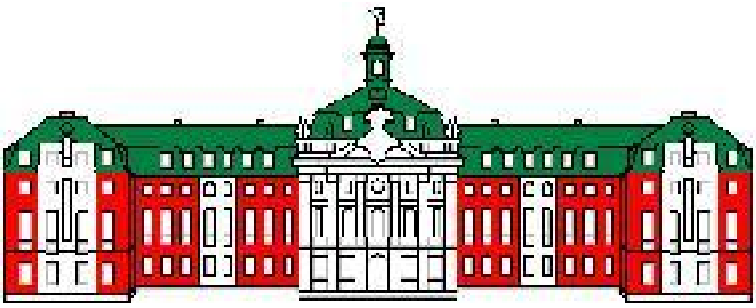
THEORETISCHE MECHANIK

P. Eckelt

Vorlesung

Wintersemester 1999/2000



Westfälische Wilhelms-Universität

Institut für Theoretische Physik

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

In dieser Vorlesung wird die *Newtonsche Mechanik* als bekannt vorausgesetzt (siehe Physik I): Trägheitsgesetz, inertiale Bezugssysteme; Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \ , \tag{*}$$

woraus mit Hilfe der Anfangsbedingungen die Bahn $\vec{r}(t)$ zu berechnen ist; Konstanten der Bewegung: Energie, Impuls, Drehimpuls, ...; Actio = Reactio, N-Körperproblem und entsprechende Erhaltungssätze; Galilei-Invarianz, beschleunigte Bezugssysteme; wichtige Modellsysteme: freies Teilchen, harmonischer Oszillator, Bewegung im Zentralpotential, starrer Körper, gekoppelte Schwingungen kleiner Amplitude, ... (die beiden letzten Systeme wenigstens in Ansätzen).

Isaac Newton, 1642 - 1727

Die in diesem Sript gezeigten Bilder von Wissenschaftler(inne)n sind entnommen aus: R. Abraham und J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin/Cummings Publ. Co., Reading (Mass.) .... (1978). – Die Newtonsche Mechanik ist eine *vollständige dynamische Theorie* zur Beschreibung der langsamen [1)] Bewegung makroskopischer [2)] Körper unter dem Einfluß von Kräften – sofern man die Kräfte kennt.

Oft kennt man aber die Kräfte nicht (nur teilweise), dafür sind gewisse geometrisch-kinematische Einschränkungen der Bewegung vorgegeben: „Zwangsbedingungen“, z. B. starrer Körper, Teilchen auf gekrümmter Fläche ... Oder aber: Man kennt zwar die Kräfte, kann aber die Bahn(en) nicht in geschlossener Form angeben. $\Rightarrow$ Näherungsmethoden (Störungstheorie, ...), numerische Verfahren, ... , z. B. N-Körperproblem der Himmelsmechanik ($N \geq 3$). In diesen Fällen wird die Analyse der Bewegung erheblich erleichtert durch Darstellungen der Mechanik, die vor allem auf *Lagrange* und *Hamilton* zurückgehen.

Joseph-Louis Lagrange, 1736 - 1813

[1)] $v \ll c$, sonst relativistische Mechanik (Einstein)
[2)] atomarer und subatomarer Bereich: Quantenmechanik

William Rowan Hamilton, 1805 - 1865

Ferner: Oft ist man weniger an den Details einer speziellen Bewegung eines bestimmten Systems interessiert, als vielmehr an der Struktur der Gesamtheit aller Bewegungen dieses Systems oder ganzer Familien von Systemen. Allgemeine Fragestellungen betr. Konstanten der Bewegung und Symmetrien, Periodizität und Quasiperiodizität, Stabilität von Bahnen, Attraktoren, reguläre und chaotische Bewegungen, ... Hierfür ist die Lagrange- bzw. die Hamilton-Mechanik unerläßlich.

Schließlich ist die Lagrange-Hamilton-Mechanik unabdingbare Grundlage der Quantentheorie, Quantenfeldtheorie(n), ...

Literatur:

- V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics,
  Springer-Verlag, New York, ... (1978)
- A. Budó, Theoretische Mechanik (8. Auflage),
  Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1976)
- A. Goldstein, Classical Mechanics (2. ed.), Addison-Wesley Publ. Co.,
  Reading (Mass.), ... (1980)
- E. Saletan und A. Cromer, Theoretical Mechanics,
  Wiley & Sons, New York, ... (1971)
- J. José und E. Saletan, Classical Dynamics: A Contemporary Approach,
  Cambridge University Press (1998)

1 Lagrange-Mechanik

Betrachte zunächst nur *ein* Teilchen der Masse m unter dem Einfluß der Kraft $\vec{F}$; die resultierende Bahn $\vec{r}(t)$ ist aus der Bewegungsgleichung (*) zu berechnen. Das Teilchen werde zusätzlich einer *Zwangsbedingung*

$$f(\vec{r}, t) = 0 \tag{1.1}$$

unterworfen; eine *Zwangskraft* $\vec{G}$ zwingt das Teilchen auf die durch (1.1) gegebene Fläche, die sich i.a. zeitlich ändert. Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{G}\ . \tag{1.2}$$

$\vec{G}$ ist unbekannt; man weiß nur, daß $\vec{G}$ (1.1) bewirkt. Diese Bedingung legt $\vec{G}$ aber nicht eindeutig fest: Die *vier* Gleichungen (1.2, 1) gestatten keine Bestimmung der *sechs* Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $G_x(t)$, $G_y(t)$, $G_z(t)$. Man macht die zusätzliche Annahme, daß $\vec{G}$ während der Bewegung ständig auf der durch (1.1) definierten Fläche senkrecht steht:

$$\vec{G} = \lambda\vec{\nabla} f(\vec{r}, t)\ , \tag{1.3}$$

wo λ eine (unbekannte) skalare Funktion von t ist, die von der Bewegung abhängt. Also:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f\ . \tag{1.4}$$

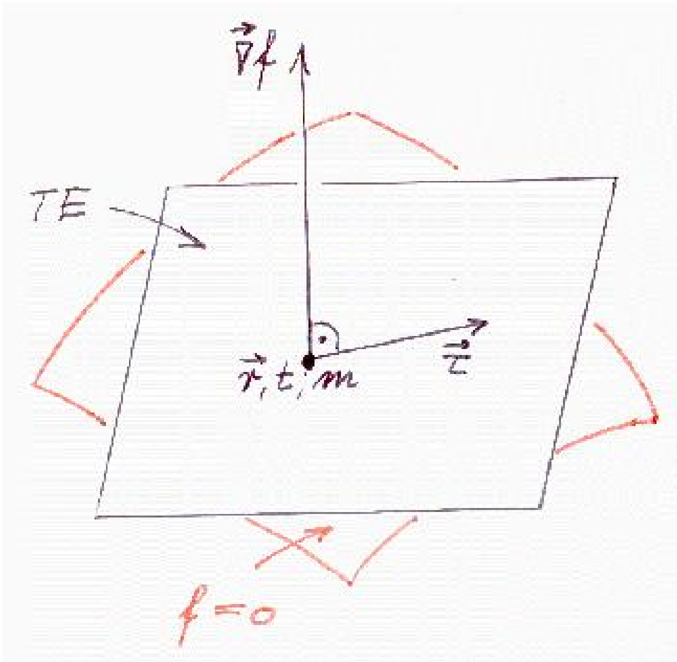
Aus den vier Gleichungen (1.4,1) bestimmt man die vier Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ und $\lambda(t)$, d. i. die Bahn $\vec{r}(t)$ und die Zwangskraft $\vec{G}(t) = \lambda(t)\vec{\nabla} f(\vec{r}(t), t)$.

Anmerkungen: Evtl. $\vec{G}$-Komponenten in der Fläche sind zu $\vec{F}$ zu addieren. f ist so zu wählen, dass $\vec{\nabla} f \neq \vec{0}$ auf der Fläche $f = 0$ gilt.

Oft interessiert man sich nicht für $\vec{G}$, sondern nur für die eingeschränkte Bewegung (Interesse an $\vec{G}$ aus technischen Gründen, z. B. Halterungen, Achsen, ...). Wie kann man λ eliminieren?

Vektorielle Multiplikation von (1.4) mit $\vec{\nabla} f$ führt auf

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}\right) \times \vec{\nabla} f = \vec{0}\ . \tag{1.5}$$



Klar! $m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \vec{G}$ steht senkrecht auf der Tangentialebene (TE) an die Fläche $f = 0$ an der Stelle $\vec{r}$ zur Zeit t. Zu (1.5) äquivalent ist die Aussage: Für beliebige Tangentialvektoren $\vec{\tau}$, d. h.

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{\tau} = 0 \tag{1.6}$$

gilt

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}\right) \cdot \vec{\tau} = 0\,. \tag{1.7}$$

Hieraus folgen – für zwei linear unabhängige $\vec{\tau}$ – zwei unabhängige Bewegungsgleichungen. Zusammen mit (1.1) hat man demnach drei Gleichungen zur Bestimmung der Teilchenbahn $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Beispiel: sphärisches Pendel. Mit

$$\vec{F} = m\vec{g} = -m\,g\,\hat{z} \tag{1.8}$$

und (von t unabhängigem)

$$f = \vec{r}^2 - l^2 \tag{1.9}$$

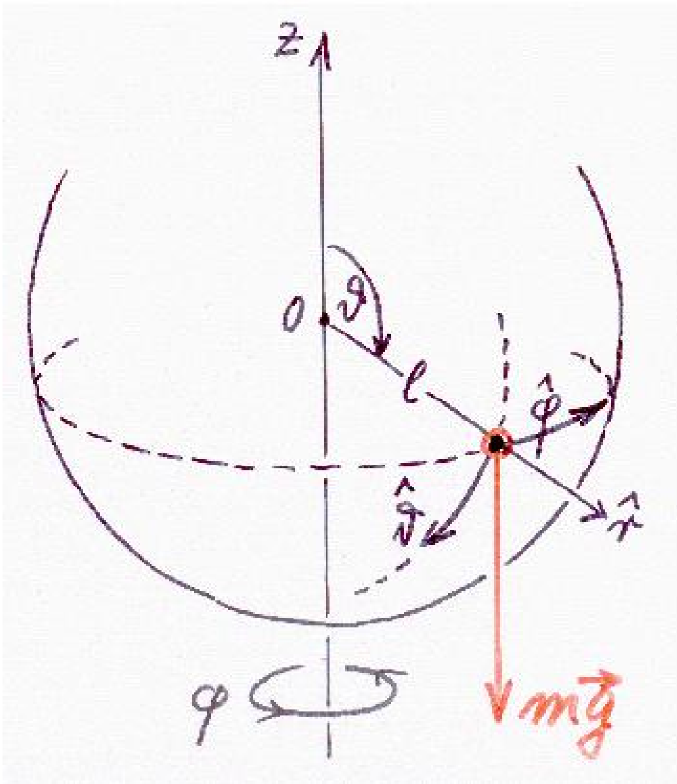
folgt

$$\vec{\nabla} f \;=\; 2\,\vec{r} \;=\; 2\,l\,\hat{r}$$

$$\stackrel{(1.5)}{\Longrightarrow} \qquad m\,(\ddot{\vec{r}} - \vec{g}) \times \vec{r} \;=\; \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\,(m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\,) \;=\; \vec{r} \times m\,\vec{g}\;. \tag{1.10}$$

Das ist der *Drehimpulssatz*: Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment (von $\vec{F}$; $\vec{G}$ ohne Beitrag).



Nach (1.6,7) ergeben sich für $\vec{\tau} = \hat{\vartheta}$ und $\vec{\tau} = \hat{\varphi}$ die Bewegungsgleichungen (beachte $\vec{r} = l\,\hat{r}$, $\vec{g} = -g\,\hat{z}$):

$$(\ddot{\vec{r}} - \vec{g}) \cdot \hat{\vartheta} \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\hat{r}} \cdot \hat{\vartheta} \;=\; \frac{g}{l}\,\sin\vartheta \tag{1.11 a}$$

bzw.

$$(\ddot{\vec{r}} - \vec{g}) \cdot \hat{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} \cdot \hat{\varphi} = 0 \ . \tag{1.11 b}$$

Die Beschleunigung erfolgt in Richtung der Längenkreise (a), nicht in Richtung der Breitenkreise (b).

Darstellung der Bewegungsgleichungen (1.11 a, b) in Kugelkoordinaten. Dazu benötigt man

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin\vartheta \ \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\vartheta \ \sin\varphi \, \hat{y} + \cos\vartheta \, \hat{z} \\ \hat{\vartheta} &= \cos\vartheta \ \cos\varphi \, \hat{x} + \cos\vartheta \ \sin\varphi \, \hat{y} - \sin\vartheta \, \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin\varphi \, \hat{x} + \cos\varphi \, \hat{y} \ . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Damit folgt aus (1.11 b):

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} \cdot \ddot{\vec{r}} &= -\sin\varphi \, \frac{d^2}{dt^2} \ \sin\vartheta \ \cos\varphi + \cos\varphi \, \frac{d^2}{dt^2} \sin\vartheta \ \sin\varphi \\ &= \ldots \text{ etwas rechnen } \ldots \\ &= 2 \cos\vartheta \ \dot{\vartheta} \, \dot{\varphi} + \sin\vartheta \, \ddot{\varphi} = 0 \ . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Multiplikation mit $\sin\vartheta$ führt auf

$$\frac{d}{dt} \, (\sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad L_z = m \, (l \, \sin\vartheta)^2 \, \dot{\varphi} = \text{konstant} \ , \tag{1.14}$$

d. i. die *Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses.*

Aus (1.11 a) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} \cdot \ddot{\vec{r}} &= \cos\vartheta \ \cos\varphi \, \frac{d^2}{dt^2} \sin\vartheta \ \cos\varphi \\ &\quad + \cos\vartheta \, \sin\varphi \, \frac{d^2}{dt^2} \sin\vartheta \ \sin\varphi - \sin\vartheta \, \frac{d^2}{dt^2} \cos\vartheta \\ &= \ldots \text{ etwas rechnen } \ldots \\ &= \ddot{\vartheta} - \sin\vartheta \ \cos\vartheta \, \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} \sin\vartheta \ . \end{aligned} \tag{1.15}$$

Multiplikation mit $\dot{\vartheta}$ führt mit (1.13) auf

$$\frac{d}{dt}\,(\dot{\vartheta}^2 \,+\, \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 \,+\, 2\,\frac{g}{l}\,\cos\vartheta) \,=\, 0$$

$$\Longrightarrow \qquad E \,=\, \frac{m\,l^2}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 \,+\, \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \,+\, m\,g\,l\,\cos\vartheta \,=\, \text{konstant}\ , \tag{1.16}$$

d. i. die *Erhaltung der Energie*.

Die Erhaltungssätze (1.14,16) sind zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung von $\vartheta\,(t)$ und $\varphi\,(t)$. Zur Integration dieser Gln. siehe Budó § 23 •

Der hier gewählte Weg zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen des sphärischen Pendels war etwas mühsam. Man hätte natürlich gleich die beiden Erhaltungssätze für L_z und E aufschreiben können. Der Sinn der vorstehend skizzierten Methode (insbesondere Gln. (1.6, 7) $\Rightarrow$ Gln. (1.11)) liegt in ihrer Allgemeinheit und in der Möglichkeit ihrer Verallgemeinerung auf viel kompliziertere Situationen (N Teilchen, K Zwangsbedingungen, $K \,<\, 3N$): Erhaltungssätze nicht bekannt oder nicht existent oder nicht hinreichend zur Analyse der Bewegung.

Energiebetrachtung: **Leistet die Zwangskraft Arbeit**?

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} \,&=\, \vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} \,=\, 0 \\ \Rightarrow \qquad \vec{G}\cdot\dot{\vec{r}} \,&=\, \lambda\,\vec{\nabla} f \cdot \dot{\vec{r}} \,=\, -\lambda\,\frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.17}$$

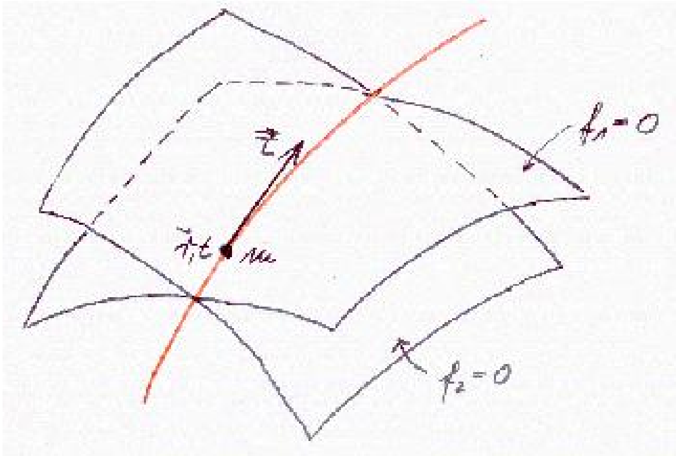
Die Zwangskraft überträgt Energie auf das Teilchen, sofern die Fläche sich bewegt. Bei stationärer Fläche ist $\dot{\vec{r}}$ immer tangential, so daß die Zwangskraft dann keine Arbeit leistet.

Statt auf eine Fläche kann man das Teilchen auch auf eine Linie zwingen. *Zwei* Zwangsbedingungen:

$$f_1\,(\vec{r},\,t) \,=\, 0\ , \quad f_2\,(\vec{r},\,t) \,=\, 0\ . \tag{1.18}$$

Linie als Schnitt zweier Flächen. Zwangskraft:

$$\vec{G} \,=\, \lambda_1\,\vec{\nabla} f_1 \,+\, \lambda_2\,\vec{\nabla} f_2\ . \tag{1.19}$$



Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \sum_{k=1,2} \lambda_k \vec{\nabla} f_k \ . \tag{1.20}$$

Tangentenvektor $\vec{\tau}$ tangential zu *beiden* Flächen:

$$\vec{\nabla} f_1 \cdot \vec{\tau} = \vec{\nabla} f_2 \cdot \vec{\tau} = 0 \ , \tag{1.21}$$

somit tangential zur Linie bei $\vec{r}$, t. Mit (1.21) folgt aus (1.20)

$$(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}) \cdot \vec{\tau} = 0 \ , \tag{1.22}$$

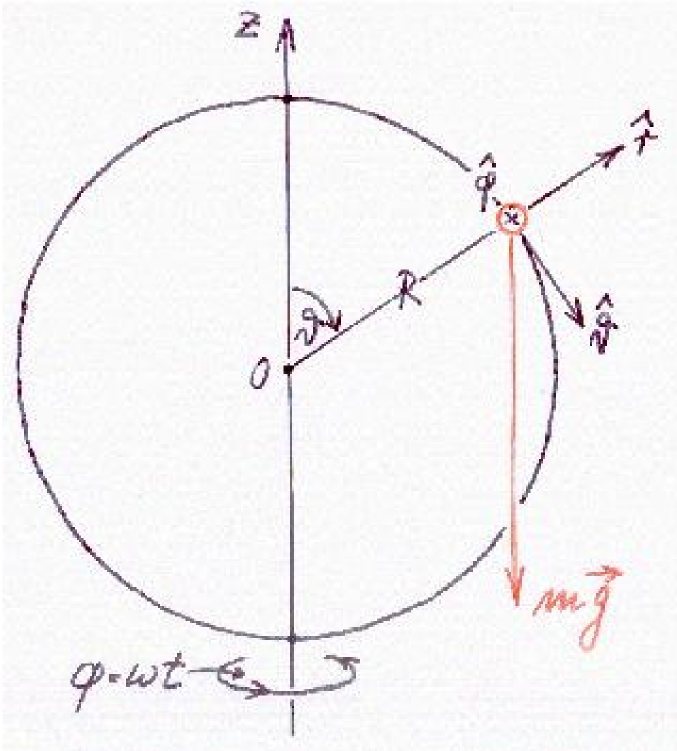
wie in Gl. (1.7). Der Unterschied besteht darin, daß (1.22) – wegen der Eindimensionalität des $\vec{\tau}$-Raumes – nur *eine* unabhängige Bewegungsgleichung liefert. Zusammen mit den beiden Bedingungen (1.18) hat man aber insgesamt wieder drei Gleichungen zur Berechnung der Bahn.

