

Modul Physik II: Thermodynamik und Elektromagnetismus

Prof. Dr. G. Münster, Prof. Dr. H. Zacharias

SS 2010

Kurzskriptum
zusammengestellt von M. Bengfort

Dieses Kurzsriptum beinhaltet eine knappe Zusammenstellung von Inhalten der Vorlesung Physik II. Hinweise auf Fehler sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamik	5
1.1	Grundbegriffe	5
1.2	Kinetische Gastheorie	6
1.2.1	Grundgleichung der kinetischen Gastheorie	6
1.2.2	Temperatur	6
1.2.3	Maxwell-Boltzmann-Verteilung	7
1.3	Wärmemenge und spezifische Wärme	8
1.3.1	Freiheitsgrade	9
1.4	Hauptsätze der Thermodynamik	10
1.4.1	Erster Hauptsatz	10
1.4.2	Zweiter Hauptsatz	11
1.5	Thermodynamische Potenziale	16
1.5.1	Innere Energie als thermodynamisches Potenzial	16
1.5.2	Legendre-Transformation	16
1.5.3	Maxwell-Relationen	18
1.6	Thermodynamische Systeme mit verschiedenen Phasen	19
1.6.1	Reale Gase	19
1.6.2	Phasenumwandlungen	20
1.6.3	Joule-Thomson-Effekt	21
1.7	Wärmetransport	21
1.7.1	Wärmeleitungsgleichung	22
1.7.2	Wärmeleitung	23
1.7.3	Wärmestrahlung	25
1.7.4	Wärmeisolierung	25
2	Elektromagnetismus	26
2.1	Elektrostatisches Feld im Vakuum	26
2.1.1	Grundbegriffe	26
2.1.2	Maßsysteme	26
2.1.3	Das elektrische Feld	27
2.1.4	Elektrisches Potential	27
2.1.5	Maxwell'sche Gleichungen der Elektrostatik	29
2.1.6	Punktladungen und δ -Funktion	29
2.1.7	Einfache elektrostatische Probleme	31
2.1.8	Influenz	33
2.1.9	Der Kondensator	33
2.1.10	Energie des elektrischen Feldes	35
2.2	Dielektrika im elektrischen Feld	36

Inhaltsverzeichnis

2.2.1	Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in Materie	37
2.2.2	Molekulare Polarisierbarkeit	40
2.2.3	Grundproblem und Randwertprobleme der Elektrostatik	41
2.3	Elektrischer Strom	43
2.3.1	Ladungstransport	43
2.3.2	Elektrische Leitfähigkeit	44
2.3.3	Ohm'sches Gesetz	45
2.3.4	Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes	46
2.3.5	Elektrische Leistung	47
2.3.6	Gleichstrom-Netzwerk	47
2.4	Magnetostatik	48
2.4.1	Magnetfelder	48
2.4.2	Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik	48
2.4.3	Vektorpotenzial	50
2.4.4	Magnetische Momente	51
2.4.5	Bewegte Ladungen im Magnetfeld	51
2.4.6	Materie im Magnetfeld	53
2.5	Zeitlich veränderliche Felder	55
2.5.1	Faraday'sches Induktionsgesetz	55
2.5.2	Induktivitäten	55
2.5.3	Maxwell-Gleichungen und Feldenergie	57
3	Ergänzungen	59

1 Thermodynamik

1.1 Grundbegriffe

Zustand: augenblickliche Beschaffenheit eines physikalischen Systems

Zustandsgrößen: a_i

extensiv (mengenproportional): V, N, n, M

intensiv (mengenunabhängig): $p, T, \rho = \frac{M}{V}$

Systeme :

geschlossen: kein Teilchenaustausch

isoliert: keine Kontakte

offen: beliebige Kontakte

Kontakte :

Wärmekontakt: thermischer Kontakt

(Austausch einer Wärmemenge ΔQ ; infinitesimal: δQ)

→ thermisches Gleichgewicht: $T_1 = T_2$

Arbeitsaustausch: Arbeit, die am System verrichtet wird; für Gase: $\delta W = -pdV$

Teilchenaustausch: δN

Thermodynamischer Zustand: festgelegt durch Angabe der Zustandsgrößen

Gas: $\{a_i\} = \{p, V, T\}$

thermodynamisches Gleichgewicht: $\frac{da_i}{dt} = 0 \forall a_i$

Zustandsgleichung: Zusammenhang zwischen a_i

ideales Gas: $pV = NkT$

N : Teilchenzahl

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$: Boltzmannkonstante

$$pV - NkT = 0$$

$$F(a_i) = F(p, V, T) = 0$$

ideales Gas: Zustandsraum 3-dimensional, Koordinaten p, V, T

Zustandsfläche F : 2-dimensional

Molvolumen: $V_m = 22,41 \text{ l}$ ($T = 273,15 \text{ K}, p = 101325 \text{ Pa}$)

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{Mol}}$

ideales Gas (bezogen auf 1 Mol): $pV = RT$

$$R = N_A k = 8,31 \text{ JK}^{-1} \text{ Mol}^{-1} \quad \text{allgemeine Gaskonstante}$$

1.2 Kinetische Gastheorie

Arbeit: $dW = -F ds = -pA \cdot \frac{dV}{A} = -p dV \quad \Rightarrow W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV$

Wärmekapazität: $\delta Q = C dT$

spezifische Wärmen: $c_V = \frac{1}{M} C_V, c_p = \frac{1}{M} C_p$

$\Rightarrow \delta Q = M c_p dT, \quad \text{bzw. } \delta Q = M c_V dT$

Zustandsänderungen, Prozesse :

quasistatisch: so langsam, dass Gleichgewichtszustände durchgeführt werden

reversibel: umkehrbar (System + Umgebung)

irreversibel: nicht umkehrbar

adiabatisch: $\delta Q = 0$

isotherm: $dT = 0$

1.2 Kinetische Gastheorie

Ziel: Begründung der Gasgleichung aus der Bewegung der Moleküle

Voraussetzungen:

- Gas besteht aus Molekülen/Atomen
- elastische Stöße
- vernachlässigbare Wechselwirkung
- ungeordnete Bewegung

1.2.1 Grundgleichung der kinetischen Gastheorie

einatomiges Gas in Volumen V , $\rho_N = \frac{N}{V}$

Impulsübertrag pro Stoß an Wand: $2 \cdot p_x$ (Reflexion)

Zahl der Stöße in Δt : $\frac{1}{2} \rho_N \cdot v_x \cdot A$

Kraft = $\frac{\text{Impulsübertrag}}{\text{Zeit}}$: $F = \rho_N v_x p_x A$

Druck: $p = \frac{F}{A} = \rho_N \langle v_x p_x \rangle = \rho_N \langle v_y p_y \rangle = \rho_N \langle v_z p_z \rangle = \rho_N \frac{1}{3} \langle \vec{v} \cdot \vec{p} \rangle$

$\Rightarrow pV = \frac{1}{3} N \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle$

\Rightarrow **Grundgleichung:** $pV = \frac{2}{3} N \langle E_{kin} \rangle$

1.2.2 Temperatur

kinetische Gastheorie:

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

Maßstäbe für die Temperatur: Thermometer
 → temperaturabhängige, physikalische Effekte
 Effekte z.B.:

Volumenänderungen mit T :

$$V(T) = V_0(1 + \gamma_V T_C)$$

$$p(T) = p_0(1 + \gamma_p T_C)$$

hier: T = absolute Temperatur, T_C = Temperatur auf der Celsius-Skala

$$p_0 V_0 = NkT_0, pV = NkT$$

$$\Rightarrow p = p_0 \frac{V_0}{V} \cdot \frac{T}{T_0} \quad (V = V_0: \text{Volumen wurde konstant gehalten})$$

$$\curvearrowright p = p_0 \frac{T}{T_0}$$

$$T = T_0(1 + \gamma_p T_C)$$

$$T = T_0 + \frac{T_0}{273,15} T_C$$

$$\curvearrowright T_0 = 273,15 \text{ und } T_C = T - 273,15$$

Längenausdehnung mit T :

$$l(T) = l_0(1 + \alpha T_C)$$

$\alpha = \alpha(T)$ (nur etwa 10 – 20%/100K)

isotrope Körper: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$

Volumenänderung:

$$V(T) = V_0(1 + \alpha T_C)^3$$

$$V(T) \approx V_0(1 + 3\alpha T_C)$$

$$\Rightarrow \gamma \approx 3\alpha \text{ für isotrope Festkörper}$$

Temperaturskalen

1. Celsius-Skala

Fixpunkte:

Tripel-Punkt des Wassers: 0,01°C

Siedepunkt des Wassers bei 1 bar: 100°C

2. Fahrenheit-Skala

Fixpunkte:

Schmelzpunkt von Ammoniumchlorid/Wasser: 0°F

Körpertemperatur des Menschen: 100°F $\hat{=}$ 37,7°C

3. Kelvin

Fixpunkt: 0°K $\hat{=}$ -273,15°C

Skalenweite identisch mit Celsius-Skala

Umrechnung: $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)^\circ\text{C}$, $T_F = \left(\frac{9}{5}T_C + 32\right)^\circ\text{F}$

1.2.3 Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$p(\vec{r}, \vec{v})$ Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit \vec{v} am Ort \vec{r} befindet.

1.3 Wärmemenge und spezifische Wärme

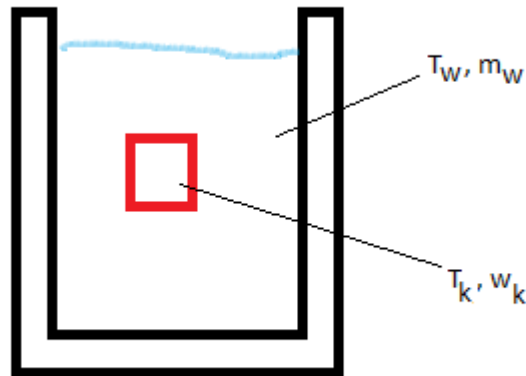


Abbildung 1.1: Dewar-Gefäß zur thermischen Isolierung

Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$p(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{\xi} e^{-\frac{E}{kT}}, \quad \text{mit } E = \frac{m}{2} v^2 + V(\vec{r})$$

speziell: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung ($V(\vec{r}) = 0$)

$$F(\vec{v}) = c \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}; \quad \int F(\vec{v}) d^3v = 1$$
$$\Rightarrow F(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$\int F(\vec{v}) d^3v = \int_0^{\infty} 4\pi v^2 F(\vec{v}) dv$$

\Rightarrow Verteilung von v : $f(v) = 4\pi v^2 F(\vec{v})$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

1.3 Wärmemenge und spezifische Wärme

Wärmemenge: $\Delta Q = c \cdot m \Delta T$

m : Masse des Körpers, c : spezifische Wärme (Materialkonstante)

Wärmekapazität: $C = c \cdot m$

Wärmekapazitäten werden mit **Kalorimetern** (Abb.: 1.1) gemessen.

1.3 Wärmemenge und spezifische Wärme

Zwei Körper unterschiedlicher Temperatur, welche in Kontakt stehen, streben einem thermodyn. Gleichgewicht zu

$$T_1 < T_2 \rightarrow T_1 < T < T_2$$

spezifische Wärme des Körpers:

$$c_k = \frac{(m_w c_w + C_{Dewar})(T - T_w)}{m_k(T_k - T)}$$

(m_k, m_w : Masse des Körpers bzw. des Wassers; T_k, T_w : Temperatur des Körpers bzw. des Wassers)

für Wasser wurde definiert: $c_w = 1 \text{ kcal kg}^{-1}\text{K}^{-1} = 4,182 \text{ kJ kg}^{-1}\text{K}^{-1}$

$C_{Dewar} = c_2 m_2 \frac{T_2 - T}{T - T_1} - m_1 c_1$ (ermittelt durch Mischen von Wasser unterschiedlicher Temperatur T_1, T_2)

1.3.1 Freiheitsgrade

ideales Gas: innere Energie $U = \frac{1}{2} N k T \cdot f$ (siehe kin. Gastheorie)

atomares Gas (z.B. He, Ne,...): $f_{trans} = 3$ (Translation)

molekulares Gas: Rotation, Schwingung

Rotation: lineare Moleküle: $E_{rot} = \frac{L^2}{2I} \Rightarrow f_{rot} = 2$

nichtlineares Molekül (z.B. H₂O): $f_{rot} = 3$

Schwingung: n -atomige Moleküle: $3n - f_{trans} - f_{rot} = f_{vib}$

innere Energie der Schwingung: $U_{vib} = 2 \cdot \frac{1}{2} N k T \cdot f_{vib}$

insgesamt: $f_{eff} = f_{trans} + f_{rot} + 2f_{vib} \Rightarrow U = \frac{1}{2} N k T \cdot f_{eff}$

$$\left(\frac{dU}{dT}\right)_V = C_V = \frac{1}{2} N k \cdot f_{eff}$$

$$C_p = \frac{1}{2}(f_{eff} + 2)R$$

Adiabatindex des Gases:

$$\kappa \equiv \frac{C_p}{C_V} = \frac{f_{eff} + 2}{f_{eff}}$$

Spezifische Wärme von Festkörpern

Schwingungsfreiheitsgrade: $f_{vib} = 3$

$\frac{3}{2} N k T$ trägt zu U bei, wenn alle Schwingungen im System angeregt sind.

quasi-kontinuierliche Verteilung von Energieniveaus \Rightarrow PHONONEN

verschiedene Näherungen zur Beschreibung der Schwingungsanregung: Einstein, Debye, ...

