$; aus (5.22) und den Feldgleichungen (5.4) folgt daher

$$(-a_1 + b_1) \vec{\nabla}_\xi^2 g_{00} - (a_1 + b_1) \nabla^2 g_{mm} = 8 \pi G \tilde{\Theta}_{00} \,. \tag{5.23 a}$$

Soll dies mit (5.2 d) übereinstimmen, so folgt

$$a_1 = -b_1 = -\frac{1}{2} \,. \tag{5.23 b}$$

Die damit bestimmte Form von (5.19) lokal bei X,

$$\begin{aligned} -\tilde{G}^X_{\alpha\beta}(\xi) \;=\; \frac{1}{2}\Bigg\{ & \Box_\xi\, g_{\alpha\beta} \;-\; \frac{\partial}{\partial\,\xi_\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\,\xi^\alpha}\, g_{\beta\gamma} \;+\; \frac{\partial}{\partial\,\xi^\beta}\, g_{\alpha\gamma}\right] \\ & +\; \frac{\partial^2}{\partial\,\xi^\alpha\,\partial\,\xi^\beta}\,(\eta^{\kappa\lambda}\, g_{\kappa\lambda}) \;-\; \eta_{\alpha\beta}\left[\Box_\xi\,(\eta^{\kappa\lambda}\, g_{\kappa\lambda}) \;-\; \frac{\partial^2}{\partial\,\xi_\kappa\,\partial\,\xi_\mu}\, g_{\kappa\mu}\right]\Bigg\}\;, \end{aligned} \tag{5.24}$$

ist aber, wie der Vergleich mit (5.18) zeigt, nichts anderes als die für schwache Felder gültige Form des Einstein-Tensors $-G_{\alpha\beta} \,=\, R_{\alpha\beta} \,-\, \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta}\, R$. *Die Transformation (5.20) ergibt also für $-G_{\alpha\beta}$ wieder diesen Tensor.* Wollte man also über den Ansatz (5.20 /5.19) allgemeinere Feldgleichungen als die Einsteinschen konstruieren und dabei die Energie-Impuls-Bilanz der Quellen respektieren, so müsste man den empirisch gut gesicherten Newtonschen Limes aufgeben.

Im „leeren Raum“, d. h. in Raumgebieten, wo keine nichtgravitative Energie-Impuls-Verteilung $\Theta_{\mu\nu}(x)$ vorhanden ist (auch ein lediglich von elektromagnetischen Feldern durchzogenes Raumgebiet wäre in diesem Sinne *nicht* leer!), ergeben sich nach (5.17 b) die Gleichungen

$$\boxed{R_{\mu\nu}(x) \;=\; 0 \quad \text{(im quellenfreien Raum)}}\;. \tag{5.25}$$

Wäre das Raum-Zeit-Kontinuum zwei- oder dreidimensional, so würde nach dem in Abschnitt (4.6) Gesagten der gesamte Krümmungstensor $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ – der dort ja durch $R_{\mu\nu}$ bereits vollständig bestimmt ist – und damit das Gravitationsfeld im quellenfreien Raum verschwinden. Das reale vierdimensionale Kontinuum ist also das dimensionsmäßig kleinste, in dem Gravitationsfelder „im leeren Raum“, d. h. in quellenfreien Raumgebieten existieren können.

Schwächt man Forderung (b) ab und erlaubt im Tensor $G_{\mu\nu}$ auch Terme mit einer Gesamt-Ableitungszahl $N \,<\, 2$ (d. h. $N \,=\, 1$ und $N \,=\, 0$), dann wissen wir aus Abschnitt 4.1 bereits, dass Einbeziehung von $N \,=\, 1$ (erste partielle Ableitungen der Metrik) keinen wesentlich neuen Tensor zu konstruieren gestattet. Dagegen ist bei Zulassung von $N \,=\, 0$ ein Zusatzterm proportional zur Metrik $g_{\mu\nu}$ selbst möglich:

$$R_{\mu\nu} \,-\, \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R \,+\, \lambda\, g_{\mu\nu} \;=\; -8\,\pi\, G\,\Theta_{\mu\nu}\;. \tag{5.26}$$

Dabei ist λ eine Naturkonstante der Dimension Länge^{-2}, die die Skaleninvarianz der quellenfreien Gravitationsgleichungen bricht, die sog. **kosmologische Konstante**. Diese von Einstein selbst (aus kosmologischen Gründen, die sich später von der empirischen

Seite her zu erledigen schienen) vorübergehend vertretene Variante der Theorie erfüllt nicht ohne weiteres die Forderung (e), da in Gl. (5.6) ein Zusatzterm $-\lambda\, g_{00}$ übrigbleibt; daher muss λ, um die gesicherten Resultate der Newtonschen Himmelsmechanik nicht zu beeinträchtigen, jedenfalls klein gegen den inversen quadratischen Radius des Sonnensystems sein. Innerhalb dieser Schranke kann jedoch ein nichtverschwindender Wert der kosmologischen Konstanten nicht ausgeschlossen werden; die neuere empirische Kosmologie liefert in der Tat zunehmend Hinweise darauf, dass er zur Erklärung der Daten über die kosmische Expansion benötigt wird.

5.2 Koordinatenbedingungen. Anfangswertproblem

a) Koordinatenbedingungen. Die Unbekannte in den Feldgleichungen, der symmetrische Metriktensor $g_{\mu\nu}\,(x)$, hat $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 + 1) = 10$ unabhängige Komponenten. Da auch die Tensoren $G_{\mu\nu}$ und $\Theta_{\mu\nu}$ diese Komponentenzahl aufweisen, scheinen die Feldgleichungen (5.17) zunächst gerade die nötige Anzahl von 10 Dgln. für 10 unbekannte Funktionen darzustellen.

Dies trifft jedoch bei genauerem Hinsehen nicht zu, denn die 10 $G_{\mu\nu}$ sind lediglich rein algebraisch unabhängig, als Differentialausdrücke 2. Ordnung in der Metrik aber funktional miteinander verknüpft, da sie die kontrahierten Bianchi-Identitäten (4.55 b) erfüllen:

$$G^{\mu}{}_{\nu;\,\mu} = 0 \qquad (\nu = 0,\, 1,\, 2,\, 3)\;. \tag{5.27}$$

Tatsächlich hat man also nicht 10, sondern nur 10 - 4 = 6 funktional unabhängige Dgln., so dass *in den 10 Unbekannten $g_{\mu\nu}\,(x)$ 4 Funktionen unbestimmt bleiben.* Diese Unbestimmtheit ist nicht überraschend, denn die Lösung besitzt eine Vieldeutigkeit hinsichtlich der Koordinatenwahl: ist $g_{\mu\nu}\,(x)$ eine Lösung der Feldgln., dann ist jedes durch eine allgemeine Koordinatentransformation $x'^{\kappa} = x'^{\kappa}\,(x)$ gemäß der Gl. (3.11) daraus hervorgehende $g'_{\mu\nu}\,(x')$ ebenfalls Lösung und beschreibt dasselbe physikalische Gravitationsfeld. Diese allgemeine Koordinatentransformation enthält aber 4 beliebige Funktionen von x, was genau der obigen Vieldeutigkeit entspricht.

Dass die Einsteinschen Feldgleichungen die Metrik nicht eindeutig, sondern nur bis auf vier willkürlich wählbare Funktionen bestimmen, ist weitgehend analog zur Vieldeutigkeit in der Bestimmung des elektrodynamischen Vektorpotenzials. Die Wellengleichungen (1.234) für das Viererpotenzial,

$$K^{\mu}\,[A] \equiv \Box\, A^{\mu} - \partial^{\mu}\,(\partial_{\nu}\, A^{\nu}) = \mu_0\, J^{\mu}\;, \tag{5.28}$$

stellen vier Dgln. für 4 unbekannte Funktionen $A^0(x) \dots A^3(x)$ dar, aber sie bestimmen diese nicht eindeutig, weil die linken Seiten K^μ der Dgln. durch die zu den Bianchi-Identitäten analoge Differentialidentität

$$\partial_\mu K^\mu = \Box(\partial_\mu A^\mu) - (\partial_\mu \partial^\mu)(\partial_\nu A^\nu) = 0 \tag{5.29}$$

verknüpft sind, die bestehen muss, damit Ladungserhaltung $\partial_\mu J^\mu = 0$ gewährleistet ist. Tatsächlich hat man also nur $4 - 1 = 3$ funktional unabhängige Dgln., und es bleibt in der Lösung *eine* willkürliche Funktion von x frei. Dieser Freiheitsgrad entspricht hier natürlich genau der *Eichfreiheit* von A^μ: mit $A^\mu(x)$ ist auch $A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x)$ mit beliebiger Eichfunktion $\Lambda(x)$ Lösung von (5.28).

Im Falle der elektrodynamischen Wellengl. wird die Vieldeutigkeit durch konventionelle Wahl einer bestimmten Eichung beseitigt. Z. B. kann stets die Lorentz-Eichung (1.237) erreicht werden: ist $A^\mu(x)$ eine Lösung von (5.28), so kann eine physikalisch äquivalente Lösung mit der Eigenschaft

$$\partial_\mu A'^\mu(x) = 0 \tag{5.30}$$

erhalten werden durch Eichtransformation mit der aus

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \Lambda = 0 \ ,$$

d. h.

$$\Box \Lambda(x) = \partial_\mu A^\mu(x) \tag{5.31}$$

bestimmten Eichfunktion. (Diese inhomogene Wellengleichung kann in bekannter Weise nach der Methode der Greenschen Funktionen gelöst werden.) Die Lorentz-Eichbedingung (5.30) bildet zusammen mit drei von den vier Dgln. (5.28) ein Dgl.-System, das mit geeigneten Randbedingungen die vier Funktionen A^μ eindeutig bestimmt.

In analoger Weise kann die Vieldeutigkeit im metrischen Tensor dadurch beseitigt werden, dass man sich per Konvention auf *vier „Koordinatenbedingungen“* festlegt, die eine spezielle Klasse von Koordinatensystemen aussondern und zusammen mit sechs unabhängigen Einsteinschen Feldgleichungen (5.17) ein eindeutig lösbares Dgl.-System für die 10 metrischen Funktionen darstellen. Eine besonders bequeme und daher zumeist benutzte Wahl dieser Koordinatenbedingungen lautet

$$\boxed{\Gamma^\lambda(x) \equiv g^{\mu\nu}(x)\, \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) \equiv 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3)} \ . \tag{5.32}$$

Koordinatensysteme, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, heißen *harmonische Koordinaten.* Dass ein harmonisches Koordinatensystem stets gewählt werden kann, zeigt man, indem man von der Transformationsformel des affinen Zusammenhangs in der Form (3.34 b) ausgeht und mit $g'^{\mu\nu}$ kontrahiert:

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}\,\Gamma'^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \frac{\partial\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\kappa}} \left(g'^{\mu\nu}\,\frac{\partial\,x^{\rho}}{\partial\,x'^{\mu}}\,\frac{\partial\,x^{\sigma}}{\partial\,x'^{\nu}} \right) \Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma} \\ &\quad - \left(g'^{\mu\nu}\,\frac{\partial\,x^{\rho}}{\partial\,x'^{\mu}}\,\frac{\partial\,x^{\sigma}}{\partial\,x'^{\nu}} \right) \frac{\partial^2\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\rho}\,\partial\,x^{\sigma}} \\ &= \frac{\partial\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\kappa}}\,(g^{\rho\sigma}\,\Gamma^{\kappa}{}_{\rho\sigma}) \;-\; g^{\rho\sigma}\,\frac{\partial^2\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\rho}\,\partial\,x^{\sigma}} \end{aligned} \tag{5.33 a}$$

oder

$$\Gamma'^{\lambda} \;=\; \frac{\partial\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\kappa}}\,\Gamma^{\kappa} \;-\; g^{\rho\sigma}\,\frac{\partial^2\,x'^{\lambda}}{\partial\,x^{\rho}\,\partial\,x^{\sigma}}\;. \tag{5.33 b}$$

Sind also die vier $\Gamma^{\kappa}\,(x)$ nicht identisch Null, dann kann man stets ein neues Koordinatensystem $x'^{\lambda} \;=\; x'^{\lambda}\,(x)$ mit $\Gamma'^{\lambda}\,(x') \;=\; 0$, d. h. ein harmonisches System, finden, indem man die vier ungekoppelten und linearen partiellen Dgln. 2. Ordnung

$$g^{\rho\sigma}\,(x)\,\frac{\partial^2\,x'^{\lambda}\,(x)}{\partial\,x^{\rho}\,\partial\,x^{\sigma}} \;-\; \Gamma^{\kappa}\,(x)\,\frac{\partial\,x'^{\lambda}\,(x)}{\partial\,x^{\kappa}} \;=\; 0 \tag{5.34}$$

für die vier Funktionen $x'^{\lambda}\,(x)$ löst.

Da Γ^{λ} kein Vektor ist, sind die harmonischen Koordinatenbedingungen (5.32) nicht allgemein-kovariant – sie *müssen* es sein, wenn sie die Vieldeutigkeit von $g_{\mu\nu}$ beheben sollen, die ja gerade von der Kovarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen herrührt. (Analog ist (5.30) als Eichbedingung brauchbar, weil die linke Seite *nicht* eichinvariant ist.) Sie können jedoch in eine kompaktere Form gebracht werden, indem man (2.41) benutzt:

$$\Gamma^{\lambda} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,g^{\lambda\kappa}\,\left[\frac{\partial\,g_{\mu\kappa}}{\partial\,x^{\nu}} \;+\; \frac{\partial\,g_{\nu\kappa}}{\partial\,x^{\mu}} \;-\; \frac{\partial\,g_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}} \right]\;. \tag{5.35}$$

Verwendet man hier die in (4.36) und (3.66 / 3.72) bereits benutzten Umformungen

$$g^{\lambda\kappa}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}}\,g_{\mu\kappa} \;=\; -g_{\mu\kappa}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}}\,g^{\lambda\kappa}$$

und

$$\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,g_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,\sqrt{g}\;,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\Gamma^{\lambda} &= -\frac{1}{2}\left[\underbrace{g^{\nu\mu}\,g_{\mu\kappa}}_{\delta^{\nu}{}_{\kappa}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}} + \underbrace{g^{\mu\nu}\,g_{\nu\kappa}}_{\delta^{\mu}{}_{\kappa}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\mu}}\right] g^{\lambda\kappa} \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,\sqrt{g}\right) g^{\lambda\kappa} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,g^{\lambda\kappa} + g^{\lambda\kappa}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,\sqrt{g}\right]\end{aligned}$$

oder

$$\Gamma^{\lambda} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\,(\sqrt{g}\,\cdot\,g^{\lambda\kappa})\;. \tag{5.36}$$

Damit lauten die *harmonischen Koordinatenbedingungen*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\,x^{\kappa}}\left[\sqrt{g\,(x)}\,g^{\kappa\lambda}\,(x)\right] \;=\; 0 \qquad (\lambda \;=\; 0,\,1,\,2,\,3)\quad .} \tag{5.37}$$

Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ heißt eine Funktion $f\,(\vec{x}\,)$ harmonisch, wenn sie Lösung der Potenzialgleichung $\vec{\nabla}^{\,2} f \;=\; 0$, im Minkowski-Raum $\mathcal{M}^4$, wenn sie Lösung von $\Box\, f \;=\; 0$ ist. Dementsprechend wird man im Riemannschen Raum eine skalare Funktion $\varphi\,(x)$ harmonisch nennen, wenn sie im Nullraum des allgemein-kovarianten Wellenoperators liegt, d. h. Lösung von

$$\Box_{cov}\,\varphi \;\equiv\; (g^{\kappa\lambda}\,\varphi_{;\,\lambda})_{;\,\kappa} \;=\; 0 \tag{5.38}$$

ist. Nach den Rechenregeln für kovariante Ableitungen ist

$$\begin{aligned}(g^{\kappa\lambda}\,\varphi_{;\,\lambda})_{;\,\kappa} &= g^{\kappa\lambda}\,\varphi_{;\,\lambda;\,\kappa} \;=\; g^{\kappa\lambda}\left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x^{\lambda}}\right)_{;\,\kappa} \\ &= g^{\kappa\lambda}\left[\frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\,x^{\lambda}\,\partial\,x^{\kappa}} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\kappa}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x^{\rho}}\right] \\ &= g^{\kappa\lambda}\,\frac{\partial^2\,\varphi}{\partial\,x^{\lambda}\,\partial\,x^{\kappa}} - \Gamma^{\rho}\,\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x^{\rho}}\;.\end{aligned} \tag{5.39}$$

Erfüllt also ein Koordinatensystem $\{x^{\mu}\}$ die harmonischen Bedingungen $\Gamma^{\rho}\,(x) \;=\; 0$, dann gilt, da $\partial^2\,x^{\mu}\,/\,\partial\,x^{\kappa}\,\partial\,x^{\lambda}$ verschwindet,

$$\Box_{cov}\,x^{\mu} \;=\; 0 \qquad (\mu \;=\; 0,\,1,\,2,\,3)\;, \tag{5.40}$$

d. h. die vier x^{μ} *sind harmonische Funktionen* im Sinne von (5.38).

In Abwesenheit von Gravitationsfeldern sind die cartesischen Koordinatensysteme offsichtlich harmonisch; in ihnen ist $g^{\kappa\lambda} = \eta^{\kappa\lambda}$, d. h. alle ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ verschwinden identisch, und (5.32) ist trivial erfüllt. In Anwesenheit eines Gravitationsfeldes sind die harmonischen Koordinaten insofern noch „näherungsweise minkowskische“, als sie zwar nicht mehr alle 40 Zusammenhangskoeffizienten ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$ einzeln, aber wenigstens die 4 „Mittelwerte“ Γ^λ über je 10 Koeffizienten zu Null machen.

Im übrigen vereinfachen die harmonischen Bedingungen die Feldgleichungen, insbesondere für schwache Felder, in ähnlicher Weise, wie die Lorentz-Eichung die Gleichungen (5.28) vereinfacht.

b) Cauchysches Anfangswertproblem. Eine wichtige Anwendung finden die Koordinatenbedingungen beim sog. Cauchyschen Problem der Feldgln. (5.17), d. h. dem Anfangswertproblem für raumzeitliche partielle Dgln. Wir benutzen ein Koordinatensystem mit $x^0 = t$ und nehmen an, dass die für eine partielle Dgl. zweiter Ordnung in der Zeit üblicherweise nötigen Anfangswerte, nämlich

$$g_{\mu\nu}\,(t = t_0,\, x^1 \dots x^3) \quad \text{und} \quad \frac{\partial\, g_{\mu\nu}\,(t,\, x^1 \dots x^3)}{\partial\, t} \Bigg/_{t\,=\,t_0} \tag{5.41}$$

auf dem ganzen dreidimensionalen Unterraum (der „Hyperfläche“) $t = t_0$ gegeben seien. Würden die Feldgln. eine eindeutige Vorschrift zur Berechnung von

$$\frac{\partial^2\, g_{\mu\nu}\,(t,\, x^1 \dots x^3)}{\partial\, t^2} \Bigg/_{t\,=\,t_0} \tag{5.42}$$

überall im Unterraum $t = t_0$ liefern, dann könnte man hiermit $g_{\mu\nu}$ und $\partial\, g_{\mu\nu} / \partial\, t$ bei $t = t_0 + \delta\, t$ bestimmen und so schrittweise $g_{\mu\nu}$ bei allen $t > t_0$ für alle $(x^1 \dots x^3)$ eindeutig berechnen.

Wieder sieht die Aufgabe zunächst eindeutig lösbar aus, da man für die 10 zweiten Ableitungen 10 Dgln. 2. Ordnung in t zur Verfügung hat. Aber wegen der kontrahierten Bianchi-Identitäten (5.27) für den Tensor $G_{\mu\nu}$ auf der linken Seite der Feldgln. hat man

$$\frac{\partial}{\partial\, t}\, G^{\mu\, 0} = -\frac{\partial}{\partial\, x^n}\, G^{\mu\, n} - ({\Gamma^\mu}_{\nu\lambda}\, G^{\nu\lambda} + {\Gamma^\nu}_{\nu\lambda}\, G^{\mu\lambda})\,. \tag{5.43}$$

(Summation über n von 1 bis 3). Die rechten Seiten dieser Gln. enthalten keine höheren Zeitableitungen als $\partial^2 / \partial\, t^2$ und daher enthalten auch die linken Seiten, entgegen dem ersten Anschein, nicht $(\partial / \partial\, t)^3$, sondern nur $(\partial / \partial\, t)^2$, d. h. $G^{\mu\, 0}$ enthält tatsächlich keine höheren Zeitableitungen als $\partial / \partial t$ (was man, etwas mühsam, auch direkt nachprüfen kann). Von den 10 verschiedenen Feldgln. (5.17) enthalten also die vier mit $\nu = 0$,

$$-G_{\mu 0} \equiv R_{\mu 0} - \frac{1}{2} g_{\mu 0} R = -8 \pi G \Theta_{\mu 0} \qquad (\mu = 0 \dots 3) , \tag{5.44}$$

tatsächlich *keine* Vorschrift zur Berechnung einer zweiten Zeitableitung von $g_{\mu\nu}$ und machen daher keine Aussage über die Zeitentwicklung des Gravitationsfeldes. Da sie Beziehungen zwischen $g_{\mu\nu}$ und $\partial g_{\mu\nu} / \partial t$ darstellen, können sie vielmehr nur die Rolle von *einschränkenden Bedingungen für die Anfangsdaten (5.41)* spielen. Als echte „dynamische", d. h. die Zeitentwicklung bestimmende Gl. verbleiben daher nur die übrigen 6 Gln.

$$-G^{mn} = -8 \pi G \Theta^{mn} \qquad (m, n = 1 \dots 3) . \tag{5.45}$$

Diese 6 Dgln. bestimmen nun die 6 zweiten Zeitableitungen

$$\frac{\partial^2 g_{mn} (t, x^1 \dots x^3)}{\partial t^2} \qquad (m, n = 1, \dots 3) , \tag{5.46}$$

lassen aber die 4 Ableitungen $\partial^2 g_{\mu 0} / \partial t^2$ unbestimmt. Somit ergibt sich erneut, dass die Lösung nur bis auf 4 willkürliche Zeitfunktionen bestimmt ist. Der Grund liegt wiederum in der allgemeinen Kovarianz der Feldgln., die es gestattet, Koordinatentransformationen auszuführen, die die Anfangsdaten (5.41) unverändert lassen, aber $g_{\mu\nu}$ für alle $t \neq t_0$ verändern.

Diese Vieldeutigkeit wird durch Aufprägung von 4 Koordinatenbedingungen – d. h. Einschränkung der Wahl des Koordinatensystems auf eine spezielle Klasse – beseitigt. Wählt man z. B. die harmonischen Koordinatenbedingungen, so erhält man durch Zeitableitung von (5.37)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\sqrt{g}\, g^{\mu 0}) = - \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial t} (\sqrt{g}\, g^{\mu n}) . \tag{5.47}$$

Diese 4 Dgln. gestatten nun die Berechnung der 4 zweiten Ableitungen $\partial^2 g^{\mu 0} / \partial t^2$ und stellen damit zusammen mit den sechs Gln. (5.45) ein vollständiges Dgl.-System zur eindeutigen Bestimmung aller 10 $g_{\mu\nu}$ bei $t > t_0$ dar.

Ein zusätzlicher Vorteil dieser Integrationsmethode ist, dass die *4 Nebenbedingungen (5.44) nicht in jedem Schritt von neuem, sondern nur zum Anfangszeitpunkt t_0 aufgeprägt werden müssen* und von da an automatisch erfüllt bleiben. Da nämlich $G_{\mu\nu}$ und $\Theta_{\mu\nu}$ – das erste kraft der Bianchi-Identitäten, das zweite wegen der Energie-Impuls-Erhaltung – jedes für sich kovariant erhalten sind, gilt

$$(G^{\mu\nu} - 8 \pi G \Theta^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \tag{5.48}$$

immer, d. h. auch dann, wenn $G^{\mu\nu}$ und $\Theta^{\mu\nu}$ nicht die Feldgln. erfüllen. Wählen wir nun Anfangswerte für $g_{\mu\nu}$ bei $t = t_0$, die die Nebenbedingungen (5.44) erfüllen, und bestimmen die 6 zweiten Zeitableitungen (5.46) bei $t = t_0$ aus (5.45), dann ist auch die Größe in der Klammer von (5.48) Null bei $t = t_0$, und daher besagt (5.48) dort

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(G^{\mu 0} - 8\pi G\,\Theta^{\mu 0}\right) = 0 \quad \text{bei} \quad t = t_0 \,.$$

Die bei $t = t_0 + \delta t$ gemäß $f(t_0 + \delta t) = f(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t_0} \cdot \delta t$ berechneten Feldfunktionen erfüllen daher wiederum die Nebenbedingungen (5.44), usw.

5.3 Energie, Impuls und Drehimpuls des Gravitationsfeldes

Der Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ auf der rechten Seite der Feldgln. (5.17) ist derjenige der *nichtgravitativen* Materie- und Feldverteilung. Er erfüllt für sich allein den „Erhaltungssatz" (3.127), den man freilich besser als *Bilanzgleichung* betrachtet, denn da die kovariante Ableitung dort nach der Vorschrift (3.76) zu bilden ist, in die $\sqrt{g}$ und $\Gamma^{\nu}{}_{\mu\rho}$, also vom Gravitationsfeld abhängige Größen eingehen, beschreibt sie tatsächlich einen Energie-Impuls-Austausch mit dem Gravitationsfeld. [Übrigens zeigt sich hier nochmals ein wesentlicher Aspekt der Feldgln.: schon um den Quellterm $\Theta_{\mu\nu}$ der Feldgln. überhaupt aufzustellen, muss man, wie die Beispiele (3.115) und (3.125) zeigen, die Metrik $g_{\mu\nu}$ kennen, die aus den Feldgln. erst berechnet werden soll, im Gegensatz etwa zu den Maxwell-Gln. (3.120 b), in die ein beliebig von außen vorgegebener divergenzfreier Viererstrom eingesetzt werden kann. Raumstruktur und Bewegung der Quellen lassen sich mathematisch nicht trennen; beide müssen als verkoppeltes Gesamtproblem gemeinsam („selbstkonsistent") berechnet werden.]