Beispiel: Perle auf rotierendem Kreisring im Schwerefeld

$$f_1 = \vec{r}^{\,2} - R^2 \quad \text{(Kugel)} \ , \quad f_2 = \hat{\varphi}\,(t) \cdot \vec{r} \quad \text{(rot. Ebene)} \tag{1.23}$$

mit

$$\hat{\varphi}\,(t) = -\sin\omega\, t\, \hat{x} + \cos\omega\, t\, \hat{y} \ . \tag{1.24}$$



Wegen

$$\vec{\nabla} f_1 \,=\, 2\,R\,\hat{r}\ , \quad \vec{\nabla} f_2 \,=\, \hat{\varphi}$$

hat man als Tangentenvektor $\vec{\tau} \,=\, \hat{\vartheta}$ und folglich die Bewegungsgleichung:

$$(\ddot{\vec{r}} - \vec{g}) \cdot \hat{\vartheta} \,=\, 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\hat{r}} \cdot \hat{\vartheta} \,=\, \frac{g}{R}\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{\vartheta} \,-\, \omega^2 \sin\vartheta\, \cos\vartheta \,-\, \frac{g}{R}\sin\vartheta \,=\, 0 \tag{1.25}$$

wie beim sphärischen Pendel (1.11 a,15). Unterschied: $\dot{\varphi} \,=\, \omega \,=$ konstant, *keine* L_z-Erhaltung! Abweichend von (1.16) folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vartheta}^2 \,-\, \omega^2 \sin^2\vartheta \,+\, 2\,\frac{g}{R}\cos\vartheta\right) \,=\, 0$$

$$\Rightarrow \qquad \tilde{E} \,=\, \frac{m\,R^2}{2}\,\dot{\vartheta}^2 \,+\, m\,g\,R\,\cos\vartheta \,-\, \frac{m\,R^2\,\omega^2}{2}\,\sin^2\vartheta \,=\, \text{konstant}\ , \tag{1.26}$$

d. i. die *Erhaltung der Energie im rotierenden System*; der $\sin^2\vartheta$-Term ist das Zentrifugalpotential.

Die DGL 1. Ordnung (1.26) dient der Berechnung von $\vartheta\,(t)$: Trennung der Variablen usw. Diskussion des ϑ, $\dot{\vartheta}$-Phasenportraits bei Arnold § 19 E. Für $\omega = 0$ erhält man aus (1.25, 26) die Bewegungsgleichung bzw. den Energieausdruck für das *ebene mathematische Pendel* mit entsprechendem Phasenportrait.

Stabilitätsbetrachtung: Für $0 \le \omega < \sqrt{g\,/\,R}$ hat man eine stabile Gleichgewichtsposition bei $\vartheta = \pi$; für $\omega > \sqrt{g\,/\,R}$ bleibt $\vartheta = \pi$ zwar Gleichgewichtsposition, wird jedoch instabil; stattdessen bilden sich zwei neue stabile Gleichgewichtslagen bei den Winkeln

$$\vartheta = \pi \pm \arccos\,(g\,/\,R\,\omega^2)$$

aus. Beim Überschreiten der kritischen Frequenz

$$\omega = \sqrt{g\,/\,R}$$

findet demnach eine sog. *Pitchfork-Bifurkation* statt; siehe José & Saletan, Example 2.2.1 •

Betrachte nun ein **System von** N **Teilchen** mit den Massen $m_1, m_2, \dots m_N$ unter dem Einfluß der Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_N$. Ferner K *Zwangsbedingungen*:

$$f_k\,(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, t) = 0\;, \quad k = 1, \dots K < 3\,N\;; \tag{1.27}$$

z. B. starrer Körper: $f_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| - d_{ij}$, nicht alle unabhängig voneinander. Bedingungen dieser Art bezeichnet man als *holonom*. Nichtholonome Bedingungen sind z. B.

$$f_k\,(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots \dot{\vec{r}}_N, t) = 0 \tag{1.28 a}$$

oder

$$f_k\,(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, t) > 0\;. \tag{1.28 b}$$

In dieser Vorlesung kommen nur holonome Bedingungen vor. Realisierung der Bedingungen (1.27) durch *Zwangskräfte*:

$$\vec{G}_i = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k\,\vec{\nabla}_i\,f_k\;, \quad i = 1, \dots N\;, \tag{1.29}$$

„ideale“ Zwangskräfte. Somit hat man die *Bewegungsgleichungen*

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_k \lambda_k \vec{\nabla}_i f_k \; ; \tag{1.30}$$

Bezeichnung als *Lagrangesche Gleichungen 1. Art.*

(1.30, 27) sind $3N + K$ Gleichungen zur Bestimmung der $3N + K$ Funktionen $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, $\ldots$ $x_N(t)$, $y_N(t)$, $z_N(t)$, $\lambda_1(t)$, $\ldots$ $\lambda_K(t)$.

Elimination der λ_k – in Verallgemeinerung der Prozedur für $N = 1$ – wie folgt: Betrachte N *generalisierte Tangentenvektoren* $\vec{\tau}_1, \ldots \vec{\tau}_N$, die für gegebene $\vec{r}_i$, t die K Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_k \cdot \vec{\tau}_i = 0 \; , \quad k = 1, \ldots K \tag{1.31}$$

befriedigen, ansonsten beliebig sind. Folglich sind nur $3N - K$ der insgesamt $3N$ $\vec{\tau}$-Komponenten unabhängig. Skalare Multiplikation von (1.30) mit $\vec{\tau}_i$ und Summation über i ergibt wegen (1.31):

$$\sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{\tau}_i = 0 \; . \tag{1.32}$$

Bezeichnung dieser Gleichung als **d´Alembertsches Prinzip**. Wären die $\vec{\tau}_i$ keinerlei Einschränkungen unterworfen, so erhielte man aus (1.32) die $3N$ unabhängigen Bewegungsgleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i = \vec{0}$ – entsprechend einer Bewegung ohne Zwänge. Wegen der Einschränkungen (1.31) erhält man aber nur $3N - K$ unabhängige Bewegungsgleichungen. Zusammen mit (1.27) gestatten diese die Berechnung der Bewegung. Anschließend kann man – bei Bedarf – mit (1.29, 30) die Zwangskräfte bestimmen. Wie konstruiert man die $\vec{\tau}_i$? Wie kann man damit aus dem d´Alembertschen Prinzip die unabhängigen Bewegungsgleichungen gewinnen?

Bezeichnung der Zahl $n = 3N - K$ als *Anzahl der Freiheitsgrade* des Systems.

Einführung **generalisierter Koordinaten** q_α, $\alpha = 1, 2, \ldots 3N$:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t) \\ \vec{r}_i &= \vec{r}_i(q_1, \ldots q_{3N}, t) \end{aligned} \tag{1.33}$$

mit nichtverschwindender Jacobi-Determinante ($\Rightarrow$ Invertierbarkeit); zweifach stetig differenzierbare Funktionen – so, dass die K letzten q_α nur über $f_1, \ldots f_K$ von $\vec{r}_i$, t

abhängen:

$$\begin{aligned} q_{n+k} &= q_{n+k}\,(f_1,\,\ldots\,f_K) \\ f_k &= f_k\,(q_{n+1},\,\ldots\,q_{n+K})\;, \end{aligned} \tag{1.34}$$

$k = 1, \ldots K$. Die Zwangsbedingungen (1.27) implizieren dann:

$$q_{n+k} = q_{n+k}\,(0,\,\ldots\,0) = \text{konstant}\;, \tag{1.35}$$

und man verbleibt mit einem n-dimensionalen Problem in den Koordinaten $q_1, \ldots q_n$.
$\Rightarrow$ **Konfigurationsraum**, allgemeiner: **Konfigurationsmannigfaltigkeit** Q.

Der Ansatz

$$\vec{\tau}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \varepsilon_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\;, \quad i = 1, \ldots N\;, \tag{1.36}$$

$\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ beliebige Konstanten, befriedigt (1.31); denn für $k = 1, \ldots K$ gilt

$$\sum_i \vec{\nabla}_i f_k \cdot \vec{\tau}_i = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \sum_i \vec{\nabla}_i f_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \frac{\partial f_k}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.37}$$

wegen der zweiten Gleichung in (1.34). Einsetzen von (1.36) in (1.32):

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_i (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0\;, \quad \alpha = 1, \ldots n\;, \tag{1.38}$$

da ε_α beliebig. Das sind n Bewegungsgleichungen in den generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots q_n$. Sie dienen der Bestimmung der n Funktionen $q_1(t), \ldots q_n(t)$. Die Gln. (1.38) lassen sich wie folgt vollständig auf die q_α umrechnen:

Produktregel:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_i m_i \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right) \tag{1.39}$$

Mit

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{1.40}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_\beta \frac{\partial}{\partial q_\beta}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\Big)\,\dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\Big(\sum_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\,\dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\Big) \\
&= \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

folgt aus (1.39):

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i\,\ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \sum_i m_i \left(\frac{d}{dt}\Big(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}\Big) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\,,
\end{aligned} \tag{1.42}$$

wo

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i\,\vec{v}_i^{\,2} \\
&= \sum_i \frac{m_i}{2}\Big(\sum_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\,\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\Big)\cdot\Big(\sum_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\,\dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\Big) \\
&= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(q,t)\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta + \sum_\alpha b_\alpha(q,t)\,\dot{q}_\alpha + c(q,t) \\
&= T(q_1,\ldots q_n,\dot{q}_1,\ldots \dot{q}_n,t)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

die *kinetische Energie* des Systems ist. T ist eine quadratische Funktion der $\dot{q}_\alpha$; *homogen quadratische* Funktion der $\dot{q}_\alpha$ genau dann, wenn $\partial \vec{r}_i / \partial t = \vec{0}\,(\Rightarrow b_\alpha = 0,\ c = 0)$:

$$T = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(q)\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta\,. \tag{1.44}$$

Bezeichnung der $\dot{q}_\alpha$ als *generalisierte Geschwindigkeiten.*

Mit (1.42) erhält man aus (1.38):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha(q_1,\ldots q_n,\dot{q}_1,\ldots \dot{q}_n,t)\,, \tag{1.45}$$

wobei man die Q_α als *generalisierte Kräfte* bezeichnet.

Falls es eine als *generalisiertes Potential* bezeichnete Funktion

$$U = U(q_1, \dots q_n, \dot{q}_n, \dots \dot{q}_n, t) \tag{1.46}$$

gibt mit der Eigenschaft

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} , \tag{1.47}$$

läßt sich (1.45) wie folgt darstellen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_\alpha} = 0 . \tag{1.48}$$

Bei Einführung der **Lagrange-Funktion**

$$L = T - U = L(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n, t) \tag{1.49}$$

erhält man schließlich als Bewegungsgleichungen des Systems die *Lagrangeschen Gleichungen 2. Art*; kurz die **Lagrange-Gleichungen**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad \alpha = 1, \dots n . \tag{1.50}$$

Das sind n Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Bestimmung der generalisierten Koordinaten $q_1(t), \dots q_n(t)$:

$$\sum_\beta \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial q_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\beta \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial t \, \partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.50 a}$$

mit

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\beta \partial \dot{q}_\alpha} \right) \neq 0 ; \tag{1.50 b}$$

Anfangsbedingungen $q_\alpha(0) = a_\alpha$, $\dot{q}_\alpha(0) = b_\alpha$ erforderlich.

Wichtiger Spezialfall: Konservative Kräfte

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$$

$$\Rightarrow \qquad Q_\alpha = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{1.51}$$

$$\Rightarrow \qquad U = V(q_1, \ldots q_n, t)$$

$$\Rightarrow \qquad L = T - V \,, \tag{1.52}$$

d. i. die Lagrange-Funktion als Differenz von kinetischer und potentieller Energie.

Beispiele:

1. Teilchen im Potential $V(\vec{r})$ ohne Zwänge

a) *kartesische Koordinaten*: $q_1 = x,\, q_2 = y,\, q_3 = z$

Die Lagrange-Funktion (1.52) ist gegeben durch

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y\, z) \; ; \tag{1.53}$$

daraus berechnet man die Lagrange-Gleichungen (1.50) zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\,\dot{x}\,, & \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} & \Rightarrow \quad m\,\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\,\dot{y}\,, & \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} & \Rightarrow \quad m\,\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= m\,\dot{z}\,, & \frac{\partial L}{\partial z} &= -\frac{\partial V}{\partial z} & \Rightarrow \quad m\,\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0 \; ;
\end{aligned} \tag{1.54}$$

das sind die kartesischen Komponenten der Newtonschen Bewegungsgleichung (*).

b) *Kugelkoordinaten*: $q_1 = r,\, q_2 = \vartheta,\, q_3 = \varphi$

Mit

$$\begin{aligned}
x &= r\,\sin\vartheta\;\cos\varphi \\
y &= r\,\sin\vartheta\;\sin\varphi \\
z &= r\,\cos\vartheta
\end{aligned} \tag{1.55}$$

berechnet man gemäß (1.43) die kinetische Energie; Einsetzen in (1.52) ergibt die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\vartheta}^2 + r^2\,\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(r, \vartheta, \varphi) \; . \tag{1.56}$$

T ist homogen quadratisch in $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$; vgl. (1.44). Die Lagrange-Gleichungen ergeben sich nach (1.50) aus (1.56) zu:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\,\dot{r}) - m\,r\,(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\
\frac{d}{dt}(m\,r^2\,\dot{\vartheta}) - m\,r^2\,\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\
\frac{d}{dt}(m\,r^2\,\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \; ;
\end{aligned} \tag{1.57}$$

das sind die r-, ϑ- bzw. φ-Komponente der Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\, V$. Die Herleitung ohne Lagrange-Formalismus ist viel komplizierter; benutze dazu (1.12).

2. Sphärisches Pendel (siehe oben): $q_1 = \vartheta,\, q_2 = \varphi$. Als Spezialfall von (1.56) ($r = l,\, \dot{r} = 0,\, V = m\,g\,l\,\cos\vartheta$) hat man die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= L\,(\vartheta,\, \varphi,\, \dot{\vartheta},\, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{m\,l^2}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - m\,g\,l\,\cos\vartheta\ . \end{aligned} \tag{1.58}$$

Bei Anwendung von (1.50) ergeben sich die Gln. (1.13,15) als Lagrange-Gleichungen des Problems. Besonders leicht erhält man die L_z-Erhaltung (1.14):

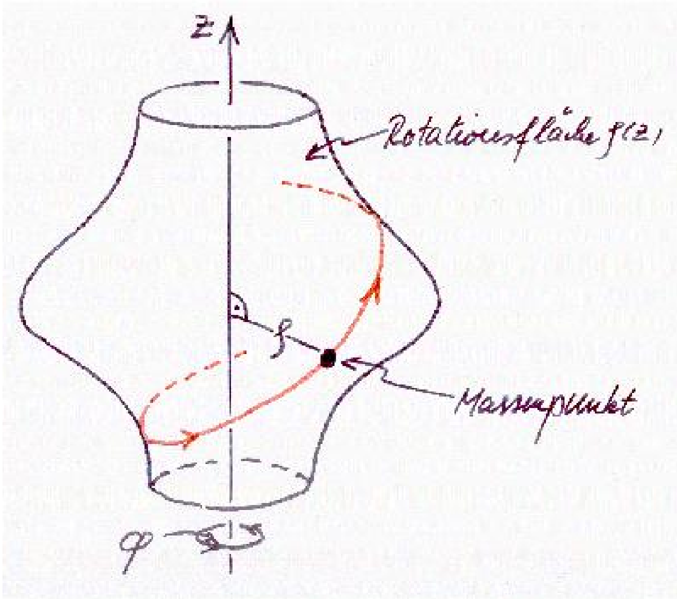
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \qquad &\Rightarrow \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\,(m\,l^2\,\sin^2\vartheta\dot{\varphi}) = 0 \\ &\Rightarrow L_z = m\,l^2\,\sin^2\vartheta\dot{\varphi} = \text{konstant}\ . \end{aligned} \tag{1.59}$$

3. Perle auf Kreisring (siehe oben): $q = \vartheta$. Setze in (1.58) $\dot{\varphi} = \omega$ und $l = R$:

$$L = L\,(\vartheta,\, \dot{\vartheta}) = \frac{m\,R^2}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2\vartheta) - m\,g\,R\,\cos\vartheta\ . \tag{1.60}$$

Mit (1.50) folgt daraus Gl. (1.25) als Bewegungsgleichung. So einfach ist das! T ist übrigens *nicht* homogen quadratisch in $\dot{\vartheta}$ wegen $(\partial\,\vec{r}\,/\,\partial\,t)_\vartheta \neq 0$. Siehe auch José & Saletan, Beispiel 2.2.1.

4. Massenpunkt auf Rotationsfläche, ansonsten frei ($m = 1$): $q_1 = \varphi,\, q_2 = z$. Zwangsbedingung $\rho = \rho\,(z)$.