\Rightarrow Festkörperphysik

bei hohen T :

Es ergibt sich für die spezifische Wärme das **Dulong-Petit Gesetz**:

$$C_V = 3Nk = 3R \quad (\text{für 1 Mol})$$

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

C_V ist temperaturunabhängig bei hohen T .

bei tiefen T :

aus dem Debye-Modell mit $\omega_{max} = \omega_D$ erhält man für die innere Energie

$$U = 9NkT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{z^3}{e^z - 1} dz$$

mit der Debye-Temperatur: $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$ und $z = \frac{\hbar\omega}{kT}$

Für $T \rightarrow 0$ gilt $\int \dots = \frac{\pi^4}{15}$. Mit $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ folgt:

$$C_V(T \rightarrow 0) \sim \frac{12}{5} \pi^4 Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3$$

Die Debye-Temperatur Θ_D ist eine Materialkonstante

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

1.4.1 Erster Hauptsatz

Wärme als Energieform

Zustandsänderungen hier: quasistatisch (Durchlaufen von Gleichgewichtszuständen), i.A. reversibel

geschlossenes System ($N = 0$)

1. Wärmeaustausch $\Delta U = \Delta Q$
2. Arbeit $\Delta U = \Delta W$

Erster Hauptsatz

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

$$\text{differenziell: } dU = \delta Q + \delta W$$

$$\text{spez. für Gase: } dU = \delta Q - pdV$$

Bemerkung: Arbeit und Wärme sind keine Zustandsfunktionen $\rightarrow \delta$

Mechanisches Wärmeäquivalent: $1 \text{ cal} \equiv 4,1868 \text{ J}$ (1 cal_{IT})

Molwärmen des idealen Gases

- $V = \text{const.} \rightarrow \Delta U = \Delta Q = C_V \Delta T$
ideales Gas: U hängt nur von T ab. (Exp. von Gay-Lussac)
 $U \sim RT \Rightarrow dU = C_V dT$ gilt für alle Prozesse

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

- $p = \text{const.} \rightarrow \Delta Q = C_p \Delta T$ (def.)
mit 1.HS gilt: $\Delta Q = \Delta U + p \Delta V = C_V \Delta T + p \Delta V = C_V \Delta T + nR \Delta T \equiv C_p \Delta T$
 $\Rightarrow C_p = C_V + nR$ bzw. $C_p = C_V + Nk$

speziell für 1 Mol:

$$C_{p,m} = C_{V,m} + R$$

adiabatische Zustandsänderung:

$$dQ = 0$$

$$dU = C_V dT = -p \cdot dV$$

$$\text{ideales Gas: } p \cdot V = NkT$$

$$Nk = C_p - C_V$$

$$\begin{aligned} C_V \frac{dT}{T} &= -Nk \frac{dV}{V} \\ C_V \ln T &= -Nk \ln V + \text{const.} \\ \ln(T^{C_V} \cdot V^{Nk}) &= \text{const.} \\ T^{C_V} \cdot V^{C_p - C_V} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Adiabatengleichungen:

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.}$$

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}$$

Zustandsänderungen des idealen Gases

- **adiabatisch**(isentropisch): $\Delta Q = 0$
 $\Rightarrow pV^{\kappa} = \text{const.}$ bzw. $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$
 $\Delta W = \Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{nR}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$
- **isotherm**: $T = \text{const.} \rightarrow pV = \text{const.}$ (Boyle-Mariotte'sches Gesetz)
 $U = \text{const.}$
 $\Delta W = -\int p dV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$
 $\Delta Q = -\Delta W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$
- **isobar**: $p = \text{const.} \rightarrow \Delta W = -p(V_2 - V_1)$, $\Delta Q \equiv C_p(T_2 - T_1) = \frac{C_p}{nR}p(V_2 - V_1)$
- **isochor**: $V = \text{const.} \rightarrow \Delta W = 0$, $\Delta Q \equiv C_V(T_2 - T_1) = \frac{C_V}{nR}V(p_2 - p_1)$

1.4.2 Zweiter Hauptsatz

Carnot-Prozess

Kreisprozess: Anfangszustand=Endzustand (periodisch arbeitende Maschine)

$$\Delta U = 0, \Delta W = -\oint p dV = \text{im } p\text{-}V\text{-Diagram eingeschlossene Fläche}$$

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

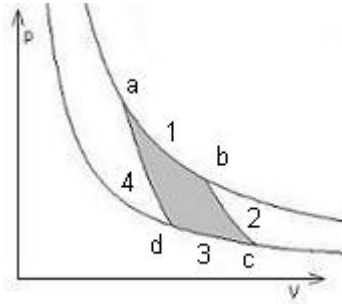


Abbildung 1.2: p - V -Diagramm des Carnot-Prozesses

Carnot-Prozess: spezieller reversibler Kreisprozess; Arbeitssubstanz: ideales Gas

- $a \rightarrow b$: isotherme Expansion; $Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} > 0$ (aufgenommene Wärme $|Q_1|$)
- $b \rightarrow c$: adiabatische Expansion; $Q_2 = 0$, $T_1 V_b^{\kappa-1} = T_2 V_c^{\kappa-1}$
- $c \rightarrow d$: isotherme Kompression; $Q_3 = nRT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} < 0$ (abgegebene Wärme $|Q_3|$)
- $d \rightarrow a$: adiabatische Kompression; $Q_4 = 0$, $T_2 V_d^{\kappa-1} = T_1 V_a^{\kappa-1}$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{T_2 V_d^{\kappa-1}}{T_2 V_c^{\kappa-1}} &= \frac{T_1 V_a^{\kappa-1}}{T_1 V_b^{\kappa-1}} \\ &\Rightarrow \frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_a} \\ &\Rightarrow Q_3 = -nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} < 0 \end{aligned}$$

Bilanz: $\Delta U = 0$; $W = -Q = -Q_1 - Q_3 = -nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_b}{V_a} < 0$

Wirkungsgrad:

$$\text{allgemein: } \eta \equiv -\frac{W}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_3|}{Q_1}; \quad 0 \leq \eta < 1$$

$$\text{Carnot'scher Wirkungsgrad: } \eta_c = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Leistungszahl: $\epsilon = \frac{1}{\eta}$

Zweiter Hauptsatz

Nach Thomson:

Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die nichts anderes bewirkt, als einem Wärmereservoir Wärme zu entziehen und vollständig in Wärme umzuwandeln.

(Unmöglichkeit eines perpetuum mobile 2.Art)

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

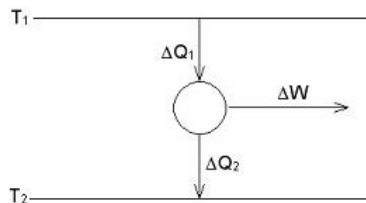
Nach Clausius:

Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die nichts anderes bewirkt, als einem kälteren Wärmereservoir Wärme zu entziehen und diese einem heißeren Wärmereservoir zuzuführen.

Die beiden Formulierungen sind äquivalent.

Reversibler Wirkungsgrad

Kreisprozess:



Umkehrung=Wärmepumpe

Carnot'scher Satz (1824)

Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine, die zwischen zwei Reservoirs mit den Temperaturen $T_1 > T_2$ arbeitet, kann nicht größer sein als derjenige einer reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschine. ($\eta_x \leq \eta_{rev}$)

Korollar:

Alle reversibel arbeitenden Wärmekraftmaschinen besitzen den gleichen universellen Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$.

Thermodynamische Temperaturskala

benutze η_c zur Definition einer universellen, substanzunabhängigen Temperaturskala.

W. Thomson (Lord Kelvin) 1824-1907

Def.: $\frac{T_2}{T_1}$ durch $\eta_c \equiv 1 - \frac{T_2}{T_1}$

absolute Skala: Festlegung durch H₂O am Tripelpunkt: $T = 273,16$ K

Thermodynamische Maschinen

- Kolbenmaschinen
- Strömungsmaschinen
- Wärmekraftmaschinen

Kühlmaschine: $\epsilon_k = \frac{Q_{zu}}{W}$

Wärmepumpe: $\epsilon_w = \frac{|Q_{ab}|}{W}$ (Nutzen)

Beispiel

Otto-Motor (Kolbenmaschine):

- 1-2): adiabatische Kompression; Kompressionsverhältnis: $\frac{V_1}{V_2} \sim 8 - 12$
- 2-3): isochore Wärmezufuhr; Zünden des Treibstoffes

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

- 3-4): adiabatische Expansion
- 4-1): isochore Druckerniedrigung; Ausstoß von Abgasen

Wirkungsgrad: $\eta_{Otto} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} < \eta_c$ da nicht reversibel

Stirling-Motor (Heißluftmotor):

- 2 Isothermen, 2 Isochoren
- Wirkungsgrad nahezu der eines Carnot-Prozesses (nur mit Wärmerückgewinnung)

Entropie

Im Carnot-Prozess gilt: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (Bezeichnung wie in obiger Abbildung; Q_2 hieß weiter oben Q_3)

Für beliebige Wärmekraftmaschinen gilt: $\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Verallgemeinerung:

- für beliebige, quasistatische Kreisprozesse gilt: $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$
(Kreisprozess wird durch viele Carnot-Prozesse approximiert)
- $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ für reversible Kreisprozesse

reversible Prozesse

Seien C_1 und C_2 zwei verschiedene Wege im p - V -Diagramm vom Punkt A zum Punkt B . Dann gilt: $\int_{A,C_1}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A,C_2}^B \frac{\delta Q}{T}$ (Das Integral ist wegunabhängig)

Definition der Entropie (Clausius, 1865):

Sei X_0 ein fest gewählter Zustand. Für einen beliebigen Zustand X gilt:

$$S(X) = \int_{X_0}^X \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

wobei das Integral über einen reversiblen Prozess geht. (S ist eine Zustandsfunktion)

Eigenschaften:

- S ist extensiv
- Für einen beliebigen Prozess von X nach Y gilt: $\int_X^Y \frac{\delta Q}{T} \leq S(Y) - S(X)$ (=' für reversible Prozesse)
Man schreibt als weitere Formulierung des 2. Hauptsatzes:

$$\frac{\delta Q}{T} \leq dS$$

- Für thermisch isolierte Systeme kann die Entropie niemals abnehmen.
- **Der zweite Hauptsatz zeichnet eine Zeitrichtung aus.**

1.4 Hauptsätze der Thermodynamik

- Die Entropie eines isolierten Systems ist maximal im Gleichgewichtszustand.
- Entropie im Carnot-Prozess
 $S_1 = \frac{Q_1}{T_1}; \quad S_2 = \frac{Q_2}{T_2} < 0; \quad S_1 + S_2 = 0$

Entropie des idealen Gases

$$pV = nRT$$

klassisches ideales Gas: $U = C_V \cdot T + U_0$, C_V und U_0 sind *const.*

Variablen: T, V

$$\begin{aligned}dU &= \delta Q - p dV \\ \delta Q &= dU + p dV \\ &= C_V dT + p dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dS &= \frac{\delta Q}{T} \\ &= C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV \\ &= C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(T, V) &= S(T_0, V_0) + \int_{V_0}^V \frac{nR}{V'} dV' + \int_{T_0}^T \frac{C_V}{T'} dT' \\ &= S(T_0, V_0) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + C_V \ln \frac{T}{T_0}\end{aligned}$$

Statische Interpretation der Entropie

$$\text{Boltzmann: } S = k_B \ln W$$

mit: W = Anzahl der Mikrozustände

Makrozustand \leftrightarrow thermodynamischer Zustand mit wenigen Variablen

Mikrozustand \leftrightarrow atomare Beschreibung mit vielen Variablen ($\sim 10^{24}$)

ein Makrozustand \leftrightarrow sehr viele Mikrozustände (Anzahl $\equiv W$ extrem groß)

$\ln W$ handhabbar

S groß: ungeordnet

S klein: geordnet

Beispiel: Gas im Volumen V_1 bzw. $V_2 = 2V_1$, N Teilchen,

$$\frac{W_2}{W_1} \approx 2^N \Rightarrow S_2 - S_1 = k_B (\ln W_2 - \ln W_1) = k_B \ln \frac{W_2}{W_1} \approx kN \ln 2 = nR \ln 2,$$

gemäß obigem Ausdruck für $S(T, V)$: $S_2 - S_1 = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln 2$, stimmt überein

1.5 Thermodynamische Potenziale

1.5.1 Innere Energie als thermodynamisches Potenzial

1. HS + 2. HS, reversibel

$$dU = T dS - p dV \quad \text{Grundrelation für Gase}$$

allg.: $dU = T dS + \delta A + \sum_j \mu_j dN_j$

betrachte U als Funktion von S, V (N fest)

Funktionen der Art $f(x, y) \rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = T, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} = -p$$

d.h.: gegeben $U(S, V) \rightarrow p, T$ als Ableitungen \rightarrow Zustandsgleichung

Alle Informationen stecken in $U(S, V)$ abhängig von den *natürlichen Variablen*.