Man könnte nun erwarten, dass $\Theta_{\mu\nu}$ sich durch einen geeignet definierten Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes, $t_{\mu\nu}[g]$, additiv ergänzen lassen sollte derart, dass für die Gesamtgröße ein „Erhaltungssatz" etwa von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Theta^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{5.49}$$

gilt. Aber eine solche Aussage wäre einerseits nicht allgemein-kovariant, würde also allenfalls in einer begrenzten Klasse von Koordinatensystemen gelten, und zum anderen zeigt sich, dass eine echte Tensorgröße mit der Eigenschaft (5.49) gar nicht existiert. *In starken Gravitationsfeldern existieren überhaupt keine kovarianten Größen vom Typ einer Energie oder eines Impulses* mehr, denen man die Eigenschaft einer Erhaltung oder Nichterhaltung zuordnen könnte. Der tiefere Grund hierfür ist, dass Erhaltungssätze stets Symmetrien des Systems widerspiegeln – etwa Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung in der Speziellen Relativitätstheorie, welche aus der Homogenität und Isotropie des $\boldsymbol{\mathcal{M}^4}$ folgen. *Das allgemeinste Riemannsche Kontinuum, das sich als globale Lösung der Feldgln. (5.17) ergibt, hat dagegen überhaupt keine Symmetrie mehr* *, wenn wir von der Invarianz gegen Koordinatentransformationen absehen – von ihr haben wir ja bereits betont, dass sie physikalisch überhaupt keine Symmetrie, sondern lediglich eine mathematisch zweckmäßige Beschreibung der Ankopplung an Gravitationsfelder beinhaltet. *Im starken Gravitationsfeld ist das durch die Feldgln. (5.17) beschriebene komplizierte Wechselspiel von Materie (Quellen) und Gravitationsfeld alles, was man aussagen kann.* Energie und Impuls (Viererimpuls) oder Drehimpuls beginnen sich aus dieser komplizierten Wechselwirkung als nützliche Hilfsgrößen – weil sie nämlich durch eine Erhaltungseigenschaft ausgezeichnet sind und damit erste Integrale der Bewegungsgleichungen liefern – herauszuschälen erst dann, wenn die Lösung von (5.17) in gewissen vierdimensionalen Teilgebieten eine schwache Raum-Zeit-Krümmung ausbildet; dort koppelt dann das in guter Näherung flache Kontinuum ($g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$) von der Entwicklung der Quellen als sozusagen unbeteiligter Hintergrund ab, und die in (5.49) auftretende gewöhnliche Ableitung wird in diesem Hintergrund zu einer kovarianten Operation, aber da in diesen Gebieten dann auch $t_{\mu\nu}$ verschwindet, erhält man nicht mehr als den speziell-relativistischen Grenzfall von (3.127). Immerhin kann man die Abweichung vom flachen Grenzfall studieren und mit ihr nicht exakt, aber näherungsweise tensorartige Größen $t^{\mu\nu}$ zu definieren versuchen, die (5.49) erfüllen und insofern die gewohnten Erhaltungssätze weiterzuverwenden erlauben; man muss nur stets beachten, dass die Fortsetzung dieser Größen in Gebiete mit starken Gravitationsfeldern niemals eindeutig ist. Die hier besprochene Version [1] hat den formalen Vorteil, dass sie einer (nicht manifest kovarianten) Umformulierung (5.55) der Feldgln. korrespondiert, deren linke Seite ein *linearer* Differentialausdruck ist und die insofern direkt mit den bekannten Wellengln. für nichtgravitative Felder im $\boldsymbol{\mathcal{M}^4}$, wie (1.256) oder (3.136 b), verglichen werden kann.

Wir betrachten daher den *Fall eines Systems, das vom Rest der Welt durch eine „Fernfeldzone“ getrennt* ist, d. h. durch ein hinreichend großes Zwischengebiet, in dem die gravitative Raumkrümmung $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ abgeklungen und die Metrik gleich $\eta_{\mu\nu}$ geworden ist. (Es ist dabei in der Regel nicht möglich, sich das Quellensystem als lokalisiert vorzustellen und einfach den Limes großer raumartiger Entfernung, $s^2 \to -\infty$, von diesem System zu betrachten, denn die Gesamtlösung von (5.17) kann, in Analogie etwa zu einer zweidimensionalen Kugelfläche, durchaus einen geschlossenen vierdimensionalen Raum von endlichem Volumen darstellen, in dem unendliche Entfernungen gar nicht möglich

*Natürlich existieren spezielle Lösungen von (5.17) mit gewissen Symmetrien. Diese weisen dann auch Erhaltungssätze auf, die nicht unbedingt mit Viererimpuls- oder Drehimpulserhaltung etwas zu tun haben müssen.

sind. Das Wort *„asymptotisch“*, das wir im Folgenden verwenden, bedeutet daher stets nur „hinreichend tief in einem großen, aber endlichen Zwischengebiet mit in sehr guter Näherung flacher Metrik“). Es ist dann sinnvoll, sich auf die *Klasse der Koordinatensysteme* $\{x^\mu\}$ *zu beschränken, die „asymptotisch cartesisch“* sind in dem Sinne, dass sie asymptotisch in der Zwischenzone den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ auf die Form $\eta_{\mu\nu}$ bringen. (Dies ist z. B. für die harmonischen Koordinatensysteme der Fall.) Dementsprechend schreiben wir

$$\boxed{g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)} \,, \qquad (5.50\text{ a})$$

$$\boxed{h_{\mu\nu}(x) \to 0 \text{ asymptotisch in der Fernfeldzone}} \,, \qquad (5.50\text{ b})$$

als Präzisierung von "‚$\{x^\mu\}$ asymptotisch cartesisch“.

Die *„metrische Verzerrung“* $h_{\mu\nu}$ *ist kein Tensor*, denn nach (3.11) transformiert sie sich gemäß dem Gesetz

$$h'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} h_{\rho\sigma}(x) + \left[\eta_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} - \eta_{\mu\nu}\right] \qquad (5.51)$$

mit einem inhomogenen Term. Sie verhält sich aber „asymptotisch tensoriell“, denn da sowohl $\{x^\rho\}$ als auch $\{x'^\mu\}$ asymptotisch cartesische Systeme sein sollen, muss die Transformation $x \to x'(x)$ asymptotisch im Zwischengebiet in eine homogene Lorentz-Transformation übergehen, für die nach (1.74) der Zusatzterm verschwindet.

Den Ricci-Tensor spalten wir nun gemäß

$$R_{\mu\kappa}(x) = R^{(1)}_{\mu\kappa}(x) + \left(R_{\mu\kappa} - R^{(1)}_{\mu\kappa}\right) \qquad (5.52)$$

auf in einen in $h_{\mu\nu}$ linearen Anteil, der nach (4.41/37) durch den linearen Differentialausdruck 2. Ordnung

$$R^{(1)}_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu\,\partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial^\lambda\,\partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\lambda\,\partial x^\nu}\right) \qquad (5.53)$$

gegeben ist, und einen Rest mindestens 2. Ordnung in h.

Für das weitere vereinbaren wir als nützliche Konvention, dass an nichttensoriellen, aber asymptotisch tensoriellen Größen wie $h_{\mu\nu}$, $R^{(1)}_{\mu\kappa}$ oder $\partial / \partial x^\lambda$ Indizes mittels $\eta^{\alpha\beta}$ bzw. $\eta_{\alpha\beta}$ herauf- und heruntergezogen werden sollen, d. h. z. B.

$$h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\mu} \,, \qquad \partial^\lambda = \eta^{\lambda\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\kappa} \,. \qquad (5.54)$$

Dann lassen sich die exakten Feldgln. (5.17) in die nicht *manifest* kovariante Form

$$\boxed{R^{(1)}_{\mu\nu} \; - \; \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,R^{(1)\,\lambda}_{\lambda} \; = \; -8\,\pi\,G\;(\Theta_{\mu\nu} \; + \; t_{\mu\nu}\,[h])} \tag{5.55}$$

bringen, wobei die asymptotisch tensorielle Größe

$$t_{\mu\nu} \; = \; \frac{1}{8\,\pi\,G}\left[\left(R_{\mu\nu} \; - \; R^{(1)}_{\mu\nu}\right) \; - \; \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\,R_{\lambda}{}^{\lambda} \; - \; \eta_{\mu\nu}\,R^{(1)\,\lambda}_{\lambda}\right)\right] \tag{5.56}$$

mindestens 2. Ordnung in den metrischen Verzerrrungen $h_{\rho\sigma}$ ist. Gl. (5.55) hat formal die Gestalt einer Wellengleichung – d. h. einer linearen partiellen Dgl. 2. Ordnung in Raum- und Zeitvariablen – mit inhomogenem oder Quellterm für das 10-komponentige Feld $h_{\mu\nu}\,(x)$ wobei aber der Quellterm

$$\tau_{\mu\nu}\,(x) \; = \; \Theta_{\mu\nu}\,(x) \; + \; t_{\mu\nu}\,[h_{\rho\sigma}\,(x)] \tag{5.57}$$

die unbekannte Feldfunktion selbst in nichtlinearer Weise enthält und daher die Dgl. in Wahrheit zu einer nichtlinearen macht. In diesem Beitrag des Gravitationsfeldes $h_{\mu\nu}$ zu seiner eigenen Quelle spiegelt sich die Selbstkopplung des Gravitationsfeldes. Die asymptotisch tensorielle Größe $t_{\mu\nu}$ wird gelegentlich als *„Energie-Impuls-Komplex“* des Gravitationsfeldes bezeichnet. Es liegt auf Grund der Gl. (5.55) nahe, das *asymptotisch tensorielle $\tau_{\mu\nu}$ als Ersatz für einen Energie-Impuls-Tensor des Gesamtsystems* von Quellen und Gravitationsfeld zu verwenden. Für diese Interpretation sprechen die folgenden Gesichtspunkte:

(a) Da der linearisierte Einstein-Tensor linker Hand in (5.55) die linearisierte Form der kontrahierten Bianchi-Identitäten (4.55 b) erfüllt,

$$\frac{\partial}{\partial\,x^{\mu}}\left(R^{(1)\,\mu\nu} \; - \; \frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,R^{(1)\,\lambda}_{\lambda}\right) \; = \; 0 \;, \tag{5.58}$$

folgt aus den Feldgln. (5.55) der nicht allgemein-kovariante, aber asymptotisch vektorielle lokale Erhaltungssatz

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}}\,\tau^{\nu\mu} \; = \; 0 \qquad (\mu \; = \; 0,\,1,\,2,\,)} \;. \tag{5.59}$$

Dies kann man wie üblich über ein dreidimensionales Volumen V mit der Oberfläche $\partial\,V \; = \; S$ integrieren,

$$\frac{d}{d\,x^0}\int\limits_V d^3\,x\,\tau^{0\,\mu} \; = \; -\int\limits_S \sum_{n\,=\,1}^{3} \tau^{n\mu}\,n_n\,d\,S \;. \tag{5.60}$$

wo $d\,S_n \;=\; n_n\,d\,S$ das nach außen orientierte Flächenelement auf S ist. Legt man die Fläche S so durch das metrisch flache Zwischengebiet, dass es das von uns angenommene wohldefinierte System aus Quellen und Gravitationsfeld völlig umschließt, dann kann (5.60) in gewohnter Weise als Bilanzgleichung für einen *Viererimpuls-„Vektor“* des Gesamtsystems,

$$P^{\mu} \;=\; \int\limits_V d^3\,x\,\tau^{0\,\mu} \tag{5.61}$$

gelesen werden; $\tau^{n\mu}$ mit $n \;=\; 1,\,2,\,3$ sind dann die Komponenten der zugehörigen Stromdichten für Energie ($\mu \;=\; 0$) und Impuls ($\mu \;=\; 1,\,2,\,3$). Der übliche Grenzübergang zu einer im räumlich Unendlichen verlaufenden Oberfläche S, auf der die Stromdichten verschwinden, und damit die Herleitung eines echten Erhaltungssatzes für (5.61) ist aus den schon genannten Gründen im allgemeinen nicht möglich, allenfalls in Spezialfällen.

(b) Da $R^{\mu\nu}$ und $R^{(1)\,\mu\nu}$ beide symmetrisch sind, trifft dies auch für $t^{\mu\nu}$ und damit für $\tau^{\mu\nu}$ zu:

$$\tau^{\nu\mu}\,(x) \;=\; \tau^{\mu\nu}\,(x)\;. \tag{5.62}$$

Für die asymptotisch tensorielle Dichte

$$M^{\mu\kappa\lambda} \;=\; x^{\kappa}\,\tau^{\mu\lambda} \;-\; x^{\lambda}\,\tau^{\mu\kappa} \tag{5.63}$$

gilt daher analog zu (5.59) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial\,x^{\mu}}\,M^{\mu\kappa\lambda} \;=\; 0 \qquad (\kappa,\,\lambda \;=\; 0\ldots 3)\;, \tag{5.64}$$

so dass wir wie vorher $M^{0\kappa\lambda}$ und $M^{m\kappa\lambda}$ ($m \;=\; 1,\,2,\,3$) als Dichte bzw. räumliche Flussdichte eines *Gesamtdrehimpuls-„Tensors“* oder – Komplexes

$$J^{\kappa\lambda} \;=\; \int\limits_V d^3\,x\,M^{0\kappa\lambda} \;=\; -J^{\lambda\kappa} \tag{5.65}$$

interpretieren können.

(c) In Analogie etwa zur Elektrodynamik sollte man erwarten, dass der Energie-Impuls-Komplex bilinear im Feld, hier also in $h_{\mu\nu}$ ist. Tatsächlich kann man das $t_{\mu\nu}$ von (5.56) nach Potenzen von h entwickeln und findet, dass der führende Term bilinear ist:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = \frac{1}{8\,\pi\,G} & \left[-\frac{1}{2}\,h_{\mu\nu}\,R^{(1)\,\lambda}_{\lambda} \;+\; \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,h^{\kappa\lambda}\,R^{(1)}_{\kappa\lambda}\right. \\ & \left. + R^{(2)}_{\mu\nu} \;-\; \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,\eta^{\kappa\lambda}\,R^{(2)}_{\kappa\lambda}\right] \\ & + O\,(h^3)\;. \end{aligned} \tag{5.66}$$

Dabei ist $R^{(2)}_{\mu\nu}$ der in h quadratische Anteil des Ricci-Tensors und gegeben durch

$$\begin{aligned} R^{(2)}_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}\, h^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial^2 h_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 h_{\kappa\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left(2\, \frac{\partial h^\lambda{}_\rho}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial h^\lambda{}_\lambda}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial h^\rho{}_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\rho{}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\rho} \right) \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial h_{\rho\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho} \right) \left(\frac{\partial h^\rho{}_\mu}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial h^{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h^\sigma{}_\mu}{\partial x_\rho} \right) . \end{aligned} \tag{5.67}$$

Es treten jedoch auch Terme dritter und höherer Ordnung in h auf; das bedeutet, wie schon betont, dass die *Selbstwechselwirkung des Gravitationsfeldes auch zu Gesamtenergie und -Impuls beiträgt*. Für schwaches Gravitationsfeld (h klein) könnte man sie natürlich gegenüber den bilinearen Termen (5.66) vernachlässigen; es ist dann freilich nur in speziellen Fällen zu rechtfertigen, dass man in der Feldgl. (5.55) das in h bilineare $t_{\mu\nu}$ gegenüber der in h linearen linken Seite überhaupt beibehält.

(d) Wie (5.51) zeigt, ist $h_{\mu\nu}$ in eingeschränktem Sinne kovariant, nämlich gegenüber Lorentz-artigen Transformationen der asymptotisch cartesischen Koordinaten, und diese Eigenschaft überträgt sich auf die aus $h_{\mu\nu}$ aufgebauten übrigen asymptotischen Tensoren, insbesondere auf $\tau_{\mu\nu}$. Damit sind auch P^μ *und* $J^{\kappa\lambda}$ *in diesem Sinne Lorentz-Kovarianten.*

(e) Da in der von uns angenommenen Situation und in unseren „asymptotisch cartesischen" Koordinaten mit (5.50 b) der gesamte Quellterm rechter Hand in (5.55) in einem endlichen Raumgebiet lokalisiert ist (asymptotisch im Zwischengebiet verschwindet $\Theta_{\mu\nu}$ nach Voraussetzung und $t_{\mu\nu}$ ist von der Ordnung h^2), erwartet man, dass für statische und langsam veränderliche (quasistatische) Quellen das Feld $h_{\mu\nu}$ sich asymptotisch etwa wie das elektrostatische Potenzial einer lokalisierten Ladungsverteilung verhält, d. h.

$$\left.\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &\sim \frac{1}{r} \\ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &\sim \frac{1}{r^2} \\ \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} &\sim \frac{1}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{asymptotisch im} \\ \text{Zwischengebiet bei} \\ \text{quasistat. Quellen .}\end{array} \tag{5.68}$$

Nach Gl. (5.66) gilt dann auch

$$t_{\mu\nu}(x) \sim \frac{1}{r^4} \qquad \text{asymptotisch .} \tag{5.69}$$

Die Integrale $\int\limits_V d^3\,x\,\tau^{0\mu}\,(x)$ für den Gesamt-Viererimpuls in einem Volumen V, das die Quelle $\tau_{\mu\nu}$ im wesentlichen einschließt und dessen Rand S ins Zwischengebiet hinausgeschoben wird, sind daher konvergent ($d^3\,x\,\sim\,r^2\,d\,r$). (Dies würde in nicht asymptotisch cartesischen Koordinaten i. a. nicht zutreffen). Bei schnellveränderlichen Quellen wird man wie in der Elektrodynamik erwarten, dass sich oszillierende, wellenartige Lösungen („*Gravitationswellen*") ausbilden mit

$$h_{\mu\nu}\,(x)\;\sim\;\frac{\mathrm{e}^{i\,k\,r}}{r}\qquad\text{asymptotisch}\tag{5.70 a}$$

und daher

$$\frac{\partial^2\,h_{\mu\nu}}{\partial\,x^\kappa\,\partial\,x^\lambda}\;\sim\;\frac{\mathrm{e}^{i\,k\,r}}{r}\qquad\text{asymptotisch}\tag{5.70 b}$$

und

$$t_{\mu\nu}\,(x)\;\sim\;\frac{1}{r^2}\qquad\text{asymptotisch}\;.\tag{5.71}$$

Dann ergibt sich durch die Oberfläche S ein endlicher Energiestrom nach außen, der den Energieverlust des Gesamtsystems durch Gravitationsstrahlung beschreibt.

(f) Gesamtenergie und -Impuls und Gesamtdrehimpuls des Systems gemäß (5.61) und (5.65) können allein aus dem asymptotischen Verlauf von $h_{\mu\nu}\,(x)$ auf der im Zwischengebiet gewählten Fläche S bestimmt werden, ohne die meist komplizierte Größe $t_{\mu\nu}\,(x)$ vollständig berechnen zu müssen. Dazu bemerkt man, dass der lineare Differentialausdruck linker Hand in den Feldgln. (5.55) gemäß

$$R^{(1)\,\mu\nu}\;-\;\frac{1}{2}\,\eta^{\mu\nu}\,R^{(1)\,\lambda}_{\lambda}\;=\;\frac{\partial}{\partial\,x^\rho}\,Q^{\rho\mu\nu}\tag{5.72}$$

als Ableitung eines „Superpotenzials"

$$\begin{aligned}Q^{\rho\mu\nu}\;&=\;\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,h^\lambda{}_\lambda}{\partial\,x_\mu}\,\eta^{\rho\nu}\;-\;\frac{\partial\,h^\lambda{}_\lambda}{\partial\,x_\rho}\,\eta^{\mu\nu}\;-\;\frac{\partial\,h^{\lambda\mu}}{\partial\,x^\lambda}\,\eta^{\rho\nu}\right.\\&\left.+\;\frac{\partial\,h^{\lambda\rho}}{\partial\,x^\lambda}\,\eta^{\mu\nu}\;+\;\frac{\partial\,h^{\mu\nu}}{\partial\,x_\rho}\;-\;\frac{\partial\,h^{\rho\nu}}{\partial\,x_\mu}\right]\end{aligned}\tag{5.73}$$

geschrieben werden kann. Dieses ist antisymmetrisch in den beiden ersten Indizes,

$$Q^{\mu\rho\nu}\;=\;-Q^{\rho\mu\nu}\;,\tag{5.74}$$

und daher folgen aus (5.72) sofort die linearisierten Bianchi-Identitäten (5.58). Setzt man (5.72) in die Feldgln. (5.55) ein und benutzt $Q^{00\nu}\;=\;0$, so ergibt sich für den

Viererimpuls (5.61) die Darstellung

$$P^\nu \;=\; -\frac{1}{8\,\pi\,G}\int\limits_V d^3\,x\,\frac{\partial}{\partial\,x^\rho}\,Q^{\rho 0\nu} \;=\; -\frac{1}{8\,\pi\,G}\int\limits_V d^3\,x\,\frac{\partial}{\partial\,x^m}\,Q^{m0\nu}$$

(Summation über m von 1 bis 3) und daraus durch Anwendung des Gaußschen Satzes

$$\boxed{P^\nu \;=\; -\frac{1}{8\,\pi\,G}\int\limits_S Q^{m0\nu}\,n_m\,r^2\,d\,\Omega} \;. \tag{5.75}$$

Dabei ist wie üblich $\vec{n} \;=\; \{n^1,\, n^2,\, n^3\}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf einer hinreichend großen, im Zwischengebiet verlaufenden Kugelfläche S vom Radius r, d. h.

$$n^m \;=\; \frac{x^m}{r}\;, \qquad r \;=\; \sqrt{x^m\,x^m}\;. \tag{5.76}$$

Für Energie ($\nu \;=\; 0$) und Impuls ($\nu \;=\; n \;=\; 1,\, 2,\, 3$) bedeutet (5.75) im Einzelnen

$$P^0 \;=\; -\frac{1}{16\,\pi\,G}\int\limits_S r^2\,d\,\Omega\,n^m\left(\frac{\partial\,h_{kk}}{\partial\,x^m} \;-\; \frac{\partial\,h_{mk}}{\partial\,x^k}\right)\;, \tag{5.77 a}$$

$$P^n \;=\; -\frac{1}{16\,\pi\,G}\int\limits_S r^2\,d\,\Omega\,n^m\left[\delta_m^{\;n}\left(\frac{\partial\,h_{k0}}{\partial\,x^k} \;-\; \frac{\partial\,h_{kk}}{\partial\,t}\right) \;-\; \frac{\partial\,h_{n0}}{\partial\,x^m} \;+\; \frac{\partial\,h_{mn}}{\partial\,t}\right]\;. \tag{5.77 b}$$

Nach demselben Schema erhält man für den Gesamtdrehimpuls-„Tensor“ (5.65) die Darstellung

$$\begin{aligned} J^{\kappa\lambda} \;&=\; \int\limits_V d^3\,x\left(x^\kappa\,\tau^{0\lambda} \;-\; x^\lambda\,\tau^{0\kappa}\right) \\ &=\; -\frac{1}{8\,\pi\,G}\int d^3\,x\left(x^\kappa\,\frac{\partial\,Q^{m0\lambda}}{\partial\,x^m} \;-\; x^\lambda\,\frac{\partial\,Q^{m0\kappa}}{\partial\,x^m}\right)\;. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Der Gesamtdrehimpuls selbst ist durch die drei unabhängigen „Raum-Raum“-Komponenten gegeben:

$$J^1 \;=\; J^{23}\;, \qquad J^2 \;=\; J^{31}\;, \qquad J^3 \;=\; J^{12}\;. \tag{5.79}$$

Für diese gilt der Gaußsche Satz:

$$\begin{aligned} J^{kl} \;&=\; -\frac{1}{16\,\pi\,G}\int\limits_S r^2\,d\,\Omega\,n_m\Bigg[\delta^m_{\;k}\,h_{0l} \;-\; \delta^m_{\;l}\,h_{0k} \;+ \\ &+\; x^k\,\frac{\partial\,h_{lm}}{\partial\,t} \;-\; x^l\,\frac{\partial\,h_{km}}{\partial\,t} \;-\; x^k\,\frac{\partial\,h_{0l}}{\partial\,x^m} \;+\; x^l\,\frac{\partial\,h_{0k}}{\partial\,x^m}\Bigg]\;. \end{aligned} \tag{5.80}$$

In diese Ausdrücke gehen *nur die Werte von* $h_{\mu\nu}(x)$ *auf* S, d. h. im asymptotischen Gebiet ein.