Kinetische Energie in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1 + \rho'^2(z)\right)\dot{z}^2 + \rho^2(z)\,\dot{\varphi}^2\right) \\ &= L(\varphi, \dot{\varphi}, z, \dot{z}) \;; \end{aligned} \tag{1.61}$$

das ist zugleich die Lagrange-Funktion, da $V = 0$. Lagrange-Gleichungen:

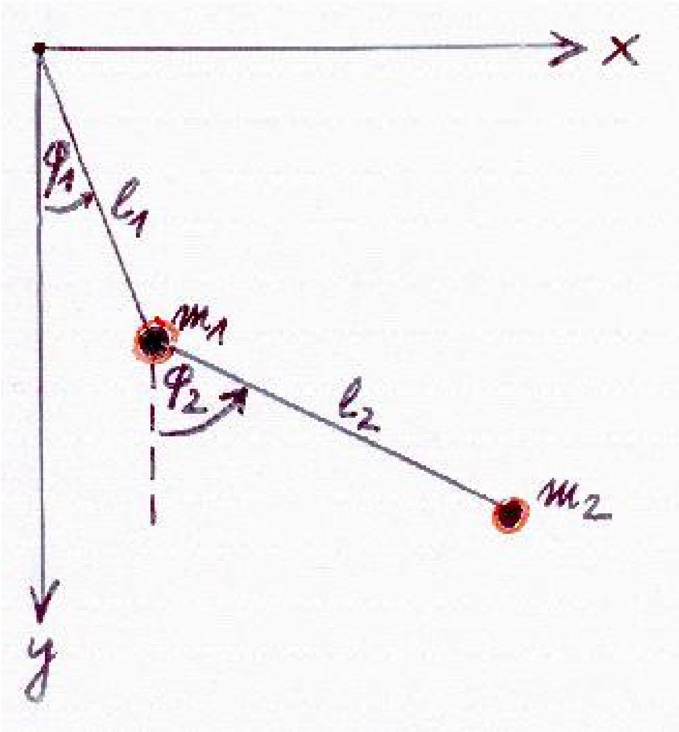
$$\frac{d\,L}{\partial\,\dot{\varphi}} = \rho^2(z)\,\dot{\varphi} \quad , \qquad \frac{\partial\,L}{\partial\,\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{z}} = \left(1 + \rho'^2(z)\right)\dot{z} \quad , \qquad \frac{\partial\,L}{\partial\,z} = \rho'(z)\,\rho''(z)\,\dot{z}^2 + \rho(z)\,\rho'(z)\,\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\rho^2(z)\,\dot{\varphi}\right) = 0 \qquad (L_z\text{-Erhaltung}) \\ \frac{d}{dt}\left(\left(1 + \rho'^2(z)\right)\dot{z}\right) - \rho'(z)\left(\rho''(z)\,\dot{z}^2 + \rho(z)\,\dot{\varphi}^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.62}$$

zur Bestimmung der Funktionen $\varphi(t)$ und $z(t)$. Diskussion der Bewegung in Arnold § 19 D.

5. Ebenes Doppelpendel: $\quad q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$.



Mit

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1 \ , \quad x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1 \ , \quad y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos\varphi_1 \, \dot{\varphi}_1 \ , \quad & \dot{x}_2 &= l_1 \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos\varphi_2 \, \dot{\varphi}_2 \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \sin\varphi_1 \, \dot{\varphi}_1 \ , \quad & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin\varphi_1 \, \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin\varphi_2 \, \dot{\varphi}_2 \ ; \end{aligned} \tag{1.64}$$

damit erhält man die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 \, g \, y_1 + m_2 \, g \, y_2 \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \, l_1^2 \, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} \, l_2^2 \, \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \, l_1 \, l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \, \dot{\varphi}_1 \, \dot{\varphi}_2 \\ &+ (m_1 + m_2) \, g \, l_1 \cos\varphi_1 + m_2 \, g \, l_2 \cos\varphi_2 \\ &= L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) \ . \end{aligned} \tag{1.65}$$

Zur Aufstellung der Lagrange-Gleichungen und zu deren Lösung im Falle kleiner Ausschläge siehe Budó § 41; siehe auch Kap. 3 dieser Vorlesung.

Das wichtigste Beispiel eines nichtkonservativen Kraftfeldes ist das **geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld**. Gibt es für dieses System ein generalisiertes Potential U?

Lorentz-Kraft:

$$\vec{F} = e\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1.66}$$

Potentiale ϕ, $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\,\phi - \tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \tag{1.67}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{F} = e\Big(-\vec{\nabla}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\Big) \tag{1.68}$$

Mit

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}\,(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{A} \tag{1.69}$$

und

$$\frac{d\,\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.70}$$

folgt aus (1.68):

$$\vec{F} = e\Big(-\vec{\nabla}\,(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\,\vec{A}}{dt}\Big)\,. \tag{1.71}$$

Mit Hilfe der Identität

$$\vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\,(\vec{A} \cdot \vec{v} - \phi) \tag{1.72}$$

erhält man aus (1.71) für die Lorentz-Kraft die Darstellung ($\vec{\nabla} = \partial\,/\,\partial\,\vec{r}$):

$$\begin{aligned} \vec{F} &= e\Big(-\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\,(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\,(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})\Big) \\ &= -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \end{aligned} \tag{1.73}$$

mit

$$U = e\,(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \,, \tag{1.74}$$

vgl. (1.47). In kartesischen Koordinaten ohne Zwangsbedingungen ist $Q_\alpha = F_\alpha$, $\alpha = 1,\,2,\,3$. Lagrange-Funktion gemäß (1.49):

$$L\,(\vec{r},\,\vec{v},\,t) = \frac{m}{2}\,\vec{v}^{\,2} - e\,(\phi\,(\vec{r},\,t) - \vec{v} \cdot \vec{A}\,(\vec{r},\,t)) \,. \tag{1.75}$$

Die Lagrange-Gleichung dieses Systems ist identisch mit Newtonschen Bewegungsgleichung für das geladene Teilchen und dem Einfluss der Lorentz-Kraft (1.66). Beweis durch Umkehrung der vorstehenden Argumentation.

In der **Lagrange-Mechanik** tritt die Herleitung von L aus den Kräften in den Hintergrund. Die Existenz von L wird in dieser Theorie zur fundamentalen Voraussetzung: Ein mechanisches System von n Freiheitsgraden wird durch *eine* Funktion von $2\,n + 1$ unabhängigen Variablen beschrieben, die *Lagrange-Funktion* $L\,(q_1,\,\dots\,q_n,\,\dot{q}_1,\,\dots\,\dot{q}_n,\,t)$. Die Bewegungsgleichungen des Systems, die *Lagrangeschen Gleichungen*, ergeben sich daraus gemäß (1.50).

Abkürzung: $$L\,(q_1,\,\dots\,q_n,\,\dot{q}_1,\,\dots\,\dot{q}_n,\,t) = L\,(q_\alpha,\,\dot{q}_\alpha,\,t) = L\,(q,\,\dot{q},\,t) \,. \tag{1.76}$$

Die Lagrange-Funktion ist im „autonomen“ Fall $L = (q,\,\dot{q})$ eine reellwertige Funktion auf der $2\,n$-dimensionalen **Tangentenmannigfaltigkeit**, auch als **Tangentenbündel** TQ bezeichnet. Im „nichtautonomen“ Fall $L = (q,\,\dot{q},\,t)$ ist die Lagrange-Funktion eine reellwertige Funktion auf der Mannigfaltigkeit $TQ \times R$. Siehe Arnold § 18 D.

Auf TQ bilden die Lagrange-Gleichungen einen Satz von $2\,n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung der Funktionen $q_\alpha\,(t)$ und $v_\alpha\,(t) = \dot{q}_\alpha\,(t)$ für $\alpha = 1,\,\dots\,n$:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,q_\alpha = v_\alpha \\ &\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial\,v_\alpha} - \frac{\partial}{\partial\,q_\alpha}\right) L\,(q,\,v,\,t) = 0 \end{aligned} \tag{1.77}$$

– im Unterschied zu Q, wo es sich um n Differentialgleichungen 2. Ordnung für $q_1\,(t),\,\dots\,q_n\,(t)$ handelt; siehe Gl. (1.50 a) sowie auch José & Saletan, chap. 2.4.

Invarianz. Die Lagrange-Gleichungen sind unabhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten im folgenden Sinne: Betrachte die Transformation

$$q_\alpha^{'} = q_\alpha^{'}\,(q_\beta,\,t) \,, \tag{1.78 a}$$

für die Invertierbarkeit vorausgesetzt werde:

$$q_\beta \;=\; q_\beta\,(q'_\alpha,\, t)\;. \tag{1.78 b}$$

Die *neue Lagrange-Funktion* sei wie folgt definiert:

$$L'\,(q'_\alpha,\, \dot q'_\alpha,\, t) \;=\; L\,(q_\beta\,(q'_\alpha,\, t),\, \dot q_\beta\,(q'_\alpha,\, \dot q'_\alpha,\, t),\, t)\;; \tag{1.79}$$

dann gelten unter der Voraussetzung (1.50) die *neuen Lagrange-Gleichungen*:

$$\frac{d}{dt'}\,\frac{\partial\, L'}{\partial\, \dot q'_\alpha} \;-\; \frac{\partial\, L'}{\partial\, q'_\alpha} \;=\; 0\;, \qquad \alpha \;=\; 1,\, \ldots\, n\;. \tag{1.80}$$

Beweis für den *Spezialfall*

$$\begin{aligned} & L = L\,(q,\, \dot q),\, q' \;=\; q'\,(q) \;\Longleftrightarrow\; q \;=\; q\,(q') \\ \Rightarrow\qquad & L' = L'\,(q',\, \dot q') \;=\; L\,(q\,(q'),\, \dot q\,(q',\, \dot q')) \end{aligned} \tag{1.81}$$

mit
$$\dot q\,(q',\, \dot q') \;=\; \frac{\partial\, q}{\partial\, q'}\,(q')\,\dot q'\;.$$

Aus der vorstehenden Identität folgt einerseits

$$\frac{\partial\, \dot q}{\partial\, \dot q'} \;=\; \frac{\partial\, q}{\partial\, q'}\;, \tag{1.82}$$

andererseits folgt daraus

$$\frac{\partial\, \dot q}{\partial\, q'} \;=\; \frac{\partial^2\, q}{\partial\, q'^2}\,\dot q' \;=\; \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, q}{\partial\, q'}\;. \tag{1.83}$$

Mit (1.82, 83) berechnet man aus (1.81):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, L'}{\partial\, \dot q'} &= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\,\frac{\partial\, \dot q}{\partial\, \dot q'} \;=\; \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\,\frac{\partial\, q}{\partial\, q'} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\right)\frac{\partial\, q}{\partial\, q'} \;+\; \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\,\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, q}{\partial\, q'} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\right)\frac{\partial\, q}{\partial\, q'} \;+\; \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot q}\,\frac{\partial\, \dot q}{\partial\, q'} \end{aligned} \tag{1.84}$$

und

$$\frac{\partial L'}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial q'} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial q'} \, . \tag{1.85}$$

Subtraktion von (1.84, 85):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q'} - \frac{\partial L'}{\partial q'} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial q'} = 0 \tag{1.86}$$

wegen (1.50). Das ist die *Behauptung* für den *Spezialfall*.

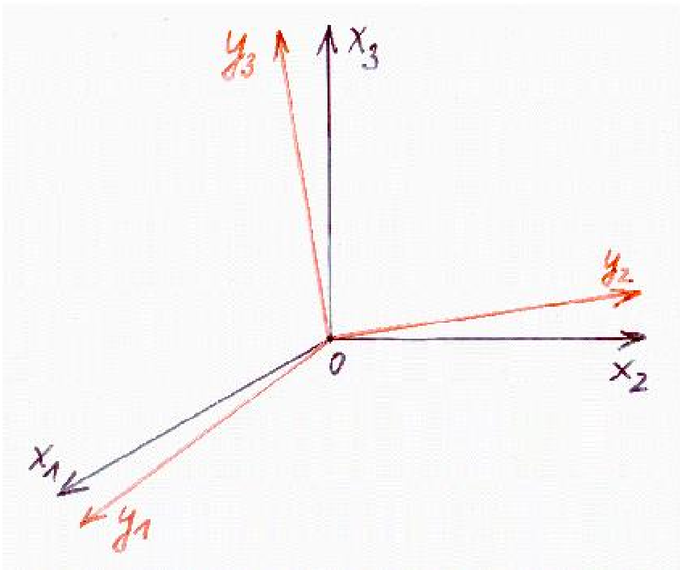
Beispiel: Inertialsystem → rotierendes Bezugssystem

Sei

$$x = A\,y \tag{1.87}$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} .$$



A orthogonal (Drehung: $||A|| = 1$):

$$A^T A = A\,A^T = \mathbb{1} \tag{1.88}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{x} \,=\, A\,\dot{y} \,+\, \dot{A}\,y \,=\, A\,(\dot{y} \,+\, \Omega\,y) \tag{1.89}$$

(A zeitabhängig) mit der momentanen *Winkelgeschwindigkeit* (ebenfalls im allgemeinen zeitabhängig)

$$\Omega \,=\, A^T\,\dot{A}\ ; \tag{1.90}$$

diese ist *antisymmetrisch*, denn

$$\frac{d}{dt}\,(A^T\,A) \,=\, \dot{A}^T\,A \,+\, A^T\,\dot{A} \,=\, 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega^T \,=\, -\Omega\ . \tag{1.91}$$

Lagrange-Funktion im Inertialsystem:

$$L\,(x,\,\dot{x}) \,=\, \frac{m}{2}\,\dot{x}^T\,\dot{x} \,-\, V\,(x)\ ; \tag{1.92}$$

Lagrange-Gleichung hierzu:

$$m\,\ddot{x} \,=\, -\frac{\partial\,V}{\partial\,x}\ . \tag{1.93}$$

Lagrange-Funktion im rotierenden System gemäß (1.79, 87, 89):

$$L^{'}\,(y,\,\dot{y}) \,=\, \frac{m}{2}\,(\dot{y} \,+\, \Omega\,y)^T\,(\dot{y} \,+\, \Omega\,y) \,-\, V^{'}\,(y) \tag{1.94}$$

mit $V^{'}\,(y) \,=\, V\,(A\,y)$; hierzu die *Lagrange-Gleichung im rotierenden System* gemäß (1.80):

$$\begin{aligned}
&& \frac{\partial\,L^{'}}{\partial\,\dot{y}} &= m\,(\dot{y} \,+\, \Omega\,y) \\
\Rightarrow && \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\,L^{'}}{\partial\,\dot{y}} &= m\,(\ddot{y} \,+\, \dot{\Omega}\,y \,+\, \Omega\,\dot{y}) \\
&& \frac{\partial\,L^{'}}{\partial\,y} &= m\,\Omega^T\,(\dot{y} \,+\, \Omega\,y) \,-\, \frac{\partial\,V^{'}}{\partial\,y} \\
\Rightarrow && m\,\ddot{y} &= -\frac{\partial\,V^{'}}{\partial\,y} \,-\, 2\,m\,\Omega\,\dot{y} \,-\, m\,\Omega^2\,y \,-\, m\,\dot{\Omega}\,y\ .
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Der Vergleich mit (1.93) zeigt, dass im rotierenden System außer der „eigentlichen Kraft“ (1. Term der rechten Seite von (1.95)) noch „Scheinkräfte“ auftreten. 2. Term: *Corioliskraft*. 3. Term: *Zentrifugalkraft*. Der 4. Term rührt von einer evtl. Zeitabhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit her.

Vektornotation. Aus der Antisymmetrie von Ω folgt:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Omega\, y = \begin{pmatrix} \omega_2\, y_3 - \omega_3\, y_2 \\ \omega_3\, y_1 - \omega_1\, y_3 \\ \omega_1\, y_2 - \omega_2\, y_1 \end{pmatrix} = \vec{\omega} \times \vec{y} \tag{1.96}$$

Gl. (1.89):

$$A^T \dot{x} = \dot{y} + \Omega\, y \qquad \Rightarrow \qquad (\dot{\vec{x}})_y = \dot{\vec{y}} + \vec{\omega} \times \vec{y} \tag{1.97}$$

Gl. (1.95):

$$m\, \ddot{\vec{y}} = -\vec{\nabla}_y V' - 2\, m\, \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} - m\, \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) - m\, \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y}\,. \tag{1.98}$$

Die Lagrange-Funktion legt die Lagrange-Gleichungen eindeutig fest. Umgekehrt kann ein bestimmter Satz von Lagrange-Gleichungen durch verschiedene Lagrange-Funktionen erzeugt werden. Es gilt der

Satz: Wenn $L\,(q,\, \dot{q},\, t)$ und $L'\,(q,\, \dot{q},\, t)$ dieselben Lagrange-Gleichungen erzeugen, dann unterscheiden sich L und L' um die totale Zeitableitung einer Funktion $\chi\,(q,\, t)$.

Beweis: Sei

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \Lambda\,(\ddot{q},\, \dot{q},\, q,\, t) = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L'}{\partial q} &= \Lambda'\,(\ddot{q},\, \dot{q},\, q,\, t) = 0 \end{aligned} \tag{1.99}$$

mit

$$\Lambda = \Lambda'\,, \tag{1.100}$$

d. h. Λ und Λ' seien dieselbe Funktion ihrer Argumente $\ddot{q},\, \dot{q},\, q,\, t$. Für die Differenz $\psi\,(q,\, \dot{q},\, t) = L\,(q,\, \dot{q},\, t) - L'\,(q,\, \dot{q},\, t)$ folgt

$$\Lambda - \Lambda' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial q\, \partial \dot{q}}\, \dot{q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{q}^2}\, \ddot{q} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial \dot{q}} - \frac{\partial \psi}{\partial q} = 0 \tag{1.101}$$

für alle $\ddot{q},\, \dot{q},\, q,\, t$. Da ψ nicht von $\ddot{q}$ abhängt, muss gelten:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{q}^2} = 0\,. \tag{1.102}$$

Integration führt auf

$$\psi \,=\, F\,(q,\,t)\,\dot{q} \,+\, G\,(q,\,t)\;; \tag{1.103}$$

Einsetzen in (1.101) liefert

$$\frac{\partial F}{\partial t} \,-\, \frac{\partial G}{\partial q} \,=\, 0\;, \tag{1.104}$$

was die Existenz einer Funktion $\chi\,(q,\,t)$ impliziert mit

$$F \,=\, \frac{\partial\,\chi\,(q,\,t)}{\partial\,q}\;,\quad G \,=\, \frac{\partial\,\chi\,(q,\,t)}{\partial\,t}\;; \tag{1.105}$$

Einsetzen in (1.103) ergibt schließlich

$$\psi \,=\, \frac{\partial\,\chi}{\partial\,q}\,\dot{q} \,+\, \frac{\partial\,\chi}{\partial\,t} \,=\, \frac{d}{dt}\,\chi\,(q,\,t)\;, \tag{1.106}$$

was zu beweisen war.

Umkehrung: Lagrange-Funktionen, die sich um die totale Zeitableitung einer Funktion $\chi\,(q,\,t)$ unterscheiden, erzeugen dieselben Lagrange-Gleichungen. Zeige das!