Wahl anderer Variablen möglich? \Rightarrow **thermodynamische Potenziale**

1.5.2 Legendre-Transformation

Allgemein	Beispiel
$f(x)$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = u(x)$	$f'(x) = 2x = u(x)$
Verwende u	anstelle von x ?
	$x(u) = \frac{u}{2}$
$F(u) = f(x(u))?$	$F(u) = \frac{1}{4}u^2$
Beziehung $f \leftrightarrow F$	nicht eindeutig

Gesucht: eineindeutige, umkehrbare Transformation, bei der die Variable x durch die Variable $u = f'(x)$ ersetzt wird.

Lösung: Legendre-Transformation

$$g(u) = f(x(u)) - u \cdot x(u) = f(x) - \frac{df}{dx} \cdot x$$

$$\frac{dg}{du} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{du} - x - u \frac{dx}{du} = -x$$

$$\Rightarrow dg = d(f - ux) = \underbrace{df}_{u dx} - x du - u dx = -x du$$

$$\text{Umkehrung: } f(x) = g(u) - \frac{dg}{du} \cdot u$$

Nutze Legendre-Transformation:

Freie Energie $F(T, V, N)$:

$$F = U - TS$$

$$dF = dU - TdS - SdT = -pdV - SdT$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p$$

Enthalpie $H(S, p, N)$:

$$H = U + pV$$

$$dH = TdS + Vdp$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{p,N} = T$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{S,N} = V$$

Freie Enthalpie bzw. Gibbs'sches Potential $G(T, p, N)$:

$$G = U - TS + pV$$

$$dG = -SdT + Vdp$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,N} = -S$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} = V$$

Entropie $S(U, V, N)$:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T}$$

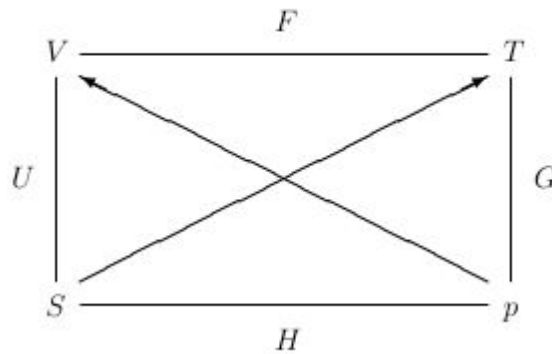


Abbildung 1.3: Thermodynamisches Viereck

Physikalische Bedeutung:

i) Freie Energie:

Grundrelation $-\delta W \leq -dU + TdS$

für isotherme Prozesse: $-\Delta W \leq -\Delta F$ ($-\Delta W$ ist die vom System geleistete Arbeit)

\Rightarrow Die Differenz der freien Energie $-\Delta F$ ist die maximale Arbeit, die ein System bei isothermer Zustandsänderung abgeben kann.

Folgerung: für mechanisch isoliertes System ($\Delta W = 0$) mit konstanter Temperatur

$\Rightarrow F$ kann nicht zunehmen: $\Delta F \leq 0$ für $T, V, N = \text{const.}$

Im Gleichgewicht nimmt F bei $T, V, N = \text{const.}$ ein Minimum an.

ii) Freie Enthalpie:

für $T, p, N = \text{const.}$: $dG = d(F + pV) \leq 0$

Für ein solches System nimmt G im Gleichgewicht ein Minimum an.

Extremaleigenschaften:

1. thermisch abgeschlossen: $S(U, V, N)$ maximal
2. mechanisch isoliert, isotherm ($T, V, N = \text{const.}$): $F(T, V, N)$ minimal
3. isobar, isotherm: $G(T, p, N)$ minimal
4. mechanisch isoliert, isentropisch ($S, V, N = \text{const.}$): $U(S, V, N)$ minimal
5. isobar, isentropisch ($S, p, N = \text{const.}$): $H(S, p, N)$ minimal

1.5.3 Maxwell-Relationen

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T, \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -p; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}$$

⇒ **Beziehungen zwischen Antwortkoeffizienten:**

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} &= -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{V,N} \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} \\ -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,N} &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{p,N} \end{aligned}$$

Anwendung auf folgende Antwortkoeffizienten:

- $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$; $C_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$
- $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$; $\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$ (Kompressibilität)
- $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ (Ausdehnungskoeff.)
- $\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ (Spannungskoeff.)

Relationen:

1. $\frac{p\beta\kappa_T}{\alpha} = 1$ (Grüneisen-Beziehung)
2. $C_p - C_V = TV \frac{\alpha^2}{\kappa_T}$
3. $\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$

Zum Beweis nutze folgende Rechenregel für partielle Ableitungen:

für Variablen x, y und z , die durch $f(x, y, z) = 0$ verknüpft sind, gilt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

1.6 Thermodynamische Systeme mit verschiedenen Phasen

1.6.1 Reale Gase

Bisher vernachlässigt:

1. Wechselwirkung der Teilchen untereinander
2. endliches Volumen der Teilchen

Diese Größen sind von der Gasart abhängig.

1.6 Thermodynamische Systeme mit verschiedenen Phasen

Zu 1.: Elektrostatische Wechselwirkung der Atome untereinander:

Atome können als elektrische Dipole im elektrischen Feld anderer Atome betrachtet werden. (positiver Kern, negative Elektronenhülle)

Betrachte zwei Atome:

potentielle Energie: $V_{pot} = -\mu_2 E = -\alpha E^2$; μ_i : Dipolmoment des i-ten Atoms, α : Polarisierbarkeit, $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\mu_1}{r^3}$: elektrisches Feld

\Rightarrow Van der Waals Anziehung $\sim \frac{1}{r^6}$

repulsive Wechselwirkung bei überlappenden Elektronenhüllen $\sim \frac{1}{r^{12}}$

Lennard-Jones Potenzial:

$$V(r) = \frac{a^{LJ}}{r^{12}} - \frac{b^{LJ}}{r^6}$$

a^{LJ}, b^{LJ} sind Teilcheneigenschaften

„Binnendruck“ p_{bi} aus der attraktiven Wechselwirkung

$$p_{bi} \sim \rho^2 \sim \frac{1}{V^2}$$

$$\Rightarrow p_{ideal} \rightarrow p + p_{bi} \rightarrow p + \frac{a}{V^2}$$

Zu 2. Eigenvolumen:

Betrachte Atome als „harte Kugeln“: Volumen welches bei Vorhandensein eines Moleküls nicht mehr besetzt werden kann: $b = N \cdot 4 \cdot V_{molekül}$

$$\Rightarrow V_{ideal} \rightarrow V - b$$

Zustandsgleichung realer Gase (van der Waals'sche Gleichung):

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

a, b sind stoffspezifische Konstanten

(pV_m) nimmt daher mit p linear ab.

Bei hohen T : $B \rightarrow b$

$\rightarrow p(V_m - b) = RT$ kritischer Punkt (P_k, T_k, V_k) von Stoffart abhängig

mit $b = \frac{1}{3} V_{mk}$ und $a = \frac{9}{8} RT_k V_{mk}$ (folgt aus $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$) folgt die verallgemeinerte van der Waals-Gleichung:

$$\left(\frac{p}{p_k} + \frac{3}{\left(\frac{V}{V_k}\right)^2} \right) \left(3 \frac{V}{V_k} - 1 \right) = 8 \frac{T}{T_k}$$

1.6.2 Phasenumwandlungen

Phase: Räumlich begrenztes Gebiet mit den selben System-Eigenschaften.

Phasenübergang ist mit Energieaufwand verbunden (reversibel).

Beispiel:

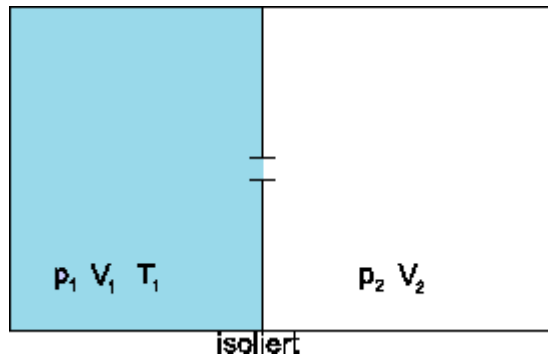
spezifische Schmelzwärme von Eis: $\Delta H_S = \frac{Q}{M} = \frac{\text{zugefügte Wärmemenge}}{\text{Masse des geschmolzenen Eises}} = 335 \frac{\text{J}}{\text{g}}$

Schmelzenthalpie ΔH_S

Verdampfungsenthalpie ΔH_V

1.6.3 Joule-Thomson-Effekt

Technische Anwendung: Gasverflüssigung



$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2$$

$$H_1 = H_2$$

$$\Rightarrow dH = T dS + V dp = 0$$

$$dH = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T dp + V dp$$

$$= C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp + V dp$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V}{C_p} =: \mu^{JT} \quad \text{Joule-Thomson Koeffizient}$$

Für ein ideales Gas ($pV = RT$) folgt: $\mu^{JT} = 0$

Für ein reales Gas ($pV = RT + Bp$) folgt mit $B = b - \frac{a}{RT}$: $\mu^{JT} = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_p}$

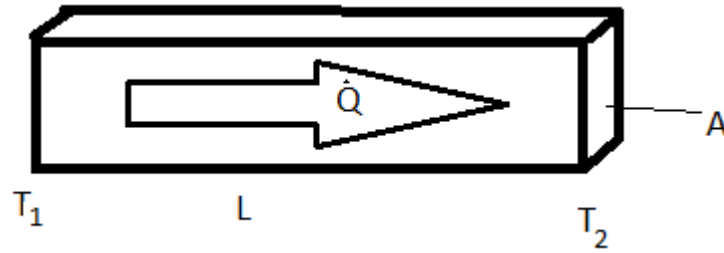
- $\mu^{JT} > 0$: $\Delta p < 0 \Rightarrow \Delta T < 0$ bei Druckabnahme erniedrigt sich T
- $\mu^{JT} < 0$: $\Delta p < 0 \Rightarrow \Delta T > 0$

μ^{JT} ist temperaturabhängig; oberhalb einer **Inversionstemperatur** $T_i = \frac{2a}{Rb}$ erwärmt sich das Gas bevor es sich abkühlt. ($T < T_i \rightarrow \mu^{JT} > 0$)

1.7 Wärmetransport

- Konvektion
- Strahlung
- Wärmeleitung

1.7.1 Wärmeleitungsgleichung



$$\Delta T = T_2 - T_1 \neq 0$$

Wärmestrom $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ durch Querschnitt A

Nach langer Zeit erreicht das System einen stationären Zustand.

Fourier'sches Gesetz (1822)

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\Delta T}{L}$$

λ ist die Wärmeleitfähigkeit des Materials ($\lambda[\frac{W}{mK}]$).

Verallgemeinerungen

- nichtstationär: $\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$
- Wärmestromdichte $q := \frac{\dot{Q}}{A} = -\lambda \frac{dT}{dx}$
- räumlich (für isotrope Körper)

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T$$

Ausbreitung der Wärme

$$\frac{dQ}{dV dt} = -\nabla \cdot \vec{q}$$

mit $dQ = c_V \cdot m dT = c_V \cdot \rho dV dT$ folgt: $c_V \rho \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \vec{q}$

Mit $\vec{q} = -\lambda \nabla T$ und $\lambda = \text{const.}$ folgt die **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda_T \Delta T \quad (1.1)$$

$\Delta := \nabla \cdot \nabla$ Laplace-Operator.

$\lambda_T := \frac{\lambda}{c_V \rho}$ Temperaturleitzahl

Lösung der Wärmeleitungsgleichung:

$T(\vec{r}, t)$ ist gesucht \rightarrow Anfangswertproblem: gegeben $T(\vec{r}, 0)$ und Randwerte.

Eigenschaften:

- Unstetigkeiten glätten sich (für $t > 0$ ist die Funktion $T(x)$ stetig und bel. oft differenzierbar)
- bei zeitunabhängigen Randwerten: Konvergenz gegen eine stationäre Lösung.

Lösungsmöglichkeiten der Gleichung:

- numerisch
- Green'sche Funktionen
- Dim=1: Fourier-Reihen

Beispiel: Wärmeleitung in einem Stab (1-dimensional)

$T(x, t)$, $0 \leq x \leq L$, Randwerte: $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$

stationäre Lösung der Gl. 1.1 : $T_s(x) = T_1 + \frac{x}{L}(T_2 - T_1)$

allgemeine Lösung durch Fourier-Reihen:

$T(x, t) = T_s(x) + f(x, t)$

für $f(x, t)$ gilt dann $\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda_T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

Randwerte: $f(0, t) = 0$, $f(L, t) = 0$, Anfangswert: $f(x, 0) = f_0(x)$

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n(t)}{dt} \sin \frac{n\pi x}{L} &= -\lambda_T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \Rightarrow \frac{db_n}{dt} &= -b_n \lambda_T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ \Rightarrow b_n(t) &= b_n(0) e^{-\lambda_T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(x, t) = T_s(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) e^{-\lambda_T \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n(0) \text{ ist durch Anfangswerte bestimmt: } b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Für $t \rightarrow \infty$ folgt $T(x, t) \rightarrow T_s(x)$.