(g) Obwohl P^μ kein echter Vektor und $\tau^{\mu\nu}$ kein Tensor ist, hat P^μ *die wichtige Eigenschaft der Invarianz unter solchen Koordinatentransformationen, die asymptotisch in die Identität übergehen*:

$$\begin{aligned} x^\mu \quad &\to \quad x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \\ \varepsilon^\mu(x) \quad &\to \quad 0 \quad \text{asymptotisch} \; . \end{aligned} \tag{5.81}$$

Diese Transformationen lassen natürlich den „asymptotisch cartesischen" Charakter von $\{x^\mu\}$ unverändert. Der metrische Tensor transformiert sich nämlich nach (3.11) unter (5.81) nach der Formel

$$g'^{\mu\nu} = \left(\delta^\mu{}_\rho + \frac{\partial\,\varepsilon^\mu}{\partial\,x^\rho}\right)\left(\delta^\nu{}_\sigma + \frac{\partial\,\varepsilon^\nu}{\partial\,x^\sigma}\right) g^{\rho\sigma} \; . \tag{5.82}$$

Im asymptotischen Gebiet werden sowohl ε^μ als auch $h^{\rho\sigma}$ (in $g^{\rho\sigma} \approx \eta^{\rho\sigma} - h^{\rho\sigma}$) klein, und man kann (5.82) in diesen Größen bis zur ersten Ordnung entwickeln:

$$g'^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} + h'^{\mu\nu} \qquad \text{(asymptotisch)} \tag{5.83 a}$$

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial\,\varepsilon^\mu}{\partial\,x_\nu} - \frac{\partial\,\varepsilon^\nu}{\partial\,x_\mu} \qquad \text{(asymptotisch)} \; . \tag{5.83 b}$$

Die asymptotische Änderung des Superpotenzials (5.73) ist dann

$$\begin{aligned} \Delta\,Q^{\rho\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\Bigg[&-\frac{\partial^2\,\varepsilon^\lambda}{\partial\,x^\lambda\,\partial\,x_\mu}\,\eta^{\rho\nu} + \frac{\partial^2\,\varepsilon^\lambda}{\partial\,x^\lambda\,\partial\,x_\rho}\,\eta^{\mu\nu} \\ &+ \Box\,(\varepsilon^\mu\,\eta^{\rho\nu} - \varepsilon^\rho\,\eta^{\mu\nu}) - \frac{\partial^2\,\varepsilon^\mu}{\partial\,x_\rho\,\partial\,x_\nu} + \frac{\partial^2\,\varepsilon^\rho}{\partial\,x_\mu\,\partial\,x_\nu}\Bigg] \; . \end{aligned} \tag{5.84 a}$$

Dies kann wiederum als Ableitung

$$\Delta\,Q^{\rho\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial\,x^\sigma}\,D^{\sigma\rho\mu\nu} \tag{5.84 b}$$

einer vierstufigen Größe

$$\begin{aligned} D^{\sigma\rho\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\Bigg[&-\frac{\partial\,\varepsilon^\sigma}{\partial\,x_\mu}\,\eta^{\rho\nu} + \frac{\partial\,\varepsilon^\sigma}{\partial\,x_\rho}\,\eta^{\mu\nu} + \frac{\partial\,\varepsilon^\mu}{\partial\,x_\sigma}\,\eta^{\rho\nu} \\ &- \frac{\partial\,\varepsilon^\rho}{\partial\,x_\sigma}\,\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial\,\varepsilon^\mu}{\partial\,x_\rho}\,\eta^{\sigma\nu} + \frac{\partial\,\varepsilon^\rho}{\partial\,x_\mu}\,\eta^{\sigma\nu}\Bigg] \end{aligned} \tag{5.84 c}$$

geschrieben werden, die nunmehr vollständig antisymmetrisch in ihren ersten 3 Indizes ist:

$$D^{\sigma\rho\mu\nu} = -D^{\rho\sigma\mu\nu} = -D^{\sigma\mu\rho\nu} = -D^{\mu\rho\sigma\nu} \,. \tag{5.84 d}$$

Die Änderung in dem gemäß (5.75) berechneten Viererimpuls lässt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta P^{\nu} &= -\frac{1}{8\pi G} \int\limits_S n_m \, r^2 \, d\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} D^{\sigma m 0 \nu} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \int\limits_S n_m \, r^2 \, d\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x^n} D^{n m 0 \nu} \right) \end{aligned} \tag{5.85 a}$$

(wegen $D^{0m0\nu} \equiv 0$). Rückverwandlung in ein Volumenintegral mittels des Gaußschen Satzes ergibt

$$\Delta P^{\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \int\limits_V d^3 x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^m \, \partial x^n} D^{n m 0 \nu} \right) = 0 \tag{5.85 b}$$

wegen der Antisymmetrie von $D^{nm0\nu}$ in (n, m).

Als Folge hiervon besitzt P^μ, obwohl kein Vektor im Sinne der allgemeinen Kovarianz, eine sehr weitgehende „asymptotische Kovarianz“: es *transformiert sich als Vektor unter allen Transformationen, die die Metrik im asymptotischen Bereich, $\eta^{\mu\nu}$, invariant lassen.* Denn jede derartige Transformation lässt sich erhalten durch Nacheinanderausführung einer Lorentz- bzw. Poincaré-Transformation, bei der das unter *(d)* Gesagte gilt, und einer Transformation vom Typ (5.81), die P^μ invariant lässt. Dieser asymptotische Vektorcharakter tritt für die Viererimpulsgrößen (5.77) an die Stelle der allgemeinen Kovarianz.

(h) Zerfällt das Gesamtsystem von Quellen und Gravitationsfeld in mehrere voneinander hinreichend entfernte Subsysteme derart, dass zwischen allen von ihnen sich metrisch flache Zwischenzonen ausbilden, dann ist das Gravitationsfeld, d. h. $h_{\mu\nu}$, in sehr guter Näherung durch die Summe der $h^{(n)}_{\mu\nu}$ gegeben, die jeweils von einem Subsystem *allein* erzeugt werden (denn an jedem Punkt x ist nur eines dieser $h^{(n)}_{\mu\nu}$ wesentlich von Null verschieden). Aus den Ausdrücken (5.77) für P^μ folgt dann, dass Gesamtenergie und -Impuls sich *additiv* aus den Beiträgen der Subsysteme zusammensetzen.

(i) Schließlich sei noch ohne Beweis erwähnt, dass die Energie P^0 gemäß (5.77 a) stets positiv ist und Null nur dann, wenn das von der Fläche S umschlossene Gebiet „leerer Raum“, d. h. frei sowohl von Quellen als auch von Gravitationsfeldern ist (Brill & Deser, Annals of Physics Vol. **50**, p. 542 (1968)).

Es sei nochmals betont, dass die Bilanzgln. (3.127) die weitestgehenden Aussagen sind, die man erhalten kann, wenn man auf vollständiger *allgemeiner Kovarianz* besteht. Wegen des Γ-Terms in der kovarianten Ableitung führen sie nicht zu einem Erhaltungssatz.

5.4 Feldgleichungen und Wirkungsprinzip

(a) Feldgleichungen im Vakuum. Die Feldgln. (5.17) des Gravitationsfeldes lassen sich, wie Bewegungsgleichungen in anderen Gebieten der Physik, aus einem „Wirkungsprinzip", d. h. einer Stationaritätsforderung für ein geeignet konstruiertes Wirkungsfunktional, herleiten. Wir betrachten zunächst die Gln. im quellenfreien Raum, (5.25), d. h. das Gravitationsfeld ohne Quellen. Sie lassen sich herleiten als die Bedingungen dafür, dass das (von Hilbert zuerst angegebene) Wirkungsfunktional der Gravitation,

$$\boxed{S_G\,[g_{\mu\nu}] \;=\; \frac{1}{16\,\pi\,G} \int d^4\,x\,\sqrt{g\,(x)}\,R\,(x)} \,, \tag{5.86}$$

stationär wird gegenüber infinitesimalen Variationen des metrischen Tensorfeldes:

$$\delta\,S_G \;=\; 0 \quad \text{bei} \quad g_{\mu\nu} \;\rightarrow\; g_{\mu\nu} \;+\; \delta\,g_{\mu\nu} \;. \tag{5.87}$$

Dabei ist $R\,(x)$ der Krümmungsskalar. Da $d^4\,x\,\sqrt{g}$ ein invariantes Volumenelement ist, ist S_G *ein Skalar*. Um die Stationaritätsbedingungen aufzufinden, bilden wir

$$\delta\,(\sqrt{g}\,R) \;=\; \delta\,(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,R_{\mu\nu}) \;=\; \sqrt{g}\,R_{\mu\nu}\,\delta\,g^{\mu\nu} \;+\; R\,\delta\,(\sqrt{g}) \;+\; \sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,R_{\mu\nu} \;. \tag{5.88}$$

Wir betrachten zunächst den letzten Term. Nach Gl. (4.6) ist

$$\begin{aligned}
\delta\,R_{\mu\nu} \;&=\; \delta\,R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \;=\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}}\,\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}) \;-\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}) \;+ \\
&+\; \delta\,(\Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda})\,\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta} \;+\; \Gamma^{\eta}{}_{\mu\lambda}\,\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\eta}) \;-\; \delta\,(\Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu})\,\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\eta} \\
&-\; \Gamma^{\eta}{}_{\mu\nu}\,\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\eta}) \;.
\end{aligned} \tag{5.89}$$

Dabei ist $\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})$, die infinitesimale Variation des affinen Zusammenhangs, nach (2.41) gegeben durch

$$\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}) \;=\; \frac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}\left(\frac{\partial\,\delta\,g_{\kappa\nu}}{\partial\,x^{\mu}} \;+\; \frac{\partial\,\delta\,g_{\kappa\mu}}{\partial\,x^{\nu}} \;-\; \frac{\partial\,\delta\,g_{\mu\nu}}{\partial\,x^{\kappa}}\right) \;-\; g^{\lambda\kappa}\,(\delta\,g_{\kappa\sigma})\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \;. \tag{5.90}$$

Dabei wurde $\delta\,(g^{\lambda\kappa}\,g_{\kappa\rho}) \;=\; \delta\,(\delta^{\lambda}{}_{\rho}) \;=\; 0$, d. h.

$$\delta\,g^{\lambda\kappa} \;=\; -g^{\lambda\rho}\,(\delta\,g_{\rho\sigma})\,g^{\sigma\kappa} \tag{5.91}$$

benutzt. (5.90) kann nun in der Form

$$\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}) \;=\; \frac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}\;[(\delta\,g_{\kappa\nu})_{;\,\mu} \;+\; (\delta\,g_{\kappa\mu})_{;\,\nu} \;-\; (\delta\,g_{\mu\nu})_{;\,\kappa}] \tag{5.92}$$

geschrieben werden; die Γ-Terme der 3 kovarianten Ableitungen ergeben gerade den letzten Term von (5.90). Damit ist $\delta\,(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})$ *ein Tensor*, und als Folge davon kann (5.89) sofort zu einer Differenz zweier kovarianter Ableitungen solcher Tensoren zusammengefasst werden:

$$\boxed{\delta\,R_{\mu\nu} \;=\; (\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda})_{;\,\nu} \;-\; (\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})_{;\,\lambda}}\;. \tag{5.93 a}$$

Diese Beziehung heißt *Palatini-Identität.* Durch $\delta\,g_{\mu\nu}$ ausgedrückt, lautet sie nach (5.92)

$$\delta\,R_{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\,g^{\lambda\kappa}\;[(\delta\,g_{\lambda\kappa})_{;\,\mu;\,\nu} \;-\; (\delta\,g_{\kappa\mu})_{;\,\nu;\,\lambda} \;-\; (\delta\,g_{\kappa\nu})_{;\,\mu;\,\lambda} \;+\; (\delta\,g_{\mu\nu})_{;\,\kappa;\,\lambda}]\;. \tag{5.93 b}$$

Mit (5.93 a) wird der letzte Term von (5.88)

$$\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,R_{\mu\nu} \;=\; \sqrt{g}\;\Big[(g^{\mu\nu}\,\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda})_{;\,\nu} \;-\; (g^{\mu\nu}\,\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu})_{;\,\lambda}\Big]\;. \tag{5.94}$$

In der eckigen Klammer steht, da $\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ Tensor ist, die Differenz zweier kovarianter Vektordivergenzen, auf die Gl. (3.73) angewandt werden kann:

$$\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,R_{\mu\nu} \;=\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\nu}}\,\Big(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda}\Big) \;-\; \frac{\partial}{\partial\,x^{\lambda}}\,\Big(\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Big)\;. \tag{5.95}$$

Dieser Term ist daher eine gewöhnliche Divergenz und gibt daher bei Integration über den vierdimensionalen Raum nach dem Gaußschen Satz einen verschwindenden Beitrag, wenn wir, wie stets bei Extremalprinzipien, voraussetzen, dass $\delta\,g_{\mu\nu}$ *auf dem Rand des Integrationsgebietes* (bei nicht geschlossenen Räumen im Unendlichen) *verschwindet.*

Für den 1. Term von (5.88) verwenden wir nun Gl. (5.91) und für den 2. Term

$$\begin{aligned} \delta\,(\sqrt{g}) \;&=\; \sqrt{g}\;\Big[\sqrt{\det\,(1\!\!1 \,+\, M^{-1}\,\delta\,M)} \;-\; 1\Big] \\ &=\; \sqrt{g}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(M^{-1}\,\delta\,M) \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{g}\,g^{\mu\nu}\,\delta\,g_{\mu\nu}\;, \end{aligned} \tag{5.96}$$

wobei wir die Notation von Gln. (3.69/70) benutzt haben. Damit wird

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4 x \, [\sqrt{g} \, R_{\mu\nu} \, \delta g^{\mu\nu} + R \, \delta \, (\sqrt{g})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{g} \left\{ -\frac{1}{8\pi G} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \right\} \delta g_{\mu\nu}(x) \, . \end{aligned} \tag{5.97}$$

Soll dies für beliebige $\delta g_{\mu\nu}$ verschwinden, so muss die eckige Klammer verschwinden, und da diese Bedingung ihrerseits (nach Spurbildung) $R = 0$ impliziert, erhält man

$$R_{\mu\nu}(x) = 0 \, , \tag{5.98}$$

d. h., wie behauptet, die quellenfreien Feldgleichungen.

(b) Allgemeine Definition des Energie-Impuls-Tensors. Steht nun das Gravitationsfeld in Wechselwirkung mit einem Quellensystem, so wird das Gesamt-Wirkungsfunktional außer S_G gemäß (5.86) noch einen additiven Term S_Q enthalten, der die Quellen beschreibt. Während aber S_G nur von der Metrik $g_{\mu\nu}$ abhing, wird S_Q von der Gesamtheit der Freiheitsgrade des Quellensystems – die wir schematisch mit $\{\phi\}$ bezeichnen – *und* zusätzlich von $g_{\mu\nu}$ abhängen, denn wir sahen bereits an den Beispielen der Gln. (3.99) (Massenpunktsystem) und (3.122 b) (elektromagnetisches Feld), dass die Bewegungsgleichungen der Quellen in Gegenwart eines Gravitationsfeldes die Metrik (oder aus der Metrik zu bestimmende Größen wie ${\Gamma^\lambda}_{\mu\nu}$, $\sqrt{g}$ usw.) enthalten:

$$\boxed{S = S[g_{\mu\nu}, \{\phi\}] = S_G[g_{\mu\nu}] + S_Q[\{\phi\}, g_{\mu\nu}]} \, . \tag{5.99}$$

Durch dieses Auftreten von $g_{\mu\nu}$ in S_Q werden gerade die Zusatzterme zur rechten Seite von (5.98) erzeugt, die notwendig sind, um die *Wechselwirkung* des Gravitationsfeldes mit den Quellen zu beschreiben. Bei Variation $g_{\mu\nu}(x) \to g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x)$ der Metrik ($\delta g_{\mu\nu}$ auf dem Rand des Raumes verschwindend) erhalten wir nun die Variation

$$\delta S = \delta S_G + \delta S_Q \Big|_{g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}} \, , \tag{5.100}$$

mit δS_G gemäß (5.97), während δS_Q ungeachtet der speziellen Natur des Quellensystems jedenfalls ein lineares Funktional von $\delta g_{\mu\nu}$, d. h. von der allgemeinen Form

$$\delta S_Q \Big|_{g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \int d^4 x \sqrt{g} \, \{-\Theta^{\mu\nu}[\{\phi\}, g_{\kappa\lambda}](x)\} \, \delta g_{\mu\nu}(x) \tag{5.101}$$

sein muss. Ist S_Q (wie S_G) ein Skalar, so muss $\Theta^{\mu\nu}(x)$ ein Tensor und wegen der Kontraktion mit dem symmetrischen $\delta\, g_{\mu\nu}$ symmetrisch sein. Man bezeichnet das durch (5.101) definierte $-\Theta^{\mu\nu}(x)$ als *„Funktionalableitung von S_Q nach $g_{\mu\nu}(x)$"* und schreibt

$$-\Theta^{\mu\nu}(x) \,=\, \frac{\delta\, S_Q\,[\{\phi\},\, g_{\kappa\lambda}]}{\delta\, g_{\mu\nu}(x)}\;. \tag{5.102}$$

Die Bezeichnung rührt von der formalen Analogie zwischen der damit begründeten Formel

$$\delta\, S_Q\Big|_{g_{\mu\nu}\,\to\, g_{\mu\nu}\,+\,\delta\, g_{\mu\nu}} \,=\, \frac{1}{2}\int d^4\,x\,\sqrt{g}\,\left(\frac{\delta\, S_Q}{\delta\, g_{\mu\nu}(x)}\right)\delta\, g_{\mu\nu}(x)\;. \tag{5.103}$$

und der Formel für die infinitesimale Änderung einer Funktion mehrerer Variabler her:

$$\delta\, f \,\equiv\, f\,(x_1 \,+\, \delta\, x_1,\, x_2 \,+\, \delta\, x_2,\, \ldots) \,-\, f\,(x_1,\, x_2,\, \ldots) \,=\, \sum_n \left(\frac{\partial\, f}{\partial\, x_n}\right)\delta\, x_n\;.$$

An die Stelle der Summation über n tritt in (5.103) die invariante Integration $\int d^4\,x\,\sqrt{g}$; der Faktor $\frac{1}{2}$ ist eine Konvention, die wegen der Symmetrie von $\delta\, g_{\mu\nu}$ eingeführt wird. Für (5.100) ergibt sich nun

$$\delta\, S\Big|_{g_{\mu\nu}\to g_{\mu\nu}\,+\,\delta\, g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\int d^4\,x\,\sqrt{g}\,\left[\frac{1}{8\,\pi\, G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) + \Theta^{\mu\nu}\right]\delta\, g_{\mu\nu}(x) \tag{5.104}$$

und da dies für beliebige $\delta\, g_{\mu\nu}$ verschwinden soll, folgt

$$R^{\mu\nu} \,-\, \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\, R \,+\, 8\,\pi\, G\, \Theta^{\mu\nu} \,=\, 0 \tag{5.105}$$

als Bewegungsgl. des Gravitationsfeldes. Vergleich mit (5.17) zeigt, dass $\Theta^{\mu\nu}$ mit dem Energie-Impuls-Tensor des Quellensystems zu identifizieren ist. Tatsächlich kann Gl. (5.102) als *allgemeine Definition des Energie-Impuls-Tensors* eines nichtgravitativen Systems betrachtet werden. Im Folgenden verifizieren wir zunächst, dass diese Definition in bereits behandelten Beispielen zu den bekannten Ausdrücken für $\Theta^{\mu\nu}$ führt, und zeigen dann allgemein, dass die durch (5.102) definierte Größe, wie für $\Theta^{\mu\nu}$ zu fordern ein symmetrischer und kovariant divergenzfreier Tensor ist, wenn S ein Skalar ist.

Natürlich sind die Feldgln. (5.105) durch die Bewegungsgleichungen des Quellensystems selbst zu ergänzen, die aus der weiteren Stationaritätsforderung

$$\delta\, S_Q \,=\, 0 \quad \text{bei} \quad \{\phi\} \,\to\, \{\phi \,+\, \delta\, \phi\} \tag{5.106}$$

folgen und ihrerseits die Metrik $g_{\mu\nu}$ enthalten, so dass das dynamische Gesamtproblem eine Verkopplung aufweist.

Wir verifizieren nun (5.102) für das schon recht umfassende Beispiel eines *Systems aus geladenen Massenpunkten und elektromagnetischem Feld*. Ein geeignetes Wirkungsfunktional hierfür ist durch

$$S_Q \;=\; S_{(pt)} \;+\; S_{(em)} \;+\; S_{(int)} \tag{5.107}$$

gegeben, wobei die Indizes sich auf Teilchensystem (pt), elektromagnetisches Feld (em) und Kopplungsterm zwischen beiden (int) beziehen. Als Freiheitsgrade ϕ wählen wir die Teilchenkoordinaten ${x_n}^{\mu}(p)$ als Funktionen eines gemeinsamen invarianten Bahnparameters p für das Teilchensystem und die Werte des Viererpotenzials $A_{\mu}(x)$ an allen Raum-Zeit-Punkten x für das elektromagnetische Feld. Dann ist

$$S_{(pt)}\left[\{x_n\}\right] \;=\; -\sum_n m_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,p \left[g_{\mu\nu}\left(x_n\left(p\right)\right) \frac{d\,{x_n}^{\mu}}{d\,p} \frac{d\,{x_n}^{\nu}}{d\,p}\right]^{\frac{1}{2}} \;, \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned} S_{(em)}\left[\{A^{\mu}(x)\}\right] \;&=\; -\int d^4\,x\,\sqrt{g\left(x\right)}\,\frac{1}{4\,\mu_0}\,F_{\mu\nu}\left(x\right)F^{\mu\nu}\left(x\right) \\ \text{mit} \qquad F_{\mu\nu} \;&=\; \partial_{\mu}\,A_{\nu} \;-\; \partial_{\nu}\,A_{\mu} \;, \end{aligned} \tag{5.109}$$

$$S_{(int)}\left[\{x_n\},\,\{A^{\mu}(x)\}\right] \;=\; -\sum_n q_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,p\,\frac{d\,{x_n}^{\mu}}{d\,p}\,A_{\mu}\left(x_n\left(p\right)\right) \;. \tag{5.110}$$

Zunächst ist nachzuprüfen, ob dieses Wirkungsintegral bei Anwendung der Stationaritätsforderung (5.106) bezüglich der Variation

$${x_n}^{\mu}(p) \;\to\; {x_n}^{\mu}(p) \;+\; \delta\,{x_n}^{\mu}(p) \;, \qquad \delta\,{x_n}^{\mu}(p) \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad |p| \;\to\; \infty \tag{5.111 a}$$

$$A_{\mu}(x) \;\to\; A_{\mu}(x) \;+\; \delta\,A_{\mu}(x) \;, \qquad \delta\,A_{\mu}(x) \;\to\; 0 \quad \begin{array}{l}\text{auf dem Rand des}\\ \text{Integrationsgebietes}\end{array} \tag{5.111 b}$$

die richtigen Bewegungsgln. für das Quellensystem liefert. Für $\delta\,S_{(pt)}$ wurde die Rechnung im wesentlichen bereits in Abschnitt 2.2 – Geodäteneigenschaft der Teilchenbahnen – ausgeführt; Übertragung des Resultats (2.47 c) gibt

$$\begin{aligned} \delta\,S_{(pt)}\Big|_{x^{\mu}\to x^{\mu}+\delta\,x^{\mu}} \;&=\; \sum_n m_n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\tau_n\,g_{\kappa\lambda}\left(x_n\left(\tau_n\right)\right) \\ &\times\; \left[\frac{d^2\,{x_n}^{\lambda}}{d\,{\tau_n}^2} \;+\; \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\left(x_n\left(\tau_n\right)\right)\frac{d\,{x_n}^{\mu}}{d\,\tau}\,\frac{d\,{x_n}^{\nu}}{d\,\tau}\right]\delta\,{x_n}^{\kappa}\left(\tau_n\right) \;, \end{aligned} \tag{5.112}$$

wobei von p auf die Eigenzeiten τ_n gemäß (2.15) umgerechnet wurde. Für $S_{(em)}$ andererseits gilt bei der Variation (5.111 b)

$$\delta \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) = F_{\mu\nu} \partial_\mu \left(\delta A_\nu \right)$$

wegen der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$. Nach partieller Integration unter Beachtung des Verschwindens von $\delta A_\mu(x)$ auf dem Rand ergibt sich

$$\delta S_{(em)} = \frac{1}{\mu_0} \int d^4 x \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{g(x)} F^{\mu\nu}(x) \right] \right\} \delta A_\nu(x) \,. \tag{5.113}$$

Beim Wechselwirkungsterm (5.110) schließlich ist zu berücksichtigen, dass $A_\mu(x_n(p))$ sowohl durch die Variation (5.111 a) als auch durch (5.111 b) beeinflusst wird:

$$\delta \left\{ \frac{d x_n{}^\mu}{d p} A_\mu(x_n(p)) \right\} = A_\kappa(x_n) \frac{d}{d p} \delta x_n{}^\kappa(p) + \frac{d x_n{}^\mu}{d p} \times$$

$$\times \left[\left. \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\kappa} \right|_{x = x_n(p)} \delta x_n{}^\kappa + \delta A_\mu(x) \Big|_{x = x_n(p)} \right] .$$

Nach erneutem Übergang zu den τ_n als Bahnparametern und partiellen Integrationen unter Wegfall der Randterme erhält man daher

$$\delta S_{(int)} = - \sum_n q_n \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \left[- \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\kappa(x) + \frac{\partial}{\partial x^\kappa} A_\mu(x) \right]_{x = x_n(\tau_n)} \right.$$

$$\left. \times \frac{d x_n{}^\mu}{d \tau_n} \delta x_n{}^\kappa(\tau_n) + \int d^4 x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \, \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \frac{d x_n{}^\nu}{d \tau_n} \right] \delta A_\nu(x) \right\} . \tag{5.114}$$

Die eckige Klammer der 1. Zeile ist $-F_{\mu\kappa}(x) = F_{\kappa\mu}(x) = g_{\kappa\lambda}(x) F^\lambda{}_\mu(x)$ an der Stelle $x = x_n(\tau_n)$. Die Summe von (5.112), (5.113) und (5.114) ergibt daher

$$\begin{aligned} \delta S_Q \Big|_{\phi \to \phi + \delta\phi} &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n \left(\frac{\delta S_Q}{\delta x_n{}^\kappa(\tau_n)} \right) \delta x_n{}^\kappa(\tau_n) \\ &+ \int d^4 x \sqrt{g(x)} \left(\frac{\delta S_Q}{\delta A_\nu(x)} \right) \delta A_\nu(x) \end{aligned} \tag{5.115}$$

mit den Funktionalableitungen

$$\frac{\delta S_Q}{\delta x_n{}^\kappa(\tau_n)} = g_{\kappa\lambda}(x_n(\tau_n))\, m_n \left[\frac{d^2 x_n{}^\lambda}{d\tau_n{}^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x_n(\tau_n)) \right.$$

$$\left. \times \frac{d x_n{}^\mu}{d\tau_n} \frac{d x_n^\nu}{d\tau_n} - \frac{q_n}{m_n} F^\lambda{}_\mu(x_n(\tau_n)) \frac{d x_n{}^\mu}{d\tau_n}\right], \tag{5.116 a}$$

$$\frac{\delta S_Q}{\delta A_\nu(x)} = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{g(x)}\, F^{\mu\nu}(x)\right]$$

$$- \left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_n q_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_n\, \delta^4(x - x_n(\tau_n)) \frac{d x_n{}^\nu}{d\tau_n}\right]. \tag{5.116 b}$$

Diese müssen bei Stationarität, d. h. längs des tatsächlich vom System durchlaufenen „Pfades“, verschwinden; das führt bei (5.116 a) auf die Bewegungsgln. (3.102) für die Massenpunkte mit den elektrischen Kräften $K_n{}^\lambda$ von Gl. (3.123), bei (5.116 b) auf die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (3.122 b) mit dem Strom $J^\mu(x)$ von Gl. (3.118). Damit ist gezeigt, dass (5.107) - (5.110) im Quellensektor die richtigen Bewegungsgln. ergeben.