Anwendung auf die **Lagrange-Funktion** (1.75) **des geladenen Teilchens im** $\vec{E}$, $\vec{B}$-**Feld**:

$$L \,=\, \frac{m}{2}\,\vec{v}^{\,2} \,-\, e\,(\phi \,-\, \vec{v}\,\cdot\,\vec{A}) \tag{1.107}$$

Übergang zur Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L^{'} &= L \,+\, e\,\frac{d}{dt}\,\chi\,(\vec{r},\,t) \\ &= L \,+\, e\left(\vec{\nabla}\,\chi\,\cdot\,\vec{v} \,+\, \frac{\partial\,\chi}{\partial\,t}\right) \\ &= \frac{m}{2}\,\vec{v}^{\,2} \,-\, e\,(\phi^{'} \,-\, \vec{v}\,\cdot\,\vec{A}^{'}) \end{aligned} \tag{1.108}$$

mit

$$\phi^{'} \,=\, \phi \,-\, \frac{\partial\,\chi}{\partial\,t}\;, \qquad \vec{A} \,=\, \vec{A} \,+\, \vec{\nabla}\,\chi\;. \tag{1.109}$$

Gegenüber dieser *Eichtransformation* sind die Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$, somit die Lagrange-Gleichung $m\,\ddot{\vec{r}} \,=\, e\,(\vec{E} \,+\, \vec{v}\,\times\,\vec{B})$ invariant. *)

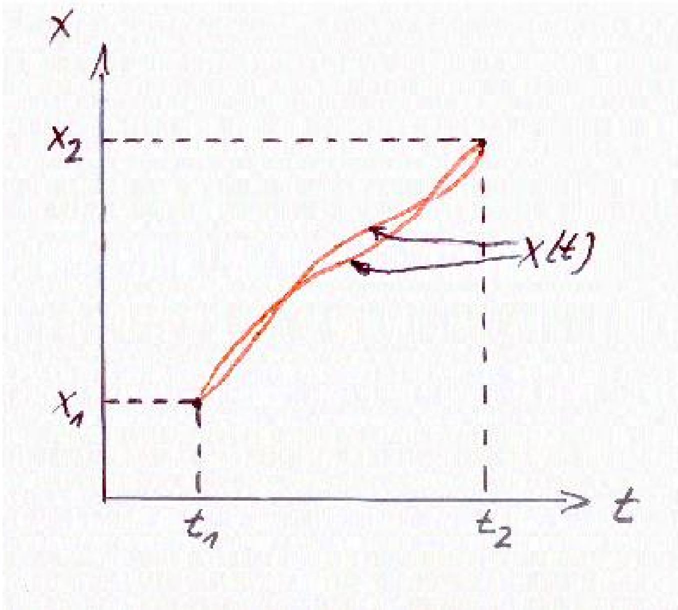
*)

$$\vec{E}^{\,'} \,=\, -\vec{\nabla}\,\phi^{'} \,-\, \frac{\partial\,\vec{A}^{'}}{\partial\,t} \,=\, -\vec{\nabla}\,\phi \,-\, \frac{\partial\,\vec{A}}{\partial\,t} \,=\, \vec{E}$$

Statt die Bewegung des betrachteten mechanischen Systems durch den Satz Lagrangescher *Differential*gleichungen zu kennzeichnen, ist auch eine *integrale* Beschreibung möglich: das *Hamiltonsche Prinzip*. Hierzu werden einige Aspekte der **Variationsrechnung** benötigt.

Grundaufgabe: Betrachte das *Funktional*

$$I\left[x\left(t\right)\right] = \int_{t_1}^{t_2} F\left(x\left(t\right), \dot{x}\left(t\right), t\right) dt \tag{1.110}$$



F sei eine vorgegebene stetig differenzierbare Funktion ihrer drei Argumente. Zu jeder (hinreichend oft) stetig differenzierbaren Funktion $x\left(t\right)$ mit $x\left(t_1\right) = x_1$, $x\left(t_2\right) = x_2$ gibt es eine reelle Zahl I, den Wert des Integrals. Man bestimme dasjenige $x\left(t\right)$, für das I ein *Extremum* ist.

Achtung: t, x beliebige Größen – nicht nur Zeit bzw. Länge!

Beispiele:

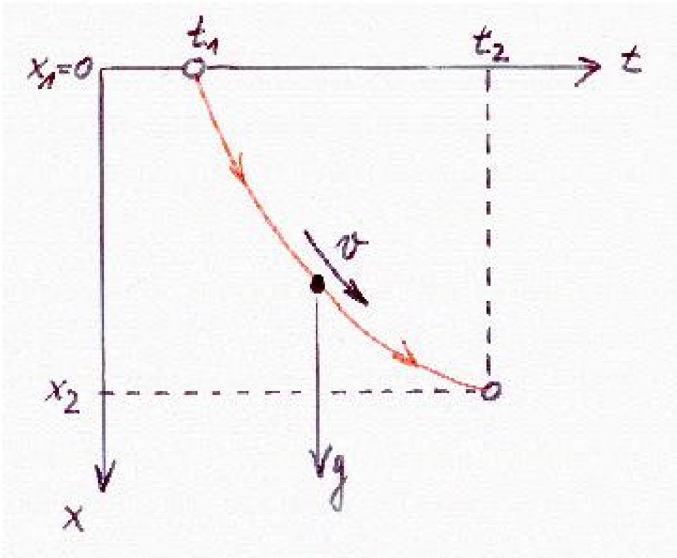
$$\vec{B}^{\,'} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{\,'} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

1. **Kürzeste Verbindung** zwischen den Punkten $P_1\,(t_1,\, x_1)$, $P_2\,(t_2,\, x_2)$:

$$\sigma = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt = \text{Minimum} \tag{1.111}$$

F hängt in diesem Fall nur von $\dot{x}$, nicht von x und t ab.

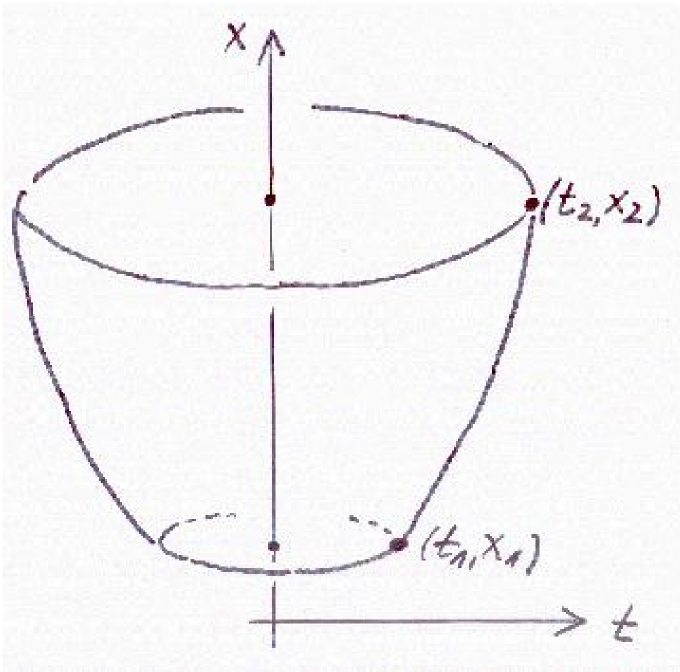
2. **Brachystochronenproblem** (J. Bernoulli 1696):



$$\tau = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{2\,g\,x}}\, dt = \text{Minimum} \tag{1.112}$$

F hängt in diesem Fall von x und $\dot{x}$, aber nicht von t ab.

3. **Minimale Rotationsfläche**. In diesem Beispiel hängt F von $\dot{x}$ und t, jedoch nicht von x ab:



$$\alpha = \int_{P_1}^{P_2} da = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} t\sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt = \text{Minimum} \tag{1.113}$$

Zurückführung der Variationsaufgabe auf **Differentialgleichungen**. n-dimensionale Behandlung: Es werden diejenigen $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$ gesucht, für die

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, \dots x_n, \dot{x}_1, \dots \dot{x}_n, t)\, dt = \text{Extremum} \tag{1.114}$$

und $x_i(t_1) = x_i^1$, $x_i(t_2) = x_i^2$ ist $(i = 1, \dots n)$. Funktion F und Werte t_1, t_2, x_i^1, x_i^2 gegeben.

Variation der gesuchten $x_i(t)$:

$$\overline{x}_i(t) = x_i(t) + \varepsilon_i\, \xi_i(t) \; , \tag{1.115}$$

$\xi_i(t)$ beliebige (differenzierbare) Funktionen mit

$$\xi_i(t_1) = \xi_i(t_2) = 0 \,. \tag{1.116}$$

ε_i reelle Parameter; für $\varepsilon_i \to 0$ gehen die $\overline{x}_i(t)$ in die $x_i(t)$ über. **Variation** des Integrals:

$$I(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n) = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(x_1 + \varepsilon_1 \xi_1, \dots, \dot{x}_1 + \varepsilon_1 \dot{\xi}_1, \dots, t)\, dt \,. \tag{1.117}$$

$I(\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$ soll für $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 0$ ein Extremum besitzen; notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i}\right)_{\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0} = 0 \,, \qquad i = 1, \dots n \,, \tag{1.118}$$

das heißt

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \dot{\xi}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) dt = 0 \,, \quad i = 1, \dots n \,. \tag{1.119}$$

Partielle Integration des zweiten Terms:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\, dt = \left(\xi_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\, dt = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi_i \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\, dt \tag{1.120}$$

– der Randterm verschwindet wegen (1.116) – führt in (1.119) auf

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) dt = 0 \,, \quad i = 1, \dots n \,. \tag{1.121}$$

Hieraus folgen – mit dem **Fundamentallemma der Variationsrechnung** *) – die **Eulerschen Gleichungen**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \,, \qquad i = 1, \dots n \,. \tag{1.122}$$

*) Fundamentallemma:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \xi(t)\, \eta(t)\, dt = 0 \text{ für beliebige } \xi(t) \text{ mit } \xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \eta(t) = 0$$

Leonhard Euler, 1707 - 1783

Hier wurde bewiesen: I = Extremum ⇒ Eulersche Gleichungen. Die Umkehrung ⇐ ist ebenfalls richtig. Siehe hierzu Arnold § 12. Also hat man *Äquivalenz* von integralem Variationsprinzip und Eulerschen Differentialgleichungen.

Lösung der obigen Beispiele mit Hilfe von (1.122). *Ad.* 1:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} , \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$(1.122) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = a \quad \Rightarrow \quad x(t) = a\,t + b , \tag{1.123}$$

d. i. eine Gerade (wie erwartet). *Ad.* 2: Die Brachystochrone ist eine Zykloide. Beweis? *Ad.* 3: $x(t)$ ist eine Kettenlinie. Siehe Goldstein, chap. 2.2.

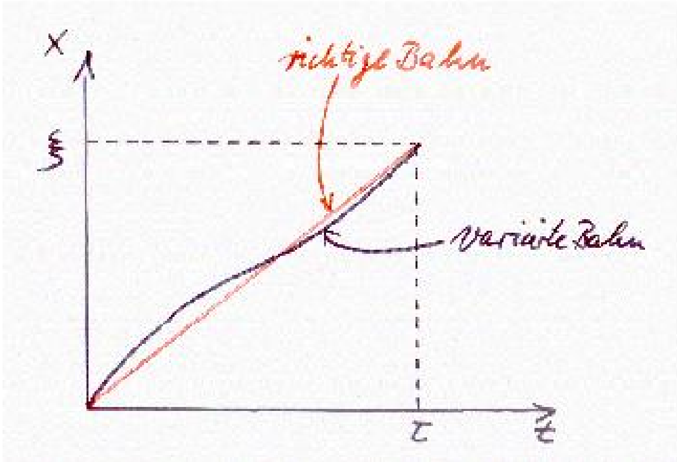
Der Vergleich von (1.122) mit (1.50) führt auf das **Hamiltonsche Prinzip**:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t)\,dt = \text{Extremum} . \tag{1.124}$$

Die Lagrange-Gleichungen sind die Eulerschen Gleichungen des Variationsprinzips (1.124). Von allen denkbaren Bahnen $q_\alpha(t)$, die von 1 nach 2 führen, verleiht die richtige Bahn (Lösung der Lagrange-Gleichungen) dem *Wirkungsintegral* $\int L\,dt$ einen Extremwert.

Beispiel: freies Teilchen

$$L = T = \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 \tag{1.125}$$



Variierte Bahn: $v = v(t)$ beliebig – mit der Einschränkung $< v(t) > = \xi / \tau$; richtige Bahn:

$$v = \xi / \tau = < v(t) > ; \tag{1.126}$$

wegen

$$< v^2(t) > \geq < v(t) >^2 = (\xi / \tau)^2 \tag{1.127}$$

folgt

$$\int_0^\tau \frac{m}{2} v^2(t)\, dt \geq \int_0^\tau \frac{m}{2} \left(\frac{\xi}{\tau}\right)^2 dt\ , \tag{1.128}$$

d. h. das Wirkungsintegral hat für die gleichförmige (d. i. die richtige) Bewegung den niedrigsten Wert.

Empfehlenswerte Lektüre: Feynman Lectures on Physics II, § 19, The Principle of Least Action.

2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Berechnung der Bahn $q_\alpha(t)$, $\alpha = 1, \ldots n$, aus den Lagrange-Gleichungen (1.50) zusammen mit Anfangsbedingungen $q_\alpha(0) = Q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha(0) = \dot{Q}_\alpha$:

$$q_\alpha = q_\alpha(Q_1, \ldots Q_n, \dot{Q}_1, \ldots \dot{Q}_n, t) \tag{2.1}$$

Abkürzung:
$$\begin{aligned} &(q_1,\, q_2,\, \dots\, q_n) =:\, q_\alpha \,=:\, q \\ &(Q_1,\, Q_2,\, \dots\, Q_n) =:\, Q_\alpha \,=:\, Q \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Oft interessieren weniger die Details der Bahn, als vielmehr **Konstanten der Bewegung**. Das sind Funktionen $F\,(q,\, \dot q,\, t)$, die ihren Wert längs der Bahn $q\,(t)$ nicht ändern:

$$F\,(q\,(t),\, \dot q\,(t),\, t) \;=\; F\,(Q,\, \dot Q,\, 0) \;=\; \text{konstant} \;. \tag{2.3}$$

Bezeichnung derartiger Gleichungen als **Erhaltungssätze**.

Beispiel:

In dem wichtigen *Spezialfall*, dass L nicht explizit von t abhängt: $L \,=\, L\,(q,\, \dot q)$, lässt sich eine Konstante der Bewegung leicht angeben. Wegen $\partial L \,/\, \partial t \,=\, 0$ hat man nämlich

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\, \dot q_\alpha \,+\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \ddot q_\alpha \right) \\ \overset{(1.50)}{\Longrightarrow} \qquad &= \sum_\alpha \left(\left(\frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha} \right) \dot q_\alpha \,+\, \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \ddot q_\alpha \right) \\ &= \sum_\alpha \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \dot q_\alpha \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \dot q_\alpha \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & \frac{d}{dt} \left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \dot q_\alpha \,-\, L \right) \,=\, 0 \\ \Rightarrow \qquad & H \,=\, H\,(q,\, \dot q) \,=\, \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\, \dot q_\alpha \,-\, L \,=\, \text{konstant} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sei *noch spezieller* $L \,=\, T \,-\, V$ mit T homogen quadratisch in den $\dot q_\alpha$; siehe (1.44). Mit dem *Eulerschen Satz über homogene Funktionen* *) folgt:

$$\sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot q_\alpha}\, \dot q_\alpha \;=\; 2\,T \;. \tag{2.6}$$

*) Sei $F\,(x_1,\, \dots\, x_n)$ homogen vom Grade m:

$$F\,(\lambda\, x_1,\, \dots\, \lambda\, x_n) \;=\; \lambda^m\, F\,(x_1,\, \dots\, x_n) \;;$$

dann gilt (siehe Budó § 34.5; vorstehende Gleichung nach λ ableiten und dann $\lambda \,=\, 1$ setzen):

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\, x_i \;=\; m\, F$$

Sei ferner V unabhängig von den $\dot{q}_\alpha$. Dann ist wegen (2.5, 6)

$$H = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} (T - V)\, \dot{q}_\alpha - T + V = T + V = E \,, \tag{2.7}$$

d. i. die **Energie** des Systems. (2.5) ist in diesem Fall der **Energiesatz**.

F Konstante der Bewegung $\Rightarrow$ Funktion $G(F)$ Konstante der Bewegung. G von F abhängig (und umgekehrt). Konstanten der Bewegung F_1, F_2 heißen *unabhängig*, wenn die eine nicht als Funktion der anderen darstellbar ist. Gibt es eine maximale Anzahl von unabhängigen Konstanten der Bewegung? Wenn ja, wie groß ist diese?

Satz: Ein System mit n Freiheitsgraden besitzt genau $2\,n$ unabhängige Konstanten der Bewegung.

Beweis: Die allgemeine Lösung der Lagrange-Gleichungen hängt von $2\,n$ Integrationskonstanten c_i ab:

$$q_\alpha = q_\alpha (c_1, c_2, \ldots c_{2\,n}, t) \,. \tag{2.8}$$

Zu jeder Wahl der c_i gibt es eine bestimmte Bewegung; siehe z. B. (2.1), wo $c_1, \ldots c_{2\,n}$ die Bedeutung der anfänglichen q, $\dot{q}$ haben. Betrachte eine beliebige (diffbare) Funktion $f(q, \dot{q}, t)$. Einsetzen von (2.8) führt auf

$$f(q(c, t), \dot{q}(c, t), t) = g(c, t) \tag{2.9}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial c_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial c_i} \right) = \frac{\partial g}{\partial c_i} \,, \qquad i = 1, \ldots 2\,n \,. \tag{2.10}$$

Nicht alle $\partial g / \partial c_i$ verschwinden. Falls ja, d. h. g unabhängig von sämtlichen c_i, wäre (2.9) eine die q_α verknüpfende Zwangsbedingung, die von vornherein ausgeschlossen wird. Demnach ist (2.10) ein *inhomogenes* System von $2\,n$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der $2\,n$ Größen $\partial f / \partial q_\alpha$, $\partial f / \partial \dot{q}_\alpha$. Eine (eindeutige) Lösung existiert genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet:

$$\left\| \frac{\partial (q, \dot{q})}{\partial c} \right\| \neq 0 \,. \tag{2.11}$$

Eine (eindeutige) Lösung existiert aber nach Konstruktion von (2.10), also gilt (2.11). Aus (2.11) folgt Invertierbarkeit:

$$q_\alpha = q_\alpha (c, t) \,, \quad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha (c, t) \tag{2.12}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad c_i \,=\, c_i\,(q,\,\dot{q},\,t)\ . \tag{2.13}$$

Das sind $2\,n$ Konstanten der Bewegung. Unabhängig; falls nicht, könnte (2.13) nicht nach (2.12) aufgelöst werden. Es gibt keine weiteren unabhängigen Konstanten der Bewegung. Denn: $K\,(q,\,\dot{q},\,t)$ Konstante der Bewegung

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad & K\,(q,\,\dot{q},\,t) \,=\, A\,(c,\,t) \\ \Rightarrow \qquad & \frac{dK}{dt} \,=\, \frac{dA}{dt} \,=\, \frac{\partial\,A}{\partial\,t} \,=\, 0 \\ \Rightarrow \qquad & K\,(q,\,\dot{q},\,t) \,=\, A\,(c) \end{aligned} \tag{2.14}$$

abhängig von den c_i. Damit ist der Beweis komplett •

Anmerkungen:

1. Die Konstanten c_i sind durch die Anfangswerte Q_α, $\dot{Q}_\alpha$ ausdrückbar und umgekehrt. Daher kann man auch letztere als die Konstanten der Bewegung des Systems ansehen:

$$\begin{aligned} Q_\alpha = Q_\alpha\,(q,\,\dot{q},\,t) \,&=\, \text{konstant} \\ \dot{Q}_\alpha = \dot{Q}_\alpha\,(q,\,\dot{q},\,t) \,&=\, \text{konstant}\ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

2. Das Problem der Integration der Lagrange-Gleichungen ist äquivalent dem Problem, $2\,n$ unabhängige Konstanten der Bewegung zu finden. Siehe den Übergang von (2.12) nach (2.13) und umgekehrt.