1.7.2 Wärmeleitung

Festkörper

Mechanismen der Wärmeleitung

- Schwingungen der Teilchen: Phononen
- bei Metallen: Elektronen (bei $T \sim 300$ K bei Metallen nahezu ausschließlich durch Elektronen)

Beide Prozesse sind stark temperaturabhängig.

Wiedemann-Franz-Gesetz:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = a(T)$$

σ ist die elektrische Leitfähigkeit. $a(T)$ variiert nicht mehr als Faktor 2.

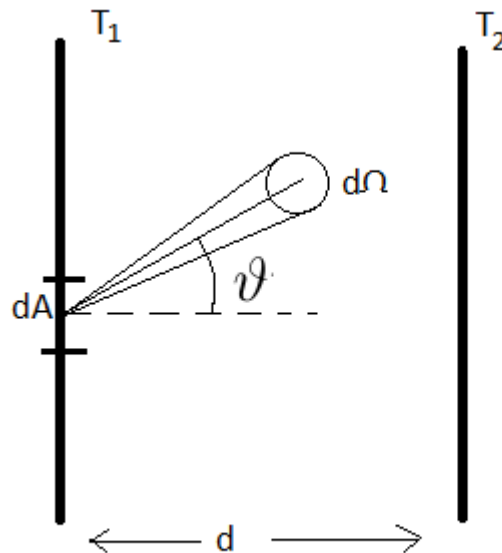
Bei tiefen Temperaturen sind Phononen dominant (ebenso bei Nichtleitern).
Phononen-Wärmeleitung ist bei geordneten Festkörpern hoch bei tiefen T . Bei polykristallinen Materialien ist sie gering.

Flüssigkeiten

geringe Wärmeleitfähigkeit

Gase

innere Energie $U = \frac{1}{2} f_{eff} kT$
Wärmeleitung durch Stöße.
mittlere freie Weglänge Λ .



Gas zwischen zwei Wänden unterschiedlicher Temperatur T_1 und T_2 . Teilchendichte n ;
 $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ isotrope Winkelverteilung.

Für $\Lambda > d$ gilt:

pro Zeiteinheit treffen auf dA auf:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(\vartheta, v) &= n dA \int \cos \vartheta \frac{d\Omega}{4\pi} \int_0^\infty v f(v) dv \\ \frac{dN}{dt} &= n \bar{v} dA \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \\ \Rightarrow \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{4} n \bar{v} dA \end{aligned}$$

1.7 Wärmetransport

im Gleichgewicht: $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt}$

Innere Energie: $U_{1,2} = \frac{1}{2} f_{eff} k T_{1,2}$

Wärmemenge auf dA :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} - \frac{dQ_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} U_2 - \frac{dN_1}{dt} U_1$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{8} n \bar{v} f_{eff} k A (T_2 - T_1)$$

$f_{eff}(\text{Molekül}) > f_{eff}(\text{Atom})$

solange $\Lambda > d$, ist $\frac{dQ}{dt}$ unabhängig von d .

Für $\Lambda \ll d$ gilt:

Wärmetransport ähnelt einem Diffusionsprozess. U, \bar{v} ändern sich mit x .

$$n = n_x \pm \Delta_x \frac{dn}{dx}, \quad \Delta_x = \Lambda \cos \vartheta$$

$$dQ = dN 2 \Delta_x \frac{dU}{dx} = n \cos \vartheta \frac{d\Omega}{4\pi} \bar{v} dt dA \quad 2 \Lambda \cos \vartheta \frac{dU}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{3} \Lambda n \bar{v} \frac{dU}{dx} dA$$

$$\frac{d^2 Q}{dt dA} = \lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\lambda = \frac{1}{6} f_{eff} k \bar{v} n \Lambda = \frac{1}{6} \frac{f_{eff} k \bar{v}}{\sigma} \quad (\text{unabhängig von } n)$$

1.7.3 Wärmestrahlung

Planck'sches Strahlungsgesetz

$$w(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Strahlungsleistung: **Stefan-Boltzmann-Gesetz**

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma A T^4$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

1.7.4 Wärmeisolierung

Wärmeverlust von Häusern

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda A \frac{T_i - T_a}{d}; \quad d = \text{Wanddicke}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\lambda}{d} A \Delta T = -k A \Delta T; \quad k = \frac{\lambda}{d}, \text{ Wert in der Bauphysik, } k \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}} \right]$$

$$\frac{1}{k_{ges}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$$

2 Elektromagnetismus

2.1 Elektrostatisches Feld im Vakuum

2.1.1 Grundbegriffe

positive Ladungen: Protonen (Baryonen; 3 Quarks (uud))

negative Ladungen: Elektronen (Leptonen; Elementarteilchen)
(Lebensdauer: $> 10^{32}$ Jahre)

neutrale Ladungen: Neutronen (udd) (Mittlere Lebensdauer freier Neutronen ~ 15 min)

Leptonen	Ruhemasse in MeV
e^-, e^+	0,511
μ^-, μ^+	105,6
τ^-, τ^+	1784
Baryonen	
p^+ (uud)	938,3
n (udd)	939,6

Gleichartige Ladungen stoßen sich ab; ungleiche Ladungen sind attraktiv.

Quark	Ladung in e_0	Ruhemasse
up (u)	$\frac{2}{3}$	5 MeV
down (d)	$-\frac{1}{3}$	10 MeV
strange (s)	$-\frac{1}{3}$	100 MeV
charm (c)	$\frac{2}{3}$	1.5 GeV
bottom (b)	$-\frac{1}{3}$	4.7 GeV
top (t)	$\frac{2}{3}$	180 GeV

Ladung ist eine Erhaltungsgröße.

2.1.2 Maßsysteme

SI-System

Coulomb: $1C=1As$

Elementarladung: $e = 1,60217733 \cdot 10^{-19}C$

Kraftwirkung von Ladungen \rightarrow **Coulomb-Gesetz**:

$$\vec{F}_C = f \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.1)$$

2.1 Elektrostatisches Feld im Vakuum

analog zum Gravitationsgesetz, Zentralkraft

im SI-System: $f = 8,98 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

(in der Optik: Lichtgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$; μ : Permeabilitätskonstante)

Elektrostatisches cgs-System:

Proportionalitätskonstante $f = 1$

$\Rightarrow |\vec{F}_C| = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} [\text{dyn}]$

Einheit für die Ladung Q : $1 \text{esu} = 1 \text{cm} \sqrt{\text{dyn}}$

Ladung von $1 \text{C} = 3 \cdot 10^9 \text{esu}$

2.1.3 Das elektrische Feld

Mit (2.1) folgt für das elektrische Feld ($Q_1 \equiv Q$, $Q_2 \equiv q$):

$$\vec{E} := \frac{\vec{F}_C}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{As}} \right] \quad (2.2)$$

mehrere Quellen \rightarrow Superposition

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung: $dq = \rho(\vec{r}) dV$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Das elektrische Feld vermittelt die Kraftwirkung von Ladungen aufeinander.
Feldlinien geben Richtung und Stärke der Kraft an.

2.1.4 Elektrisches Potential

Arbeit: $W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$

Sei Q Ladung bei $\vec{r} = \vec{0}$ und q eine bewegte Probeladung:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Bei gleichsinnigen Ladungen: Arbeitsgewinn bei Entfernung voneinander.

Bei ungleichsinnigen Ladungen: Arbeit muss bei Entfernung voneinander geleistet werden.

Konservative Felder: Jedem Raumpunkt des Feldes kann eine eindeutige Funktion zugeordnet werden:

$$\Phi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{elektrostatisches Potential} \quad (2.3)$$

2.1 Elektrostatistisches Feld im Vakuum

mit $\Phi(\infty) = 0$.

$\rightarrow q \cdot \Phi(P) = W(P)$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \Phi = -\nabla\Phi \quad (2.4)$$

Elektrische Spannung zwischen zwei Punkten in einem elektrischen Feld: $U = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Ladung q in einer Potenzialdifferenz U : \rightarrow Änderung der potentiellen Energie:

$$\Delta E_{pot} = qU \rightarrow U = \frac{\Delta E_{pot}}{q} \left[\text{V} = \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \right]$$

Elektron mit Elementarladung; Potentialdifferenz $U=1\text{V}$

$\Delta E_{pot} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C} \cdot 1\text{V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{J} := 1\text{eV}$ „Elektronenvolt“ (Energieeinheit)

Gauß'sches Gesetz

1. Punktladung bei $\vec{r} = \vec{0}$; Kugel mit Radius r :
gesamter Fluss von \vec{E} durch die Kugeloberfläche

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{f} = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{1}{r^2} df = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \oint df = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$d\vec{f}$ ist ein nach außen gerichtetes Oberflächenelement.

2. Ladung außerhalb einer geschlossenen Fläche:
Gauß'scher Integralsatz:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int \nabla \cdot \vec{E} dV \quad (2.5)$$

Für $r \neq 0$ gilt $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{f} = 0$$

3. beliebige geschlossene Fläche F , Ladung innerhalb:
Sei K eine kleine Kugel um die Punktladung

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

4. Ergebnis: $\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & \text{Ladung innerhalb} \\ 0 & \text{Ladung außerhalb} \end{cases}$

5. mehrere Ladungen, Superposition

$$Q = \sum_{\text{innerh. von F}} q_i$$

Gauß'sches Gesetz der Elektrostatik:

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{f} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

2.1.5 Maxwell'sche Gleichungen der Elektrostatik

Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, Volumen V mit Oberfläche F

$$Q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

mit 2.5 und 2.6 folgt die

1. Maxwell'sche Gleichung

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

Mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$ und $\nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{0}$ folgt die

2. Maxwell'sche Gleichung der Elektrostatik:

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \quad (2.8)$$

Grundproblem der Elektrostatik:

gegeben $\rho(\vec{r})$, finde $\vec{E}(\vec{r})$

Voraussetzungen: $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\nabla \times \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow -\nabla \cdot \nabla\Phi = -\Delta\Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

zu lösen: **Poisson-Gleichung:** $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

ohne Randbedingungen: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$

mit Randbedingungen werden andere Methoden verwendet. (siehe Kap.2.2.3)

2.1.6 Punktladungen und δ -Funktion

$\rho(\vec{r})$ für Punktladungen:

- $\rho(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq \vec{0}$
- $\int \rho(\vec{r}) dV = q$

Lösung des Problems: Dirac'sche δ -Funktion

$$\text{zur Erinnerung: Kronecker-}\delta: \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad i, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i \delta_{ik} = f_k$$

Analog:

$$\int f(x) \delta(x-y) dx = f(y) \quad \text{Aber: es gibt keine solche Funktion } \delta(x-y)!$$

lineares Funktional:

Abb.: $G : f \rightarrow G[f] \in \mathbb{C}$

linear: $G[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha G[f_1] + \beta G[f_2]$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Bsp.: $G[f] = \int g(x) f(x) dx$; $g(x)$ fest, **reguläre Distribution**

Def.: $\delta_y[f] := f(y)$, nicht regulär

$$\delta_y[f] \equiv \int \delta(x-y) f(x) dx$$

Symbol $\int \delta(x-y) \dots dx$ lineares Funktional. $\delta(x-y)$ ist nur unter dem Integral definiert.

δ -Funktion als Limes von Funktionsfolgen:

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}$$

$$\int \delta_\epsilon(x) dx = 1$$

$$\delta_\epsilon(x) \xrightarrow{\lim_{\epsilon \rightarrow 0}} 0, \text{ für } x \neq 0$$

Es gilt: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(x) \delta_\epsilon(x) dx = f(0)$

Schreibe: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = \delta(x)$

Achtung: Der Limes ist außerhalb eines Integrals zu nehmen!