Um nun (5.102) am Beispiel (5.107) zu verifizieren, führen wir in (5.108) - (5.110) *bei nunmehr festgehaltenen* $x_n{}^\mu(p)$ *und* $A_\mu(x)$ *die Variation* $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ wie in (5.100) aus. Dabei liefert $S_{(int)}$ offenbar keinen Beitrag; in $S_{(pt)}$ wird

$$\delta\left(\sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) \frac{d x_n{}^\mu}{dp} \frac{d x_n{}^\nu}{dp}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}(x_n) \frac{d x_n{}^\mu}{dp} \frac{d x_n{}^\nu}{dp}}} \times$$

$$\times \frac{d x_n{}^\kappa}{dp} \frac{d x_n{}^\lambda}{dp}\, \delta g_{\kappa\lambda}(x_n)$$

$$= \left(\frac{d\tau_n}{dp}\right) \frac{1}{2} \frac{d x_n{}^\kappa}{d\tau_n} \frac{d x_n{}^\lambda}{d\tau_n} \int d^4x\, \delta^4(x - x_n(\tau_n))\, \delta g_{\kappa\lambda}(x)\,. \tag{5.117}$$

Bei der Variation von $S_{(em)}$ bleibt $F_{\mu\nu}$ wie A_μ konstant, aber $\sqrt{g}$ ist gemäß (5.96) und $F^{\mu\nu} = g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \times F_{\kappa\lambda}$ gemäß (5.91) zu variieren:

$$\delta F^{\mu\nu} = F_{\kappa\lambda}\left[g^{\mu\kappa}(-g^{\nu\rho} g^{\lambda\sigma}) + (-g^{\mu\rho} g^{\kappa\sigma})\, g^{\nu\lambda}\right] \delta g_{\rho\sigma}$$

$$= -\left[F^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} + F^{\sigma\nu} g^{\mu\rho}\right] \delta g_{\rho\sigma}\,, \tag{5.118 a}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\sqrt{g}\,\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{2}\,\sqrt{g}\,g^{\kappa\lambda}\left(\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\right)\delta\,g_{\kappa\lambda} \\
&- \frac{1}{4}\,\sqrt{g}\,\left(F^{\mu\sigma}\,F_{\mu}{}^{\rho} + F^{\sigma\nu}\,F^{\rho}_{\ \nu}\right)\delta\,g_{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{2}\,\sqrt{g}\left(F^{\kappa}_{\ \mu}\,F^{\mu\lambda} - \frac{1}{4}\,g^{\kappa\lambda}\,F_{\mu\nu}\,F^{\nu\mu}\right)\delta\,g_{\kappa\lambda}\ . \qquad (5.118\ \mathrm{b})
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich $\delta\,S_Q$ in der Form (5.103) mit

$$
\begin{aligned}
-\frac{\delta\,S_Q}{\delta\,g_{\mu\nu}\,(x)} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_n m_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\tau_n\,\delta^4\,(x - x_n\,(\tau_n))\,\frac{d\,x_n^{\ \mu}}{d\,\tau_n}\,\frac{d\,x_n^{\ \nu}}{d\,\tau_n} \\
&+ \frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\rho}\,F_{\rho}^{\ \ \nu} - \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}\,F^{\rho\sigma}\,F_{\sigma\rho}\right]\ . \qquad (5.119)
\end{aligned}
$$

Vergleich mit (3.115) und (3.125) zeigt, dass in der Tat

$$
-\frac{\delta\,S_Q}{\delta\,g_{\mu\nu}\,(x)} = \Theta^{\mu\nu}_{(pt)} + \Theta^{\mu\nu}_{(em)}\,(x) \qquad (5.120)
$$

ist, wie behauptet.

Die Definition (5.102) ist eng verwandt der Definition des elektrischen Viererstromes als Funktionalableitung des Wirkungsintegrals der *elektrodynamischen* Quellen, S_J (im Beispiel (5.107) ist das $S_{(pt)} + S_{(int)}$), nach dem Vektorpotenzial:

$$
\delta\,S_J\Big|_{A_\mu\,\to\,A_\mu\,+\,\delta\,A_\mu} = \int d^4\,x\,\sqrt{g}\,[-J^\mu\,(x)]\,\delta\,A_\mu\,(x)\ , \qquad (5.121\ \mathrm{a})
$$

$$
-J^\mu\,(x) = \frac{\delta\,S_J}{\delta\,A_\mu\,(x)}\ . \qquad (5.121\ \mathrm{b})
$$

Im Beispiel (5.107) trägt hierzu nur der Term $S_{(int)}$ von (5.110) bei; das Resultat ist durch die 2. Zeile von (5.116 b) gegeben:

$$
-\frac{\delta\,S_J}{\delta\,A_\mu\,(x)} = \frac{1}{\sqrt{g\,(x)}}\sum_n q_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\,\tau_n\,\delta^4\,(x - x_n\,(\tau_n))\,\frac{d\,x_n^{\ \mu}}{d\,\tau_n}\ . \qquad (5.122)
$$

Vergleich mit (3.117) bestätigt die Beziehung (5.121).

(c) Allgemeine Kovarianz und Energie-Impuls-Bilanz. Ist das Wirkungsfunktional S_Q eines Quellensystems ein Skalar – im Beispiel (5.107) - (5.110) ist das manifest der Fall – , dann sind die Aussage des Verschwindens von $\delta\, S_Q$ und die daraus folgenden Feldgleichungen allgemein kovariant, sofern die variierten Freiheitsgrade tensorieller Natur sind. Wir werden deshalb stets fordern, dass S_Q *ein Skalar* ist. Das bedeutet, dass S_Q bzw. das S_Q repräsentierende Raum-Zeit-Integral invariant ist gegenüber den gleichzeitigen Substitutionen

$$d^4\, x \quad \to \quad d^4\, x^{'} \,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, x^{\mu}} \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial\, x'^{\,\mu}} \tag{5.123 a}$$

$$x_n{}^{\mu}\,(p) \quad \to \quad x_n{}'^{\,\mu}\,(p)\,, \qquad A_{\mu}\,(x) \quad \to \quad A^{'}_{\mu}\,(x^{'}) = \frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, x'^{\,\mu}}\, A_{\nu}\,(x)\,, \tag{5.123 b}$$

$$g_{\mu\nu}\,(x) \quad \to \quad g^{'}_{\mu\nu}\,(x^{'}) \,=\, \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\,\mu}}\, \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\,\nu}}\, g_{\rho\sigma}\,(x)\,. \tag{5.123 c}$$

Nun ist aber $x^{'}$ – im Gegensatz zu den dynamischen Variablen $x^{'}_n\,(p)$ – eine bloße Integrationsvariable, die zurücktransformiert werden kann, ohne das Integral zu ändern. Das bedeutet, dass der Teil (5.123 a) der Transformation wegfällt und statt dessen die Substitutionen

$$x_n{}^{\mu}\,(p) \to x_n{}'^{\,\mu}\,(p)\,, \quad A_{\mu}\,(x) \to A^{'}_{\mu}\,(x) = \frac{\partial\, x^{\nu}}{\partial\, x'^{\,\mu}}\, A_{\nu}\,(x) - [A^{'}_{\mu}\,(x^{'}) - A_{\mu}\,(x)]\,, \tag{5.124 a}$$

$$g_{\mu\nu}\,(x) \,\to\, g^{'}_{\mu\nu}\,(x) \,=\, \frac{\partial\, x^{\rho}}{\partial\, x'^{\,\mu}}\, \frac{\partial\, x^{\sigma}}{\partial\, x'^{\,\nu}}\, g_{\rho\sigma}\,(x) \,-\, [g^{'}_{\mu\nu}\,(x^{'}) \,-\, g_{\mu\nu}\,(x)]\,. \tag{5.124 b}$$

ausgeführt werden, die im Gegensatz zu (5.123) eine reine Variation der dynamischen Freiheitsgrade, nicht mehr der Integrationsvariablen sind und auf die daher die bisherigen Überlegungen angewandt werden können. Dazu müssen wir infinitesimale Koordinatentransformationen

$$x'^{\,\mu} \,=\, x^{\mu} \,+\, \varepsilon^{\mu}\,(x) \qquad (\mu \,=\, 0 \ldots 3) \tag{5.125}$$

betrachten (sie sind offenbar dasselbe wie infinitesimale Translationen mit x-abhängigem Verschiebungsvektor). Die Variation (5.124 a) wird dann zu

$$\delta\, x_n{}^{\mu}\,(p) \,=\, \varepsilon^{\mu}\,(x_n\,(p))\,, \tag{5.126 a}$$

$$\delta\, A_{\mu}\,(x) \,=\, -A_{\nu}\,(x)\, \frac{\partial\, \varepsilon^{\nu}\,(x)}{\partial\, x^{\mu}} \,-\, \frac{\partial\, A_{\mu}\,(x)}{\partial\, x^{\nu}}\, \varepsilon^{\nu}\,(x)\,. \tag{5.126 b}$$

Solange das Quellensystem seinen durch (5.106) bestimmten Systempfad durchläuft, ist die hierdurch induzierte Variation $\delta\, S_Q$ für sich Null. Die Änderung von S_Q rührt daher hier allein von der infinitesimalen Variation (5.124 b) her,

$$\delta\, g_{\mu\nu}\,(x) \;=\; -g_{\mu\lambda}\,\frac{\partial\, \varepsilon^\lambda}{\partial\, x^\nu} \;-\; g_{\nu\lambda}\,\frac{\partial\, \varepsilon^\lambda}{\partial\, x^\mu} \;-\; \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda}\,\varepsilon^\lambda\;. \tag{5.126 c}$$

Diese erzeugt definitionsgemäß die Änderung (5.101), d. h.

$$\delta\, S_Q \;=\; \frac{1}{2}\int d^4\, x\, \sqrt{g}\,\Theta^{\mu\nu}\,\left(g_{\mu\lambda}\,\frac{\partial\, \varepsilon^\lambda}{\partial\, x^\nu} \;+\; g_{\nu\lambda}\,\frac{\partial\, \varepsilon^\lambda}{\partial\, x^\mu} \;+\; \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda}\,\varepsilon^\lambda\right)$$

oder nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
\delta\, S_Q \;&=\; \frac{1}{2}\int d^4\, x\,\left[-2\,\frac{\partial}{\partial\, x^\mu}\,(\sqrt{g}\,\Theta^{\mu\nu}\,g_{\nu\lambda}) \;+\; \frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda}\,\sqrt{g}\,\Theta^{\mu\nu}\right]\,\varepsilon^\lambda\,(x)\\
&=\; -\int d^4\, x\,\sqrt{g}\,\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\, x^\mu}\,\left(\sqrt{g}\,{\Theta^\mu}_\lambda\right) \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda}\,\Theta^{\mu\nu}\right]\,\varepsilon^\lambda\,(x)\;.
\end{aligned} \tag{5.127}$$

Da aber S_Q ein Skalar und das gesamte $\delta\, S_Q$ lediglich durch eine Koordinatentransformation induziert war, muss auch diese Änderung verschwinden, und zwar für beliebige infinitesimale $\varepsilon^\lambda\,(x)$. Also

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial\, x^\mu}\,(\sqrt{g}\,{\Theta^\mu}_\lambda) \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{\partial\, g_{\mu\nu}}{\partial\, x^\lambda}\,\Theta^{\mu\nu} \;=\; 0 \tag{5.128}$$

oder mit (2.34) und den Rechenregeln für kovariante Ableitungen

$$\boxed{{\Theta^\mu}_{\lambda;\,\mu} \;=\; 0}\;. \tag{5.129}$$

Der *Energie-Impuls-Tensor der Quellen ist also als Folge der Invarianz der Wirkung unter allgemeinen Koordinatentransformationen kovariant divergenzfrei*; d. h. unterliegt Bilanzgleichungen. Auf Grund der Definition (5.101) und der Symmetrie von $\delta\, g_{\mu\nu}$ ist er außerdem symmetrisch. Dieselbe Herleitung, angewandt auf den Wirkungsskalar (5.86) des Gravitationsfeldes, kann als alternative Begründung der kontrahierten Bianchi-Identität (4.55) dienen. Auch diese Herleitung hat ihr Analogon in der Elektrodynamik, wo Eichinvarianz der Wirkung die Ladungserhaltung (3.119) nach sich zieht.

6 Tests und Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

6.1 Allgemeine isotrope und statische Metriken

Die im Folgenden zu besprechenden Tests der Einsteinschen Gravitationstheorie werden alle in sehr guter Näherung (a) im „leeren“ (quellenfreien) Raum und (b) in kugelsymmetrischen und statischen Gravitationsfeldern ausgeführt. Wir suchen daher Lösungen der Vakuumfeldgleichungen (5.25) unter den vereinfachenden Zusatzbedingungen der Isotropie und Zeitunabhängigkeit (in einer geeigneten Klasse von Koordinatensystemen).

In diesem Abschnitt fragen wir zunächst – noch ohne Rücksicht auf das Erfülltsein der Feldgln. (5.25) – nach dem *allgemeinsten metrischen Tensor* $g_{\mu\nu}(x)$, *der ein isotropes und statisches Gravitationsfeld beschreibt*: Dies bedeutet, dass mindestens ein „quasi-Minkowskisches Koordinatensystem“ $\{x^0 = t, x^1, x^2, x^3\}$ existieren soll, in dem die Koordinate t zeitartig (d.h. jeder Unterraum $t =$ const. raumartig) ist, das Linienelement $d\,s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,d\,x^\mu\,d\,x^\nu$ nicht von t abhängt (natürlich wird es $d\,t$ immer enthalten) und von $\vec{x}$ und $d\,\vec{x}$ nur durch die dreidimensional drehinvarianten Kombinationen

$$d\,\vec{x}^{\,2} = d\,\vec{x}\cdot d\,\vec{x}\,, \quad \vec{x}\cdot d\,\vec{x}\,, \quad \vec{x}^{\,2} = \vec{x}\cdot\vec{x} = r^2 \tag{6.1 a}$$

abhängt. Die Schreibweise meint die üblichen dreidimensionalen Skalarprodukte, d. h.

$$\vec{x}\cdot\vec{d}x = x^1\,d\,x^1 + x^2\,d\,x^2 + x^3\,dx^3 \tag{6.1 b}$$

usw. Das allgemeinste derartige Linienelement ist

$$\begin{aligned}(d\,s)^2 \;&=\; F(r)\,(d\,t)^2 - 2\,E(r)\,(\vec{x}\cdot\vec{d}x)\,d\,t \\ &\qquad - D(r)\,(\vec{x}\cdot d\,\vec{x})^2 - C(r)\,(\vec{d}x)^2\,,\end{aligned} \tag{6.2}$$

wo C, D, E, F zunaechst beliebige, aber im Hinblick auf die richtige Signatur $+,-,-,-$ noch einzuschränkende reelle Funktionen von r sind. Wie stets bei isotropen Problemen ist es zweckmäßig, gemäß

$$x^1 = r\,\sin\vartheta\,\cos\varphi\,, \quad x^2 = r\,\sin\vartheta\,\sin\varphi\,, \quad x^3 = r\,\cos\vartheta \tag{6.3}$$

zu räumlichen Polarkoordinaten überzugehen. In diesen wird

$$\vec{x}\cdot\vec{d}x = r\;d\,r \qquad \text{(unabhängig von } \vartheta,\,\varphi)\,, \tag{6.4 a}$$

$$(\vec{dx})^2 \;=\; d\,r^2 \;+\; (r\,d\,\vartheta)^2 \;+\; (r\,\sin\vartheta\,d\,\varphi)^2 \;, \tag{6.4 b}$$

so dass das Linienelement (6.2) die Form

$$\begin{aligned} d\,s^2 \;&=\; F\,(r)\,d\,t^2 \;-\; 2\,r\,E\,(r)\,d\,t\;d\,r \;-\; r^2\,D\,(r)\,d\,r^2 \\ &\quad -C\,(r)\,[d\,r^2 \;+\; r^2\,d\,\vartheta^2 \;+\; (r\,\sin\vartheta)^2\,d\,\varphi^2] \end{aligned} \tag{6.5}$$

annimmt. Dies ist nichts anderes als der statische Spezialfall der Metrik (4.220), einer vierdimensionalen Raumzeit mit maximal symmetrischen zweidimensionalen Unterräumen negativer Signatur.

Dieser Ausdruck kann, ohne die Klasse der quasi-Minkowskischen Koordinatensysteme zu verlassen, noch auf zweierlei Weise vereinfacht werden, nämlich durch Umdefinition der beiden noch eingehenden Koordinaten t und r. Zunächst nimmt man eine r-abhängige Verschiebung des Zeitnullpunktes vor,

$$\begin{aligned} t \quad &\rightarrow \quad t' \;=\; t \;+\; \Phi\,(r)\;, \\ d\,t' \;&=\; d\,t \;+\; \left(\frac{d\,\Phi}{d\,r}\right)\,d\,r\;, \end{aligned} \tag{6.6 a}$$

derart, dass das außerdiagonale Element $d\,t'\,d\,r$ (d. h. die Komponente $g_{t'\,r}$ der Metrik) verschwindet:

$$F\,(r)\,\left[-2\,\frac{d\,\Phi}{d\,r}\right] \;-\; 2\,r\,E\,(r) \;=\; 0\;.$$

Dieses wird offenbar durch die Wahl

$$\Phi\,(r) \;=\; \text{const.} \;-\; \int\limits_0^r d\,r'\,r'\,\frac{E\,(r')}{F\,(r')} \tag{6.6 b}$$

erreicht. Damit wird

$$d\,s^2 \;=\; F\,(r)\,d\,t'^2 \;-\; G\,(r)\,d\,r^2 \;-\; C\,(r)\,[d\,r^2 \;+\; r^2\,d\,\vartheta^2 \;+\; (r\,\sin\vartheta)^2\,d\,\varphi^2] \tag{6.6 c}$$

mit der neuen Funktion

$$G\,(r) \;=\; r^2\,\left[D\,(r) \;+\; \frac{E^2\,(r)}{F\,(r)}\right]\;, \tag{6.6 d}$$

wobei die Signaturbedingung nun offenbar $F(r)$, $G(r)$, $C(r) \;>\; 0$ erfordert. Sodann kann man durch Umdefinition der r-Koordinate die Zahl der freien Radialfunktionen noch um eins vermindern, indem man etwa

$$r^2 \quad \to \quad r'^2 \,=\, r^2\, C\,(r)$$
$$d\,r' \;=\; \sqrt{C\,(r)}\,\left[1 \,+\, \frac{r}{2}\,\frac{d\,C\,/\,d\,r}{C\,(r)}\right]\,d\,r \tag{6.7 a}$$

setzt, was für $C\,(r) \,>\, 0$ sinnvoll ist, und die Radialfunktionen

$$B\,(r') \,=\, F\,(r\,(r'))\ ,$$
$$A\,(r') \;=\; \left[1 \,+\, \frac{G\,(r)}{C\,(r)}\right]\,\left[1 \,+\, \frac{r}{2}\,\frac{d\,C\,/\,d\,r}{C\,(r)}\right]^{-2} \tag{6.7 b}$$

(beide $>\; 0$) benutzt; das führt auf die sog. *Standardform*

$$d\,s^2 \,=\, B\,(r')\,d\,t'^2 \,-\, A\,(r')\,d\,r'^2 \,-\, r'^2\,(d\,\vartheta^2 \,+\, \sin^2\,\vartheta\,d\,\varphi^2) \tag{6.7 c}$$

des Linienelementes. Als Alternative könnte man

$$r'' \;=\; \exp\left\{\int^{r} d\,\overline{r}\,\frac{1}{\overline{r}}\,\left[1 \,+\, \frac{G\,(\overline{r})}{C\,(\overline{r})}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$
$$d\,r'' \;=\; \frac{r''}{r}\,\left[1 \,+\, \frac{G\,(r)}{C\,(r)}\right]^{\frac{1}{2}}\,d\,r \tag{6.8 a}$$

und die Radialfunktionen

$$H\,(r'') \,=\, F\,(r\,(r''))\ ,$$
$$J\,(r'') \,=\, C\,(r\,(r''))\,\left[\frac{r\,(r'')}{r''}\right]^2 \tag{6.8 b}$$

verwenden; das ergäbe die sog. *isotrope Form*

$$d\,s^2 \,=\, H\,(r'')\,d\,t'^2 \,-\, J\,(r'')\,\left[d\,r''^2 \,+\, r''^2\,(d\,\vartheta^2 \,+\, \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2)\right]\ . \tag{6.8 c}$$

Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit kann also die *allgemeine statisch-isotrope Metrik mit 2 freien Radialfunktionen* etwa wie in (6.7 c) oder (6.8 c) angesetzt werden. Im Folgenden arbeiten wir überwiegend mit der „Standardform“ (6.7 c), bei der wir die Striche weglassen:

$$\boxed{d\,s^2 \,=\, B\,(r)\,d\,t^2 \,-\, A\,(r)\,d\,r^2 \,-\, r^2\,(d\,\vartheta^2 \,+\, \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2)\ .} \tag{6.9}$$

Aus dieser Form lesen wir die nichtverschwindenden (diagonalen) Komponenten des metrischen Tensors ab:

$$g_{tt} \,=\, B\,(r)\ , \quad g_{rr} \,=\, -A\,(r)\ , \quad g_{\vartheta\vartheta} \,=\, -r^2\ , \quad g_{\varphi\varphi} \,=\, -r^2\,\sin^2\,\vartheta\ . \tag{6.10}$$

Die Signatur (2.19) erfordert $A\,(r) \,>\, 0$, $B\,(r) \,>\, 0$. Die Determinante ist

$$g\,(r,\,\vartheta) \,=\, -\det\,(g_{\mu\nu}) \,=\, r^4\,A\,(r)\,B\,(r)\,\sin^2\,\vartheta\ , \tag{6.11}$$

und das invariante Volumenelement daher

$$\sqrt{g}\,d^4\,x \,=\, r^2\,\sqrt{A\,(r)\,B\,(r)}\,\sin\vartheta\,d\,r\,d\,\vartheta\,d\,\varphi\,d\,t\ . \tag{6.12}$$

Der affine Zusammenhang kann nun nach (2.41) aus den ersten Ableitungen der Funktionen (6.10) berechnet werden. Wir bezeichnen mit $f^{'}\,(r)$ die Ableitung $d\,f\,/\,d\,r$; dann sind die nichtverschwindenden Komponenten:

$$\Gamma^t{}_{tr}\,(r) \,=\, \Gamma^t{}_{rt}\,(r) \,=\, \frac{1}{2}\,\frac{B^{'}\,(r)}{B\,(r)}\ , \tag{6.13 a}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^r{}_{tt} \,&=\, \frac{1}{2}\,\frac{B^{'}\,(r)}{A\,(r)}\ , \qquad \Gamma^r{}_{rr} \,=\, \frac{1}{2}\,\frac{A^{'}\,(r)}{A\,(r)}\ , \\ \Gamma^r{}_{\vartheta\vartheta} \,&=\, -\frac{r}{A\,(r)}\ , \qquad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} \,=\, -\frac{r\,\sin^2\,\vartheta}{A\,(r)}\ , \end{aligned} \tag{6.13 b}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\vartheta{}_{r\vartheta} \,=\, \Gamma^\vartheta{}_{\vartheta r} \,&=\, \tfrac{1}{r}\ , \qquad \Gamma^\vartheta{}_{\varphi\varphi} \,=\, -\sin\vartheta\,\cos\vartheta\ , \\ \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} \,=\, \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} \,&=\, \tfrac{1}{r}\ , \qquad \Gamma^\varphi{}_{\vartheta\varphi} \,=\, \Gamma^\varphi{}_{\varphi\vartheta} \,=\, \cot\vartheta\ . \end{aligned} \tag{6.13 c}$$

Sodann ist der Ricci-Tensor nach (4.41) und (4.6) zu berechnen:

$$R_{\mu\nu} \,=\, \frac{\partial\,\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}}{\partial\,x^\nu} \,-\, \frac{\partial\,\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}{\partial\,x^\lambda} \,+\, \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\,\Gamma^\lambda{}_{\nu\eta} \,-\, \Gamma^\eta{}_{\mu\nu}\,\Gamma^\lambda{}_{\lambda\eta}\ . \tag{6.14}$$

Er erweist sich beim Einsetzen von (6.13) ebenso wie die Metrik (6.10) als diagonal,

$$R_{\mu\nu} \,=\, 0 \qquad \text{für}\ \mu \neq \nu\ , \tag{6.15 a}$$

mit den Diagonalelementen

$$R_{tt}\,(r) \,=\, -\frac{B^{''}}{2\,A} \,+\, \frac{1}{4}\,\frac{B^{'}}{A}\,\left(\frac{A^{'}}{A} \,+\, \frac{B^{'}}{B}\right) \,-\, \frac{1}{r}\,\frac{B^{'}}{A}\ , \tag{6.15 b}$$

$$R_{rr}(r) \, = \, \frac{B''}{2\,B} \, - \, \frac{1}{4}\,\frac{B'}{B}\left(\frac{A'}{A} \, + \, \frac{B'}{B}\right) \, - \, \frac{1}{r}\,\frac{A'}{A} \; , \tag{6.15 c}$$

$$R_{\vartheta\vartheta}(r) \, = \, -1 \, + \, \frac{r}{2\,A}\left(-\frac{A'}{A} \, + \, \frac{B'}{B}\right) \, + \, \frac{1}{A} \; , \tag{6.15 d}$$

$$R_{\varphi\varphi}(r,\,\vartheta) \, = \, \sin^2\vartheta \, \cdot \, R_{\vartheta\vartheta}(r) \; . \tag{6.15 e}$$

Das Verschwinden von $R_{tr} \, = \, R_{rt}$ rührt letztlich von unserer Elimination von g_{tr} durch die Transformation (6.6 a) her, wodurch die Metrik unter der Zeitumkehrtransformation $t \, \rightarrow \, -t$, $d\,t \, \rightarrow \, -d\,t$ invariant gemacht wurde. Ebenso rühren die Resultate $R_{r\vartheta} \, = \, R_{r\varphi} \, = \, R_{t\vartheta} \, = \, R_{t\varphi} \, = \, R_{\vartheta\varphi} \, = \, 0$ und die Beziehung (6.15 e) zwischen $R_{\varphi\varphi}$ und $R_{\vartheta\vartheta}$ von der Drehinvarianz der Metrik (6.10) her.