Beispiel: Teilchen im homogenen Kraftfeld

$$L \,=\, \frac{m}{2}\,\vec{v}^{\,2} \,+\, \vec{F}\cdot\vec{r} \qquad \stackrel{(1.50)}{\Longrightarrow} \qquad m\,\dot{\vec{v}} \,=\, \vec{F}\ , \quad \dot{\vec{r}} \,=\, \vec{v} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \vec{v} &= \frac{t}{m}\,\vec{F} \,+\, \vec{v}_0 & \Rightarrow \qquad \vec{v}_0 \,&=\, \vec{v} \,-\, \frac{t}{m}\,\vec{F} \,=\, \text{konstant} \\ \vec{r} &= \frac{t^2}{2\,m}\,\vec{F} \,+\, t\,\vec{v}_0 \,+\, \vec{r}_0 & \Rightarrow \qquad \vec{r}_0 \,&=\, \vec{r} \,-\, t\,\vec{v} \,+\, \frac{t^2}{2\,m}\,\vec{F} \,=\, \text{konstant} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Das sind (in drei Dimensionen) sechs unabhängige Konstanten der Bewegung. Dynamisch interessante *Erhaltungsgrößen* sind die Energie:

$$E \,=\, \frac{m}{2}\,\vec{v}^{\,2} \,-\, \vec{F}\cdot\vec{r} \,=\, \text{konstant} \tag{2.18}$$

und die zu $\vec{F}$ orthogonalen Impulskomponenten:

$$p_u \, = \, m\,\vec{v} \cdot \hat{u} \, = \, \text{konstant} \; , \tag{2.19}$$

wo $\hat{u}$ ein zu $\vec{F}$ senkrechter, ansonsten beliebiger Einheitsvektor ist. E, p_u sind durch $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$ ausdrückbar. Wie?

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszillator

$$L \, = \, \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 \, - \, \frac{k}{2}\,x^2 \tag{2.20}$$

$$\overset{(1.50)}{\Longrightarrow} \qquad \ddot{x} \, + \, \omega^2\,x \, = \, 0 \; , \quad \omega^2 \, = \, k\,/\,m \tag{2.21}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{v_0}{\omega}\,\sin\omega\,t \, + \, x_0\,\cos\omega\,t \qquad (x\,(0) \, = \, x_0) \\ \dot{x} &= v_0\,\cos\omega\,t \, - \, x_0\,\omega\,\sin\omega\,t \qquad (\dot{x}\,(0) \, = \, v_0) \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x_0 &= (\cos\omega\,t)\,x \, - \, \frac{1}{\omega}\,(\sin\omega\,t)\,\dot{x} \, = \, \text{konstant} \\ v_0 &= \omega\,(\sin\omega\,t)\,x \, + \, (\cos\omega\,t)\,\dot{x} \, = \, \text{konstant} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Das sind zwei unabhängige Konstanten der Bewegung. Die Energie (u. a.)

$$E \, = \, \frac{m}{2}\,\dot{x}^2 \, + \, \frac{k}{2}\,x^2 \, = \, \text{konstant} \tag{2.24}$$

ist von x_0, v_0 abhängig: $E \, = \, \dfrac{m}{2}\,v_0^2 \, + \, \dfrac{k}{2}\,x_0^2$ •

Im allgemeinen (abgesehen von einigen wenigen speziellen Systemen) ist die Lösung der Lagrange-Gleichungen *nicht* in geschlossener Form (2.8) (oder spezieller (2.1)) darstellbar. Wie gelangt man dann – abgesehen von (2.5) – zu Konstanten der Bewegung?

Zur weiteren Diskussion Umformulierung der Lagrange-Gleichungen. Einführung des zur generalisierten Koordinate q_α *konjugierten generalisierten Impulses*:

$$p_\alpha \, = \, \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{q}_\alpha}\,(q,\,\dot{q},\,t) \; . \tag{2.25}$$

Die Lagrange-Gleichungen nehmen dann die folgende Gestalt an:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}(q, \dot{q}, t) \tag{2.26}$$

Gln. (2.25, 26) sind Gln. (1.50) äquivalent. Es handelt sich hier jedoch um $2n$ Dgln. 1. Ordnung zur Bestimmung von $q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$ – dort um n Dgln. 2. Ordnung zur Bestimmung von $q_\alpha(t)$. Vgl. (1.77).

Eine Koordinate q_α heißt **zyklisch**, wenn L nicht davon abhängt: $\partial L / \partial q_\alpha = 0$. Aus (2.26) folgt in diesem Fall:

$$p_\alpha(q(t), \dot{q}(t), t) = \text{konstant} . \tag{2.27}$$

Der zu einer zyklischen Koordinate konjugierte Impuls ist demnach eine Konstante der Bewegung.

Beispiele:

1. **Freies Teilchen**:

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}^2 , \quad \text{d. h. } \vec{r} \text{ zyklisch}$$
$$\Rightarrow \qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} = \text{konstant} ; \tag{2.28}$$

das freie Teilchen bewegt sich mit konstantem Impuls (Trägheitsgesetz).

2. **Sphärisches Pendel** (siehe Gln. (1.58, 59)):

$$\varphi \text{ zyklisch} \quad \Rightarrow \quad p_\varphi = L_z = \text{konstant} ; \tag{2.29}$$

die Zylindersymmetrie des Systems bezüglich der z-Achse impliziert Konstanz der z-Komponente des Drehimpulses.

Reduktion der Dimensionalität. q_α zyklisch, p_α konstant reduzieren das n-dimensionale Problem auf ein $(n-1)$-dimensionales Problem: Elimination von $\dot{q}_\alpha$ mit Hilfe von (2.27).

Was macht man, wenn *kein* q_α zyklisch ist? Manchmal hilft der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem, wenn dadurch eine Koordinate (evtl. mehrere) zyklisch wird. *Beispiel*: *Teilchen im Zentralpotential.* Kartesische Koordinaten sämtlich nicht zyklisch, aber in Kugelkoordinaten wird φ zyklisch $\Rightarrow$ L_z-Erhaltung (siehe Gln. (1.56, 57)).

Die Konstanten der Bewegung sind eng mit den **Symmetrien** des Systems, d. h. der Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$ verknüpft.

Betrachte die *einparametrige Schar (infinitesimaler) Transformationen*

$$\overline{q}_\alpha = \overline{q}_\alpha (q,\, t;\, \varepsilon) = q_\alpha + \varepsilon\, \xi_\alpha (q,\, t) + \ldots \tag{2.30}$$

(vgl. (1.78)), wo ε ein (infinitesimaler) reeller Parameter ist. Für $\varepsilon = 0$ hat man die identische Transformation: $\overline{q}_\alpha = q_\alpha$. Die transformierte Lagrange-Funktion ist (vgl. (1.79))

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(q,\, \dot{q},\, t) &= L\left(\overline{q},\, \dot{\overline{q}},\, t\right) \\ &= L\,(q,\, \dot{q},\, t) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial\, \varepsilon}\, L_\varepsilon\,(q,\, \dot{q},\, t)\right)_{\varepsilon\,=\,0} + \ldots \end{aligned} \tag{2.31}$$

L heißt *quasisymmetrisch* gegenüber (2.30), falls es eine Funktion $\chi\,(q,\, t)$ gibt, so dass gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\, \varepsilon}\, L_\varepsilon\,(q,\, \dot{q},\, t)\right)_{\varepsilon\,=\,0} = \frac{d}{dt}\, \chi\,(q,\, \dot{q},\, t)\ . \tag{2.32}$$

Dann sind nach der Umkehrung des entsprechenden Satzes in Kap. 1 die Lagrange-Gleichungen invariant gegenüber (2.30) (in 1. Ordnung von ε). Im speziellen Fall

$$\left(\frac{\partial}{\partial\, \varepsilon}\, L_\varepsilon\,(q,\, \dot{q},\, t)\right)_{\varepsilon\,=\,0} = 0\ , \tag{2.33}$$

d. i. *Invarianz der Lagrange-Funktion* (in 1. Ordnung von ε), nennt man L *symmetrisch* gegenüber (2.30); in diesem Falle sind die Lagrange-Gleichungen erst recht invariant gegenüber (2.30) (in 1. Ordnung von ε).

Noether-Theorem: Sei L (quasi)symmetrisch gegenüber (2.30) im Sinne von (2.32, 33). Dann ist

$$F = \sum_\alpha \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}_\alpha} \xi_\alpha - \chi = \text{konstant} \tag{2.34}$$

längs der Bahn $q_\alpha\,(t)$, also Konstante der Bewegung gemäß (2.3).

Amalie Emmy Noether, 1882 - 1935

Beweis: Nach (2.30, 31) sowie unter der Voraussetzung (2.32) ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} L_\varepsilon(q,\dot q,t)\right)_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} L(q+\varepsilon\,\xi,\,\dot q+\varepsilon\,\dot\xi,\,t)\right)_{\varepsilon=0}\\ &= \sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\,\xi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\,\dot\xi_\alpha\right)\\ &= \sum_\alpha\left(\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\right)\xi_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\,\xi_\alpha\right)\right)\\ &= \frac{d}{dt}\,\chi\ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Längs der Bahn kann man wegen (1.50)

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}$$

setzen. Damit nimmt (2.35) die folgende Gestalt an:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha}\,\xi_\alpha - \chi\right) = 0\ . \tag{2.36}$$

Das ist die *Behauptung* (2.34) in der Form $\dot F = 0$ •

Anmerkungen:

1. Falls statt (2.32) sogar (2.33) gilt, fehlt der χ-Term in (2.34).

2. Statt (2.30) r-parametrige Liesche Transformationsgruppe; man erhält insgesamt r Konstanten der Bewegung. Siehe z. B. P. Mittelstaedt, Klassische Mechanik, BI Nr. 500/500a, Mannheim (1970) § 6.

3. Die *Umkehrung* des Noether-Theorems, wonach es zu jeder Konstanten der Bewegung eine ε-Familie von Transformationen gibt, gegenüber der sich die Lagrange-Funktion (quasi) symmetrisch verhält, wird in Saletan & Cromer, chap. III 5 (d) bewiesen.

In den folgenden **Beispielen** wird ein System mit der Lagrange-Funktion

$$L = L\,(x_1,\, y_1,\, z_1,\, \ldots\, x_N,\, y_N,\, z_N;\, \dot{x}_1,\, \dot{y}_1,\, \dot{z}_1,\, \ldots\, \dot{x}_N,\, \dot{y}_N,\, \dot{z}_N;\, t) \qquad (2.37)$$

zu Grunde gelegt: z. B. **N-Körperproblem in kartesischen Koordinaten**.

1. **Räumliche Translationsinvarianz**. Die Lagrange-Funktion (2.37) sei symmetrisch gegenüber Translation in x-Richtung:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= x_i + \varepsilon \\ \overline{y}_i &= y_i \\ \overline{z}_i &= z_i \ , \end{aligned} \qquad (2.38)$$

d. h. es sei

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon} L\Big(x_1+\varepsilon, y_1, z_1, \ldots x_N+\varepsilon, y_N, z_N; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ldots \dot{x}_N, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N; t\Big)\right)_{\varepsilon=0} = 0. \quad (2.39)$$

Mit $\chi = 0$ sowie

$$\xi_{x_i} = 1 \ , \quad \xi_{y_i} = \xi_{z_i} = 0 \qquad (2.40)$$

folgt aus (2.34):

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^{N} p_{x,i} = P_x = \text{konstant} \ , \qquad (2.41)$$

d. h. *Impulserhaltung*. Genauer: Erhaltung der x-Komponente des Gesamtimpulses. Falls auch bezüglich der y- und der z-Richtung räumliche Translationsinvarianz vorliegt, bleiben die entsprechenden Impulskomponenten P_y bzw. P_z ebenfalls erhalten.

Spezialfälle:

a)
$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - V(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, t) \tag{2.42}$$

mit V translationsinvariant bzgl. beliebiger Richtungen; z. B. abgeschlossenes System mit

$$V = \sum_{i<j} v(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \ , \tag{2.43}$$

wo v eine für alle Teilchenpaare gleiche innere Wechselwirkung beschreibt (z. B. Kepler-Potential in der Himmelsmechanik). Es folgt:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{konstant} \ . \tag{2.44}$$

Falls Translationsinvarianz nur in einer bestimmten Richtung vorliegt, bleibt nur die entsprechende $\vec{P}$-Komponente erhalten; siehe Teilchen im homogenen Kraftfeld, Gl. (2.19).

b) Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (1.75):

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} - e\left(\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)\right) \tag{2.45}$$

mit ϕ, $\vec{A}$ translationsinvariant in Richtung $\hat{u}$; dann ist

$$p_u = (m \dot{\vec{r}} + e \vec{A}(\vec{r}, t)) \cdot \hat{u} = \text{konstant} \ . \tag{2.46}$$

c) Relativistisches Teilchen (Goldstein, chap. 7.8):

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \vec{v}^{\,2} / c^2} - V(\vec{r}, t) \ ; \tag{2.47}$$

m_0 = Ruhmasse, c = Lichtgeschwindigkeit. Lagrange-Gleichungen gemäß (1.50):

$$\frac{d}{dt} (m(v) \vec{v}) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \tag{2.48}$$

mit

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \ , \tag{2.49}$$

siehe Einstein-Mechanik. Sei V translationsinvariant in u-Richtung. Dann gilt:

$$p_u = m(v) \vec{v} \cdot \hat{u} = \text{konstant} \ . \tag{2.50}$$

2. **Rotationsinvarianz**. Die Lagrange-Funktion (2.38) sei symmetrisch gegenüber Rotation um die z-Achse:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= \cos\varepsilon\, x_i \,-\, \sin\varepsilon\, y_i \,=\, x_i \,-\, \varepsilon\, y_i \,+\, \ldots \\ \overline{y}_i &= \sin\varepsilon\, x_i \,+\, \cos\varepsilon\, y_i \,=\, y_i \,+\, \epsilon\, x_i \,+\, \ldots \\ \overline{z}_i &= z_i \ , \end{aligned} \tag{2.51}$$

d. h. es sei

$$\left(\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\, L\,(x_i \,-\, \varepsilon\, y_i,\, y_i + \varepsilon\, x_i,\, z_i;\, \dot{x}_i \,-\, \varepsilon\, \dot{y}_i,\, \dot{y}_i \,+\, \varepsilon\, \dot{x}_i,\, \dot{z}_i;\, t)\right)_{\varepsilon\,=\,0} = \,0\ . \tag{2.52}$$

Mit $\chi \,=\, 0$ sowie

$$\xi_{x_i} \,=\, -y_i, \quad \xi_{y_i} \,=\, x_i, \quad \xi_{z_i} \,=\, 0 \tag{2.53}$$

folgt aus (2.34):

$$F \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N} \left(x_i\, \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{y}_i} \,-\, y_i\, \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{x}_i}\right) \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N} l_{z,\,i} \,=\, L_z \,=\, \text{konstant}\ , \tag{2.54}$$

d. i. *Drehimpulserhaltung*. Genauer: Erhaltung der z-Komponente des Gesamtdrehimpulses.

Wenn die Lagrange-Funktion z. B. von der Gestalt (2.42) ist mit rotationsinvariantem V bezüglich beliebiger Richtungen (auf T trifft das zu; wieso?), dann ist

$$\vec{L} \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N} m_i\, \vec{r}_i \,\times\, \dot{\vec{r}}_i \,=\, \sum_{i\,=\,1}^{N} \vec{l}_i \,=\, \text{konstant}\ . \tag{2.55}$$

Beispiel: V gemäß (2.43). Falls Rotationsinvarianz nur für eine bestimmte Richtung gegeben ist, bleibt nur die entsprechende $\vec{L}$-Komponente erhalten; z. B. zylindersymmetrisches V.

3. **Zeitliche Translationsinvarianz**. Man kann das Noether-Theorem verallgemeinern, indem zusätzlich zu (2.30) auch Transformationen der Zeit berücksichtigt werden:

$$\overline{t} \,=\, \overline{t}\,(q,\, t;\, \varepsilon)\ . \tag{2.56}$$

Man erhält dann statt (2.34) einen umfassenderen Ausdruck für die Erhaltungsgröße F, siehe z. B. E. A. Desloge & R. I. Koch, Noethers theorem in classical mechanics, Am. J.

Phys. 45 (1977) 336. Das wichtigste Anwendungsbeispiel ist die Invarianz *autonomer Systeme*, d. h. von Systemen mit $L = L(q, \dot{q})$, unter zeitlicher Translation:

$$\bar{t} = t + \varepsilon \,. \tag{2.57}$$

Das erweiterte Noether-Theorem liefert in diesem Fall die Erhaltungsgröße

$$F = H(q, \dot{q}) \,, \tag{2.58}$$

die bereits in Gl. (2.5) auf anderem Wege hergeleitet wurde. Also: Zeitliche Translationsinvarianz impliziert *Energieerhaltung*.

In den bisherigen Beispielen wurde gezeigt, dass Symmetrien der Lagrange-Funktion (des Systems) Erhaltungssätze implizieren: räumliche Translations- und Rotationsinvarianz ⇒ Impuls- bzw. Drehimpulserhaltung; zeitliche Translationsinvarianz ⇒ Energieerhaltung. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Umkehrung des Noether-Theorems. Daraus ergeben sich Konsequenzen für die *Konstruktion der Lagrange-Funktion* eines Systems – sofern diese zunächst unbekannt ist. Sollen die obigen Erhaltungssätze für das System gelten (z. B. abgeschlossenes System), so ist die Lagrange-Funktion mit den entsprechenden Invarianzeigenschaften auszustatten. Das legt die Lagrange-Funktion i. a. noch nicht fest, aber man kann gezielter nach der „richtigen“ Lagrange-Funktion suchen.

Die Symmetrien der Lagrange-Funktion spiegeln gewisse Strukturen von Raum und Zeit wieder: die räumliche Translations- und Rotationsinvarianz von L die *Homogenität des Raumes* bzw. die *Isotropie des Raumes*, die zeitliche Translationsinvarianz von L die *Homogenität der Zeit*. Daher kann man sagen: Die Erhaltungssätze für Impuls, Drehimpuls und Energie sind Konsequenzen der Homogenität und Isotropie der Raumzeit.