Rechenregeln

1. $x\delta(x) = 0$

2. $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x); a \in \mathbb{R}$

3. $\delta(g(x)) = \sum_{i; g(x_i)=0} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i)$

4. $\delta(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x)$ mit der **Heaviside'schen Stufenfunktion** $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$\Theta(0)$ ist unbestimmt, Konvention $\Theta(0) = \frac{1}{2}$

5. Die Ableitung $\delta'(x)$ ist definiert.

$$\int \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

$\delta(x)$ ist beliebig oft differenzierbar

$\delta(x)$ ist gerade ($\delta(-x) = \delta(x)$)

$\delta'(x)$ ist ungerade ($\delta'(-x) = -\delta'(x)$)

usw.

dreidimensionale δ -Funktion

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

$$\int \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) dV = f(\vec{r}_0)$$

Punktförmige Verteilungen einer Masse oder Ladung:

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \begin{cases} \rho(\vec{r}) = 0 & \vec{r} \neq \vec{r}_0 \\ \int \rho(\vec{r}) dV = Q \end{cases}$$

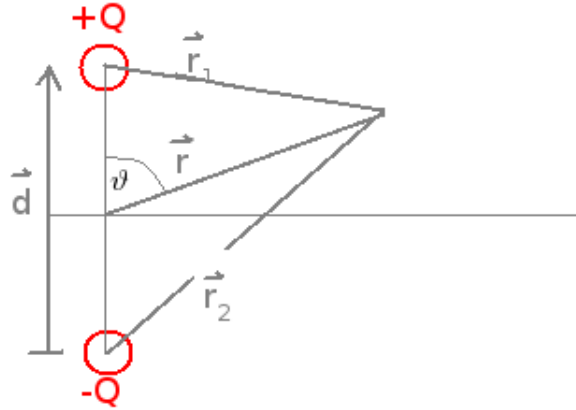
Punktladung bei $\vec{r}_0 = \vec{0}$

Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$ mit $\Phi(\vec{r}) = Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$$

2.1.7 Einfache elektrostatische Probleme

elektrischer Dipol



charakterisiert durch $|Q|$ und Abstand \vec{d}

Dipolmoment: $\vec{p} := |Q| \cdot \vec{d}$ [As · m]

Das Gesamtfeld ist eine lineare Überlagerung der Einzelfelder

$$\Phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}|} - \frac{Q}{|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}|} \right)$$

mit $\frac{1}{|\vec{r} \pm \frac{\vec{d}}{2}|} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2} \right)$ folgt

$$\Phi_D = Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}| \cdot \cos\vartheta}{r^2}$$

Das Potenzial ist

- $\sim \frac{1}{r^2}$
- rotationssymmetrisch um die Dipolachse \vec{d}
- bei $z = 0$: $\Phi = 0$

Mit Gleichung 2.4 und $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ (Kugelkoordinaten, siehe 3) folgt:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^3}$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$

2.1 Elektrostatistisches Feld im Vakuum

1. **elektrischer Dipol:** im äußerem elektrischen Feld:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad \vec{D} \perp \vec{p}, \vec{E}$$

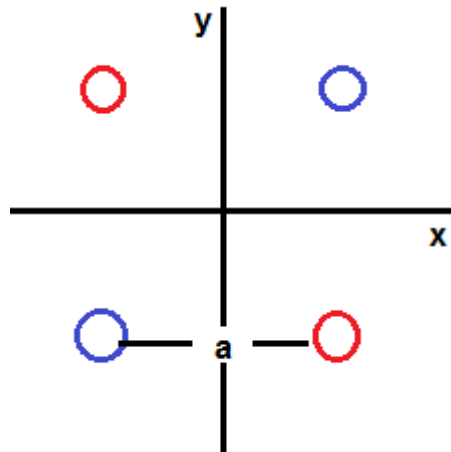
$$W_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{Minimum bei } \vec{p} \parallel \vec{E}$$

im inhomogenen äußerem Feld wirkende Kräfte auf den Dipol:

$$\vec{F} = Q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}) = Q(\vec{d} \cdot \nabla)\vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$$

inhomogenes elektr. Feld: $\nabla\vec{E} \neq 0$

2. **elektrischer Quadrupol:**



Potential des Quadrupols durch Überlagerung von Dipolpotentialen:

$$\Phi_Q(\vec{r}) = \Phi_D(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{a}) - \Phi_D(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla\Phi_D = Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{a} \cdot \nabla \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

3. **Multipol-Entwicklung:**

Potenzial von beliebigen Ladungsverteilungen lässt sich in $\left(\frac{r_i}{r}\right)^n$ entwickeln.

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} d^3r_i$$

Taylor-Entwicklung: $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}}}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

und $x = \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}$ folgt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \sum_i Q_i + \frac{1}{r^3} \sum_i Q_i \vec{r}_i \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^5} \frac{1}{2} \sum_i Q_i \left[(3x_i^2 - r_i^2)x^2 + (3y_i^2 - r_i^2)y^2 + (3z_i^2 - r_i^2)z^2 + 2(3x_i y_i x y + 3x_i z_i x z + 3y_i z_i y z) \right] \right]$$

Entwicklung bis zur 3. Ordnung

1.Term: Coulomb-Term

2.Term: Dipol-Potential

3.Term: Quadrupol-Potential

es folgen Oktupol-Potenzial $\sim \frac{1}{r^7}$, Hexadekupol-Potenzial $\sim \frac{1}{r^9}$

2.1 Elektrostatisches Feld im Vakuum

neutrales System (Atom, Molekül): $\sum_i Q_i = 0$

Atome: 2. Term im Zeitmittel = 0, bei Momentaufnahme $\neq 0 \rightarrow$ van der Waals-Wechselwirkung.

heteronukleare Moleküle: (HCl, CO, NH₃, H₂O, ...) \rightarrow permanentes Dipolmoment. Quadrupolterm gibt Abweichung von der Kugelsymmetrie an:

Quadrupol-Term:

$$\begin{aligned}\sum_i Q_i(3x_i^2 - r_i^2) &=: QM_{xx} \\ \sum_i Q_i(3y_i^2 - r_i^2) &=: QM_{yy} \\ \sum_i Q_i(3z_i^2 - r_i^2) &=: QM_{zz} \\ \sum_i Q_i 3x_i y_i &=: QM_{xy} = QM_{yx} \\ \sum_i Q_i 3x_i z_i &=: QM_{xz} = QM_{zx} \\ \sum_i Q_i 3y_i z_i &=: QM_{yz} = QM_{zy}\end{aligned}$$

Quadrupol-Tensor: $QM = Q \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$

M ist symmetrisch, $\text{Spur}(M) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_Q = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} Q (M_{xx}x^2 + M_{yy}y^2 + M_{zz}z^2 + 2[M_{xy}xy + M_{xz}xz + M_{yz}yz])$$

2.1.8 Influenz

Metallkugel im elektrischen Feld: Die Elektronen bewegen sich so lange bis im inneren der Kugel $\vec{E} = 0$ gilt.

$\vec{E} \perp$ Oberfläche

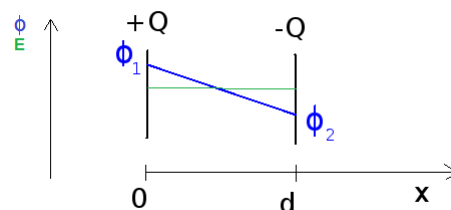
im Leiter sind positive und negative Ladungsträger getrennt.

2.1.9 Der Kondensator

$$Q = CU$$

C : Kapazität des Kondensators $\left[1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} =: 1\text{Farad}\right] [\text{F}]$

1. der Plattenkondensator:



2.1 Elektrostatistisches Feld im Vakuum

Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\rightarrow \Phi(x) = ax + b$$

mit $\Phi_1 = b$ und $\Phi_2 = a \cdot d + \Phi_1$ folgt $a = -\frac{U}{d}$

$$\Phi(x) = -\frac{U}{d}x + \Phi_1$$

Für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi = \frac{U}{d}\hat{x}$$

Das Feld ist homogen und konstant.

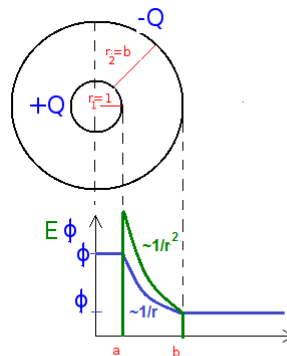
Mit der Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{Q}{A}$ folgt:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{x} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\hat{x}$$

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$\rightarrow \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C$$

2. der Kugelkondensator:



Für $r < a$ gilt:

$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$\Phi(r < a) = \text{const.}$$

$$\Phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}$$

Für $a < r < b$ gilt

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\Phi(a < r < b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Für $r > b$ gilt:

$$\begin{aligned} Q_{ges} &= Q_1 + Q_2 = 0 \\ &\rightarrow \vec{E} = \vec{0} \\ \Phi_a &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b} \end{aligned}$$

Die Spannung zwischen den Kugeln ergibt sich wie folgt:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab} Q$$

Für die Kapazität folgt dementsprechend:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{a-b}$$

3. Kombination von Kondensatoren

Parallelschaltung: $C_{ges} = \sum_i C_i$

Reihenschaltung: $\frac{1}{C_{ges}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

2.1.10 Energie des elektrischen Feldes

Plattenkondensator

Aufladung: Transport kleiner Ladungen ΔQ

Arbeit: $\Delta W = \Delta Q \cdot U = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \Delta Q$

insgesamt: $W = \frac{d}{\epsilon_0 A} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d$

$$\Rightarrow \text{Energiedichte: } w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Energie in einer Konfiguration von Punktladungen q_1, q_2, \dots, q_N .

1. q_1 : Arbeit um Ladung an den Ort \vec{r}_1 zu transportieren: $W_1 = 0$

Potenzial der ersten Ladung: $\Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$

2. q_2 : Es muss Arbeit verrichtet werden um die Ladung in die Nähe der ersten Ladung zu bringen: $W_2 = q_2 \cdot \Phi_1(\vec{r}_2)$

Potenzial beider Ladungen: $\Phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} \right)$

⋮

Summe: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,k=1; i \neq k}^N \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$

Für Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$: $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \iiint \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV' \quad \hat{=} \quad \frac{Q^2}{2C}$

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

(Achtung bei Punktladungen!)

mit $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'$ folgt:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) dV \quad \hat{=} \quad \frac{1}{2} QU$$

mit $\vec{E} = -\nabla\Phi$ und $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ folgt:

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \Phi(\vec{r}) \Delta\Phi(\vec{r}) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \oint_R (\Phi \nabla\Phi) d\vec{f}$$

$$\xrightarrow{\lim_{R \rightarrow \infty}} W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 dV \quad \hat{=} \quad \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V$$

$$\text{Energie: } U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 dV$$

Wechselwirkungsenergie und Selbstenergie

2 lokalisierte getrennte Ladungsverteilungen ρ_1 und ρ_2 .

$\rho(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r})$ und $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$. Mit 2.7 und 2.8 folgt:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}_1^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}_2^2 dV + \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \vec{E}_2 dV$$

Erster Term: Selbstenergie U_{S1}

Zweiter Term: Selbstenergie U_{S2}

Dritter Term: Wechselwirkungsenergie U_{12}

Für Punktladungen gilt:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \checkmark$$

$$\text{aber: (setze } \vec{r}_1 = \vec{0}) \quad U_{S1} = -\frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_0^\infty = \infty \quad \ddagger$$

siehe N Punktladungen: Selbstenergien der Punktladungen werden fortgelassen. (Renormierung)

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

Dielektrika ändern die Spannung an einem Kondensator. Die Kapazität C ist von der **Dielektrizitätskonstante** ϵ (auch Permittivität genannt) abhängig.

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_r \cdot C_{\text{Vakuum}}$$

$\epsilon_r > 1$ ist eine Materialkonstante.

Das elektrische Feld bewirkt eine Trennung der Ladungsschwerpunkte der Moleküle des

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

Dielektrikum: S^+ , S^- sind getrennt (induzierter Dipol). → Polarisation der Materie

elektrisches Feld:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon} \frac{Q}{d^2}$$

induziertes Dipolmoment:

$$\vec{p}_{ind} = q \cdot \vec{d}$$

äußere Kraft auf die Ladungen

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E}$$

α : Polarisierbarkeit (mikroskopische Eigenschaft)

Kugelsymmetrische Teilchen (Atome): α isotrop

Bsp.: HCl: α ist ein Tensor

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\perp} \end{pmatrix}$$

Flächenladungsdichte: $\sigma_{pol} = \frac{Q_{pol}}{A}$

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i; \quad |\vec{P}| = nqd, \quad n = \text{Teilchendichte}$$

auf den Kondensatorplatten $E_{vak} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

im Dielektrikum $|\vec{E}_{Diel}| = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma - \sigma_{Pol})$

$$\vec{E}_{Diel} = \vec{E}_{Vak} - \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P} \text{ im Dielektrikum ist die elektrische Feldstärke geringer.}$$

Polarisation: $\vec{P} = n\alpha\epsilon_0\vec{E} =: \epsilon_0\chi\vec{E}$; $\chi := n\alpha$ **dielektrische Suszeptibilität** (makroskopische Eigenschaft)

$$E_{Diel} = \frac{1}{1 + \chi} E_{vak} = \frac{1}{\epsilon} E_{vak}$$

$$\Rightarrow \epsilon = 1 + \chi = 1 + n\alpha$$

2.2.1 Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik in Materie

Dipol (entgegengesetzte Ladungen im jeweiligen Abstand $a/2$ vom Ursprung):

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}) - \Phi_1(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}), \quad \Phi_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

Dipolmoment: $p = q \cdot a$, $\vec{p} = q\vec{a}$

a sehr klein, idealisierter Dipol: $a \rightarrow 0$; $\vec{p} = \text{const.}$

$$\Phi_1(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}) = \Phi_1(\vec{r}) - \frac{\vec{a}}{2} \cdot \nabla \Phi_1(\vec{r}) + O(a^2)$$

$$\Phi_1(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}) = \Phi_1(\vec{r}) + \frac{\vec{a}}{2} \cdot \nabla \Phi_1(\vec{r}) + O(a^2)$$

$$\Rightarrow \text{Dipol: } \Phi(\vec{r}) = -\vec{a} \cdot \nabla \Phi_1(\vec{r}) + \dots$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \vec{a} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) + \dots$$

$$\lim a \rightarrow 0 : \quad \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \sim \frac{1}{r^3}$$

Kondensator im Dielektrikum

E kleiner, U kleiner, $C = \frac{Q}{U}$ größer als im Vakuum.

Betrachte Volumen V :

Dichte der Dipole: $\vec{P} = \frac{\text{Dipolmoment}}{\text{Volumen}}$

$P = \sigma_p$ Flächenladungsdichte an der Oberfläche

$d\vec{f}$: Flächenelement mit Orientierung nach außen.