Die isotrope Form der Metrik kann hieraus, wenn benötigt, gewonnen werden, indem man die Metrik (6.9) als Spezialfall der allgemeinen Form (6.6 c) mit

$$F(r) \quad \rightarrow \quad B(r) \; , \qquad G(r) \quad \rightarrow \quad A(r) \, - \, 1 \; , \qquad C(r) \, \equiv \, 1$$

betrachtet und die Vorschriften (6.8) anwendet: man hat also

$$r''(r) \, = \, \exp\left[\int^{r} d\,\tilde{r}\,\frac{\sqrt{A(\tilde{r})}}{\tilde{r}}\right] \tag{6.16 a}$$

nach r aufzulösen und damit die Metrik in der Form (6.8 c) anzuschreiben mit

$$H(r'') \, = \, B(r(r'')) \; , \qquad J(r'') \, = \, \left(\frac{r(r'')}{r''}\right)^2 \; . \tag{6.16 b}$$

Weder die „Standard“ – noch die „isotropen“ Koordinaten sind harmonische Koordinaten; die Bedingung (5.37) ist mindestens für $\lambda \, = \, r$ bzw. $\lambda \, = \, r''$ verletzt. Wir können jedoch anhand der Dgln. (5.34) mit (6.9) und (6.13) solche harmonischen Koordinaten leicht konstruieren: Für die Standardkoordinate $x^0 \, = \, t$ ist Bedingung (5.32) bzw. (5.40) bereits erfüllt:

$$\Box\, t \, = \, 0 \; . \tag{6.17}$$

Wir können also *harmonische Koordinaten* $\{t,\, X^1,\, X^2,\, X^3\}$ finden und setzen dazu an

$$X^1 \, = \, R(r)\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \; , \qquad X^2 \, = \, R(r)\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \; , \qquad X^3 \, = \, R(r)\,\cos\vartheta \; . \tag{6.18}$$

Die Bedingungen (5.34) geben dann für $\lambda = m = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Box X^m &= g^{\mu\nu} \left[\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^\mu \, \partial x^\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) \frac{\partial X^m}{\partial x^\lambda} \right] \\ &= \left[\frac{X^m}{A(r)\, R(r)} \right] \left[-2 \frac{A}{r^2} R + \left(\frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} + \frac{2}{r} \right) R' + R'' \right] = 0 \, . \end{aligned}$$

Die *harmonische Radialkoordinate* $R(r)$ ist also als Funktion von r durch Lösung der gewöhnlichen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$R'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{B'}{2B} - \frac{A'}{2A} \right) R' - 2 \frac{A}{r^2} R = 0 \, ,$$

oder (nach Multiplikation mit $r^2 \sqrt{B / A}$) in selbstadjungierter Form

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{dR}{dr} \right) - 2 \sqrt{AB}\, R(r) = 0 \, , \tag{6.19}$$

zu bestimmen. Das Linienelement erhält in diesen harmonischen Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= B\, dt^2 - \frac{1}{R^2} \left\{ r(R)^2 \, d\vec{X}^{\,2} + \left[\frac{A}{R'^2} - \frac{r^2}{R^2} \right] \left(\vec{X} \cdot d\vec{X} \right)^2 \right\} \\ &= B\, dt^2 + \sum_{m,n=1}^{3} \left\{ -\frac{1}{R^2} \left[r^2 \delta^m{}_n + \left(A \left(\frac{dr}{dR} \right)^2 - \left(\frac{r(R)}{R} \right)^2 \right) X^m X^n \right] \right\} dX^m dX^n \, , \end{aligned} \tag{6.20}$$

d. h. die harmonische Form der statisch-isotropen Metrik hat nichtdiagonale räumliche Anteile. In (6.20) ist natürlich $A = A(r(R))$, $B = B(r(R))$ gemeint.

6.2 Die Schwarzschildsche Lösung

Wir fragen nun, ob eine Metrik des im vorigen Abschnitt beschriebenen statisch-isotropen Typs eine Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum,

$$R_{\mu\nu}(x) = 0 \, , \tag{6.21}$$

sein kann, und zwar unter der *Randbedingung*, dass die Metrik für große Werte der jeweiligen Radialkoordinate in die Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten übergehe:

$$ds^2 \overset{asympt.}{\longrightarrow} dt^2 - (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \, . \tag{6.22}$$

Dies entspricht der Situation, dass wir das *Gravitationsfeld einer lokalisierten, statischen und kugelsymmetrischen Quellenverteilung in deren Außenraum* betrachten, wie es z. B. für das Schwerefeld der Sonne in guter Näherung zutrifft.

Wählen wir die *Standardform (6.9) der Metrik*, so erfordert (6.21), dass die 4 Ricci-Komponenten (6.15) durch geeignete Wahl der Radialfunktionen $A\,(r)$, $B\,(r)$ zu Null gemacht werden unter der Randbedingung

$$A\,(r) \,\rightarrow\, 1\;, \quad B\,(r) \,\rightarrow\, 1 \qquad (r \,\rightarrow\, \infty)\;. \tag{6.23}$$

Wegen (6.15 e) genügt es, R_{tt}, R_{rr} und $R_{\vartheta\vartheta}$ Null zu setzen. Aus (6.15 b/c) folgt nun

$$\frac{1}{B}\,R_{tt} \,+\, \frac{1}{A}\,R_{rr} \;=\; -\frac{1}{r\,A}\left(\frac{A'}{A} \,+\, \frac{B'}{B}\right)\;, \tag{6.24}$$

d. h. die Lösung muss die Eigenschaft

$$\frac{A'}{A} \,+\, \frac{B'}{B} \;=\; \frac{d}{d\,r}\,\ln\left[A\,(r)\,B\,(r)\right] \;=\; 0$$

oder

$$A\,(r)\,\cdot\,B\,(r) \;=\; \text{const.} \tag{6.25}$$

besitzen. Die Konstante ist wegen der Randbedingung (6.23) gleich 1:

$$A\,(r) \;=\; \frac{1}{B\,(r)}\;. \tag{6.26}$$

Damit verschwindet die Kombination (6.24), so dass wir nur noch das Verschwinden von $R_{\vartheta\vartheta}$ und (etwa) R_{rr} fordern müssen; diese Bedingungen erhalten wegen (6.26) die vereinfachte Form

$$R_{\vartheta\vartheta} \;=\; -1 \,+\, r\,B'\,(r) \,+\, B\,(r) \;=\; 0\;, \tag{6.27 a}$$

$$R_{rr} \;=\; \frac{B''}{2\,B} \,+\, \frac{B'}{r\,B} \;=\; \frac{1}{2\,r\,B}\,\frac{d}{d\,r}\,R_{\vartheta\vartheta}\,(r) \;=\; 0\;. \tag{6.27 b}$$

Die letzte Gl. zeigt, dass wir tatsächlich nur noch das Verschwinden von $R_{\vartheta\vartheta}$ zu fordern brauchen:

$$r\,B'\,(r) \,+\, B\,(r) \;=\; \frac{d}{d\,r}\,[r\,B\,(r)] \;=\; 1 \tag{6.28}$$

Die Lösung ist elementar:

$$B\,(r) \;=\; 1 \,+\, \frac{\text{const.}}{r}\;. \tag{6.29}$$

Um die Integrationskonstante festzulegen, brauchen wir eine über (6.23) hinausgehende, den ersten *subasymptotischen Term festlegende Randbedingung.* Sie folgt aus der Überlegung, dass für große Abstände r von der lokalisierten Quelle das Metrikelement $g_{tt} = B(r)$ dem Newtonschen Limes (2.61) sich annähern muss:

$$
\begin{aligned}
g_{tt}(r) &\equiv B(r) \to 1 + 2\,\Phi(r) \,, \\
\Phi(r) &= -\frac{G\,M}{r} \qquad (r \to \infty) \,.
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Die Konstante M der Dimension Masse (= Energie) ist in der Newtonschen Gravitationstheorie die Ruhemasse der zentralen Quelle (z. B. der Sonne); hier ist ihre genaue Bedeutung noch zu untersuchen. Jedenfalls ist die Konstante in (6.29) gleich $-2\,M\,G$. Die Lösung lautet

$$
B(r) = 1 - \frac{2\,M\,G}{r} \,, \qquad A(r) = \frac{1}{1 - \frac{2\,M\,G}{r}}
\tag{6.31}
$$

und ergibt die Metrik in *Standardform*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
d\,s^2 = \left(1 - \frac{2\,M\,G}{r}\right) d\,t^2 - \left(1 - \frac{2\,M\,G}{r}\right)^{-1} d\,r^2 \\
-r^2\,(d\,\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2) \,.
\end{aligned}
}
\tag{6.32}
$$

Diese Lösung wurde von K. Schwarzschild 1916 angegeben. Wegen (6.26) ist für sie nach (6.11) $g = (r^2 \sin\vartheta)^2$, d. h. das invariante Volumenelement

$$
\sqrt{g}\,d^4\,x = r^2 \sin\vartheta\,d\,r\,d\,\vartheta\,d\,\varphi\,d\,t
\tag{6.33}
$$

hat die gewöhnliche Minkowskische Form in Kugelkoordinaten.

Die äquivalente „isotrope“ Form der Schwarzschild-Metrik ergibt sich aus (6.16 a) mit (6.31): es ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{A(r)}}{r} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\,M\,G\,r}} \\
&= \frac{d}{d\,r} \ln\left[r - M\,G + \sqrt{r^2 - 2\,M\,G\,r}\right]
\end{aligned}
$$

und daher nach (6.16 a) mit der Bezeichnung ρ statt r'' und der Randbedingung $\rho(r) \to r$ für $r \to \infty$:

$$
\rho(r) = \frac{1}{2}\left[r - M\,G + \sqrt{r^2 - 2\,M\,G\,r}\right]
\tag{6.34 a}
$$

oder nach r aufgelöst

$$r(\rho) = \rho \left(1 + \frac{MG}{2\rho}\right)^2 . \tag{6.34 b}$$

Die Funktionen von Gl. (6.16 b) werden damit zu

$$H(\rho) = B(r(\rho)) = \left(\frac{1 - \frac{MG}{2\rho}}{1 + \frac{MG}{2\rho}}\right)^2 , \tag{6.34 c}$$

$$J(\rho) = \left[\frac{r(\rho)}{\rho}\right]^2 = \left(1 + \frac{MG}{2\rho}\right)^4 , \tag{6.34 d}$$

und damit lautet nach Gl. (6.8 c) die *„isotrope“ Form der Schwarzschild-Metrik*

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{MG}{2\rho}}{1 + \frac{MG}{2\rho}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{MG}{2\rho}\right)^4 \left[d\rho^2 + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right] . \tag{6.35}$$

Schließlich können wir harmonische Koordinaten (6.18) benutzen, wobei $R(r)$ aus der Dgl. (6.19) mit (6.31) zu bestimmen ist:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2 \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \frac{dR}{dr}\right] - 2R(r) = 0 . \tag{6.36 a}$$

Die der Randbedingung $R(r) \to r$ für $r \to \infty$ genügende Lösung ist die lineare Funktion

$$R(r) = r - MG = r\left(1 - \frac{MG}{r}\right) . \tag{6.36 b}$$

Die *„harmonische“ Form der Schwarzschild-Metrik* ist dann nach Gl. (6.20)

$$\begin{aligned} ds^2 \;=\; & \left(\frac{1 - \frac{MG}{R}}{1 + \frac{MG}{R}}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{MG}{R}\right)^2 d\vec{X}^2 \\ & - \left(\frac{1 + \frac{MG}{R}}{1 - \frac{MG}{R}}\right) \frac{(MG)^2}{R^4} \left(\vec{X} \cdot d\vec{X}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.37}$$

mit $\vec{X}^2 = (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = R^2$.

Von der Konstanten M wissen wir bisher, dass sie im asymptotischen Bereich, wo der Newtonsche Limes zutrifft, die Bedeutung der Ruhemasse der Quelle annimmt. Um sie allgemeiner zu charakterisieren, betrachten wir Gesamtimpuls und -Energie des Systems von Quelle und Gravitationsfeld gemäß den Gln. (5.77). Um die Größen h_{mn} ablesen zu können, schreiben wir die Standardform (6.32) der Metrik in den asymptotisch cartesischen Koordinaten

$$x^1 = r \sin\vartheta \cos\varphi , \quad x^2 = r \sin\vartheta \sin\varphi , \quad x^3 = r \cos\vartheta$$

an und erhalten

$$d\,s^2 = \left(1 - \frac{2\,M\,G}{r}\right) d\,t^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2\,M\,G}{r}} - 1\right) \frac{1}{r^2} \left(\vec{x} \cdot d\vec{x}\right)^2 - d\vec{x}^{\,2} \,. \tag{6.38}$$

Man sieht, dass g_{m0} und damit h_{m0} verschwinden und dass die Größen

$$\begin{aligned} h_{mn} &= g_{mn} - \eta_{mn} = \left(\frac{1}{1 - \frac{2\,M\,G}{r}} - 1\right) \frac{x_m\,x_n}{r^2} \\ &= 2\,M\,G\,\frac{x^m\,x^n}{r^3} + O\left(\frac{x_m\,x_n}{r^4}\right) \end{aligned} \tag{6.39}$$

zeitunabhängig sind. Damit gibt (5.77 b) $\vec{P} = 0$, d. h. der Gesamtimpuls des Systems verschwindet in diesen Koordinaten, wie für eine statische Situation zu erwarten. Für die Gesamtenergie (5.77 a) bildet man aus (6.39) mit

$$n^m = \frac{x^m}{r} = -n_m \qquad (m = 1,\, 2,\, 3) \tag{6.40}$$

die Größen

$$\frac{\partial\, r}{\partial\, x^k} = -n_k \;, \qquad \frac{\partial}{\partial\, x^k}\, n^m = \frac{\delta^m_{\ k} + n^m\, n_k}{r} \tag{6.41}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, h_{kk}}{\partial\, x^m} - \frac{\partial\, h_{mk}}{\partial\, x^k} &= 2\,M\,G \left(\frac{\partial}{\partial\, x^m}\,\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial\, x^k}\,\frac{n^m\,n^k}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= 2\,M\,G \left\{-\frac{1}{r^2}\,(-n_m) - \left(\frac{1}{r^2}\,n_k\right) n^m\,n^k - \frac{1}{r}\left(2\,\frac{n^m}{r}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \frac{4\,M\,G}{r^2}\,n_m + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \tag{6.42}$$

wegen $n_k\,n^k = -n^k\,n^k = -1$. Einsetzen in (5.77 a) gibt wegen

$$\int\limits_S d\,\Omega\, n^m\, n_m = -4\,\pi \tag{6.43}$$

die *Gesamtenergie des Schwarzschild-Systems*

$$P^\circ = M \;. \tag{6.44}$$

Das Resultat ergibt sich in allen asymptotisch cartesischen Koordinaten, wie sie für (5.77) vorausgesetzt wurden, also auch denen zur „isotropen“ oder zur „harmonischen“ Form der Schwarzschild-Metrik.

Allgemeinere Metriken. Will man Abweichungen von den Einsteinschen Feldgleichungen experimentell untersuchen, so wird man von den allgemeineren statisch-isotropen Metriken des vorigen Abschnitts ausgehen und für große Abstände die Radialfunktionen $B(r)$, $A(r)$ bzw. $J(\rho)$, $H(\rho)$ usw. als Entwicklung nach Potenzen des kleinen Parameters $\frac{MG}{r}$ bzw. $\frac{MG}{\rho}$ bzw. $\frac{MG}{R}$ usw. darstellen (*Robertson-Entwicklung*). Üblicherweise wird in isotropen Koordinaten angesetzt

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - 2\alpha\frac{MG}{\rho} + 2\beta\left(\frac{MG}{\rho}\right)^2 + \dots\right] dt^2 \\ &- \left[1 + 2\gamma\frac{MG}{\rho} + \dots\right]\left(d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right) . \end{aligned} \tag{6.45}$$

Abweichungen von den Voraussagen der Einsteinschen Theorie können dann untersucht werden, indem man etwa experimentell nach Abweichungen von den Schwarzschild-Werten sucht:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \qquad \text{(Einstein/Schwarzschild)} . \tag{6.46}$$

Es ist üblich, die Entwicklung in g_{00} bis zur zweiten, in g_{mm} aber nur bis zur ersten Ordnung in $\frac{MG}{\rho}$ zu treiben, da bei den Anwendungen auf die Himmelsmechanik, d. h. auf langsam bewegte Probekörper, die räumlichen Anteile g_{mm} in die Bewegungsgleichungen stets multipliziert mit einem zusätzlichen Faktor $(v/c)^2 \approx \frac{MG}{\rho}$ eingehen.

Die Entwicklung (6.45) lässt sich mit den Gl. (6.16 a) entsprechenden Definitionen

$$r(\rho) = \rho\left(1 + \gamma\frac{MG}{\rho} + \dots\right) , \tag{6.47 a}$$

$$\rho(r) = r\left(1 - \gamma\frac{MG}{r} + \dots\right) \tag{6.47 b}$$

in die Standardform umschreiben:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1 - 2\alpha\frac{MG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\left(\frac{MG}{r}\right)^2 + \dots\right] dt^2 \\ &- \left[1 + 2\gamma\frac{MG}{r} + \dots\right] dr^2 - r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right] . \end{aligned} \tag{6.48}$$

Ebenso wird die „harmonische“ Form unter Verwendung der Lösung von (6.19) in der Reihendarstellung

$$R(r) = r\left[1 + \left(\frac{\alpha - 3\gamma}{2}\right)\frac{MG}{r} + \dots\right] \tag{6.49}$$

erhalten; sie lautet

$$\begin{aligned} d\,s^2 \;&=\; \left[1 \,-\, 2\,\alpha\,\frac{M\,G}{R} \,+\, (2\,\beta \,+\, \alpha\,\gamma \,-\, \alpha^2)\left(\frac{M\,G}{R}\right)^2 \,+\, ...\right] d\,t^2 \\ &-\; \left[1 + (3\,\gamma - \alpha)\frac{M\,G}{R} + ...\right] d\vec{X}^2 - \left[(\alpha - \gamma)\,\frac{M\,G}{R} + ...\right]\left(\frac{\vec{X}\cdot d\vec{X}}{R}\right)^2 . \end{aligned} \tag{6.50}$$

Auch an (6.48) und (6.50) sieht man wieder, dass die Einsteinsche Theorie dem Parametersatz (6.46) entspricht.

Hinsichtlich des Parameters α muss man sich klarmachen, dass beim üblichen himmelsmechanischen Verfahren zur empirischen Bestimmung der Massen der Himmelskörper – nämlich aus ihrer Gravitationswirkung auf die Bahnen anderer Körper – eine Abweichung von α von 1 gar nicht untersucht werden kann, weil dieses Verfahren *per Definition* $\alpha \,=\, 1$ setzt. Dieses Verfahren läuft immer darauf hinaus, die Zentripetalbeschleunigung $-\overline{g}_r$ zu messen, welche das Schwerefeld der betrachteten Masse einem fernen ($r \,\gg\, M\,G$) und langsam bewegten Probekörper ($v \,\ll\, 1$) erteilt, und diese ist nach (2.54 / 2.57) und (6.13 b),

$$-\overline{g}_r \;\approx\; -\Gamma^r{}_{tt} \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{B'\,(r)}{A\,(r)} \tag{6.51 a}$$

also für die Robertson-Entwicklung (6.48)

$$-\overline{g}_r \;\approx\; -(\alpha\,M)\,\frac{G}{r^2} \qquad \left(\frac{M\,G}{r} \,\ll\, 1\;, \quad v \,\ll\, 1\right)\;. \tag{6.51 b}$$

Die empirische Masse M wird bestimmt als Koeffizient von $-G\,/\,r^2$ in $-\overline{g}_r$, d. h. sie ist per Definition gleich der von uns mit $\alpha\,M$ bezeichneten Größe. Nach Abweichungen von $\alpha \;=\; 1$ zu suchen wäre nur möglich, wenn es eine unabhängige, nichtgravitative Bestimmungsmethode für M gäbe.

Wir schreiben daher künftig für die *Radialfunktionen der Robertson-Entwicklung*

$$B\,(r) \;=\; 1 \,-\, \frac{2\,M\,G}{r} \,+\, 2\,(\beta \,-\, \gamma)\,\left(\frac{M\,G}{r}\right)^2 \,+\, ...\;, \tag{6.52 a}$$

$$A\,(r) \;=\; 1 \,+\, 2\,\gamma\,\frac{M\,G}{r} \,+\, ... \tag{6.52 b}$$

Die in Abschnitt 2.4 diskutierten Messungen der gravitativen Rotverschiebung messen nur die Abweichung von $g_{tt} \;=\; B\,(r)$ von 1 in niedrigster Näherung, d. h. den Term

$-\frac{2MG}{r}$ in (6.52 a). Da dieser Term allen statisch-isotropen Metriken gemeinsam ist, testen diese Messungen somit nur das Grundpostulat der Beschreibung des Gravitationsfeldes durch Verzerrung der Minkowski-Metrik, d. h. letztlich das Äquivalenzprinzip, nicht aber die spezifische Einsteinsche Form der Feldgleichungen für diese Metrik. Um diese Form zu testen, sind Experimente nötig, die auf Abweichungen $\beta \neq 1$, $\gamma \neq 1$ sensitiv sind.

6.3 Bewegungsgleichungen für Teilchen und Lichtquanten

Wir betrachten die Bewegung eines frei fallenden massiven Teilchens (Ruhemasse $m \neq 0$) oder Photons ($m = 0$) im statisch-isotropen Gravitationsfeld einer lokalisierten Quelle („Zentralmasse"), beschrieben durch die Metrik (6.9) in Standardform. Die Bewegungsgleichungen sind allgemein

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d p^2} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x(p)) \frac{d x^\mu}{d p} \frac{d x^\nu}{d p} = 0 \, . \tag{6.53}$$

Der invariante Bahnparameter p kann für ein massives Teilchen als τ gewählt werden, soll aber zunächst allgemein belassen werden, um auch Photonen, längs deren Bahn überall $d\tau = 0$ ist, beschreiben zu können.

In Standardkoordinaten können wir den affinen Zusammenhang aus (6.13) entnehmen und erhalten

$$\frac{d^2 t}{d p^2} + \frac{B'(r(p))}{B(r(p))} \frac{d t}{d p} \frac{d r}{d p} = 0 \tag{6.54}$$

als Differentialgleichung für die Berechnung der Beziehung zwischen asymptotisch Minkowskischer „Koordinatenzeit" t und invariantem Bahnparameter, sowie

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d p^2} &+ \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{d t}{d p}\right)^2 + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{d r}{d p}\right)^2 \\ &- \frac{r}{A(r)} \left[\left(\frac{d\vartheta}{d p}\right)^2 + \sin^2\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d p}\right)^2\right] = 0 \, , \end{aligned} \tag{6.55 a}$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{d p^2} + \frac{2}{r} \frac{d r}{d p} \frac{d\vartheta}{d p} - \sin\vartheta \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d p}\right)^2 = 0 \, , \tag{6.55 b}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d p^2} + \frac{2}{r} \frac{d r}{d p} \frac{d\varphi}{d p} + 2 \cot\vartheta \frac{d\vartheta}{d p} \frac{d\varphi}{d p} = 0 \, , \tag{6.55 c}$$

als Differentialgleichungen der räumlichen Bahnbewegung.

Wie in der Newtonschen Mechanik vereinfachen wir diese Differentialgleichungen durch das Auffinden von Konstanten der Bewegung. Wir könnten dafür die in Abschnitt 4.7 im Rahmen der Theorie symmetrischer Räume bereits formal hergeleiteten Erhaltungssätze, insbesondere die Gln. (4.124) und (4.128), verwenden, aber im vorliegenden Falle führen einfache physikalische Überlegungen und Analogien zum klassischen Keplerproblem schneller zum Ziel. Die Isotropie, d. h. Kugelsymmetrie des Feldes legt es nahe, nach Lösungen zu suchen, bei denen die räumliche Bahn in einer Ebene durch den Ursprung $r = 0$ verläuft; dafür kann o. B. d. A. die Äquatorialebene

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const.} \tag{6.56}$$

gewählt werden. (Dies entspricht einer Wahl der Polarachse $\vartheta = 0$ unseres Koordinatensystems, welche die Komponenten J^1 und J^2 des Quasi-Drehimpulses, Gln. (4.124 a/b), zu Null macht). Damit ist Gl. (6.55 b) erfüllt, und wir brauchen nur mit 2 Bahnvariablen $r\,(p)$, $\varphi\,(p)$ (und natürlich $t\,(p)$) weiterzurechnen. Aus (6.55 c) und (6.54) folgen nun durch Division mit $d\varphi\,/\,dp$ bzw. mit $dt\,/\,dp$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dp}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)}{\frac{d\varphi}{dp}} + \frac{2\,r\,(p)\,\frac{dr}{dp}}{r^2\,(p)} &= \frac{d}{dp}\left(\ln\frac{d\varphi}{dp}\right) + \\ + \frac{d}{dp}\,(\ln r^2\,(p)) &= \frac{d}{dp}\,\ln\left[r^2\,(p)\,\frac{d\varphi}{dp}\right] = 0 \end{aligned} \tag{6.57}$$

bzw.

$$\frac{d}{dp}\,\ln\left[B\,(r\,(p))\cdot\frac{dt}{dp}\right] = 0\;. \tag{6.58}$$

Dies ergibt sofort zwei Konstanten der Bewegung. Wir wählen den Parameter p von nun an so, dass der konstante Wert von $B\,(dt\,/\,dp)$ gleich 1 wird:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B\,(\,r(p))} \tag{6.59 a}$$

$$t - t_0 = \int\limits_{p_0}^{p} dp'\,\frac{1}{B\,(r\,(p'))}\;. \tag{6.59 b}$$

Da $B\,(r)$ wenig von 1 abweicht, wird p dann nahezu gleich der Koordinatenzeit t. Die andere Konstante folgt aus (6.57),

$$\boxed{r^2\,\frac{d\varphi}{dp} = J = \text{const.}\;;} \tag{6.60}$$

sie hat die Dimension – und wegen (6.59) in guter Näherung auch die Bedeutung – der (zweifachen) *Flächengeschwindigkeit* des Positionsvektors bzw. beim massiven Teilchen des Drehimpulses pro Teilchenmasse. Natürlich ist sie identisch mit der Quasi-Drehimpulskomponente J^3 von Gl. (4.124c). Die verbleibende Bewegungsgleichung (6.55 a) wird mit (6.56 / 59 a / 60) zu

$$\frac{d^2 r}{d p^2} + \frac{A'(r)}{2\,A(r)} \left(\frac{d r}{d p}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3\,A(r)} + \frac{B'(r)}{2\,A(r)\,B^2(r)} = 0\ . \tag{6.61}$$

Die letzte Konstante der Bewegung wird evident, wenn man diese Gl. mit $2\,A(r)\,\frac{d r}{d p}$ multipliziert:

$$\begin{aligned} &A(r)\left[2\left(\frac{d r}{d p}\right)\frac{d^2 r}{d p^2}\right] + A'(r)\left(\frac{d r}{d p}\right)^3 + J^2\left(-\frac{2}{r^3}\,\frac{d r}{d p}\right) \\ &-\left(-\frac{1}{B^2}\,\frac{d B}{d p}\right) = \frac{d}{d p}\left\{A(r(p))\left(\frac{d r}{d p}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)}\right\} = 0\ ; \end{aligned} \tag{6.62}$$

also

$$\boxed{A(r)\left(\frac{d r}{d p}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E = \text{const.}}\ . \tag{6.63}$$

Die Vorzeichenwahl durch die Konstante wird motiviert durch die aus (6.60) und (6.63) zusammen mit der Normierung (6.59) des Parameters p sich ergebende Form des Linien- bzw. Eigenzeitelements, $d\,s$ bzw. $d\,\tau$, längs der Bahn: nach (6.9) ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tau}{d p}\right)^2 &= B(r)\left(\frac{d t}{d p}\right)^2 - A(r)\left(\frac{d r}{d p}\right)^2 - r^2\left[\underbrace{\left(\frac{d\vartheta}{d p}\right)^2}_{0} + \underbrace{\sin^2\vartheta}_{1}\left(\frac{d\varphi}{d p}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{B} - \left(-\frac{J^2}{r^2} + \frac{1}{B} - E\right) - \frac{1}{r^2}\,J^2 = E\ , \end{aligned}$$

d. h.

$$d\tau^2 = E \cdot d p^2\ . \tag{6.64}$$

Da das Eigenzeitintervall längs der Bahn für massive Teilchen zeitartig, für Photonen lichtartig sein muss, ist

$$\boxed{\begin{aligned} &E > 0 \text{ für massive Teilchen,} \\ &E = 0 \text{ für Lichtquanten.} \end{aligned}} \tag{6.65}$$

Die Beziehung (6.64) zeigt im übrigen, dass bei der Normierung (6.59) des Bahnparameters p die Bewegungsgleichungen Proportionalität von $d\tau$ und dp beinhalten.