In den folgenden beiden Beispielen ist L nur *quasisymmetrisch*: $\chi = \chi(q, \dot{q}, t) \neq 0$.

4. **Galilei-Invarianz**. Die Lagrange-Funktion

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, y_1, z_1, \ldots x_N, y_N, z_N; t) \tag{2.59}$$

mit V translationsinvariant in x-Richtung ist quasisymmetrisch gegenüber Galilei-Transformation in x-Richtung:

$$\begin{aligned} \overline{x}_i &= x_i + \varepsilon\, t \\ \overline{y}_i &= y_i \\ \overline{z}_i &= z_i \,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Denn gemäß (2.32) ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\,L\,(x_1\,+\,\varepsilon\,t,\,y_1,\,z_1,\,\ldots\,;\dot{x}_1\,+\,\varepsilon,\,\dot{y}_1,\,\dot{z}_1,\,\ldots\,;\,t)\right)_{\varepsilon\,=\,0}$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\sum_i \frac{m_i}{2}\,((\dot{x}_i\,+\,\varepsilon)^2\,+\,\dot{y}_i^2\,+\,\dot{z}_i^2)\,-\,V\,(x_1,\,y_1,\,z_1,\,\ldots\,;\,t)\right)\right)_{\varepsilon\,=\,0}$$
$$=\sum_i m_i\,\dot{x}_i\,=\,\frac{d}{dt}\sum_i m_i\,x_i\,=\,\frac{d}{dt}\,MX\;, \tag{2.61}$$

Galileo Galilei, 1564 - 1642

wo $M\,=\,\sum_i m_i$ die Gesamtmasse und $X\,=\,\sum_i m_i\,x_i\,/\,M$ die x-Komponente des Schwerpunktes ist. Mit $\chi\,=\,MX$ und

$$\xi_{x_i}\,=\,t\;,\quad \xi_{y_i}\,=\,\xi_{z_i}\,=\,0 \tag{2.62}$$

folgt aus (2.34):

$$F\,=\,\sum_i \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{x}_i}\,t\,-\,\chi\,=\,P_x\,t\,-\,MX\,=\,-MX_0\,=\,\text{konstant}\;. \tag{2.63}$$

Das ist der *Schwerpunktsatz*:

$$X\,=\,(P_x\,/\,M)\,t\,+\,X_0\;. \tag{2.64}$$

Dreidimensionale Verallgemeinerung möglich, sofern V in jeder Richtung translationsinvariant ist:

$$\vec{R}\,=\,(\vec{P}\,/\,M)\,t\,+\,\vec{R}_0\;. \tag{2.65}$$

Der Schwerpunkt bewegt sich gradlinig-gleichförmig mit der konstanten Gewchwindigkeit $\vec{P}\,/\,M$.

Umkehrung: Zur Herleitung der Lagrange-Funktion des freien Teilchens aus der Forderung nach Galilei-Invarianz der Lagrange-Gleichungen siehe Saletan & Cromer, chap. III 4.

Aus den vorstehenden Beispielen ergeben sich die **zehn klassischen Konstanten der Bewegung des abgeschlossenen N-Körpersystems**:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2} - V(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N) \tag{2.66}$$

mit V gemäß (2.43). Erhaltungsgrößen dieses Systems sind

– der Impuls:
$$\vec{P} = \sum_i m_i\,\dot{\vec{r}}_i \tag{2.67 a}$$

– der Drehimpuls:
$$\vec{L} = \sum_i m_i\,\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \tag{2.67 b}$$

– die Energie:
$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N) \tag{2.67 c}$$

– der (anfängliche) Schwerpunkt:
$$\vec{R}_0 = \frac{\sum_i m_i\,(\vec{r}_i - \dot{\vec{r}}_i\,t)}{\sum_i m_i}\,. \tag{2.67 d}$$

Für $N = 1$ (sechs unabhängige Konstanten der Bewegung) sind die Größen (2.67) nicht unabhängig; es lassen sich aber leicht sechs unabhängige Konstanten der Bewegung daraus gewinnen. Für $N = 2$ (zwölf unabhängige Konstanten der Bewegung) sind die Größen (2.67) unabhängig voneinander; zwei weitere Konstanten der Bewegung ergeben sich leicht aus der Relativbewegung. Für $N \geq 3$ ($6N$ unabhängige Konstanten der Bewegung) ist das Aufsuchen weiterer Konstanten der Bewegung eine sehr schwere Aufgabe.

Die bisherigen Transformationen $q, t \;\rightarrow\; \overline{q}, \overline{t}\,(q, t; \varepsilon)$ waren „anschaulich“: räumliche Translationen und Rotationen, zeitliche Translationen, Wechsel des Inertialsystems. Das letzte Beispiel zum Noether-Theorem zeigt, dass die Transformation (2.30) auch „unanschaulich“ sein kann.

5. **Runge-Lenz-Vektor, Kepler-Problem**. Die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \dot{x}_\alpha^2 + \frac{k}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2}} = \frac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^{\,2} + \frac{k}{|\vec{x}|} \tag{2.68}$$

des Kepler-Problems ist quasisymmetrisch gegenüber den *drei* Transformationen

Johannes Kepler, 1571 - 1630

$$\overline{x}_\alpha \,=\, x_\alpha \,-\, \varepsilon\, m\, (2\, \dot{x}_\alpha\, x_\beta \,-\, x_\alpha\, \dot{x}_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, \delta_{\alpha\beta}) \;, \tag{2.69}$$

$\alpha,\ \beta \,=\, 1,\, 2,\, 3$: zu jedem β gibt es eine Transformation der x_α. Es folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_\alpha &= \dot{x}_\alpha \,-\, \varepsilon\, m\, \frac{d}{dt}\, (2\, \dot{x}_\alpha\, x_\beta \,-\, x_\alpha\, \dot{x}_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, \delta_{\alpha\beta}) \\ &= \dot{x}_\alpha \,-\, \varepsilon\, m\, (2\, \ddot{x}_\alpha\, x_\beta \,+\, \dot{x}_\alpha\, \dot{x}_\beta \,-\, x_\alpha\, \ddot{x}_\beta \,-\, \dot{\vec{x}}^2\, \delta_{\alpha\beta} \,-\, \vec{x} \cdot \ddot{\vec{x}}\, \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad L_\varepsilon &= L\, (\overline{x},\, \dot{\overline{x}}) \\ &= \frac{m}{2}\, \sum_\alpha (\dot{x}_\alpha \,-\, \varepsilon\, m\, (2\, \ddot{x}_\alpha\, x_\beta \,+\, \dot{x}_\alpha\, \dot{x}_\beta \,-\, x_\alpha\, \ddot{x}_\beta \,-\, \dot{\vec{x}}^2\, \delta_{\alpha\beta} \,-\, \vec{x} \cdot \ddot{\vec{x}}\, \delta_{\alpha\beta}))^2 \\ &+ \frac{k}{\sqrt{\sum_\alpha (x_\alpha \,-\, \varepsilon\, m\, (2\, \dot{x}_\alpha\, x_\beta \,-\, x_\alpha\, \dot{x}_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, \delta_{\alpha\beta}))^2}} \\ &= L\, (x,\, \dot{x}) \,-\, \varepsilon\, m^2\, (2\, \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}\, x_\beta \,-\, \dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}\, \ddot{x}_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \ddot{\vec{x}}\, \dot{x}_\beta) \\ &\qquad + \, \varepsilon\, k\, m\, (\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, x_\beta \,-\, \vec{x}^{\,2}\, \dot{x}_\beta)\, /\, |\vec{x}|^3 \,+\, \ldots \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial\, L_\varepsilon}{\partial\, \varepsilon} \right)_{\varepsilon\, =\, 0} &= \, -m^2\, (2\, \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}}\, x_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, \ddot{x}_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \ddot{\vec{x}}\, \dot{x}_\beta) \\ &\qquad + k\, m\, (\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, x_\beta \,-\, \vec{x}^{\,2}\, \dot{x}_\beta)\, /\, |\vec{x}^{\,3}| \,=\, \dot{\chi}_\beta \;, \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\chi_\beta \,=\, -m^2\, (\dot{\vec{x}}^2\, x_\beta \,-\, \vec{x} \cdot \dot{\vec{x}}\, \dot{x}_\beta) \,-\, k\, m\, x_\beta\, /\, |\vec{x}| \;. \tag{2.73}$$

Mit

$$\xi_\alpha = -m\,(2\,\dot{x}_\alpha\,x_\beta - x_\alpha\,\dot{x}_\beta - \vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}\,\delta_{\alpha\beta}) \tag{2.74}$$

und (2.68, 73) folgt aus (2.34):

$$F_\beta = m^2\,(\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}}\,\dot{x}_\beta - \dot{\vec{x}}^{\,2}\,x_\beta) + k\,m\,x_\beta\,/\,|\vec{x}| = -m\,A_\beta = \text{konstant}\;, \tag{2.75}$$

$\beta = 1, 2, 3$, also drei Konstanten der Bewegung. Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= m\,\dot{\vec{x}}\times(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}) - k\,\vec{x}\,/\,|\vec{x}| \\ &= \vec{v}\times\vec{L} - k\,\hat{x} = \text{konstant}\;,\end{aligned} \tag{2.76}$$

das ist der **Runge-Lenz-Vektor**.

Bahnkurve. Im Zentralkraftfeld erfolgt die Bewegung in der zum Bahndrehimpuls senkrechten Ebene durch den Ursprung:

$$\vec{x}\cdot\vec{L} = 0 \quad \overset{(2.76)}{\Longrightarrow} \quad \vec{A}\cdot\vec{L} = 0\;. \tag{2.77}$$

Also liegt $\vec{A}$ in der Bewegungsebene. Wähle dort ebene Polarkoordinaten $r = |\vec{x}|$ und φ so, dass $\varphi = 0$ der A-Richtung entspricht. Aus (2.76) folgt:

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{A} &= \vec{x}\cdot\vec{v}\times\vec{L} - k\,\vec{x}\cdot\hat{x} \\ &= \vec{x}\times\vec{v}\cdot\vec{L} - k\,r\,\hat{x}\cdot\hat{x}\end{aligned}$$

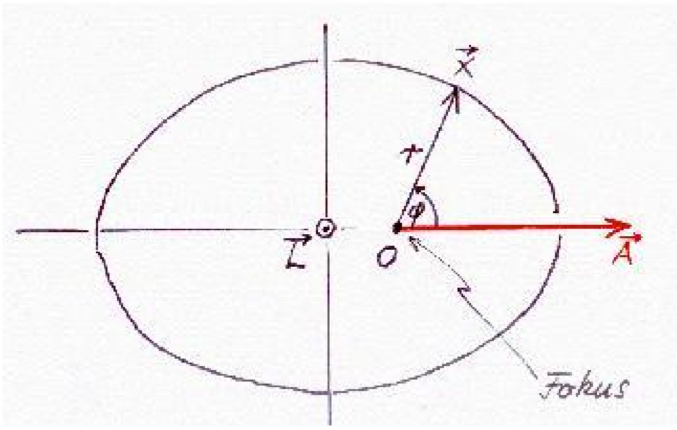
$$\Rightarrow \qquad r\,A\,\cos\varphi = L^2\,/\,m - k\,r$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{p}{1+\varepsilon\,\cos\varphi} \tag{2.78}$$

mit

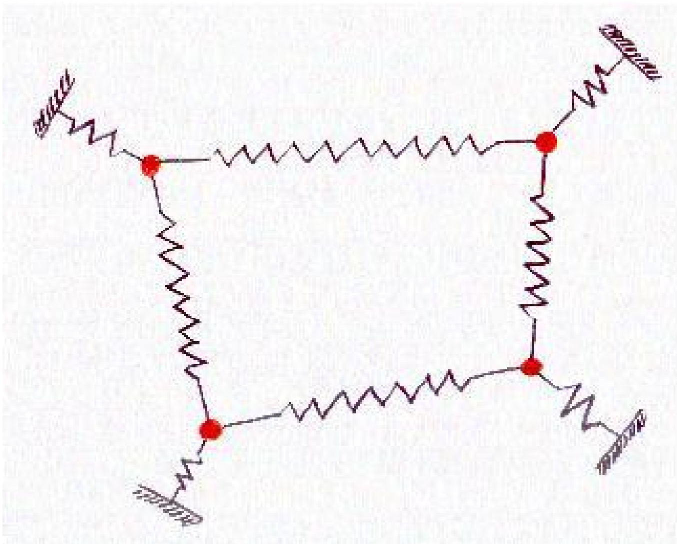
$$p = \frac{L^2}{k\,m},\; \varepsilon = \frac{A}{k}\;, \tag{2.79}$$

d. i. die Polardarstellung der Kegelschnitte (Kraftzentrum in Brennpunkt): $\varepsilon = 0$: Kreis, $0 < \varepsilon < 1$: Ellipse, $\varepsilon = 1$: Parabel, $\varepsilon > 1$: Hyperbel.



3 Schwingende Systeme

Betrachte ein System von N Massenpunkten, die in der skizzierten Weise untereinander und an ortsfeste Aufhängepunkte gekoppelt seien – d. i. ein System ohne Freiheitsgrade der Translation und der Rotation. Dafür soll die Vibrationsbewegung studiert werden. Das System sei zunächst keinerlei zusätzlichen Zwangsbedingungen unterworfen.



Die potentielle Energie des Systems sei

$$V = V\,(\vec{r}_1,\, \vec{r}_2,\, \ldots\, \vec{r}_N)\ . \tag{3.1}$$

Gleichgewichtskonfiguration $\vec{r}_1^{(0)}, \vec{r}_2^{(0)}, \ldots \vec{r}_N^{(0)}$ gekennzeichnet durch die Bedingung

$$V\,(\vec{r}_1^{(0)}, \vec{r}_2^{(0)}, \ldots \vec{r}_N^{(0)}) \;=\; \text{(relatives) Minimum ;} \tag{3.2}$$

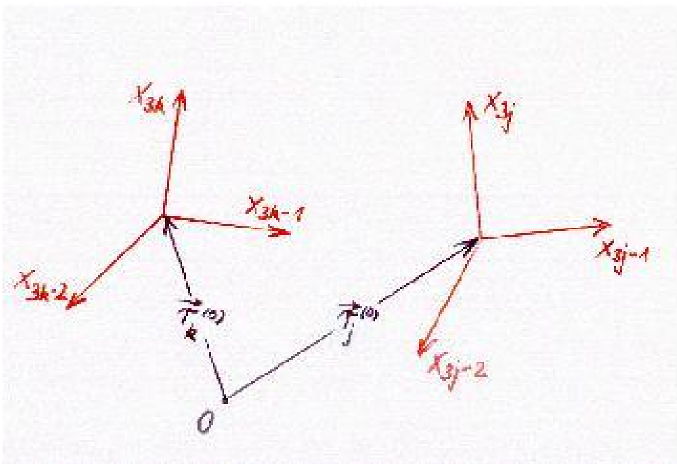
evtl. mehrere Gleichgewichtskonfigurationen. Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage:

$$\vec{x}_j \;=\; \vec{r}_j \,-\, \vec{r}_j^{(0)}\;, \qquad j \;=\; 1,\, 2,\, \ldots\, N\;. \tag{3.3}$$

Eine *beliebige Konfiguration* des Massenpunktsystems ist durch die $3\,N$ *Lagekoordinaten*

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (x_1,\, x_2,\, x_3) \\ \vec{x}_2 &= (x_4,\, x_5,\, x_6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{x}_N &= (x_{3N-2},\, x_{3N-1},\, x_{3\,N}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

spezifizierbar. Zu jedem Gleichgewichtspunkt $\vec{r}_j^{(0)}$ gibt es ein eigenes kartesisches Koordinatensystem $x_{3j-2},\, x_{3j-1},\, x_{3j}$. Für die Gleichgewichtslage gilt $x_1 = x_2 = \ldots = x_{3N} = 0$.



Die potentielle Energie ist eine Funktion der Lagekoordinaten:

$$V \;=\; V\,(x_1,\, x_2,\, \ldots\, x_{3N})\;. \tag{3.5}$$

Taylor-Entwicklung um die Gleichgewichtslage:

$$\begin{aligned} V(x) \;=\; V(0) &+ \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j}(0)\, x_j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\, \partial x_k}(0)\, x_j\, x_k \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{j,k,l} \frac{\partial^3 V}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l}(0)\, x_j\, x_k\, x_l \;+\; \dots \end{aligned} \tag{3.6}$$

Das (relative) Mininum (3.2) ist dadurch gekennzeichnet, dass gilt:

• Die ersten partiellen Ableitungen, damit die Kräfte, verschwinden:

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(0) \;=\; 0 \;, \quad j \;=\; 1, 2, \dots 3N \;. \tag{3.7}$$

• Die *Hesse-Matrix* der zweiten partiellen Ableitungen, d. h. die $(3N \times 3N)$-Matrix mit den Elementen

$$V_{j\,k} \;=\; \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\, \partial x_k}(0) \;, \tag{3.8}$$

ist *symmetrisch* (und *reell*):

$$V_{j\,k} \;=\; V_{k\,j} \tag{3.9}$$

und *positiv-definit*:

$$\sum_{j,\,k} V_{j\,k}\, x_j\, x_k \;>\; 0 \tag{3.10}$$

für beliebige (nicht sämtlich verschwindende, reelle) x_j, x_k, d. h. $V(x) \;>\; V(0)$ für hinreichend kleine $x \neq 0$.

Harmonische Näherung: Bei hinreichend niedriger Energie $E \;>\; V(0)$ führt das System um die Gleichgewichtslage „Schwingungen kleiner Amplitude“ aus. Die Auslenkungen sollen so klein sein, dass es gerechtfertigt ist, in (3.6) die Terme dritter (und höherer) Ordnung zu vernachlässigen. Mit $V(0) \;=\; 0$ (bei geeigneter Wahl des Energienullpunktes) sowie (3.7, 8) erhält man für die potentielle Energie die Darstellung:

$$V \;=\; \frac{1}{2} \sum_{j,\,k} V_{j\,k}\, x_j\, x_k \;. \tag{3.11}$$

Die kinetische Energie des Systems ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{x}_j^2 , \tag{3.12}$$

wo $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}$ die Masse des i-ten Teilchens ist. Also folgt für die *Lagrange-Funktion* in x_j, $\dot{x}_j$:

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_j m_j \dot{x}_j^2 - \sum_{j,k} V_{j\,k}\, x_j\, x_k \right) . \tag{3.13}$$

Die *Lagrangeschen Gleichungen* ergeben sich hieraus zu

$$m_j \ddot{x}_j + \sum_k V_{j\,k}\, x_k = 0 . \tag{3.14}$$

Das ist ein System von $3N$ *gekoppelten, homogenen, linearen Dgln 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* zur Bestimmung der $3N$ Funktionen $x_1\,(t)$, $x_2\,(t)$, $\ldots$ $x_{3N}\,(t)$. Die Linearität ist eine Konsequenz der harmonischen Näherung; die Berücksichtigung von Termen $O\,(x_j\, x_k\, x_l)$ in der V-Entwicklung – d. h. Berücksichtigung anharmonischer Anteile der Wechselwirkung – führt auf nichtlineare Bewegungsgleichungen.