$dQ_p = -\vec{P} \cdot \vec{f}$ Ladungsüberschuss im Inneren

$$Q_p = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{f} = \int \nabla \cdot \vec{P} dV$$

Ladungsdichte der Polarisationsladungen: ρ_p

$$Q_p = \int \rho_p dV$$

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

ρ_p : Polarisationsladungen

ρ_f : „freie Ladungen“, äußere Ladungen, z.B. auf Kondensatorplatten

$$\rho_f(\vec{r}) \equiv \rho(\vec{r}) \quad , \quad \rho_{total} = \rho + \rho_p$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p = \rho - \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Definition: $\vec{D} := \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ „**dielektrische Verschiebung**“

Maxwell-Gleichungen:

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$$

Energie einer Konfiguration freier Ladungen im Dielektrikum:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV \quad \text{mit } \rho: \text{ freie Ladung}$$

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

$$W = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \vec{D}) \Phi dV = -\frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \nabla \Phi dV = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

$$\text{speziell: } w = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Bsp.: Plattenkondensator: $W = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 Ad = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_r \epsilon_0 A} < W_{\epsilon_r=1}$

Bemerkung: $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$

Erster Term: Energiedichte des elektrischen Feldes.

Zweiter Term: „mechanische“ Energie, die zur Polarisation der Dipole aufgebracht wird.

Verhalten der Felder an Grenzflächen

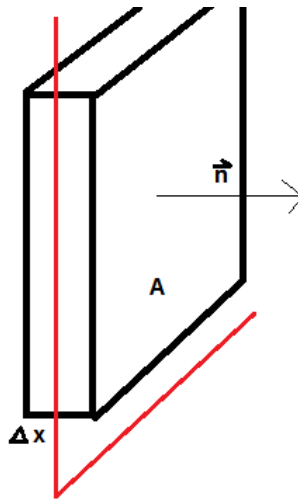
Grenzfläche von homogenen Bereich mit $\epsilon_r = \epsilon_1$, $\vec{D}^{(1)}$ und $\vec{E}^{(1)}$ bzw. $\epsilon_r = \epsilon_2$, $\vec{D}^{(2)}$ und $\vec{E}^{(2)}$

Annahme $\rho = 0$ (keine freien Ladungen) $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho = 0$; $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

\vec{D} :

Gauß'scher Satz $\rightarrow \oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = 0$

Gauß'sches Kästchen um die Grenzschicht. Dicke $\Delta x \rightarrow 0$, Fläche A



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \vec{D}^{(2)} \cdot \vec{n} A - \vec{D}^{(1)} \cdot \vec{n} A = 0 \quad (\text{für } \Delta x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow D_n^{(2)} = D_n^{(1)}$$

Normalkomponente von \vec{D} ist stetig.

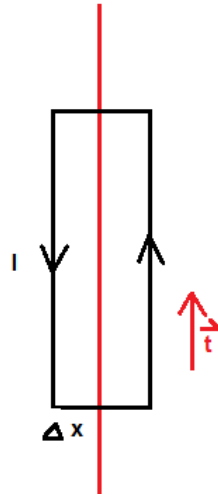
Bemerkung: Falls freie Flächenladungen an der Grenzfläche vorhanden sind, gilt

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma$$

\vec{E} :

Statz von Stokes $\rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$

Stokes'sche Fläche: Kanten l , $\Delta x \rightarrow 0$



$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{E}^{(2)} \cdot \vec{t}l - \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{t}l \quad (\text{für } \Delta x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

Tangentialkomponente von \vec{E} ist stetig.
 \Rightarrow Brechung der Feldlinien

Bsp: Feld einer polarisierten Kugel im Vakuum

Polarisation: $\vec{P} = \text{const}$ im Inneren der Kugel

Dipolmoment: $\vec{p} = \vec{P} \frac{4\pi}{3} R^3$

Ansatz:

$$\text{außen: Dipolfeld } \vec{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \quad |\vec{r}| > R \quad (2.9)$$

$$\text{innen: } \vec{E}_i = \text{const.}, \quad |\vec{r}| < R \quad (2.10)$$

Grenzbedingungen:

1. $E_{a,t} = E_{i,t}$, für $|\vec{r}| = R$
2. $D_{a,n} = D_{i,n}$, für $|\vec{r}| = R$

Zu 1):

äquivalent: $\vec{E}_a \times \vec{r} = \vec{E}_i \times \vec{r}$ bei $|\vec{r}| = R$. Nach Einsetzen in 2.9 folgt:

$$\Rightarrow \vec{E}_i = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Zu 2):

mit $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ folgt: $\epsilon_0 \vec{E}_a \cdot \vec{r} \stackrel{!}{=} \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{r} + \vec{P} \cdot \vec{r}$ Einsetzen in 2.9 \Rightarrow Ansatz stimmt!

2.2.2 Molekulare Polarisierbarkeit

polare Moleküle: permanentes Dipolmoment z.B. H_2O , NCl ; NH_3 , ...

\rightarrow Orientierungspolarisation, Verschiebungspolarisation

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

unpolare Moleküle z.B.: H₂, O₂, CO₂, CCl₄,...

→ nur Verschiebungspolarisation (wird im folgenden betrachtet)

Polarisation im äußeren Feld: $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$; α : molekulare Polarisierbarkeit

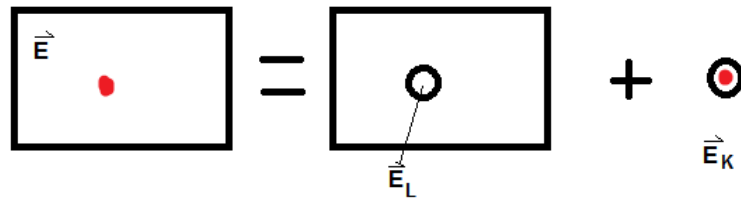
n = Teilchendichte = $\frac{\#\text{Moleküle}}{\text{Volumen}}$

$$\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (1 + n\alpha) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = 1 + n\alpha$$

Für große Dichten bzw. Flüssigkeiten passt diese Formel nicht mehr.



$$\vec{E} = \vec{E}_L + \vec{E}_K$$

Molekül spürt ein effektives Feld \vec{E}_L

$$\vec{E}_K = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \text{ (s.o.)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_L = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} = \vec{E} \frac{\epsilon_r + 2}{3}, \quad |\vec{E}_L| > |\vec{E}|$$

$$\vec{P} = n \alpha \epsilon_0 \vec{E}_L = n \alpha \epsilon_0 \frac{\epsilon_r + 2}{3} \vec{E}$$

Clausius-Mossotti:

$$\Rightarrow n\alpha = 3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} < \epsilon_r - 1$$

2.2.3 Grundproblem und Randwertprobleme der Elektrostatik

Grundproblem der Elektrostatik: gegeben sei $\rho(\vec{r})$, finde $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi$

ohne Dielektrika: löse $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$

- unendlicher Raum, keine leitenden Flächen:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Lösung: **Green'sche Funktion:**

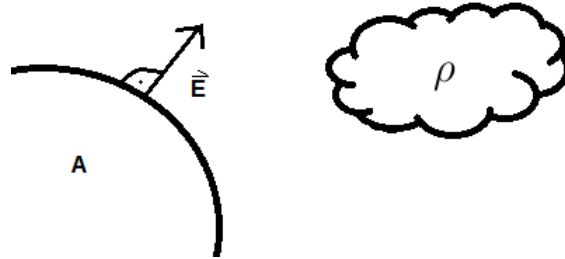
$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Es gilt $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = - \int G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} dV' \quad ; \quad \Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r})$$

2.2 Dielektrika im elektrischen Feld

- mit leitenden Flächen \rightarrow Randwertproblem:

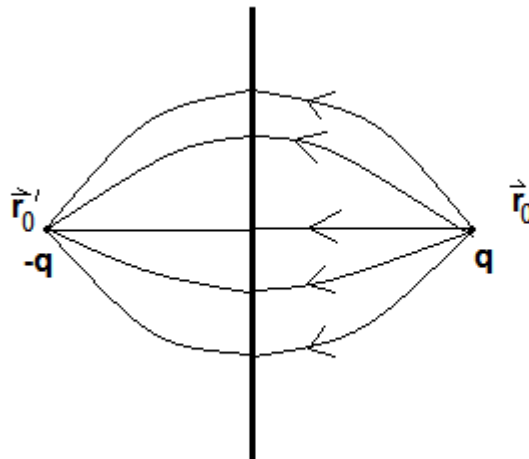


$\vec{E} \perp F \rightarrow \Phi(\vec{r})$ ist konstant auf Fläche F .

Dirichlet-Randbedingung: $\Phi(\vec{r})$ auf Fläche F gegeben, $F = \partial V$, Lösung eindeutig
allgemeine Methode: Green'sche Funktion

Spezialfälle: **Methode der Bildladung:**

- Punktladung vor Metallplatte



$$\Phi_+(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Bildladung (gedachte Ladung): $\Phi_-(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|}$

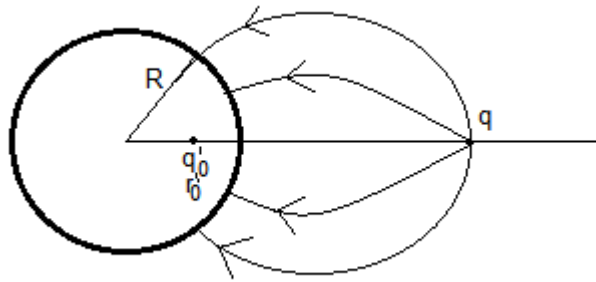
\vec{r}'_0 ist Spiegelpunkt von \vec{r}_0

$$\Rightarrow \Phi(\vec{r}) = q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|} \right) \quad \text{für } x \geq 0$$

auf der Fläche F gilt $|\vec{r} - \vec{r}_0| = |\vec{r} - \vec{r}'_0| \Rightarrow \Phi(\vec{r}) = 0$

Mit dem Gauß'schen Satz folgt für die Flächenladung σ auf F : $\sigma = \epsilon_0 E$ mit $\int \sigma df = -q$

- Punktladung vor Metallkugel



Ansatz: Bildladung q' bei $r = r'_0$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}'_0|} \right)$$

Es soll gelten: $\Phi(\vec{r}) = 0$ bei $|\vec{r}| = R \Rightarrow$ Wähle $r'_0 = \frac{R^2}{r_0}$ (reziproker Radius),
 $q' = -\frac{R}{r_0}q$

2.3 Elektrischer Strom

2.3.1 Ladungstransport

- Elektronenleiter: Metalle, Halbleiter
- Ionen: negativ, positiv (Elektrolyten (Akku), Nervenzellen)
- Mischformen: Ionen und Elektronen (Gasentladungslampen, Plasma)

Mikroskopische Beschreibung:

Stromstärke: $I := \frac{dQ}{dt} [\text{A}]$

Stromdichte: $|\vec{j}| := \frac{dI}{dA} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

im Volumenelement seien n Ladungen q mit der Geschwindigkeit \vec{v} .

→ Stromstärke: $I = nq\vec{A} \cdot \vec{v}$

→ Stromdichte: $\vec{j} = nq\vec{v}$

Mit der Ladungsdichte $\rho_{el} := nq$ folgt:

$$\vec{j} = \rho_{el}\vec{v}$$

Gasentladung: $\vec{j} = \rho^+\vec{v}^+ + \rho^-\vec{v}^- + \rho_{el}\vec{v}_{el}$

Elektronen werden von einer Quelle innerhalb der Fläche S emittiert.

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \rho dV$$

Mit dem Gauß'schen Satz folgt die **Kontinuitätsgleichung**:

$$\nabla \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_{el}(\vec{r}, t)$$

2.3.2 Elektrische Leitfähigkeit

$T = 0K$: Keine Wechselwirkung zwischen e^- und A^+ (Atomrümpfe im Leiter).

$T > 0K$: Atomrümpfe vibrieren um die Gleichgewichtsposition. Mittlere Geschwindigkeit von Atomen, Molekülen aus der Boltzmannverteilung:

$$\langle |\vec{v}| \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}$$

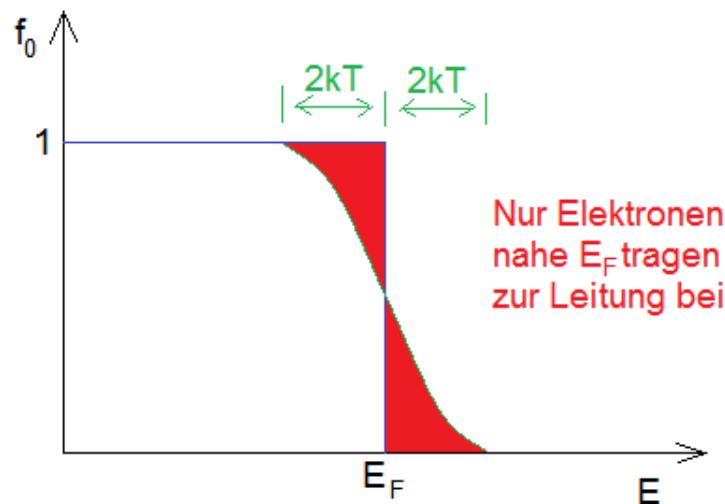
Elektronen: Fermi-Verteilung beschreibt deren Geschwindigkeit. Pauli-Prinzip erlaubt Besetzung eines Energiezustands mit genau einem Teilchen.