Da $A(r)$ positiv ist, erfordert der Erhaltungssatz (6.63) $\frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} + E \leq 0$, d. h. für die *vom Teilchen bei gegebenen Bewegungskonstanten* J, E *erreichten Radien* r gilt

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq \frac{1}{B(r)} . \tag{6.66}$$

Der Bahnparameter p kann schließlich entweder mittels (6.64) zu Gunsten von τ (natürlich nur für massive Teilchen) oder mittels (6.59 a) zu Gunsten von t eliminiert werden; letzteres ist auch für Photonen möglich und ergibt – im Rahmen der Wahl (6.56) der Bahnebene – die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{E} \cdot B(r(t)) , \tag{6.67 a}$$

$$[r(t)]^2 \frac{d\varphi}{dt} = J \cdot B(r(t)) , \tag{6.67 b}$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E . \tag{6.67 c}$$

In den Anwendungen ist man oftmals weniger an der zeitlichen Durchlaufung $r(t)$, $\varphi(t)$ der Bahn interessiert als an der *geometrischen Bahnform*, $r = r(\varphi)$. Diese bzw. ihre Umkehrfunktion $\varphi(r)$ kann durch Elimination von dp aus (6.60) und (6.63) erhalten werden:

$$A(r) \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{J}{r^2}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E ,$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{\sqrt{A(r)}} \sqrt{\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}} . \tag{6.68 a}$$

Die Lösung ergibt sich durch Trennung der Variablen als

$$\boxed{\varphi(r) - \varphi_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr' \sqrt{A(r')}}{r'^2 \sqrt{\frac{1}{J^2 B(r')} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r'^2}}} .} \tag{6.68 b}$$

Als Spezialfälle der Bewegungsgleichungen (6.67) besprechen wir:

(a) Newtonscher Limes, d. h. langsam ($v \ll 1$) bewegter Körper im schwachen Gravitationsfeld: hier wird

$$A \approx 1 \qquad B \approx 1 + 2\,\Phi\,(r) \tag{6.69}$$

mit $\Phi\,(r) =$ Newtonsches Gravitationspotenzial, und wegen der nichtrelativistischen Geschwindigkeit

$$\left|\frac{d\,r}{d\,t}\right|^2 \ll 1\ , \qquad \left(\frac{J}{r}\right)^2 \ll 1\ . \tag{6.70}$$

In niedrigster nichtverschwindender Ordnung in diesen kleinen Größen hat man dann

$$r^2\,\frac{d\,\varphi}{d\,t} \approx J\ , \tag{6.71 a}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + \frac{J^2}{2\,r^2} + \Phi\,(r) \approx U = \frac{1\,-\,E}{2}\ . \tag{6.71 b}$$

Dies sind die bekannten Newtonschen Gleichungen für die Bewegung im kugelsymmetrischen Gravitationspotenzial mit J als Drehimpuls pro Teilchenmasse und $U = \frac{1-E}{2}$ als Energie (ohne Ruheenergie) pro Teilchenmasse.

(b) Teilchen auf der Kreisbahn um das Gravitationszentrum bei $r = 0$. Hier ist einerseits $d\,r\,/\,d\,t = 0$, d. h. (6.67 c) gibt

$$\frac{J^2}{R^2} - \frac{1}{B\,(R)} + E = 0\ , \tag{6.72}$$

wo R der konstante Bahnradius ist. Andererseits muss die Bahn, damit sie stabil ist, in einem Minimum der als effektives Radialpotenzial fungierenden Größe $\frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B\,(r)}$ verlaufen, d. h. die Ableitung dieser Größe muss bei $r = R$ verschwinden:

$$-\frac{2\,J^2}{R^3} + \frac{B'\,(R)}{B^2\,(R)} = 0\ . \tag{6.73}$$

Mittels dieser Gleichungen lassen sich die Bewegungskonstanten J, E bei gegebenem Radius R berechnen:

$$J^2 = \frac{1}{2}\,R^3\,\frac{B'\,(R)}{B^2\,(R)}\ , \tag{6.74 a}$$

$$E = \frac{1}{B\,(r)}\left[1 - \frac{R}{2}\,\frac{B'(R)}{B\,(R)}\right]\ . \tag{6.74 b}$$

Mit (6.74 a) folgt aus (6.67 b) die Winkelgeschwindigkeit bzw. Umlaufs-Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{B'(R)}{2R}}\,, \tag{6.75}$$

während die Eigenzeit sich aus (6.67 a) mit (6.74 b) als

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{B(R) - \frac{1}{2}RB'(R)} \tag{6.76}$$

ergibt. Benutzt man für $B(R)$ die Robertson-Entwicklung (6.52 a), so hat man

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - 3\frac{MG}{R} + \ldots\,, \tag{6.77 a}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{MG}{R^3}}\left[1 - (\beta - \gamma)\frac{MG}{R} + \ldots\right]\,. \tag{6.77 b}$$

6.4 Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne

Einer der klassischen Tests der Einsteinschen Gravitationstheorie betrifft die Krümmung von Lichtstrahlen im Schwerefeld der Sonne. Das Gravitationsfeld der Sonne ist in sehr guter Näherung statisch und isotrop; wir beschreiben es durch die allgemeine Metrik (6.9) bzw. spezieller durch die Robertson-Entwicklung (6.52). Wir betrachten die Bahn eines Lichtquants, beschrieben durch die Bahngleichung (6.68 b) mit $E = 0$, das aus sehr großer Entfernung, d. h. einem metrisch flachen Gebiet außerhalb des Sonnensystems ($A(\infty) = B(\infty) = 1$) sich der Sonne nähert, an ihr vorbeifliegt und auf der Erde, d. h. wiederum in praktisch unendlicher Entfernung vom Sonnenzentrum und im metrisch flachen Gebiet (die Effekte des Gravitationsfeldes der Erde sind gegen die der Sonne sehr klein), photographisch nachgewiesen wird.

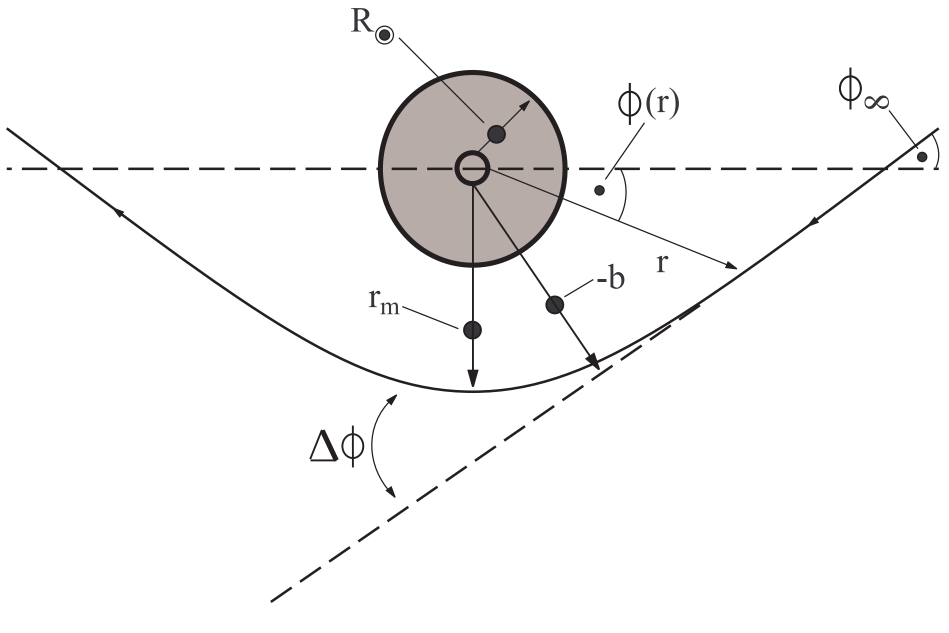
Die Behandlung des Lichts als (masseloses) Teilchen, das sich nach Gl. (6.53) bewegt, scheint zunächst die Quantentheorie vorauszusetzen, deren Vereinbarkeit mit der Gravitationstheorie wir nicht untersucht haben. *Tatsächlich wird die Lichtquantenhypothese jedoch nicht benötigt*; es handelt sich nur um eine saloppe Sprechweise für geometrisch-optische Sachverhalte. Die Wellenlänge sichtbaren Lichts (Größenordnung 10^{-7} m) ist, verglichen mit der Längenskala des Sonnenschwerefeldes (Größenordnung 10^{8} m), so außerordentlich klein, dass man an jedem Punkt dieses Feldes ein lokal-inertiales Koordinatensystem angeben kann, das ungeachtet seines „infinitesimalen" Gültigkeitsbereiches noch immer für eine enorme Zahl von Lichtwellenlängen (etwa 10^{10}) gültig ist. In diesesm System breitet sich nach dem Äquivalenzprinzip das Licht wie im gravitationsfreien leeren Raum aus, d. h. in Form ebener, paralleler Wellenfronten, die sich mit $|\vec{v}\,| = 1$ bewegen und gerade „Lichtstrahlen" als Normalen auf den Wellenfronten definieren. Wegen der extrem kleinen Wellenlänge sind Beugungseffekte am Gravitationsfeld vernachlässigbar, d. h. das geometrisch-optische Bild der Lichtstrahlen bleibt auch global anwendbar, wenn man wie beim Durchgang durch optische Linsen eine Krümmung des Strahlenganges im Großen zulässt. Die Feststellung, dass ein Element einer Lichtwellenfront sich lokal auf geradem „Strahl" mit $|\vec{v}\,| = 1$ bewegt, ist nach Umschreibung auf ein nicht-inertiales Koordinatensystem identisch mit Gl. (6.53)

In sehr großer Entfernung von der Sonne erwarten wir nun zunächst Bewegung auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit $v = 1$, d. h. eine Bahngleichung

$$r \sin(\varphi - \varphi_\infty) = b = \text{const.} \tag{6.78 a}$$

mit φ_∞ als Einfallsrichtung und b als „Stoßparameter", d. h. senkrechtem Abstand der geraden Bahnasymptote vom Sonnenzentrum $r = 0$ (siehe Skizze). Für die zeitliche Durchlaufung gilt dort

$$\frac{d}{dt}\left[r \cos(\varphi - \varphi_\infty)\right] \approx v = 1 \,. \tag{6.78 b}$$



Da im Asymptotischen $\varphi - \varphi_\infty$ klein ist, heißt dies näherungsweise

$$r(\varphi - \varphi_\infty) \approx b\,, \quad \frac{dr}{dt} \approx v = 1\,, \quad r\frac{d\varphi}{dt} \approx -\frac{dr}{dt}(\varphi - \varphi_\infty)\,. \tag{6.78 c}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (6.67 b/c) für $r \to \infty$ ergibt die Bewegungskonstanten J, E, ausgedrückt durch die asymptotischen Bahndaten b und v:

$$J \,=\, -b\,v\,(=\,-b)\;, \tag{6.79 a}$$

$$E \,=\, 1\,-\,v^2\,(=\,0)\;. \tag{6.79 b}$$

(Das letztere Resultat ist schon aus (6.65) bekannt).

Die Konstante J kann auch durch den sonnennächsten Abstand r_m der Bahn ausgedrückt werden (siehe Skizze!); dort verschwindet nämlich $d\,r\,/\,d\,\varphi$, und daher wird nach (6.68 a) mit (6.79 b)

$$J \,=\, r_m \left[\frac{1}{B\,(r_m)}\,-\,1\,+\,v^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6.80 a}$$

$$=\, \frac{r_m}{\sqrt{B\,(r_m)}} \qquad (v\,=\,1)\;. \tag{6.80 b}$$

Damit und mit $E\,=\,0$ wird die Bahngleichung (6.68 b)

$$\boxed{\varphi\,(r) \,=\, \varphi_\infty \,+\, \int\limits_r^\infty d\,r'\,\frac{\sqrt{A\,(r')}}{r'\sqrt{\left(\frac{r'}{r_m}\right)^2\frac{B\,(r_m)}{B\,(r')}-1}}}\;. \tag{6.81}$$

Die Gesamtänderung von φ von der Anfangsposition bei $r \to \infty$ über den Punkt größter Annäherung an die Sonne, $r\,=\,r_m$, bis zur Endposition wieder bei $r \to \infty$ ist das Doppelte der Änderung von ∞ bis r_m, d. h. also $2\,|\,\varphi\,(r_m) - \varphi_\infty|$. Wäre die Bahn eine Gerade, so wäre diese Änderung gleich π; die *Ablenkung* des Lichtstrahls von einer Geraden ist somit

$$\boxed{\Delta\,\varphi \,=\, 2\,|\,\varphi\,(r_m)\,-\,\varphi_\infty|\,-\,\pi}\;. \tag{6.82}$$

Für die Schwarzschild-Lösung (6.31) lässt sich $\varphi\,(r_m)\,-\,\varphi_\infty$ nach (6.81) auf elliptische Integrale zurückführen. Es ist jedoch instruktiver, schon im Integranden die Robertson-Entwicklung (6.52) (bis zur ersten Ordnung in $M\,G\,/\,r'$) zu benutzen:

$$A\,(r') \,=\, 1\,+\,2\,\gamma\,\frac{M\,G}{r'}\,+\,...\,, \quad B\,(r') \,=\, 1\,-\,2\,\frac{M\,G}{r'}\,+\,...\,, \tag{6.83}$$

(was zur praktischen Auswertung der elliptischen Integrale ohnehin unvermeidlich wäre). Dann ist im Nenner von (6.81)

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{r_m}\right)^2 \frac{B\,(r_m)}{B\,(r)} - 1 \;&=\; \left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^2 - 1\right] \frac{1 \,-\, 2\,M\,G\,\left[\frac{(r^2\,/\,r_m) - (r_m^2\,/\,r)}{r^2 - r_m^2}\right]}{1 \,-\, 2\,\frac{M\,G}{r}} \\ &=\; \left[\left(\frac{r}{r_m}\right)^2 - 1\right] \left[1 - 2\,M\,G\,\frac{r}{r_m\,(r\,+\,r_m)} + ...\right] \;, \qquad (6.84)\end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass $M\,G\,/\,r_m \,\ll\, 1$ bleibt; für $M\,G\,/\,r$ ist dies dann von selbst erfüllt. Damit liefert nun (6.81)

$$\varphi\,(r) \,-\, \varphi_\infty \,=\, \int\limits_r^\infty \frac{d\,r'}{r'\,\sqrt{\left(\frac{r'}{r_m}\right)^2 \,-\, 1}} \left\{1 \,+\, \gamma\,\frac{M\,G}{r'} \,+\, \frac{M\,G\,r'}{r_m\,(r' \,+\, r_m)} \,+\, ...\right\} \,. \qquad (6.85)$$

Die hier auftretenden Integrale lassen sich elementar auswerten. Man erhält

$$\begin{aligned}\varphi\,(r) \,-\, \varphi_\infty \,=\, \arcsin\left(\frac{r_m}{r}\right) \\ +\,\frac{M\,G}{r_m}\left[1 \,-\, \sqrt{\frac{r \,-\, r_m}{r \,+\, r_m}} \,+\, \gamma\left(1 \,-\, \sqrt{1 \,-\, \left(\frac{r_m}{r}\right)^2}\right) \,+\, ...\right]\end{aligned} \qquad (6.86)$$

und damit für die Winkelablenkung (6.82) *in erster Ordnung in* $M\,G\,/\,r_m$

$$\boxed{\Delta\,\varphi \,=\, \tfrac{4\,M\,G}{r_m}\,\left(\tfrac{1\,+\,\gamma}{2}\right)} \,. \qquad (6.87)$$

In erster Ordnung ist dieser Effekt also nur auf den Robertson-Koeffizienten γ sensitiv.

Für die Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerefeld der Sonne ist $M \,=\, M_\odot \,=\, 1.97 \,\cdot\, 10^{30}$ kg, also

$$2\,M\,G \,=\, 2\,M_\odot\,G \,=\, 2.95\,\text{km} \;. \qquad (6.88)$$

(Dass dieser sog. *Schwarzschild-Radius* tief im Inneren der Sonne liegt und es auch bei wesentlich kompakteren kosmischen Objekten noch tut, zeigt im übrigen, dass die Singularität der Metrik (6.32) in g_{rr} bei $r \,=\, 2\,M\,G$ keine Bedeutung hat, denn sie liegt weit innerhalb der Quelle, wo die quellenfreien Feldgleichungen nicht mehr gelten). Der kleinste sinnvolle Wert für r_m ist offenbar der Sonnenradius

$$R_\odot \,=\, 6.95 \,\cdot\, 10^5\,\text{km} \qquad (6.89)$$

für „streifenden“ Vorbeigang des Lichtstrahls. Für diese Situation gibt (6.87)

$$\Delta\varphi = \left(\frac{R_\odot}{r_m}\right)\Theta_\odot \tag{6.90 a}$$

mit

$$\Theta_\odot = \frac{4\,M_\odot\,G}{R_\odot}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = 1.75'' \cdot \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) . \tag{6.90 b}$$

Die Einsteinsche Theorie gibt $\gamma = 1$, $\frac{1+\gamma}{2} = 1$, d. h. eine positive oder (siehe Skizze) zur Sonne hinweisende Ablenkung des Lichtstrahls.

Bei den klassischen astronomischen $\Delta\varphi$-Messungen seit 1919 wurden die scheinbaren Positionen von Sternen, die während einer *Sonnenfinsternis* nahe am Sonnenrand standen (so dass ihr Licht nahe an der Sonne vorbeigelaufen sein musste) verglichen mit ihren Positionen 6 Monate (d. h. eine halbe Erdbahn) früher, wo ihr Licht auf dem Wege zu uns nicht an der Sonne vorbeimusste. Die Beobachtungen (als neueres Beispiel seien etwa solche von 1952 im Sudan zitiert, die $\Theta_\odot = (1.70 \pm 0.10)''$ ergaben) bestätigten generell die Vorhersage (6.90 b), blieben aber wegen der enormen Schwierigkeiten der Beobachtung als Messungen von γ betrachtet relativ ungenau (Fehler etwa 10 %).

In neuester Zeit ist mit den Mitteln der Radioastronomie höhere Genauigkeit möglich geworden; man misst hier mit interferometrischen Anordnungen großer Basislänge die Ablenkung der *Radiowellen*, die von weit entfernten sog. quasistellaren Radioquellen zu uns gelangen, durch das Schwerefeld der Sonne. Solche Messungen haben (6.90 b) mit $\gamma = 1$ inzwischen mit etwa 1 % Genauigkeit bestätigt.

6.5 Perihelpräzession der Planeten

Wir betrachten nun als „Testkörper“ einen Planeten auf seiner Bahn um die Sonne, d. h. eine im Endlichen bleibende Geodäte. Ausgezeichnete Punkte der Bahn sind diejenigen mit minimalen (Perihelia) bzw. maximalen Werten von r (Aphelia), r_- bzw. r_+. Da dort $r(\varphi)$ extremal wird, gilt $(dr\,/\,d\varphi)_{r=r_\pm} = 0$, nach (6.68 a) also

$$\frac{1}{r_\pm^2} + \frac{E}{J^2} - \frac{1}{J^2\,B\,(r_\pm)} = 0\ . \tag{6.91}$$

Mittels dieser beiden Gln. kann man die Bewegungskonstanten E, J durch r_+, r_- ausdrücken:

$$J^2 = \frac{\frac{1}{B\,(r_+)} - \frac{1}{B\,(r_-)}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}}\ , \tag{6.92 a}$$

$$E = \frac{\frac{r_+^2}{B(r_+)} - \frac{r_-^2}{B(r_-)}}{r_+^2 - r_-^2} . \qquad (6.92\text{ b})$$

(Diese Formeln gehen im Grenzfall $r_- = r_+ = R$ in (6.74) über.) Während r von r_- aus anwächst, überstreicht der Positionsvektor nach (6.68 b) den Winkel

$$\varphi(r) = \varphi(r_-) + \int_{r_-}^{r} d r' \, \frac{\sqrt{A(r')}}{r'^2 \sqrt{\frac{1}{J^2 B(r')} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r'^2}}}$$

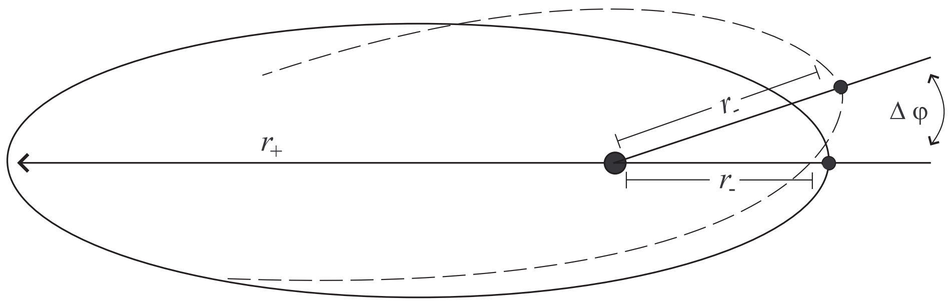
oder nach Einsetzen von (6.92 a/b)

$$\varphi(r) - \varphi(r_-) = \int_{r_-}^{r} \frac{d r'}{r'^2} \, \frac{\sqrt{A(r')}}{\sqrt{\frac{r_-^2 \left[B^{-1}(r') - B^{-1}(r_-)\right] - r_+^2 \left[B^{-1}(r') - B^{-1}(r_+)\right]}{r_+^2 \, r_-^2 \left[B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)\right]} - \frac{1}{r'^2}}} . \qquad (6.93)$$

Die φ-Änderung von r_+ nach r_- ist dieselbe wie diejenige von r_- nach r_+, d. h. die gesamte Winkeländerung von einem Perihel (r_-) bis zum nächsten ist $2\,|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)|$. Nach der Newtonschen Theorie wäre die Bahn des Planeten, wenn man von Störungen durch die anderen Planeten absieht, die bekannte Keplerellipse, also geschlossen; jene Änderung wäre dann exakt 2π und die Lage des Perihels wäre zeitlich konstant. Jede Abweichung von den Voraussetzungen des Newtonschen Zweikörperproblems äußert sich in einer Abweichung

$$\Delta\varphi = 2\,|\varphi(r_+) - \varphi(r_-)| - 2\pi , \qquad (6.94)$$

d. h. in einer Präzession der Bahnachse und damit des Perihels (siehe Skizze!).



Wir berechnen $\Delta\varphi$ aus (6.93) mittels der Robertson-Entwicklung

$$A(r) = 1 + 2\gamma\left(\frac{MG}{r}\right) + \dots , \tag{6.95 a}$$

$$B^{-1}(r) = 1 + 2\left(\frac{MG}{r}\right) + 2(2 - \beta + \gamma)\left(\frac{MG}{r}\right)^2 + \dots \tag{6.95 b}$$

Wir müssen die Entwicklung von B^{-1}, wenn wir $\varphi(r)$ bzw. $\Delta\varphi$ in erster Ordnung in den kleinen Größen $MG/r_\pm$ berechnen wollen, um eine Ordnung weiter treiben als die von A, weil die führende 1 von B^{-1} sich in (6.93) völlig heraushebt.