Die Transformation auf *massenreduzierte Koordinaten*

$$\xi_j = \sqrt{m_j}\, x_j , \qquad j = 1, 2, \ldots 3N , \tag{3.15}$$

beseitigt die m_j-Faktoren in der Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} \left(\sum_j \dot{\xi}_j^2 - \sum_{j,k} \Omega_{jk}\, \xi_j\, \xi_k \right) \tag{3.16}$$

und in den Lagrange-Gleichungen:

$$\ddot{\xi}_j + \sum_k \Omega_{jk}\, \xi_k = 0 . \tag{3.17}$$

Hierbei sind

$$\Omega_{jk} = \frac{V_{jk}}{\sqrt{m_j\, m_k}} \tag{3.18}$$

die Matrixelemente der *dynamischen Matrix*. Diese enthält die gesamte Information über das (linearisierte) System: die Massen und die Kräfte. Die Dgln. (3.17) haben dieselben mathematischen Eigenschaften wie die Dgln. (3.14).

Lösungsansatz – vgl. harmonischer Oszillator –

$$\xi_j \;=\; \alpha_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\, t} \; . \tag{3.19}$$

Das bedeutet: Alle Massenpunkte schwingen mit derselben Frequenz ω; α_j ist die Amplitude der j-ten (massenreduzierten) Lagekoordinate. Einsetzen von (3.19) in die Bewegungsgleichung (3.17) führt auf das

Eigenwertproblem der dynamischen Matrix Ω_{jk}:

$$\sum_k \Omega_{jk}\, \alpha_k \;=\; \omega^2\, \alpha_j \tag{3.20}$$

zur Bestimmung der *Eigenvektoren* α_j und der entsprechenden *Eigenwerte* ω^2.

Die Matrix Ω_{jk} ist – wie die Matrix V_{jk} – *reell-symmetrisch* und *positiv-definit.* Daraus ergeben sich für die Eigenwerte ω^2 und für die Eigenvektoren α_j die folgenden Eigenschaften (siehe Lineare Algebra):

1. Die *Eigenwerte* ω_ν^2, $\nu \;=\; 1,\, 2,\, \ldots\, 3N$, sind *positiv-reell*; sie ergeben sich als die $3N$ Wurzeln (Lösungen) der *charakteristischen Gleichung*:

$$\det\left(\Omega_{jk} \;-\; \omega^2\, \delta_{jk}\right) \;=\; 0 \; . \tag{3.21}$$

Hierbei handelt es sich um die Lösbarkeitsbedingung des homogenen linearen Gleichungssystems (3.20), d. i. die Bedingung für die Existenz nichttrivialer (nichtverschwindender) Lösungsvektoren α_j.

2. Die *Eigenvektoren* $\alpha_j^{(\nu)}$, $\nu \;=\; 1,\, 2,\, \ldots\, 3N$, sind *reell*; ferner *orthogonal* zueinander für $\omega_\mu^2 \;\neq\; \omega_\nu^2$:

$$\sum_j \alpha_j^{(\mu)}\, \alpha_j^{(\nu)} \;=\; 0 \; . \tag{3.22}$$

Bei „Entartung“ $\omega_\mu^2 \;=\; \omega_\nu^2\, (\mu \;\neq\; \nu)$ sind die entsprechenden Eigenvektoren im allgemeinen nicht orthogonal; sie können aber – durch passende Linearkombinationen – so gewählt werden (Orthogonalisierung), dass (3.22) gilt. Wegen der Linearität von (3.20) können die Eigenvektoren $\alpha_j^{(\nu)}$ auf 1 *normiert* werden:

$$\sum_j (\alpha_j^{(\nu)})^2 \;=\; 1 \; . \tag{3.23}$$

Die Gln. (3.22, 23) können zusammengefasst werden zu:

$$\sum_j \alpha_j^{(\mu)} \alpha_j^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu} \; ; \tag{3.24}$$

derartige Vektoren bezeichnet man als *orthonormiert*.

3. Die $3N$ Eigenvektoren $\alpha_j^{(\nu)}$ bilden im $3N$-dimensionalen Euklidischen Vektorraum eine *Basis*: Es handelt sich ja um eine maximale Anzahl ($3N$) linear unabhängiger Vektoren in diesem linearen Raum! Wegen (3.24) handelt es sich um eine *ON-Basis*. Jeder $3N$-komponentige reelle Vektor β_j kann danach entwickelt werden:

$$\beta_j = \sum_\nu c_\nu \, \alpha_j^{(\nu)} \tag{3.25}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten – wegen (3.24) –

$$c_\nu = \sum_k \beta_k \, \alpha_k^{(\nu)} \; . \tag{3.26}$$

Die Gln. (3.25, 26) kann man zusammenfassen zu:

$$\beta_j = \sum_k \beta_k \sum_\nu \alpha_j^{(\nu)} \alpha_k^{(\nu)}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_\nu \alpha_j^{(\nu)} \alpha_k^{(\nu)} = \delta_{jk} \tag{3.27}$$

wegen der Beliebigkeit der β-Komponenten. Bezeichnung der Beziehung (3.27) als *Vollständigkeitsrelation*.

Eigenbewegungen – auch als **Normalschwingungen** bezeichnet:

$$\begin{aligned} \xi_j^{(\nu)}(t) &= \alpha_j^{(\nu)} \left(A_\nu \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_\nu t} + A_\nu^* \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_\nu t} \right) , \quad A_\nu \in \mathbf{C} \\ &= \alpha_j^{(\nu)} B_\nu \sin(\omega_\nu t + \varphi_\nu) \; , \quad B_\nu, \varphi_\nu \in \mathbf{R} \; ; \end{aligned} \tag{3.28}$$

spezielle (reelle) Lösungen von (3.17); dynamisch stabil, zeitlich periodisch mit den Frequenzen ω_ν.

Die **allgemeine Lösung** des Bewegungsproblems (3.17) erhält man durch *Superposition* der $3N$ Normalschwingungen (3.28):

$$\xi_j(t) = \sum_\nu \xi_j^{(\nu)}(t) \; . \tag{3.29}$$

Die Auslenkungen $x_j\,(t)$ ergeben sich durch Multiplikation mit $m_j^{-1/2}$ gemäß (3.15). (3.29) enthält insgesamt $6N$ Integrationskonstanten $\mathrm{Re}\,A_1$, $\mathrm{Re}\,A_2$, … $\mathrm{Im}\,A_{3N-1}$, $\mathrm{Im}\,A_{3N}$ bzw. B_1, B_2, … φ_1, φ_2, …), die durch $6N$ Anfangsbedingungen festzulegen sind – bei Bedarf. Bei der Superposition (3.29) geht die zeitliche Periodizität der Bewegung im allgemeinen verloren; sie bleibt genau dann erhalten, wenn die Frequenzen der superponierten Eigenbewegungen in rationalen Verhältnissen zueinander stehen; siehe z. B. *Lissajou-Figuren.*

Die orthonormierten Eigenvektoren der dynamischen Matrix Ω definieren im $3N$-dimensionalen Euklidischen Vektorraum eine *orthogonale Transformation* A mit den Matrixelementen

$$A_{jk} \;=\; \alpha_k^{(j)}\;, \tag{3.30}$$

d. h. Eigenvektoren von Ω als Zeilenvektoren von A. Nach (3.24, 27) gilt nämlich

$$AA^T \;=\; A^T A \;=\; \mathbb{1}\;. \tag{3.31}$$

Statt (3.30) kann man auch $A_{jk} = \alpha_j^{(k)}$ definieren, d. h. Eigenvektoren von Ω als Spalten von A; dann gilt (3.31) unverändert.

Die **Normalkoordinaten** η_j des Systems gehen aus den Koordinaten ξ_k durch Anwendung der orthogonalen Transformation (3.30) hervor:

$$\begin{aligned} & \eta_j \;=\; \sum_k \alpha_k^{(j)}\,\xi_k \qquad (\eta \;=\; A\,\xi) \\ \overset{(3.31)}{\Longleftrightarrow}\qquad & \xi_k \;=\; \sum_j \alpha_k^{(j)}\,\eta_j \qquad (\xi \;=\; A^T\,\eta)\;. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Interpretation der 2. Gleichung: η als Koeffizienten der Entwicklung des Vektors ξ_k nach den Eigenvektoren $\alpha_k^{(j)}$, vgl. (3.25). Die 1. Gleichung (3.32) entspricht dann (3.26).

In Normalkoordinaten nimmt die Lagrange-Funktion (3.16) wegen (3.32) die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\,(\dot{\xi}^T\,\dot{\xi} \;-\; \xi^T\,\Omega\,\xi) \\ &= \frac{1}{2}\,(\dot{\eta}^T\,AA^T\,\dot{\eta} \;-\; \eta^T\,A\,\Omega\,A^T\,\eta) \\ &= \frac{1}{2}\,(\dot{\eta}^T\,\dot{\eta} \;-\; \eta^T\,\Omega^{(N)}\,\eta) \end{aligned} \tag{3.33}$$

mit

$$\Omega^{(N)} = A\,\Omega\,A^T \; . \tag{3.34}$$

Der Vorteil der Normalkoordinaten liegt darin, dass die dynamische Matrix $\Omega^{(N)}$ in diesen Koordinaten *diagonal* ist:

$$\begin{aligned} \Omega^{(N)}_{jm} &= \sum_{k,l} \alpha^{(j)}_k\, \Omega_{kl}\, \alpha^{(m)}_l \\ &= \sum_k \alpha^{(j)}_k\, \omega_m^2\, \alpha^{(m)}_k \\ &= \omega_m^2\, \delta_{jm} \; . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Auf der Diagonalen stehen die Quadrate der **Normalfrequenzen** $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots \omega_{3N}^2$, d. h. die Eigenwerte von Ω. *) Das Eigenwertproblem von Ω ist somit äquivalent dem Problem der *Diagonalisierung* von Ω. **) Für die Lagrange-Funktion (3.33) hat (3.35) die Konsequenz:

$$L = \frac{1}{2} \sum_j \left(\dot\eta_j^2 - \omega_j^2\, \eta_j^2 \right) , \tag{3.36}$$

d. i. eine vollständige *Entkopplung* der Freiheitsgrade des Systems, wie man vor allem an den Lagrange-Gleichungen sieht:

$$\ddot\eta_j + \omega_j^2\, \eta_j = 0 \; , \quad j = 1, 2, \ldots 3N \; . \tag{3.37}$$

Das sind $3N$ entkoppelte harmonische Oszillatoren. In Normalkoordinaten ist demnach die Lösung des Bewegungsproblems trivial! Die allgemeine Lösung von (3.37) ist einfach:

$$\begin{aligned} \eta_j\,(t) &= A_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_j\, t} + A_j^*\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_j\, t} \; , \qquad A_j \in \mathbf{C} \\ &= B_j\, \sin\left(\omega_j\, t + \varphi_j\right) , \qquad B_j,\, \varphi_j \in \mathbf{R} \; . \end{aligned} \tag{3.38}$$

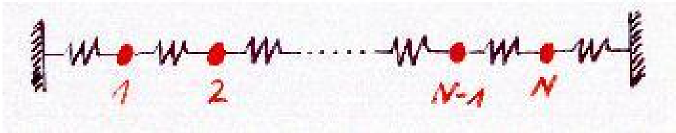
Das Problem ist aber nur verschoben! Die Normalkoordinaten η_j und die Normalfrequenzen ω_j sind ja zunächst nicht bekannt. Ihre Berechnung erfordert die Diagonalisierung von Ω, d. h. die Lösung des Eigenwertproblems der dynamischen Matrix – siehe oben.

Beispiel: Longitudinal schwingende Kette aus N Massenpunkten gleicher Masse m, gleiche Kopplungs-(Feder-)konstanten k. Die potentielle Energie – im Geltungsbereich harmonischer (Rückstell-) Kräfte – beträgt:

---

*) und von $\Omega^{(N)}$; das Eigenwertspektrum ist gegenüber der Transformation (3.34) invariant; für die Eigenvektoren gilt: $\eta_j^{(m)} = \delta_{jm}$

**) auch „Hauptachsentransformation“ im $3N$-dimensionalen Konfigurationsraum des betrachteten schwingungsfähigen Systems genannt; vgl. starren Körper: Trägheitstensor.



$$V(x) \;=\; \frac{k}{2} \left(x_1^2 \,+\, \sum_{j=1}^{N-1} (x_{j+1} \,-\, x_j)^2 \,+\, x_N^2 \right) \,, \tag{3.39}$$

$V(0) \;=\; 0$ gesetzt. Daraus ergibt sich die dynamische Matrix (3.18) zu:

$$\Omega_{jk} \;=\; \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & -1 & 0 \\ & 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

mit $\omega_0^2 \;=\; k \,/\, m$. Die Analyse der Bewegung der obigen Anordnung erfordert die Lösung des Eigenwertproblems der Matrix (3.40).

Betrachte zunächst den Fall $\boldsymbol{N} = \mathbf{2}$. Eigenwertgleichung (3.20):

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \;=\; \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \,. \tag{3.41}$$

Charakteristische Gleichung (3.21):

$$\det \begin{pmatrix} 2\,\omega_0^2 \,-\, \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\,\omega_0^2 \,-\, \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \omega^4 \,-\, 4\,\omega_0^2\,\omega^2 \,+\, 3\,\omega_0^4 \qquad = 0 \tag{3.42}$$

mit den Lösungen:

$$\omega_1^2 \;=\; \omega_0^2 \,, \qquad \omega_2^2 \;=\; 3\,\omega_0^2 \,. \tag{3.43}$$

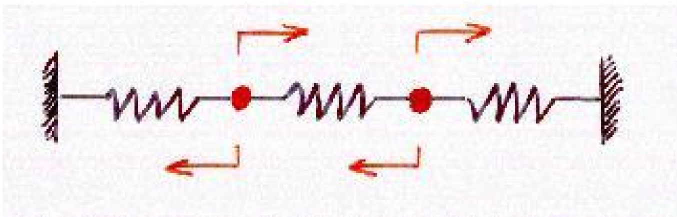
• $\omega_1 = \omega_0$. Das Gleichungssystem (3.41) liefert hierfür die Lösung:

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \,. \tag{3.44}$$

Die entsprechende Eigenbewegung (3.28) ist ($\xi \sim x$):

$$x_1^{(1)}(t) = x_2^{(1)}(t) = A_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_1 t} + A_1^* \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_1 t} \,, \tag{3.45}$$

d. h. *gleichphasige Oszillation* der beiden Massenpunkte:



Die Kopplung zwischen den beiden Teilchen macht sich nicht bemerkbar.

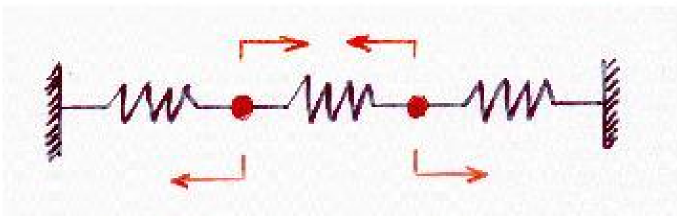
• $\omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_0$. Das Gleichungssystem (3.41) liefert hierfür die Lösung:

$$\alpha_1^{(2)} = -\alpha_2^{(2)} \,. \tag{3.46}$$

Die entsprechende Eigenbewegung (3.28) ist ($\xi \sim x$):

$$x_1^{(2)}(t) = -x_2^{(2)}(t) = A_2 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega_2 t} + A_2^* \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega_2 t} \,, \tag{3.47}$$

d. h. *gegenphasige Oszillation* der beiden Massenpunkte:



Die Kopplung der beiden Teilchen wirkt sich frequenzerhöhend aus.

Die *allgemeine Bewegung* ist eine Überlagerung der beiden vorstehenden Normalschwingungen.

Anmerkungen: Die beiden (normiertern) Eigenvektoren

$$\alpha^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

erfüllen die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen (3.24, 27). Die gemäß (3.30) gebildete Transformationsmatrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

ist orthogonal; verifiziere (3.31). Sie diagonalisiert die dynamische Matrix gemäß (3.35):

$$\begin{aligned} A\,\Omega\,A^T &= \frac{\omega_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} = \Omega^{(N)} . \end{aligned} \tag{3.50}$$

Die Normalkoordinaten sind nach (3.32) durch

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2) , \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2) \tag{3.51}$$

gegeben •

Auch für **beliebiges *N*** ist die vorstehend beschriebene Methode realisierbar:

• Bestimmung der Eigenwerte ω_ν^2 der dynamischen Matrix (3.40) aus der charakteristischen Gleichung.

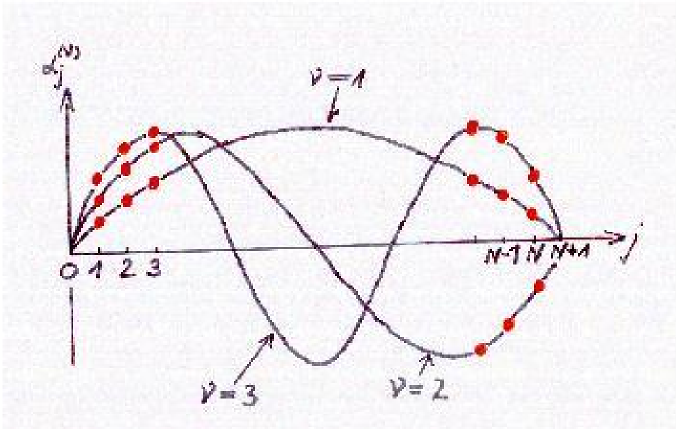
• Berechnung der entsprechenden Eigenvektoren $\alpha_j^{(\nu)}$ aus dem linear-homogenen Eigenwertgleichungssystem; evtl. Orthogonalisierung und Normierung.

Dieser Weg wird in diversen Lehrbüchern eingeschlagen (z. B. W. Greiner & H. Diehl, Theoretische Physik, Bd. 2: Mechanik II, Deutsch, Zürich (1974), S. 71 ff.)

Man kann die Eigenvektoren auch *erraten*. Es ist nicht unplausibel, sich die Normalschwingungen der Kette als **stehende Wellen** vorzustellen:

$$\alpha_j^{(\nu)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi\,\nu\,j}{N+1}\right) . \tag{3.52}$$

Der Vorfaktor dient der Normierung (auf 1). $\alpha_j^{(\nu)}$ ist (bis auf einen konstanten Faktor) die Schwingungsamplitude des j-ten Massenpunktes in der ν-ten stehenden Welle: ν Bäuche, $\nu + 1$ Knoten (incl. Rand). $j = 0$ bedeutet die linke, $j = N + 1$ die rechte Befestigung der Kette.