Fermi-Verteilung:

$$N(E)dE \sim \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}} f_0(E)dE$$

mit: $f_0(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1}$

Dabei ist E_F die *Fermi-Energie*. Diese ist materialabhängig.



ohne äußeres elektrisches Feld:

$$E_i \vec{v}_i = 0; \quad \langle \vec{v} \rangle = 0$$

$$\rightarrow \vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle = 0$$

Stoßzeit $\tau_s = \frac{\Lambda}{\langle v \rangle}$, Λ : Mittlere, freie Weglänge

mit äußerem elektrischen Feld \vec{E} :

$$\vec{F} = -e\vec{E} \rightarrow \langle \Delta \vec{v} \rangle = \frac{\vec{F}}{m} \tau_s; \quad \langle \Delta \vec{v} \rangle \ll \langle \vec{v} \rangle$$

$$\vec{v}_D := \langle \Delta \vec{v} \rangle \quad \text{Driftgeschwindigkeit}$$

Für die Stromdichte folgt

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau_s}{m} \vec{E} = \sigma_{el} \vec{E}$$

Dabei ist $\sigma_{el} := \frac{ne^2\tau_s}{m} \left[\frac{\text{A}}{\text{Vm}} \right]$ die **elektrische Leitfähigkeit**.

$u = \frac{\sigma_{el}}{ne} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \right]$ ist die **Beweglichkeit** der Elektronen. Es folgt:

$$\vec{v}_D = u\vec{E}$$

2.3.3 Ohm'sches Gesetz

Stromstärke

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A} = jA \quad \text{mit} \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{und} \quad U = E \cdot L$$

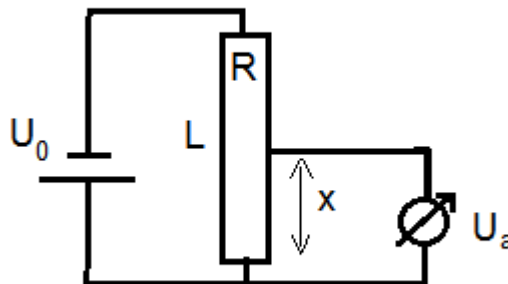
$$I = \frac{A}{L} \sigma U = \frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{L}{\sigma A} = \rho_{el} \frac{L}{A} \left[\frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega \right]$$

ρ_{el} : spez. Widerstand

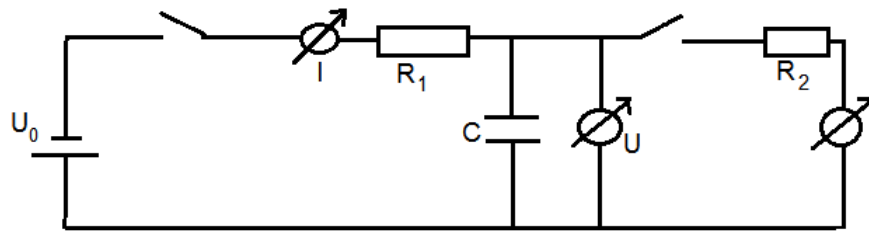
Anwendungen

- Spannungsteiler:



$$U_a = U_0 \frac{x}{L}$$

- Aufladen eines Kondensators:



$t = 0$: Schalter wird geschlossen

$$U(t = 0) = 0$$

$$I(t) = \frac{1}{R_1}(U_0 - U(t)) \text{ mit } U(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R_1} - \frac{Q(t)}{RC}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C} I(t)$$

$$\ln I = -\frac{t}{R_1 C} \text{ mit } I(t = 0) = I_0$$

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{R_1 C}}; \quad U(t) = U_0(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}})$$

- **Entladen eines Kondensators:**

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dU}{dt} = \frac{1}{R_2} U(t)$$

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{R_2 C} dt$$

$$\ln U = -\frac{t}{R_2 C} + const$$

$$U(t = 0) = U_0$$

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}}; \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

2.3.4 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

a) Metalle:

Für $T > \Theta_D$ ist $\rho_{el} \sim T$

Für $T \ll \Theta_D$ ist $\rho_{el} \sim T^5$

$$\rho_{el} = \rho_{Ph}(T) + \rho_{st}$$

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$$

$$\beta T \ll \alpha$$

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \alpha T)$$

b) Halbleiter:

tiefe Temperaturen = Isolator

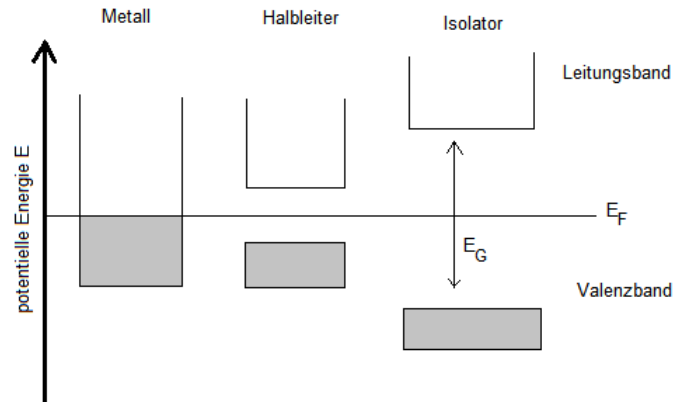
hohe Temperaturen = Metalle

Bandlücke E_G bei Halbleitern $\sim 0,5$ bis 1.5 eV. Bei Isolatoren deutlich größer.

Dichte der Halbleiter $n(T) = n_0 e^{-\frac{E_G}{kT}}$

Halbleiter zeigen negative Temperaturkoeffizienten $\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dt} < 0$

2.3 Elektrischer Strom



c) Supraleiter:

Bei Supraleitern verschwindet der elektrische Widerstand bei geringen Temperaturen

($T_c < 30K$) $\rho_{el} = 0$

Quecksilber: $< 4K$: $\rho = 0$

10% der Elektronen tragen zu Supraleitung bei.

2.3.5 Elektrische Leistung

Arbeit: $W = Q(\Phi_1 - \Phi_2) = QU$

Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = U \frac{dQ}{dt} = UI$ [W=VA]

Widerstand: $R = \frac{U}{I} \Rightarrow P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$

2.3.6 Gleichstrom-Netzwerk

1. Kirchhoff'sche Regel: Knotenregel

$$\sum_k I_k = 0$$

Die Summe aller Ströme, welche in einen Knoten hinein- bzw. heraus fließen, muss 0 ergeben.

2. Kirchhoff'sche Regel: Maschenregel

1. Reihenschaltung von Widerständen R_k :

$$U_0 = \sum_k U = \left(\sum_k R_k \right) I = R_{ges} I$$

2. Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

2.4 Magnetostatik

2.4.1 Magnetfelder

magnetischer Nord- und Südpol

Unterschiede zum elektrischen Dipolfeld:

- es gibt keine magnetischen Monopole
- magnetische Feldlinien sind immer geschlossen

magnetische Feldstärke

$$\text{Kraft } \vec{F} = f \frac{p_1 p_2}{r^2} \vec{r}_{12}$$

p_1, p_2 : magnetische Polstärke [Vs]; $f = \frac{1}{4\pi\mu_0}$; mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right]$: magnetische Permeabilitätskonstante

analog zum elektrischen Feld: $\lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{p_2} = \vec{H} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$: magnetische Feldstärke (alt)

$$\vec{B} := \mu_0 \vec{H}$$

Einheit von B : $1\text{T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$; T: Tesla; Wb: Weber

früher: Gauß $1\text{G} = 10^{-4}\text{T}$

B : magnetische Feldstärke

H : magnetische Erregung

2.4.2 Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik

nur **magnetische Dipole**: einzelne magnetische Pole bzw. Ladungen werden nicht gefunden.

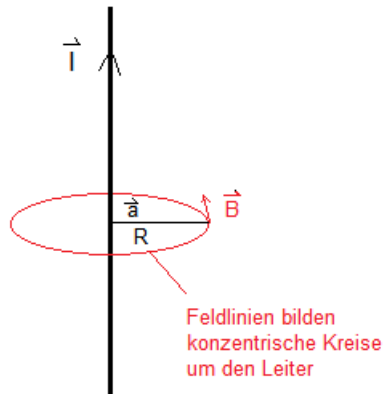
Magnetfeld: $\vec{B}(\vec{r},)$

In Analogie zu $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ folgt:

1. Maxwell'sche Gleichung der Magnetostatik

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Magnetfeld eines langen geraden Leiters:



experimentell: $\vec{B} \sim \vec{I} \times \vec{a}$; $|\vec{B}| \sim \frac{I}{R}$

betrachte $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}$ für einen Kreis um den Leiter.

$\vec{B} \parallel d\vec{r} \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = B 2\pi R \sim I$ (aber unabhängig von R)

setze: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ (bzw. $\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$)

Verallgemeinerung: Ampère'sches Durchflutungsgesetz:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

für beliebige geschlossene Wege um einen stromführenden Leiter.

In der Magnetostatik gilt: ρ , \vec{j} sind zeitunabhängig. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$.

$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f}$ für jede Fläche F .

Mit dem Satz von Stokes folgt die

2. Maxwell'sche Gleichung der Magnetostatik:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2.11)$$

Grundproblem der Magnetostatik:

gegeben sei $\vec{j}(\vec{r}, t)$, stationär,

finde $\vec{B}(\vec{r}, t)$

Lösung: Formel von **Biot-Savart**

- für idealisierte Stromleiter
„stückchenweise“:

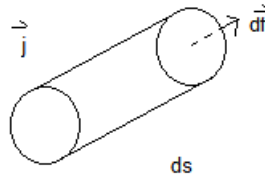
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

hierin ist $d\vec{s}$ ein „Stückchen“ des Leiters, und \vec{r} der Verbindungsvektor vom Leiter-Stückchen zum Ort, an dem \vec{B} betrachtet wird.

als Integral über den Leiter:

$$\vec{B}(\vec{r},) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- für Stromverteilungen:
betrachte Leiterelement:



$$I ds = j df ds = j dV \rightarrow Id\vec{s} = \vec{j} dV$$

$$\vec{B}(\vec{r},) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

2.4.3 Vektorpotenzial

Es gilt: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ für jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},)$.

Umgekehrt: für ein Vektorfeld \vec{B} mit $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ gibt es ein Vektorfeld \vec{A} , so dass $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
Für das Magnetfeld schreiben wir daher

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

\vec{A} heißt Vektorpotenzial und ist nicht eindeutig festgelegt:

Eichtransformationen:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

dann: $\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla f) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

Eichungen: weitere einschränkende Bedingungen an \vec{A} .

z.B. Coulomb-Eichung: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

Aus 2.11 folgt:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{ohne Beweis})$$

Coulomb-Eichung: $\Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

vgl. Poisson-Gl. Elektrostat. $\rightarrow \vec{A}(\vec{r},) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$

Für das Magnetfeld folgt:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Dies ist die Formel von Biot-Savart. \checkmark

2.4.4 Magnetische Momente

Kleiner (atomarer) geschlossener Stromkreis I (Breite a , Länge b ; in x - y -Ebene)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{j} dV = I d\vec{r}'$$

$$\vec{A}(\vec{r},) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

siehe Multipolentwicklung: $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\vec{r}' + \frac{1}{r^3} \oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' + \dots \right]$$

Mit $\oint d\vec{r}' = 0$ und $\oint (\vec{r} \cdot \vec{r}') d\vec{r}' = ab \cdot \vec{e}_z \times \vec{r} \equiv \vec{F} \times \vec{r}$ folgt:

$$\vec{A}(\vec{r},) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{F} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad \text{wobei } \vec{F}: \text{Flächenvektor.}$$

Terme höherer Ordnung können für $a, b \ll r$ vernachlässigt werden.

Definition: magnetisches Moment

$$\vec{m} = I \vec{F}; \quad |\vec{m}| = Iab$$

$$\vec{A}(\vec{r},) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right) : \quad \text{Dipolfeld}$$

Allgemeiner:

- für ebene Stromkreise $\vec{m} = I \cdot \vec{F}$
- generell: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')) dV$ (aus Multipolentwicklung)

Für ein System von Punktladungen:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = qn\vec{v}, \quad n: \text{Teilchendichte}$$

$\vec{j} = \frac{q}{M} \rho_M \vec{v}$ mit ρ_M : Massendichte und M : Teilchenmasse

$$\Rightarrow \vec{m} = \frac{q}{2M} \int \rho_M(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{v} dV = \frac{q}{2M} \cdot \vec{L}$$

mit \vec{L} : Gesamtdrehimpuls und $\frac{q}{2M}$: „gyromagnetisches Verhältnis“ (stimmt nicht für Elektronenspin!)