Mit (6.95 b) wird der Radikand der Nennerwurzel von (6.93) ein quadratisches Polynom in der Variablen $\frac{1}{r'}$; da er außerdem bei $r' = r_\pm$ verschwindet, muss er die Form

$$\begin{aligned}\frac{r_-^2\,[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_-)] - r_+^2\,[B^{-1}(r) - B^{-1}(r_+)]}{(r_+ r_-)^2\,[B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]} - \frac{1}{r^2}& \\ = C\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+}\right)&\end{aligned} \tag{6.96 a}$$

haben. Die Konstante C folgt durch Betrachtung des Grenzfalls $r \to \infty$, $B^{-1}(r) \to 1$ zu

$$C = \frac{r_+^2\,[1 - B^{-1}(r_+)] - r_-^2\,[1 - B^{-1}(r_-)]}{r_+ r_-\,[B^{-1}(r_+) - B^{-1}(r_-)]}$$

oder nach Herauskürzen eines Faktors $2MG(r_- - r_+)$:

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma)\,MG\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) + O\left(\left(\frac{MG}{r}\right)^2\right) . \tag{6.96 b}$$

Damit ergibt nun (6.93) in der Ordnung $\frac{MG}{r}$:

$$\begin{aligned}\varphi(r) - \varphi(r_-) \approx \left[1 + \left(\frac{2 - \beta + \gamma}{2}\right) MG\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right] \times& \\ \times \int_{r_-}^{r} \frac{dr'}{r'^2}\,\frac{1 + \gamma\,\frac{MG}{r'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r'}\right)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_+}\right)}} .&\end{aligned} \tag{6.97}$$

Man behandelt das Integral durch Substitution einer neuen Variablen ψ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right)\sin\psi\ , \\
\frac{d\,r'}{r'^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right)\cos\psi'\,d\,\psi'\ , \\
\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r'}\right)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r_+}\right) &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right)\right]^2 \cos^2\psi' \\
\psi(r_-) = -\frac{\pi}{2}, &\qquad \psi(r_+) = +\frac{\pi}{2}
\end{aligned}\right\} \tag{6.98}$$

Damit wird das Integral in der 2. Zeile von (6.97) sehr einfach, und man erhält

$$\begin{aligned}
\varphi\,(r) - \varphi\,(r_-) = {} & \left[1 + \left(\frac{2 - \beta + 2\,\gamma}{2}\right) M\,G\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right]\left[\frac{\pi}{2} + \psi\,(r)\right] \\
& + \frac{1}{2}\,\gamma\,M\,G\left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+}\right)\cos\psi\,(r)\ .
\end{aligned} \tag{6.99}$$

Insbesondere erhält man für $r = r_+$ (Aphel), $\psi\,(r_+) = \pi\,/\,2$

$$\varphi\,(r_+) - \varphi\,(r_-) = \pi\left[1 + \left(\frac{2 - \beta + 2\,\gamma}{2}\right) M\,G\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\right]\ .$$

Man führt zweckmäßig eine mittlere Bahndimension L ein gemäß

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right)\ . \tag{6.100 a}$$

Ihr Zusammenhang mit den üblicherweise benutzten Bahnelementen von Keplerellipsen – der großen Halbachse a und der Exzentrizität e – ist gegeben durch

$$r_\pm = (1 \pm \mathrm{e})\,a\ , \tag{6.100 b}$$

$$L = (1 - \mathrm{e}^2)\,a\ . \tag{6.100 c}$$

Damit wird die *Perihelpräzession pro Umlauf* (6.94) zu

$$\Delta\,\varphi = 6\,\pi\,\frac{M\,G}{L}\left(\frac{2 - \beta + 2\,\gamma}{3}\right)\ . \tag{6.101}$$

Die Einsteinsche Theorie gibt $\beta = \gamma = 1$ und somit

$$\boxed{\Delta\,\varphi \;=\; 6\,\pi\,\frac{M\,G}{L}}\;. \tag{6.102}$$

Die Präzession ist positiv, d. h. sie erfolgt mit demselben Drehsinn wie der Bahnumlauf.

Die Interpretation des Resultats scheint zunächst insofern ein Problem aufzuwerfen, als $\Delta\,\varphi$ hier nicht wie beim „Streuexperiment" der Lichtablenkung durch den Vergleich von Bahnstücken definiert wird, die im sonnenfernen, metrisch flachen Raum verlaufen, und daher nicht klar ist, ob das berechnete $\Delta\,\varphi$ direkt nach den Regeln der geometrischen Optik mit der Verschiebung von Lichtpunkten auf der photographischen Platte des Astronomen in Verbindung gebracht werden kann. Der Planet bleibt ständig im metrisch verzerrten Raum nahe der Sonne, und das von ihm zu uns gelangende Licht erfährt Ablenkungen, die selbst von der Größenordnung $M\,G\,/\,L$ sind und die naiv interpretierte terrestrische Messung von (6.102) völlig verfälschen können. Glücklicherweise ist jedoch die Präzession ein *kumulativer Effekt*; wartet man eine große Zahl N von Umläufen ab, so kann man die Fehler $O\,(M\,G\,/\,L)$ gegenüber dem Messwert $\propto\; N\,\frac{M\,G}{L}$ vernachlässigen. Insbesondere besagt (6.102), dass nach $N \;=\; L\,/\,3\,M\,G$ Umläufen ($\gg\; 1$) das Perihel wieder bei derselben Azimutallage ankommt, eine von der Wahl der Koordinaten r, φ offenbar unabhängige Aussage.

Der Präzessionseffekt sollte beim sonnennächsten Planeten mit dem kleinsten L, dem Merkur ($L \;=\; 5.53 \cdot 10^7$ km), am größten sein. Merkur macht pro Jahrhundert 415 Umläufe; mit (6.88) erhält man daher als Voraussage der Einsteinschen Theorie

$$\boxed{\Delta\,\varphi \;=\; 43.03'' \;\;\text{pro Jahrhundert (Merkur)}}\;. \tag{6.103}$$

Der hiermit zu vergleichende experimentelle Wert muss aus einem wesentlich größeren, durch die Rotation des erdgebundenen astronomischen Koordinatensystems und durch Newtonsche Störungen von anderen Planeten bedingten Beobachtungseffekt mühsam herauspräpariert werden. Dies ist jedoch mit hinreichender Genauigkeit möglich, da schon seit dem 18. Jahrhundert genaue astronomische Bahnbeobachtungen des Merkur vorliegen. Eine moderne Analyse (Clemence 1943) des Datenmaterials ergibt als von der Newtonschen Himmelsmechanik nicht erklärte „Restpräzession" des Merkur $(\Delta\,\varphi)_{Beob.} \;=\; (43.11 \,\pm\, 0.45)''$. Im Hinblick auf Gl. (6.101) bedeutet dies

$$\frac{2 \,-\, \beta \,+\, 2\,\gamma}{3} \;=\; 1.00 \,\pm\, 0.01\;. \tag{6.104}$$

Diese bemerkenswerte Übereinstimmung stellt noch immer eine der genauesten Verifikationen der Allgemeinen Relativitätstheorie dar; sie ist deshalb besonders wichtig, weil sie bisher *als einzige auf den Koeffizienten* β *des Terms 2. Ordnung in* $g_{tt}(r) = B(r)$ *empfindlich* ist.

6.6 Laufzeiteffekt von Radarechos

Während bei Lichtablenkung und Perihelpräzession allgemein-relativistische Effekte in der geometrischen Bahnform im Vordergrund stehen, erlaubt die heutige elektronische Messtechnik im Prinzip auch die Verfolgung der *zeitlichen Durchlaufung* von Geodäten mit einer Genauigkeit, die ausreicht, um allgemein-relativistische Effekte abzutrennen und zu messen. Die am weitesten entwickelten Experimente dieser Art versuchen, die Laufzeit von Radarsignalen von der Erde zu einem der übrigen inneren Planeten (insbesondere Merkur und Venus) und zurück zur Erde nach Reflexion an der Planetenoberfläche genau zu vermessen.

Wir betrachten eine vereinfachte Modellsituation, bei der die (geringen) Unterschiede zwischen den Bahnebenen der Erde und des reflektierenden Planeten vernachlässigt und *beide Bahnen in der Ebene* $\vartheta = \frac{\pi}{2} =$ const. angenommen werden. Zu berechnen ist die Laufzeit eines Radarsignals (d. h. eines Photons) vom Punkt $(r, \vartheta, \varphi) = (r_1, \frac{\pi}{2}, \varphi_1)$ zum Punkt $(r_2, \frac{\pi}{2}, \varphi_2)$ im Schwerefeld der Sonne. Die zeitliche Durchlaufung der Photonenbahn (Nullgeodäte) wird durch die Differentialgleichungen (6.63) bzw. (6.67 c) mit $E = 0$ bestimmt:

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = 0 \,. \tag{6.105}$$

Wir drücken J durch den minimalen Abstand r_m der Trajektorie von der Sonne aus: da dort $dr\,/\,dt$ verschwindet, ist

$$J^2 = \frac{r_m^2}{B(r_m)} \,. \tag{6.106}$$

Damit wird die Bewegungsgleichung zu

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{B(r)}{A(r)} \left[1 - \left(\frac{r_m}{r}\right)^2 \frac{B(r)}{B(r_m)}\right] \tag{6.107}$$

Daraus folgt durch Integration die Laufzeit zwischen den Bahnpunkten mit Radien r_m

und r:

$$\boxed{t\,(r,\,r_m)\;=\;\int\limits_{r_m}^{r} d\,r'\;\frac{\sqrt{\frac{A\,(r')}{B\,(r')}}}{\sqrt{1\;-\;\left(\frac{r_m}{r'}\right)^2\;\frac{B\,(r')}{B\,(r_m)}}}}\;. \tag{6.108}$$

Für $|\varphi_1\,-\,\varphi_2|\,>\,\frac{\pi}{2}$ (was wir stets voraussetzen, da man nach Möglichkeit die Situation nahezu „streifenden" Vorbeigangs des Radarsignals an der Sonne, d. h. $|\varphi_1\,-\,\varphi_2|$ in der Nähe von π wählt) ist die Gesamtlaufzeit für die 2 Bahnstücke $r_1 \ldots r_m$ und $r_m \ldots r_2$ zusammenzusetzen:

$$t_{12}\;=\;t\,(r_1,\,r_m)\;+\;t\,(r_2,\,r_m)\;. \tag{6.109}$$

Zur Auswertung von (6.108) benutzen wir wieder die Robertson-Entwicklung

$$B\,(r)\;\approx\;1\;-\;2\,\frac{M\,G}{r}\;,\qquad A\,(r)\;\approx\;1\;+\;2\,\gamma\,\frac{M\,G}{r}\;, \tag{6.110}$$

wobei diesmal beide metrischen Funktionen in derselben Ordnung von $M\,G\,/\,r$ eingehen, weil es sich nicht mehr um „langsame" Testteilchen, sondern um Photonen handelt. Damit wird

$$\sqrt{\frac{A\,(r')}{B\,(r')}}\;\approx\;1\;+\;(1\;+\;\gamma)\,\frac{M\,G}{r'}\;,$$

$$1\;-\;\left(\frac{r_m}{r'}\right)^2\;\frac{B\,(r')}{B\,(r_m)}\;\approx\;1\;-\;\left(\frac{r_m}{r'}\right)^2\;\left[1\;-\;2\,M\,G\left(\frac{1}{r'}\;-\;\frac{1}{r_m}\right)\right]$$

$$\approx\;\left[1\;-\;\left(\frac{r_m}{r'}\right)^2\right]\;\left[1\;-\;2\,M\,G\,\frac{r_m}{r'\,(r'\;+\;r_m)}\right]\;.$$

In erster Ordnung in $\frac{M\,G}{r_m}$, $\frac{M\,G}{r}$ ist daher

$$t\,(r,\,r_m)\;\approx\;\int\limits_{r_m}^{r}\frac{r'\,d\,r'}{\sqrt{r'^2\;-\;r_m^2}}\;\times\;\left\{1\;+\;(1\;+\;\gamma)\,\frac{M\,G}{r'}\;+\;\frac{M\,G\,r_m}{r'\,(r'\;+\;r_m)}\right\}\;. \tag{6.111}$$

Die 3 Terme dieses Integrals sind elementar ausführbar und ergeben

$$t\,(r,\,r_m)\approx\sqrt{r^2-r_m^2}\;+\;M\,G\times\left[(1\;+\;\gamma)\;\ln\,\frac{r+\sqrt{r^2-r_m^2}}{r_m}+\sqrt{\frac{r\;-\;r_m}{r\;+\;r_m}}\right]\;. \tag{6.112}$$

Der führende Term $\sqrt{r^2 - r_m^2}$ ist das Resultat für Lichtausbreitung in der flachen Minkowski-Metrik, d. h. längs einer Geraden. Der allgemein-relativistische Korrekturterm ist positiv und sagt somit eine *Verzögerung des Radarechos* gegenüber dem Fall ohne Sonnengravitation voraus. Diese Verzögerung ist offenbar maximal, wenn Erde und reflektierender Planet gerade etwa auf entgegengesetzten Seiten der Sonne stehen, weil dann das Radarsignal „streifend" an der Sonne vorbeigeht ($r_m \approx R_\odot$) und damit die Wirkung des Sonnenschwerefeldes am größten wird. Dann kann r_m gegen die wesentlich größeren Abstände r_E bzw. r_P der Erde bzw. des reflektierenden Planeten von der Sonne vernachlässigt werden, d. h. die letzte Wurzel in (6.112) durch 1, der Logarithmus durch $\ln \frac{2r}{R_\odot}$ ersetzt werden. Die *Gesamt-Echoverzögerung bei Hin- und Rücklauf* wird

$$(\Delta\, t)_{max} \,=\, 2 \left[t\,(r_E,\, R_\odot) \,+\, t\,(r_P,\, R_\odot) \,-\, \left(\sqrt{r_E^2 \,-\, R_\odot^2} \,+\, \sqrt{r_P^2 \,-\, R_\odot^2} \right) \right] \tag{6.113 a}$$

$$\boxed{(\Delta\, t)_{max} \approx 4\, M_\odot\, G \left[1 \,+\, \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \ln \left(\frac{4\, r_E\, r_P}{R_\odot^2} \right) \right]} \,. \tag{6.113 b}$$

Für das Merkur-Erde-System in der beschriebenen Konstellation ist der letzte Logarithmus etwa 11.2. Mit (6.88) und für die Einsteinsche Theorie mit $\gamma \,=\, 1$ ergibt sich damit

$$(\Delta\, t)_{max} \,\approx\, 72\,\text{km} \,=\, 240\,\mu\text{sec} \quad (\text{Erde - Merkur})\;. \tag{6.114}$$

Diese Genauigkeit der Zeitmessung – bei einer Gesamtlaufzeit des Signals von ca. 20 min. – ist durchaus erreichbar. Trotzdem sind die Details der Auswertung des Experiments sehr kompliziert *; um eine mit (6.113) vergleichbare Zahl zuverlässig zu extrahieren, müssen eine ganze Reihe von Daten – so z. B. die auf der rechten Seite von (6.113 a) subtrahierten „Minkowskischen" Zeiten, d. h. die Entfernungen r_E, r_P, r_m, aber auch die Radien der beiden Planeten, Details der reflektierenden Oberfläche auf dem Planeten u. a. – mit einer Genauigkeit bekannt sein, die das konventionelle astronomische Beobachtungsmaterial nicht hergibt. In der Regel müssen daher γ und andere Unbekannte zugleich durch Vielparameter-Anpassungen an die Messdaten bestimmt werden. Als Resultat ausgedehnter Analysen dieser Art wurde von Shapiro und Mitarbeitern 1971 publiziert:

$$\gamma \,=\, 1.03 \,\pm\, 0.1 \qquad (\text{Radarecho})\;, \tag{6.115}$$

d. h. eine sehr gute Bestätigung der Einstein-Schwarzschild-Geometrie. Künftige, noch genauere Messungen dieses Typs dürften auch auf den Robertson-Koeffizienten β empfindlich werden.

* Für mehr Einzelheiten vgl. wieder [1], pp. 203-207

6.7 Kruskal-Fortsetzung; Schwarze Löcher

Die Schwarzschild-Metrik in Standardkoordinaten, (6.32), hat *Singularitäten bei* $r = 2\,M\,G$ *und* $r = 0$. Obwohl, wie schon erwähnt, bei "'normalen"' Himmelskörpern der Fall $2\,M\,G \geq$ Radius nicht vorkommt, sind zumindest im Prinzip extrem massive Objekte denkbar, für die der Schwarzschild-Radius $2\,M\,G$ im Außenraum und damit im Gültigkeitsbereich der quellenfreien Feldgleichungen liegt. Deshalb ist die Frage nach der Natur der beiden Singularitäten gerechtfertigt; insbesondere ist zu fragen, ob sie reine „Koordinateneffekte“, d. h. nur auf die Verwendung unzweckmäßiger Koordinatensysteme zurückzuführen sind oder ob sie physikalische Realität besitzen.

Für eine „echte“ Singularität ist notwendig, dass *Invarianten*, koordinatensystemunabhängige Größen, diese Singularität zeigen. Einen ersten Hinweis gibt die Betrachtung des invarianten Volumenelements (6.33); es zeigt bei $r = 2\,M\,G$ keinerlei Besonderheiten, aber $\sqrt{g}$ verschwindet bei $r = 0$, d. h. die inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ existiert bei $r = 0$ nicht. Weiter kann man die Krümmungsinvarianten untersuchen, z. B. den ersten der 4 Skalare (4.90); man erhält

$$R^{\lambda\mu\nu\kappa}\,R_{\lambda\mu\nu\kappa} \;=\; C^{\lambda\mu\nu\kappa}\,C_{\lambda\mu\nu\kappa} \;=\; 48\,\left(\frac{M\,G}{r^3}\right)^2 \;. \tag{6.116}$$

Auch dies ist bei $r = 2\,M\,G$ völlig wohldefiniert, aber singulär bei $r = 0$. Tatsächlich ist die Singularität bei $r = 0$ real, die bei $r = 2\,M\,G$ ein bloßer Koordinateneffekt. Die Singularität bei $r = 2\,M\,G$ ist aber ein Hinweis darauf, dass die Parametrisierung der Schwarzschildschen Raumzeitstruktur durch Standardkoordinaten nur bei $r > 2\,M\,G$ sinnvoll ist und bei $r = 2\,M\,G$ zusammenbricht; für den Bereich $r < 2\,M\,G$ müssen andere Koordinatensysteme benutzt werden. Zum genaueren Verständnis betrachten wir zunächst ein

(a) Zweidimensionales Beispiel. Die sog. Rindlersche Metrik

$$d\,s^2 \;=\; x^2\,d\,t^2 \;-\; d\,x^2 \tag{6.117 a}$$

in einer raum- und einer zeitartigen Dimension mit den Koordinatenbereichen

$$-\infty \;<\; t \;<\; +\infty\;, \qquad 0 \;<\; x \;<\; \infty \tag{6.117 b}$$

scheint eine Singularität bei $x = 0$ aufzuweisen, da dort die metrische Determinante $-g$ verschwindet und damit die inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ nicht existiert. Um zu sehen, dass diese Singularität tatsächlich doch nur ein Koordinateneffekt ist, empfiehlt es sich, neue, der betreffenden Raum-Zeit besonders angepasste Koordinaten zu wählen, nämlich die

Bahnparameter längs der Nullgeodäten (d. h. Lichtlaufwege) der Metrik. Für die Nullgeodäten von (6.117 a) gilt wegen $ds^2 = 0$

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \ ,$$

d. h.

$$t(x) = \pm \ln x + \text{const.} \ . \tag{6.118}$$

Es gibt also 2 Klassen von Nullgeodäten, die „auslaufenden" (+ Zeichen in 6.118), für die x mit wachsendem t anwächst, und die „einlaufenden" (− Zeichen), für die x bei wachsendem t abnimmt (und also in die scheinbare Singularität bei $x = 0$ hineinläuft). Man definiert deshalb „Nullkoordinaten" u, v durch

$$u = u(t, x) = t - \ln x \ , \tag{6.119 a}$$

$$v = v(t, x) = t + \ln x \ , \tag{6.119 b}$$

dann ist $u = $ const. längs einer „auslaufenden" und $v = $ const. längs einer „einlaufenden" Nullgeodäte. (Diese Aufteilung der Nullgeodäten in 2 Klassen ist in 2 Dimensionen zumindest lokal stets erreichbar). In diesen Koordinaten wird wegen

$$du\, dv = \left(dt - \frac{1}{x}\,dx\right)\left(dt + \frac{1}{x}\,dx\right) = dt^2 - \frac{1}{x^2}\,dx^2 \ ,$$

$$\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{e}^{+v} = x\,\mathrm{e}^{-t}\,x\,\mathrm{e}^{+t} = x^2$$

die Rindler-Metrik (6.117 a) zu

$$ds^2 = \mathrm{e}^{v-u}\,du\,dv \ . \tag{6.120}$$

Im übrigen eignet sich $p_+ = \mathrm{e}^v$ als monotoner Bahnparameter längs der „auslaufenden" und $p_- = \mathrm{e}^{-u}$ als Parameter längs der „einlaufenden" Geodäten. Das Koordinatensystem ist nun durch das Netz der beiden Geodätenscharen definiert. Die Wertebereiche

$$-\infty < u, v < +\infty$$

entsprechen dem ursprünglichen Koordinatenbereich (6.117 b), aber die einseitig begrenzten Wertebereiche $p_\pm = 0 \ldots \infty$ der Bahnparameter lassen schon vermuten, dass die durch (6.117 a) beschriebene Raumzeit „unvollständig", d. h. nur ein Stück eines umfassenden Raumes ist, in dem sich die Geodäten zu negativen p-Werten fortsetzen lassen. Tatsächlich führt die weitere Koordinatentransformation

$$U(u) = -e^{-u}\,, \qquad V(v) = e^{v} \tag{6.121}$$

zu der äußerst einfachen Form

$$ds^2 = dU\,dV \tag{6.122}$$

der Metrik. Obwohl der ursprüngliche Raum (6.117 a) nur dem Bereich $U < 0$, $V > 0$ entspricht, gibt es nun, *da die Metrik (6.122) bei $U = 0$ oder $V = 0$ keinerlei Singularitäten mehr aufweist, kein Hindernis mehr, sie und damit die gesamte Raumzeit auf den vollen Bereich*

$$-\infty < U < +\infty\,, \qquad -\infty < V < +\infty \tag{6.123}$$

fortzusetzen. Die so fortgesetzte Metrik wird durch eine letzte Koordinatentransformation

$$T = \frac{1}{2}(U + V)\,, \qquad X = \frac{1}{2}(V - U) \tag{6.124}$$

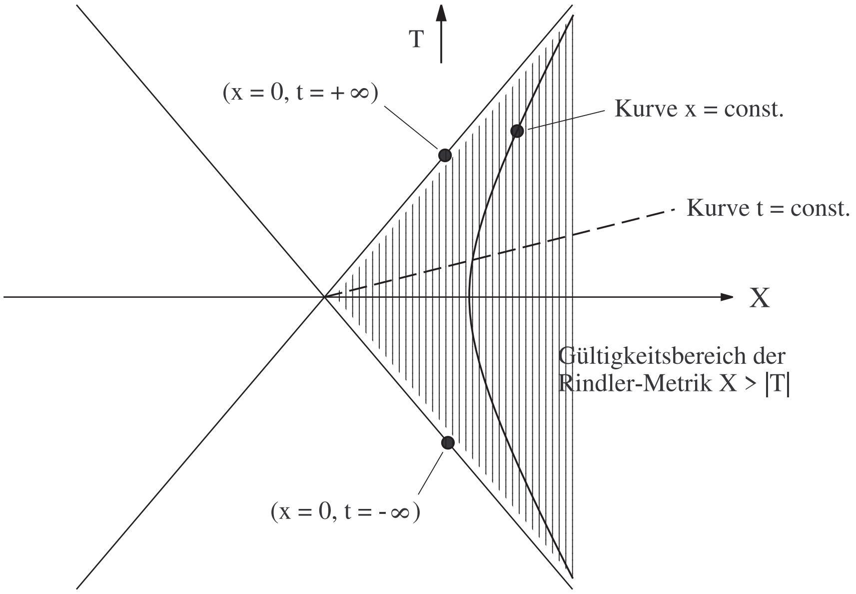
in die Form

$$ds^2 = dT^2 - dX^2 \tag{6.125}$$

gebracht und damit einfach als die zweidimensionale Minkowski-Metrik erkennbar. Die Ausgangsform (6.117 a) beschrieb also lediglich einen Teil (nämlich den Quadranten $X + T > 0$, $X - T > 0$) des zweidimensionalen Minkowski-Raumes, aber in „schlechten", weil auf dem Rand dieses Teilgebietes eine scheinbare Singularität hervorrufenden Koordinaten. Diese lassen sich durch die endgültigen Minkowski-Koordinaten ausdrücken:

$$x = {}_{+}\sqrt{X^2 - T^2}\,, \qquad t = \operatorname{artanh}\frac{T}{X} \tag{6.126}$$

(Vgl. hierzu die nachfolgende Skizze).



Diese Beziehungen klären nun die Natur der Koordinatensingularität in (6.117 a) auf: die beiden Stücke des Lichtkegels des Ursprungs im $\mathcal{M}^2$, die „Nulllinien" $X = \pm T$, wurden in den ursprünglichen Koordinaten als ($x = 0$, $t = \pm\infty$) und damit als scheinbar unüberschreitbare Barrieren beschrieben. Die Transformation auf die Bahnparameter längs der 2 Klassen von Nullgeodäten als Koordinaten (U und V), machte es möglich, diese „Koordinatenbarrieren" bei $X = \pm T$ durch Fortsetzung zu „durchbrechen" und die Raumzeit (6.117) – die man bereits durch Berechnung ihrer verschwindenden Krümmung als flach hätte erkennen können – zum gesamten $\mathcal{M}^2$ auszudehnen.

(b) Kruskalsche Erweiterung. Die Behandlung der „Singularität" der Schwarzschild-Metrik bei $r = 2MG$ lässt sich nun in sehr ähnlicher Weise zu derjenigen der scheinbaren Singularität der Rindler -Metrik bei $x = 0$ gestalten. Wegen der Kugelsymmetrie der Schwarzschild-Metrik (6.32) braucht man dafür nur ihren „$t - r -$Anteil", d.h. die effektiv zweidimensionale Metrik

$$ds^2 = (1 - \frac{2MG}{r})\, dt^2 - (1 - \frac{2MG}{r})^{-1} dr^2, \qquad (6.127)$$

zu untersuchen. Wie bei **(a)** versucht man zunächst, die aus- und einlaufenden „radialen Nullgeodäten" dieser Metrik zu bestimmen. Sie sind Lösungen der Bedingung $ds^2 = 0$, d.h.

$$(1 - \frac{2MG}{r})\, \dot{t}^2 - (1 - \frac{2MG}{r})^{-1} \dot{r}^2 = 0 \qquad (6.128)$$

wo der Punkt die Ableitung nach einem Bahnparameter bezeichnet. Das führt zu der Dgl. erster Ordnung

$$\Big(\frac{dt}{dr}\Big)^2 \,=\, \Big(\frac{r}{r-2MG}\Big)^2 \tag{6.129}$$

mit den zu (6.118) analogen Lösungen

$$t \,=\, \pm\,\rho(r) \,+\, const.\,, \tag{6.130}$$

wobei sich das Pluszeichen wieder auf die „auslaufenden“, das Minuszeichen auf die „einlaufenden“ Geodäten bezieht und die nach Regge und Wheeler benannte Koordinate

$$\rho(r) \,=\, r \,+\, 2MG\,\ln\Big(\frac{r}{2MG}-1\Big) \tag{6.131}$$

die Eigenschaft

$$\frac{d\rho}{dr} \,=\, \Big(1-\frac{2MG}{r}\Big)^{-1} \tag{6.132}$$

besitzt. Analog zu (6.119) definiert man nun „Nullkoordinaten“ u und v durch

$$u \,=\, u(t,r) \,=\, t \,-\, \rho(r)\,, \tag{6.133 a}$$

$$v \,=\, v(t,r) \,=\, t \,+\, \rho(r)\,, \tag{6.133 b}$$

so dass die Gleichung einer auslaufenden bzw. einlaufenden Nullgeodäte nun einfach

$$u \,=\, \text{const.} \qquad \text{bzw.} \qquad v \,=\, \text{const.} \tag{6.134}$$

lautet. Der Limes $r \to 2MG$ entspricht nun $u \to \infty$ bzw. $v \to -\infty$. In diesen Koordinaten nimmt die $t-r-$Metrik (6.127) die Form

$$ds^2 \,=\, \Big[1\,-\,\frac{2MG}{r(u,v)}\Big]\,du\,dv \tag{6.135}$$

an, wobei r als Funktion von u und v implizit durch die transzendente Gleichung

$$r \,+\, 2MG\,\ln\Big(\frac{r}{2MG}-1\Big) \,=\, \rho \,=\, \frac{1}{2}(v-u) \tag{6.136}$$

definiert ist. Durch Exponentiation entsteht daraus

$$\frac{r}{2MG} - 1 \,=\, e^{\frac{1}{2MG}\left(\frac{v-u}{2}-r\right)} \tag{6.136}$$

so dass sich (6.135) auch schreiben lässt als

$$ds^2 \,=\, 2MG\,\frac{e^{-\frac{r(u,v)}{2MG}}}{r(u,v)}\,\Big(e^{-\frac{u}{4MG}}du\Big)\,\Big(e^{+\frac{v}{4MG}}dv\Big)\,. \tag{6.137}$$

Hier erscheinen die Metrikkomponenten faktorisiert in einen Anteil $\frac{1}{r}e^{-r/2MG}$, der für $r \to 2MG$, d. h. für $u \to \infty$ bzw. $v \to -\infty$ nichtsinguläer ist, und Faktoren mit einfacher Abhängigkeit von u und v allein. Die Analogie zur Form (6.120) der Rindler-Metrik legt die weitere Koordinatentransformation

$$U(u) \;=\; -e^{-\frac{u}{4MG}}\,, \qquad V(v) \;=\; e^{+\frac{v}{4MG}} \tag{6.138}$$

nahe, mit der sich die Metrik zu

$$ds^2 \;=\; 32(MG)^3\,\frac{e^{-\frac{r(U,V)}{2MG}}}{r(U,V)}\;dU\,dV \tag{6.139}$$

vereinfacht; dabei ist $r(U,V)$ als Lösung der Gleichung

$$\big(1 \,-\, \frac{r}{2MG}\big)\,e^{\frac{r}{2MG}} \;=\; UV \tag{6.140}$$

definiert und daher lediglich eine Funktion des Produkts UV. Beim Wert $r = 2MG$, der nun $U = 0$ oder $V = 0$ entspricht, ist diese Metrik nichtsingulär, und damit können wir die Schwarzschildsche Lösung auf den gesamten durch die Bedingung

$$r\,(\,U,\,V\,) \;>\; 0 \tag{6.141}$$

definierten Bereich in der $U - V-$Ebene fortsetzen. Die Singularität bei $r \to 0$ bleibt dagegen bestehen; sie ist „physikalisch“, wie schon durch das Resultat (6.116) nahegelegt wird.

Mit der zu (6.124) analogen abschließenden Koordinatentransformation

$$T \;=\; \frac{1}{2}\,(\,U \,+\, V\,)\,, \qquad X \;=\; \frac{1}{2}\,(\,V \,-\, U\,) \tag{6.142}$$

nimmt die volle Schwarzschild-Metrik (6.32) schließlich die zuerst 1960 von Kruskal angegebene Form

$$\boxed{ds^2 \;=\; 32(MG)^3\;\frac{e^{-\frac{r(T,X)}{2MG}}}{r(T,X)}\;(\,dT^2 \,-\, dX^2\,) \,-\, r(T,X)^2\cdot d\Omega^2\,,} \tag{6.143}$$

mit der Abkürzung

$$d\Omega^2 \;:=\; d\vartheta^2 \,+\, \sin^2\vartheta\,d\varphi^2$$

an. Die Beziehung zwischen den „alten“ Koordinaten t, r und den „neuen“ Koordinaten T, X ist nach (6.133) und (6.138) gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{t}{4MG} \;=\; \operatorname{artanh}\big(\frac{T}{X}\big) \;=\; \frac{1}{2}\ln\big(\frac{X+T}{X-T}\big) \tag{6.144}$$

und

$$\Big(1 - \frac{r}{2MG}\Big)\, e^{\frac{r}{2MG}} \;=\; T^2 \;-\; X^2\,, \tag{6.145}$$

von denen letztere die Funktion $r(T,X)$ definiert und zugleich die Entsprechungen

$$r \,<\, 2MG \quad \Longleftrightarrow \quad |T| \,>\, |X| \tag{6.146 a}$$

$$r \,>\, 2MG \quad \Longleftrightarrow \quad |T| \,<\, |X| \tag{6.146 b}$$

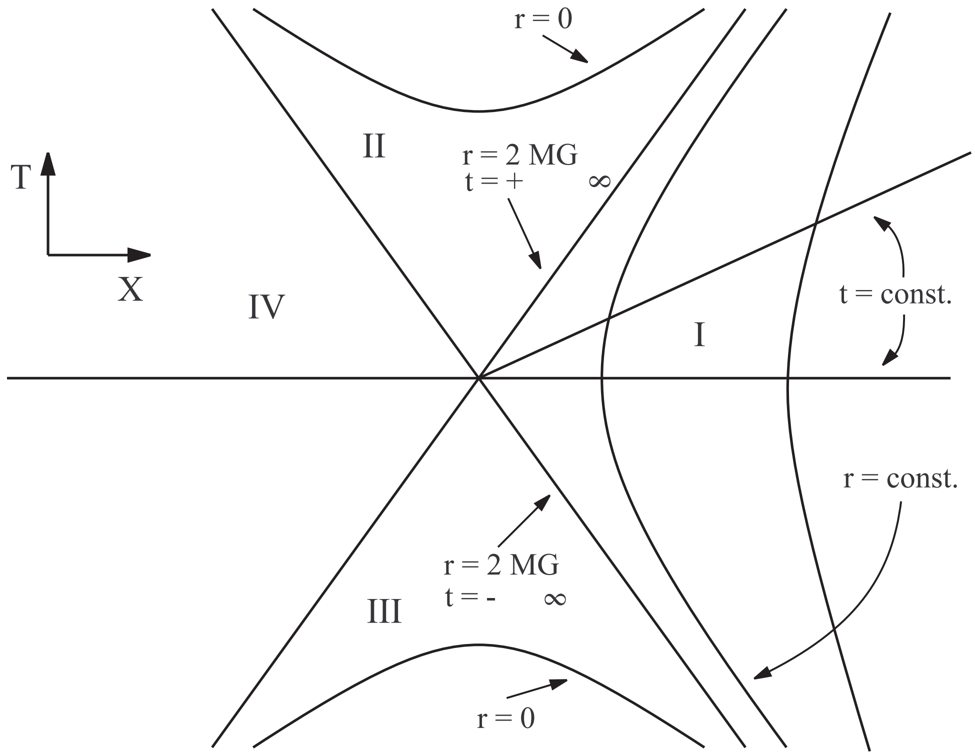
liefert.

Die Koordinaten (6.142) vermitteln nun in dem gesamten durch die Bedingung

$$r(T,X) \,>\, 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X^2 - T^2 \,>\, -1 \tag{6.147}$$

charakterisierten Bereich eine einheitliche Parametrisierung der „Schwarzschild-Kruskal-Mannigfaltigkeit". Deren kausale Struktur wird veranschaulicht durch das folgende „Kruskal-Diagramm" in der $X - T-$Ebene. Es ist dem $X - T-$Diagramm für die Rindler-Metrik (S. 254) bemerkenswert ähnlich, jedoch mit dem Unterschied, dass die Schwarzschild-Kruskal-Mannigfaltigkeit vierdimensional ist, so dass jeder Punkt (T,X) des Diagramms tatsächlich eine 2-Sphäre - zu parametrisieren durch (ϑ,φ) - vom Radius $r(T,X)$ darstellt.

Wie im Rindlerschen Beispiel findet man, dass die Ausgangsform (6.127) der Metrik lediglich den „Quadranten" $X + T \,>\, 0$, $X - T \,>\, 0$ der vollen Mannigfaltigkeit beschrieb, aber in „schlechten", weil auf dem Rand $X = |T|$ dieses Teilgebietes Singularitätsbarrieren vorspiegelnden Koordinaten. Und wie im Rindlerschen Fall zeigt sich,



dass die neue „räumliche" Koordinate X im Gegensatz zum alten r nicht mehr auf positive Werte beschränkt ist; vielmehr tut sich ein ganzes „zweites Blatt" der Mannigfaltigkeit auf — der Bereich $X < 0$ — , auf das die ursprüngliche Koordinatisierung keinerlei Hinweis gab. Dieser Raum ist damit ein bemerkenswertes Beispiel für die bei allgemeinen differenzierbaren bzw. Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu erwartende Situation, dass eine „Karte", d.h. ein Koordinatensystem, in der Regel nur einen Teil des Raumes beschreiben kann.

Die radialen Nullgeodäten (Lichtlaufwege mit konstanter (ϑ, φ)-Richtung), nach (6.143) charakterisiert durch $(dX)^2 = (dT)^2$ und damit durch

$$X \;=\; \pm T \,+\, \text{const.}\,, \tag{6.148}$$

sind in diesem Diagramm Geraden, die um $\pm 45\,^\circ$ gegen die X-Achse geneigt verlaufen. Der „äußere" Bereich (6.146b) entspricht den Regionen I und IV des Diagramms; in diesem Bereich sind nach (6.145) die Kurven $r =$ const. Hyperbeln, die im „asymptotisch flachen“ Bereich $r \to \infty$ immer flacher verlaufen, für $r \to 2MG$ aber zu den Geradenpaaren $T = \pm X$ entarten. Der „innere“ Bereich (6.146a) entspricht den Regionen II und III; in diesen Regionen existieren nun, anders als im Rindlerschen Beispiel, die *physikalischen Singularitäten* bei

$$r = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = \pm\sqrt{T^2 - 1} \qquad \text{oder} \qquad T = \pm\sqrt{X^2 + 1}\,. \tag{6.149}$$

Diese Singularitäten haben den Charakter raumartiger Hyperflächen :

$$|dX| = |\pm \frac{2T}{2\sqrt{T^2-1}}\,dT\,| = |\frac{T}{X}||dT| > |dT|\,. \tag{6.150}$$

Sie liegen in der „Zukunft“ von Region II und der „Vergangenheit“ von Region III, während eine naive Interpretation von $r = 0$ in den Schwarzschild-Koordinaten (t, r) das völlig verkehrte Bild einer „zeitartigen Linie am Ursprung der räumlichen Koordinaten“ suggeriert hätte. Andererseits werden in Schwarzschild-Koordinaten die Linien $r = 2MG$, also $T = \pm X$, analog wie bei der Rindler-Metrik und irreführend als „$t = \pm\infty$“ bezeichnet, so als ob sie unüberschreitbare Barrieren darstellten. Man beachte jedoch, dass die Kruskal-Koordinaten (T, X), obwohl im Prinzip die gesamte Mannigfaltigkeit erfassend, dennoch am besten für die Beschreibung der „Region starken Feldes“, Gl. (6.146a), geeignet sind, während in der asymptotisch flachen „Region schwachen Feldes“, $r \to \infty$, die ursprünglichen Koordinaten (t, r) weiterhin vorteilhaft bleiben, weil sie die Annäherung an die flache Lorentz-Metrik unmittelbar erkennen lassen.

Die erweiterte Schwarzschild-Kruskal-Mannigfaltigkeit hat ungewöhnliche Eigenschaften. Natürlich kann die Region I, also $r > 2MG$ im Blatt $X > 0$, nach wie vor physikalisch als das äußere Gravitationsfeld einer kugelförmigen, statischen Massenverteilung interpretiert werden, in dem die in den Abschnitten 6.3 bis 6.6 diskutierten Teilchen- und Photonenbahnen realisierbar sind. Jedoch wird ein „radial nach innen fallender“ Beobachter $(\,d\vartheta = d\varphi = 0,\ dX < 0$ bei $dT > 0\,)$ in Region I irgendwann die Linie $X = T$, d.h. $r = 2MG$, erreichen und in die Region II $(\,|X| < T, \text{d.h.} r < 2MG\,)$ eintreten. Aber aus dieser Region kann er dann nicht mehr „entkommen“: für eine beliebige Bahn $X = X(T)$, die nicht notwendig geodätisch, d.h. Lösung der Dgln. (6.54/6.55) sein muss, gilt nach (6.143)

$$d\tau = ds = \Big(\frac{2MG}{r}e^{-\frac{r}{2MG}}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[1 - (\frac{dX}{dT})^2\Big]^{\frac{1}{2}}(4MG\,dT) \tag{6.151}$$

und andererseits durch Differentiation von (6.145)

$$dr = -\Big(\frac{2MG}{r}e^{-\frac{r}{2MG}}\Big)\Big[T - X(\frac{dX}{dT})\Big](4MG\,dT)\,. \tag{6.152}$$

Durch Kombination des Quotienten dieser beiden Beziehungen mit Gl. (6.145) in der Form

$$\frac{2MG}{r} e^{-\frac{r}{2MG}} = \frac{\frac{2MG}{r} - 1}{T^2 - X^2} \tag{6.153}$$

ergibt sich für die Änderung von r pro Eigenzeitintervall

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\frac{2MG}{r} - 1} \left\{ \frac{1 + \frac{X}{T}(-\frac{dX}{dT})}{\sqrt{\left[1 - (\frac{dX}{dT})^2\right] \left[1 - (\frac{X}{T})^2\right]}} \right\}. \tag{6.154}$$

Der Faktor in geschweiften Klammern ist in der hier diskutierten Situation ($|X| < T$ in Region (6.146 a) und $d\tau > 0 \Rightarrow |dX| < |dT|$) reell, positiv und sogar > 1, wie man anhand der algebraischen Identität

$$\frac{1 + ab}{\sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2}}$$

einsieht. Es gilt dann also

$$\frac{dr}{d\tau} < 0 \qquad \text{und} \qquad \left| \frac{dr}{d\tau} \right| > \sqrt{\frac{2MG}{r} - 1}\,. \tag{6.155}$$

Die Bahn verläuft also notwendig zu immer kleineren r, d.h. sie führt aus der Region II nie mehr hinaus. Obwohl die Fläche $r = 2MG$ keinerlei Singularität der Metrik darstellt, spielt sie also dennoch eine besondere Rolle als ein sog. *Horizont*, nach dessen Überschreitung Teilchen und Photonen „für immer verschwinden“. Darüber hinaus läuft jede derartige Bahn, vom Überschreiten des Horizonts an gemessen, sogar in endlicher Eigenzeit, nämlich höchstens

$$\Delta\tau = \int_{2MG}^{0} dr \left(\frac{d\tau}{dr}\right) < \int_{0}^{2MG} dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2MG}{r} - 1}} = \pi MG\,, \tag{6.156}$$

in die Singularität bei $r = 0$ – genauer: bei $X = \pm\sqrt{T^2 - 1}$ mit $T > 0$ – hinein. Ein Beobachter, der einmal in Region II hineingefallen ist, hat also höchstens noch

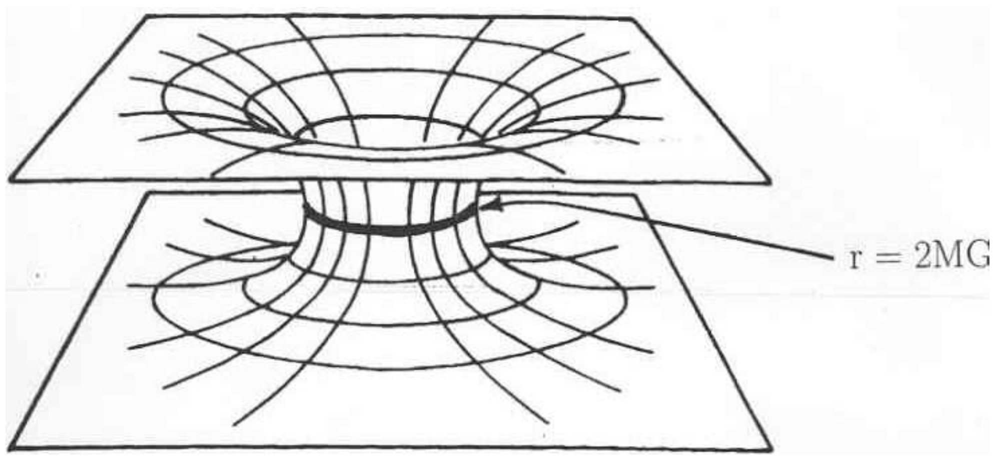
$$\Delta\tau \approx 10^{-5} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) s \tag{6.157}$$

zu leben, bevor er in die Singularität hineingezogen wird. (Man kann nachrechnen, dass diese Maximalzeit von einem frei fallenden, d.h. längs einer Geodäten laufenden

Beobachter mit $E = 0$ im Sinne der Gl. (6.63) erreicht wird). Eine Raumzeitregion mit diesen Eigenschaften wird als ein **Schwarzes Loch** bezeichnet.

Die Region III des Kruskal-Diagramms im Bereich $T < 0$ hat gerade die „zeitumgekehrten" Eigenschaften von II und wird daher als „Weißes Loch" bezeichnet: jeder dort vorhandene Beobachter muss aus der Singularität bei $X = \pm\sqrt{T^2 - 1}$ mit $T < 0$ hervorgegangen sein und muss diese Region in endlicher Eigenzeit $\Delta\tau$ verlassen. Die Region IV im Bereich $X < 0$ schließlich hat Eigenschaften, die mit denen von I identisch sind; sie stellt einen zweiten „asymptotisch flachen" (für $X \to -\infty$) Raumzeitbereich dar, in dem man ebenfalls eine „Radialkoordinate" r' – als Lösung von (6.145) mit $X < 0$ und $|T| < -X$ – definieren könnte derart, dass die Hyperflächen $r' = \text{const.}$ sich für $r' \to \infty$ den Hyperflächen $-X = \text{const.}$ annähern. Eine Kommunikation mit einem Beobachter in dieser Region von Region I her ist nicht möglich: wie schon betont, laufen von einem Beobachter in I „nach innen" gesandte Lichtsignale, d.h. radiale Nullgeodäten, im Kruskal-Diagramm unter 45° gegen die Horizontale und daher niemals in die Region IV, sondern stattdessen in die Singularität in Region II.

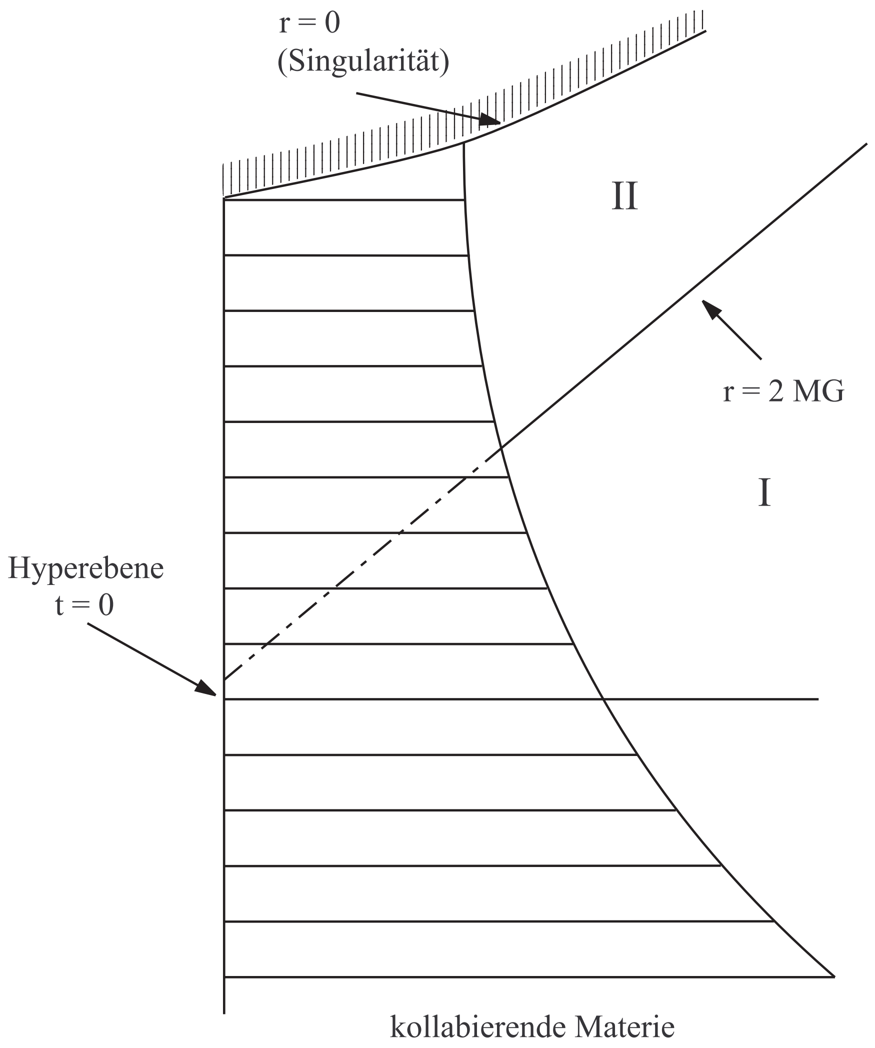
Die Existenz des zum Bereich $X > 0$ spiegelbildlichen zweiten Blattes $X < 0$ und darin der zu I spiegelbildlichen Region IV ist eine besonders merkwürdige und der Anschauung schwer zugängliche Eigenschaft der Kruskal-Erweiterung. Sie kann in Teilaspekten illustriert werden durch eine Betrachtung der raumartigen Hyperfläche $T = 0 \, (\leftrightarrow \; t = 0)$. Im folgenden Diagramm ist die Sphäre S^2 vom Radius r, die eigentlich jedem Punkt des Kruskal-Diagramms anzuheften ist, durch einen Kreisring S^1 vom Radius r ersetzt, um eine zweidimensionale Darstellung zu ermöglichen. Der Punkt $(T, X) = (0, 0)$ des Diagramms wird daher durch einen Kreis mit $r = 2MG$ repräsentiert:



In diesem Bild entsprechen die oberhalb und unterhalb des „Halses“ bei $r = 2MG$ liegenden Bereiche beziehungsweise den Regionen I und IV des Kruskal-Diagramms.

Die vollständige Schwarzschild-Kruskal-Mannigfaltigkeit ist zwar exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum ($\Theta_{\mu\nu} = 0$), aber um sie physikalisch zu realisieren, müssten als „Anfangszustand“ zwei asymptotisch flache Raumzeitregionen etabliert werden, die durch eine „Region III“ mit einer echten metrischen Singularität bei $r(T, X) = 0$ in der vom Kruskal-Diagramm beschriebenen Weise verbunden sein müssten. Es gibt keinerlei Hinweise darauf, dass eine derart exotische Anfangskonfiguration in irgend einem Teil unseres Universums vorliegt. Jedoch können, wie in der relativistischen Astrophysik gezeigt wird [*], hinreichend massive Materiekonzentrationen, wie massereiche Sterne oder Galaxien, als Endstadium ihrer zeitlichen Entwicklung den sog. *vollständigen Gravitationskollaps* durchlaufen, wenn ihre Tendenz zur gravitativen Kontraktion stärker wird als alle von anderen Wechselwirkungen herrührenden stabilisierenden Einflüsse. Im Inneren eines derartigen Körpers ist die Schwarzschild-Metrik nicht gültig, weil dort $\Theta_{\mu\nu} \neq 0$ ist, aber im Außenraum wird, sofern die Massenverteilung kugelsymmetrisch ist, die Metrik in jedem Stadium des Kollapses durch Gl. (6.143) beschrieben werden (denn diese ist tatsächlich, nach einem hier nicht behandelten mathematischen Satz von G. Birkhoff, selbst im nichtstatischen Fall die einzige kugelsymmetrische Vakuumlösung der Feldgleichungen). Die Regionen III und IV des Kruskal-Diagramms können sich daher nicht ausbilden, sondern sind – ebenso wie Teile der Regionen I und II – durch eine „normale“, aber mit $\Theta_{\mu\nu} \neq 0$ zu berechnende Raumzeitgeometrie ersetzt. Ein Teil der Region II und damit ein „Schwarzes Loch“ bildet sich jedoch aus, sobald der Massenradius der kollabierenden Materie kleiner als $2MG$ wird. Das Diagramm auf der nächsten Seite gibt eine schematische Darstellung dieser Situation: von dem Moment an, wo der Radius der (horizontal schraffiert dargestellten) kollabierenden Masse den Horizontradius unterschreitet, erscheint eine Typ II – Region an ihrer Außenseite.

[*] Für eine kurze Darstellung vgl. section 6.2 von [5]



Schwarze Löcher dieses Ursprungs sind nach heutigem Kenntnisstand im beobachtbaren Universum keineswegs Ausnahmeerscheinungen; insbesondere werden sehr massereiche ($M \geq 10^6\, M_\odot$) Konstellationen dieser Art in den Kernen der meisten Galaxien vermutet.