2.4.5 Bewegte Ladungen im Magnetfeld

Kraftrichtung steht senkrecht auf der Magnetfeldrichtung und der Bewegungsrichtung der Ladung

$$\vec{F} = q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Kraftwirkung in elektrischen und magnetischen Feldern auf Ladungen:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft})$$

Lorentzkraft

Zyklotron-Bewegung:

Betrag der Lorentzkraft: $|\vec{F}| = evB_z$

Zentrifugalkraft: $F = m \frac{v^2}{r}$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{B_z} \frac{m}{e} v$$

mit $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{B_z} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

$$\rightarrow \frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B_z^2}$$

a) Stromdurchflossener Leiter

Stromdichte $\vec{j} = nq\vec{v}_D = -en\vec{v}_D$

Strom: $I = j \cdot A$

Lorentzkraft auf Leiterstück der Länge dL :

$$dF = nqAdL(\vec{v}_D \times \vec{B})$$

$$dF = \vec{j} \times \vec{B} dV$$

$$\vec{F} = \int (\vec{j} \times \vec{B}) dV$$

Kraft auf einen geraden Leiter in einem homogenen Magnetfeld:

$$d\vec{F} = I \cdot (d\vec{L} \times \vec{B})$$

b) Parallele Leiter

Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \vec{e}_\phi$$

Lorentzkraft: $d\vec{F} = Id\vec{L} \times \vec{B}$

parallele Drähte: $\vec{B} \perp \vec{v}_D$

Kraft pro Längeneinheit:

$$\frac{F}{L} = IB = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r} I^2$$

Für $\frac{F}{L} = 2 \cdot 10^{-7} \text{N}$, Abstand der Leiter: $r = 1 \text{m} \Rightarrow I := 1 \text{A}$

Hall-Effekt

Betrachte einen stromdurchflossenen Leiter mit $\vec{j} = -n_e e \vec{v}_D$ im Magnetfeld \vec{B} . Die Lorentzkraft $\vec{F}_L = nq(\vec{v}_D \times \vec{B})$ auf die Elektronen bewirkt ein Coulomb-Feld $\vec{F}_C = nq\vec{E}_H$.

Im Kräftegleichgewicht gilt:

$$en\vec{E}_H = \vec{j} \times \vec{B}$$

Mit der *Hall-Spannung* $U_H := \vec{b} \cdot \vec{E}_H$ folgt:

$$U_H = \frac{\vec{b} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})}{ne} = R_H \cdot \vec{b} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$$

\vec{b} ist die senkrecht auf \vec{B} und \vec{j} stehende Breite des Leiters.

$R_H := \frac{1}{ne}$: Hall-Konstante

2.4.6 Materie im Magnetfeld

magnetische Feldstärke

$$B = \mu_r B_0$$

μ_r : relative Permeabilität (Materialkonstante)

$$B_0 = \mu_0 H \rightarrow B = \mu_r \mu_0 H$$

Äußeres Magnetfeld ruft in Materie eine magnetische Polarisation hervor. Ursache: magnetische Momente der Atome \vec{p}_m

$$\vec{M} := \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_{m_i} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$$

Magnetisierung der Materie

$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Für nicht zu große Feldstärken gilt $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ mit χ_m : magnetische Suszeptibilität

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) \\ &\rightarrow \mu_r = 1 + \chi_m \end{aligned}$$

für die meisten Stoffe gilt: $|\chi_m| \ll 1$.

$\chi_m < 0$: diamagnetisch

$\chi_m > 0$: paramagnetisch

$\chi_m > 0$; $|\chi_m| \gg 1$: ferromagnetisch

Anschauliche Deutung:

Elektron umkreist Atomkern im Radius r .

Kreisstrom im Atom: $I = q \frac{\omega}{2\pi}$

magnetisches Moment des Kreisstroms: $p_m = I \cdot A = \frac{1}{2} q r^2 \omega$

mit $m_e r^2 \vec{\omega} = m_e (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{L}$ folgt:

$$\vec{p}_m = \frac{q}{2m_e} \vec{L} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

Magnetisches Moment ist dem Drehimpuls entgegengesetzt.

Quantenmechanisch: $|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)} \cdot \hbar$

$$\rightarrow p_m = -\frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{L(L+1)}$$

2.4 Magnetostatik

$\mu_B := \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}$: Bohr'sches Magneton

Elektronenbahnen:

$|\vec{L}| = 0$: s-Elektronen: keine Magnetisierung möglich

$|\vec{L}| = 1$: p-Elektronen

$|\vec{L}| = 2$: d-Elektronen

$|\vec{L}| = 3$: f-Elektronen

Diamagnetismus

Stoffe ohne permanente magnetische Dipolmomente. Das Magnetfeld in der Probe ist kleiner als das äußere Feld: $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$; $\chi_m < 0$.

Bei inhomogenen Feldern bewegt sich das Material in Gebiete kleinerer Feldstärken.

Paramagnetismus

Stoffe mit permanentem magnetischen Dipolmoment.

Im äußeren Magnetfeld werden \vec{p}_{m_i} teilweise ausgerichtet.

$$\vec{M} = N|\vec{p}_m| \frac{1}{3} \frac{\vec{p}_m \cdot \vec{B}}{kT} \vec{e}_B$$

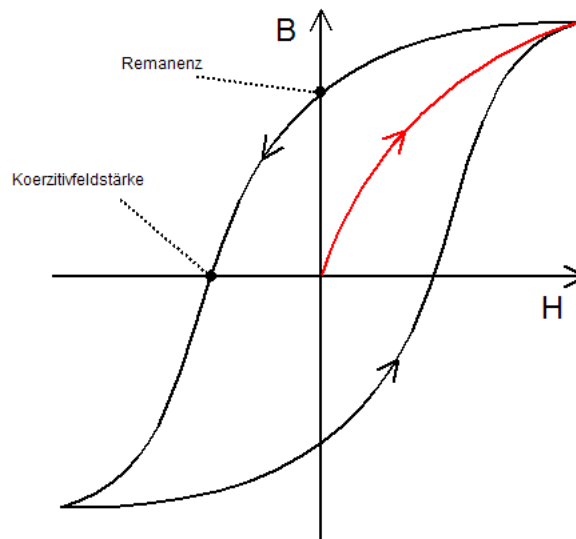
$$\chi_m = \mu_0 \left| \frac{\vec{M}}{B} \right|$$

$$\rightarrow \chi_m = \frac{1}{3} \mu_0 \frac{p_m^2 N}{kT} \sim \frac{1}{T}$$

Ferromagnetismus

Stoffe mit ungefüllter d- oder f-Schale.

Nur in der kondensierten Phase. Besonders hohe Magnetisierung durch kollektive Wechselwirkung der Atome. (siehe Festkörperphysik!)



Für $T > T_C$: (T_C : Curie-Temperatur)

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$

Antiferromagnetismus

„zusammengesetzte“ Substanzen wie NiO oder Cr₂O₃.

Zwei ferromagnetische Untergitter kompensieren sich gegenseitig. χ_m ist leicht positiv.

Mit der Grenztemperatur T_N (Néel-Temperatur) gilt:

$$\chi_m = \frac{C}{T + T_N}$$

2.5 Zeitlich veränderliche Felder

2.5.1 Faraday'sches Induktionsgesetz

Die Änderung eines Magnetfeldes induziert in einer Leiterschleife eine Spannung U_{ind} .

Diese ist abhängig von:

- der Richtung des Magnetfeldes
- der Richtung der Änderung des Magnetfeldes
- der Anzahl der Windungen der Leiterschleife
- der Änderung der Fläche der Leiterschleife

Der magnetische Fluss durch die Leiterschleife ändert sich zeitlich. Es gilt:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_m = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$U_{ind} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{f} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Für \vec{B} ist nach wie vor $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Für \vec{E} folgt:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

Eichtransformationen:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f \Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}f \Rightarrow \vec{E}' = -\nabla(\Phi' + \frac{\partial}{\partial t}f) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E}$$

2.5.2 Induktivitäten

Gegeben sei eine stromdurchflossene Spule welche die Fläche A_1 mit dem Umfang C_1 einschließt. Im Innern der Spule wirke das Magnetische Feld \vec{B} . Eine Zweite Spule (A_2 bzw. C_2) wird in das Magnetfeld gebracht. Gesucht ist die induzierte Spannung $U_{ind}^{(2)}$ in dieser Spule.

2.5 Zeitlich veränderliche Felder

$$U_{\text{ind}}^{(2)} = -\frac{d}{dt}\Phi_{m,2}, \quad \Phi_{m,2} = \int_{A_2} \vec{B} \times d\vec{f} = \int_{A_2} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{j}dV \rightarrow Id\vec{r}$$

$$\text{hier: } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

$$\rightarrow \Phi_{m,2}(t) = \frac{\mu_0 I_1(t)}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \cdot d\vec{r} \equiv L_{21} I_1(t)$$

mit $L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}' \cdot d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$; $L_{21} = L_{12}$: geometrische Konstante „Gegeninduktivität“

$$U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_{21} \frac{d}{dt} I_1(t)$$

Selbstinduktivität: Induktion einer Spannung im gleichen Stromkreis.

Bsp.: lange Spule: $\Phi_m = \mu_r \mu_0 \frac{N}{l} A \cdot I$

$$U_{\text{ind}} = -N \dot{\Phi} \equiv -L \dot{I}$$

Selbstinduktivität: $L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{l} A$

Allgemein mit Leiterschleifen $C_i, i = 1, 2, \dots, n$: $\Phi_{m,i} = \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}$; $\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_0 I_j}{4\pi} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\Rightarrow \Phi_{m,i}(t) = \sum_{j=1}^n L_{ij} I_j(t); \quad U_{\text{ind}}^{(i)} = -\sum_{j=1}^n L_{ij} \dot{I}_j(t)$$

Gegeninduktivitäten: $L_{ij} = L_{ji}, i \neq j$

Selbstinduktivitäten: $L_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$ Die Berechnung oft einfacher durch direkte Benutzung von $\Phi_{m,i} = \sum_j L_{ij} I_j$

Wechselstrom und Induktivitäten

Spule mit Induktivität L in einem Stromkreis mit angelegter Wechselspannung

$$U_e(t) = U_0 \cos \omega t.$$

Spannungsabfall an der Spule: $U_{\text{ind}} = -L \dot{I}$

$$U_e(t) - L \dot{I} = 0 \Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (\text{Strom ist um } -\frac{\pi}{2} \text{ phasenverschoben})$$

„induktiver Widerstand“: ωL

$$\text{komplexe Schreibweise: } U_e(t) = U_0 e^{i\omega t}; \quad I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

Physikalisch relevant sind jeweils die Realteile.

$$\text{Einsetzen führt auf } I_0 = \frac{U_0}{\omega L}; \quad \phi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Komplexer Widerstand: } Z = \frac{U}{I} = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2.5.3 Maxwell-Gleichungen und Feldenergie

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.15)$$

Der zweite Term in Gleichung (2.15) ist der *Maxwell'sche Verschiebungsstrom*.
Er rettet die Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$

Feldenergie

elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \quad (\text{ohne Dielektrikum}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (\text{mit Dielektrikum}) \end{aligned}$$

magnetisches Feld:

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (\text{ohne Dielektrikum}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (\text{mit Dielektrikum}) \end{aligned}$$

Begründung: Energieerhaltung: an Ladung geleistete Arbeit des Feldes: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Leistung $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Für eine Ladungsverteilung ρ , $\vec{j} = \rho\vec{v}$

→ Leistungsdichte: $f = \frac{\text{Leistung}}{\text{Volumen}} = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Aus 2.15 folgt: $\mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Allgemein gilt: $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$.

Mit 2.14 folgt: $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}^2$$

Definitionen:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} : \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 : \quad \text{Energiedichte}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} w = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{Poynting'scher Satz}$$

2.5 Zeitlich veränderliche Felder

Interpretation:

ohne Ladungsträger, $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte $w \leftrightarrow$ Energieerhaltung

\vec{S} : Energiestromdichte

mit Ladungsträgern, $\vec{j} \neq \vec{0}$:

Felder leisten Arbeit an den Ladungen; Verlust an Feldenergie $\hat{=} \vec{j} \cdot \vec{E}$

Integrale Form:

$W = \int w \cdot dV$ (Energie des Feldes), $P = \int \vec{j} \cdot d\vec{V}$ (Leistung)

$$\rightarrow \frac{d}{dt} W = -P$$

magn. Feldenergie(hier: $\vec{E} = \vec{0}$)

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B}^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int (\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) + \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})) dV$$

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int \vec{A} \cdot \mu_0 \vec{j} dV = \frac{1}{2} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV$$

Mit $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ folgt dann:
$$W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

Für zwei Leiterschleifen ($\vec{j} dV \rightarrow I d\vec{r}$) folgt: $W_m = \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{i,j} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j$,

speziell bei einzelnerm Leiter: $W_m = \frac{1}{2} L I^2$.

$$\frac{d}{dt} W_m = L I \dot{I} = -U_{\text{ind}} \cdot I = U_e \cdot I$$

3 Ergänzungen

∇, Δ in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

lokale Basisvektoren: $\vec{e}_{u_i} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|}, |\vec{e}_{u_i}| = 1$

$$\vec{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) = \vec{e}_r$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta), \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r \rightarrow \vec{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0), \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \vartheta \rightarrow \vec{e}_\varphi = (-\sin \vartheta, \cos \varphi, 0)$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ orthogonal.

$$f(\vec{r}) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| \vec{e}_r \cdot \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| \vec{e}_\vartheta \cdot \nabla f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| \vec{e}_\varphi \cdot \nabla f$$

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Divergenz: Sei $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\vartheta \vec{e}_\vartheta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$$

Rotation:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\vartheta \right] \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_r \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Laplace ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$):

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r} f) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} f) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} f + \frac{1}{\tan \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} f + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} f \right) \end{aligned}$$