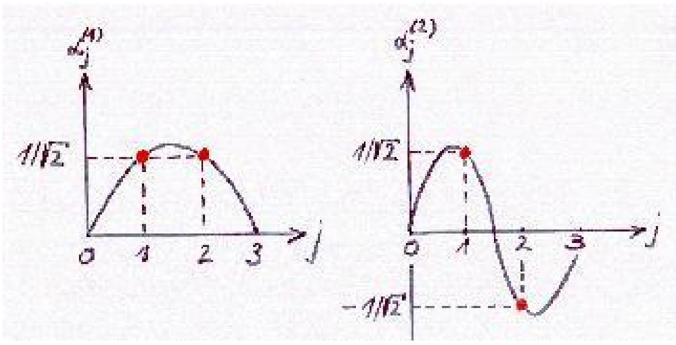


Achtung: Der $\alpha_j^{(\nu)}$-Graph suggeriert transversale Schwingungen; tatsächlich erfolgen die Schwingungen jedoch longitudinal.

Der *Spezialfall* $N = 2$ ist in (3.52) enthalten:

$$\alpha_j^{(\nu)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\,\nu\, j\right) , \qquad \nu,\, j = 1,\, 2\, , \tag{3.53}$$

ist – wegen $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, sowie $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ – mit (3.48) identisch. Graphische Darstellung:



Die Vektoren $\alpha_j^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots N$, bilden eine ON-Basis im N-dimensionalen Konfigurationsraum. Zum Beweis (hier nicht) hat man die Gültigkeit der Beziehungen (3.24, 27) zu verifizieren.

Dass es sich bei (3.52) tatsächlich um die Eigenvektoren der dynamischen Matrix (3.40) handelt, weist man nach, indem man zeigt (hier nicht): Die orthogonale Transformation $\alpha_j^{(\nu)}$ diagonalisiert die Matrix (3.40). Dabei erhält man die Eigenwerte ω_ν^2, d. h.

die Quadrate der Normalfrequenzen, als Diagonalelemente der (auf Normalkoordinaten transformierten) dynamischen Matrix. Siehe (3.35).

Wir beweisen hier die *äquivalente Aussage*: Die Transformation $\alpha_j^{(\nu)}$ entkoppelt die Bewegungsgleichungen, d. h. die Koordinaten

$$\eta_\nu = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(\nu)} \xi_j , \qquad \nu = 1, 2, \dots N , \tag{3.54}$$

sind die Normalkoordinaten des Systems. Siehe (3.32, 37).

Die zur dynamischen Matrix (3.40) gehörigen *Bewegungsgleichungen* (3.17) sind:

$$\ddot{\xi}_j = -\omega_0^2 \, (2 \, \xi_j - \xi_{j+1} - \xi_{j-1}) , \tag{3.55}$$

$j = 1, 2, \dots N$, wobei man – entsprechend den Randbedingungen – $\xi_0 = \xi_{N+1} = 0$ setzt. Multiplikation mit $\alpha_j^{(\nu)}$ und Summation über j ergibt mit (3.52, 54):

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}_\nu &= -\omega_0^2 \left\{ 2 \, \eta_\nu - \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{j=1}^{N} (\xi_{j+1} + \xi_{j-1}) \sin \frac{\pi \nu j}{N+1} \right\} \\
&= -\omega_0^2 \left\{ 2\eta_\nu - \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{j=1}^{N} \left[\cos \frac{\pi\nu}{N+1} \left(\xi_{j+1} \sin \frac{\pi\nu(j+1)}{N+1} + \xi_{j-1} \sin \frac{\pi\nu(j-1)}{N+1} \right) \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. - \sin \frac{\pi \nu}{N+1} \left(\xi_{j+1} \cos \frac{\pi \nu \, (j+1)}{N+1} - \xi_{j-1} \cos \frac{\pi \nu \, (j-1)}{N+1} \right) \right] \right\} \\
&= -\omega_0^2 \left\{ 2 \, \eta_\nu - 2 \cos \frac{\pi \nu}{N+1} \, \eta_\nu + \sqrt{\frac{2}{N+1}} \left[\cos \frac{\pi \nu}{N+1} \left(\xi_1 \sin \frac{\pi\nu}{N+1} + \right. \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. \left. \xi_N \sin \frac{\pi \nu N}{N+1} \right) + \sin \frac{\pi \nu}{N+1} \left(\xi_N \cos \frac{\pi \nu N}{N+1} - \xi_1 \cos \frac{\pi \nu}{N+1} \right) \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Wegen $[\dots] = \xi_N \sin \pi \nu = 0$ folgt hieraus die *Entkopplung* der Bewegungsgleichungen, d. i. die *Behauptung*:

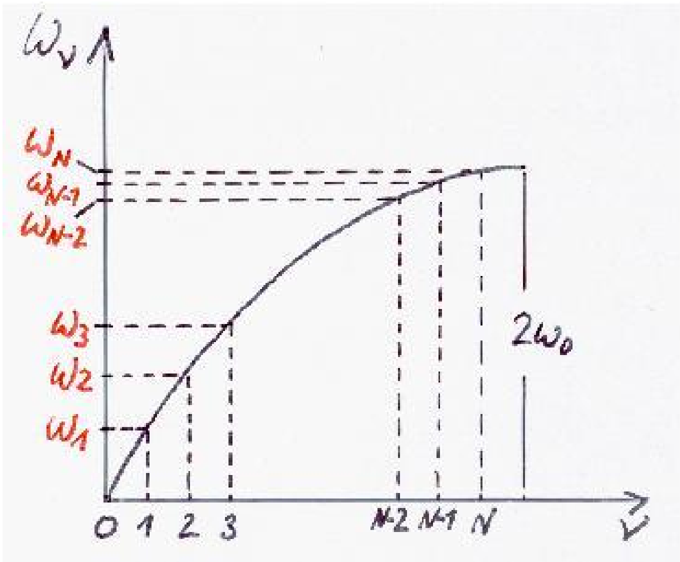
$$\ddot{\eta}_\nu = -\omega_\nu^2 \, \eta_\nu , \quad \nu = 1, 2, \dots N , \tag{3.57}$$

mit

$$\omega_\nu^2 = 2 \, \omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{\pi \nu}{N+1} \right) = 4 \, \omega_0^2 \sin^2 \frac{\pi \nu}{2 \, (N+1)} . \tag{3.58}$$

Das sind die *Eigenwerte* des Systems. Für $N = 2$ ist in (3.58) das Resultat (3.43) enthalten.

Frequenzspektrum gemäß (3.58) für beliebiges, aber festes N:



$$\omega_\nu = 2\,\omega_0 \sin \frac{\pi\,\nu}{2\,(N+1)} \; . \tag{3.59}$$

Diskretes Spektrum. Je mehr Massenpunkte, desto mehr verschiedene Frequenzen. *Kleinste Frequenz* (N groß):

$$\omega_1 \simeq \frac{\pi}{N}\,\omega_0 \; ; \tag{3.60}$$

alle Massenpunkte schwingen gleichphasig; vgl. Abb. 3.4a. *Größte Frequenz* (N groß):

$$\omega_N \simeq 2\,\omega_0 \; ; \tag{3.61}$$

benachbarte Massenpunkte schwingen gegenphasig; vgl. Abb. 3.4b.

Die *allgemeine Bewegung* der Kette ist als Überlagerung der vorstehend beschriebenen stehenden Wellen darstellbar (gemäß (3.28, 29)).

Für **zwei-** und **dreidimensionale Systeme** wird das Eigenwertproblem der dynamischen Matrix *praktisch* sehr schwierig. Ausnutzung von Symmetrien des Systems, Einführung passender Koordinaten, ... zur Vereinfachung der dynamischen Matrix. Einfach heißt: „Möglichst diagonal." Anwendung von Methoden der *Gruppentheorie*.

Betrachte nun ein durch zusätzliche **Zwangsbedingungen** auf n Freiheitsgrade ($n < 3N$) eingeschränktes schwingungsfähiges System. Spezifizierung der Konfiguration durch generalisierte Koordinaten $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \ldots \tilde{q}_n$. Die kinetische Energie T des Systems sei homogen-quadratisch in den $\dot{\tilde{q}}_\alpha$ – gemäß (1.44). Die generalisierten Kräfte Q_α seien gemäß (1.51) als negative partielle Ableitungen der von den $\tilde{q}_\alpha$ abhängigen potentiellen Energie V darstellbar. *Lagrange-Funktion*:

$$L = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(\tilde{q}_1, \ldots \tilde{q}_n)\,\dot{\tilde{q}}_\alpha\,\dot{\tilde{q}}_\beta - V(\tilde{q}_1, \ldots \tilde{q}_n)\,. \tag{3.62}$$

Stabile Gleichgewichtskonfiguration (V-Minimum) bei

$$\tilde{q}_0 = (\tilde{q}_{01}, \tilde{q}_{02}, \ldots \tilde{q}_{0n})\,; \tag{3.63}$$

Abweichungen hiervon:

$$q_\alpha = \tilde{q}_\alpha - \tilde{q}_{0\alpha}\,. \tag{3.64}$$

Harmonische Näherung für kleine Auslenkungen aus dem Gleichgewicht ($\Rightarrow$ Linearisierung der Bewegungsgleichungen):

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(T_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta - V_{\alpha\beta}\,q_\alpha\,q_\beta\right) \tag{3.65}$$

mit den *reell-symmetrischen* und *positiv-definiten* Koeffizientenmatrizen

$$\frac{1}{2}T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\tilde{q}_0)\,, \quad V_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 V}{\partial\tilde{q}_\alpha\,\partial\tilde{q}_\beta}(\tilde{q}_0)\,; \tag{3.66}$$

ferner werde $V(\tilde{q}_0) = 0$ gesetzt. *Lagrange-Gleichungen*:

$$\sum_\beta\left(T_{\alpha\beta}\,\ddot{q}_\beta + V_{\alpha\beta}\,q_\beta\right) = 0\,, \quad \alpha = 1, \ldots n\,. \tag{3.67}$$

In dem Spezialfall $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ geht dieses System (formal) in (3.17) über.

Lösungsansatz in Analogie zu (3.19):

$$q_\beta = c_\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega\,t}\,. \tag{3.68}$$

Einsetzen in (3.67) führt auf

$$\sum_{\beta} V_{\alpha\beta}\, c_{\beta} \;=\; \lambda \sum_{\beta} T_{\alpha\beta}\, c_{\beta}\;, \quad \lambda \;=\; \omega^2\;. \tag{3.69}$$

Das ist ein *verallgemeinertes Eigenwertproblem* zur Bestimmung der Eigenwerte λ und der Eigenvektoren c_β: Eigenwertproblem von V „bezüglich“ T.

Bestimmung der *Eigenwerte* λ_ν, $\nu \;=\; 1, 2, \ldots n$, aus der Lösbarkeitsbedingung des linear-homogenen Gleichungssystems (3.69):

$$\det\left(V_{\alpha\beta} \,-\, \lambda\, T_{\alpha\beta}\right) \;=\; 0\;, \tag{3.70}$$

d. h. als Wurzeln der *verallgemeinerten charakteristischen Gleichung.*

Zu jedem λ_ν berechnet man aus (3.69) den dazu gehörigen *Eigenvektor* $c_\beta^{(\nu)}$ – bis auf Normierung. Wenn mehrere Nullstellen $\lambda_{\nu_1} \;=\; \lambda_{\nu_2} \;=\; \ldots$ des charakterisitschen Polynoms zusammenfallen (Entartung), findet man entsprechend viele linear unabhängige $c_\beta^{(\nu_1)}, c_\beta^{(\nu_2)}, \ldots$

Die Eigenschaften „reell-symmetrisch“ und „positiv-definit“ der Matrizen V und T haben – wie beim „gewöhnlichen“ Eigenwertproblem – Konsequenzen für die Eigenwerte und Eigenvektoren:

• Die Eigenwerte sind *positiv-reell*, die Eigenvektoren können *reell* gewählt werden.

• Die Eigenvektoren sind in einem verallgemeinerten Sinne *orthonormiert* (bzw. können im Falle der Entartung so gewählt werden):

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)}\, T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} \;=\; \delta_{\mu\,\nu}\;. \tag{3.71}$$

Im Spezialfall $T_{\alpha\beta} \;=\; \delta_{\alpha\beta}$ folgt hieraus die „übliche“ Orthonormierung (3.24).

Zum *Beweis* der vorstehenden Aussage betrachte Gl. (3.69) für die ν-te Eigenlösung:

$$\sum_{\beta} V_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} \;=\; \lambda_\nu \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)}\;. \tag{3.72}$$

Multiplikation mit $c_\alpha^{(\mu)^*}$, Summation über α:

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)^*}\, V_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} \;=\; \lambda_\nu \sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)^*}\, T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)}\;. \tag{3.73}$$

Betrachte sodann die zu (3.69) konjugiert-komplexe Gleichung für die μ-te Eigenlösung, und berücksichtige V, T reell-symmetrisch:

$$\sum_{\alpha} c_\alpha^{(\mu)^*} V_{\alpha\beta} = \lambda_\mu^* \sum_{\alpha} c_\alpha^{(\mu)^*} T_{\alpha\beta} \; . \tag{3.74}$$

Multiplikation mit $c_\beta^{(\nu)}$, Summation über β:

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)^*} V_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} = \lambda_\mu^* \sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)^*} T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} \; . \tag{3.75}$$

Subtrahiere (3.73) von (3.75):

$$(\lambda_\mu^* - \lambda_\nu) \sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)^*} T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} = 0 \; ; \tag{3.76}$$

für $\mu = \nu$ hat man

$$(\lambda_\nu^* - \lambda_\nu) \sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\nu)^*} T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} = 0 \; . \tag{3.77}$$

Wegen T reell-symmetrisch und positiv-definit ist $\sum\limits_{\alpha,\,\beta}$ ... positiv-reell. Zeige das!

Folglich:

$$\lambda_\nu^* = \lambda_\nu \; , \tag{3.78}$$

also sind die *Eigenwerte reell.* Wegen V, T, λ_ν reell können die Lösungen von (3.69), d. h. die *Eigenvektoren* $c_\beta^{(\nu)}$ *reell* gewählt werden. Demnach berechnet man für $\mu = \nu$ aus (3.73):

$$\lambda_\nu = \frac{\sum\limits_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\nu)} V_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)}}{\sum\limits_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\nu)} T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)}} \; . \tag{3.79}$$

Wegen V positiv-definit ist der Zähler positiv, wegen T positiv-definit ist der Nenner positiv (s. o.), also sind die *Eigenwerte positiv.*

Da die Eigenwerte und die Eigenvektoren reell sind, schreibt sich (3.76) wie folgt:

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)} T_{\alpha\beta}\, c_\alpha^{(\nu)} = 0 \; . \tag{3.80}$$

Sei nun $\mu \neq \nu$. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ und $\lambda_\mu = \lambda_\nu$ (Entartung). Im ersten Fall folgt aus (3.80):

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\mu)}\, T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} = 0 \ , \quad \mu \neq \nu \ ; \tag{3.81}$$

im zweiten Falle können die c_β^μ, $c_\beta^{(\nu)}$ gleichwohl so gewählt werden , dass (3.81) gilt (Orthogonalisierung; siehe hierzu Goldstein, chap. 6.2). Schließlich kann man die Eigenvektoren so normieren (wegen Linearität und Homogenität von (3.69), dass gilt

$$\sum_{\alpha,\,\beta} c_\alpha^{(\nu)}\, T_{\alpha\beta}\, c_\beta^{(\nu)} = 1 \ . \tag{3.82}$$

Gln. (3.81, 82) ergeben zusammen die *Behauptung* (3.71).

Normalschwingungen:

$$\begin{aligned} q_\beta^{(\nu)}(t) &= c_\beta^{(\nu)}\,(A_\nu\, e^{i\,\omega_\nu\, t} + A_\nu^*\, e^{-i\,\omega_\nu\, t}) \ , \quad A_\nu \in \mathbf{C} \\ &= B_\nu\, c_\beta^{(\nu)}\, \sin(\omega_\nu\, t + \varphi_\nu) \ , \quad B_\nu,\, \varphi_\nu \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.83}$$

wie in (3.28). $\omega_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}$ positiv-reell $\Rightarrow$ Oszillationen. Die *allgemeine Bewegung* des Systems erhält man durch Überlagerung der vorstehenden speziellen Bewegungen – vgl. (3.29).

Die Eigenvektoren von V bzgl. T definieren im n-dimensionalen Konfiguarationsraum eine *lineare Transformation* C mit den Matrixelementen (vgl. (3.30))

$$C_{\alpha\beta} = c_\alpha^{(\beta)} \ . \tag{3.84}$$

Diese Matrix *diagonalisiert* die Matrizen V und T *simultan*:

$$\sum_{\rho,\,\sigma} C_{\rho\alpha}\, V_{\rho\sigma}\, C_{\sigma\beta} = \lambda_\alpha\, \delta_{\alpha\beta} \qquad (C^T V C = \Lambda) \tag{3.85}$$

bzw.

$$\sum_{\rho,\,\sigma} C_{\rho\alpha}\, T_{\rho\sigma}\, C_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (C^T T C = 1) \ , \tag{3.86}$$

was unmittelbar aus (3.71, 73) abzulesen ist (und wegen $C_{\alpha\beta}$ reell). Die transformierte V-Matrix (mit Λ bezeichnet) enthält auf der Diagonalen die Quadrate der Normalfrequenzen, die transformierte T-Matrix ist einfach die Einheitsmatrix.

Die **Normalkoordinaten** Q_1, Q_2, ... Q_n werden eingeführt durch

$$q_\alpha = \sum_\beta C_{\alpha\beta}\, Q_\beta \qquad (q = CQ) \ ; \tag{3.87}$$

sie entkoppeln wiederum die Bewegung. Aus der *Lagrange-Funktion* (3.65) wird:

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\,(\dot{q}^T\,T\,\dot{q} \,-\, q^T\,V\,q) \\
\text{(3.87):} \quad &= \frac{1}{2}\,(\dot{Q}^T\,C^T\,T\,C\,\dot{Q} \,-\, Q^T\,C^T\,V\,C\,Q) \\
\text{(3.85, 86):} \quad &= \frac{1}{2}\,(\dot{Q}^T\,\dot{Q} \,-\, Q^T\,\Lambda\,Q)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

ausgeschrieben:

$$
L \,=\, \frac{1}{2}\sum_{\alpha}(\dot{Q}_{\alpha}^{\,2} \,-\, \lambda_{\alpha}\,Q_{\alpha}^2)\ , \tag{3.89}
$$

und die *Lagrange-Gleichungen* (3.67) gehen über in

$$
\ddot{Q}_{\alpha} \,+\, \omega_{\alpha}^2\,Q_{\alpha} \,=\, 0\ , \quad \alpha \,=\, 1, \ldots\, n\ , \tag{3.90}
$$

mit trivialer Harmonischer-Oszillator-Lösung.

Beispiel: Ebenes Doppelpendel. Siehe Abb. 1.6. Die Lagrange-Funktion (1.65) geht in *harmonischer Näherung* über in

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{m_1 \,+\, m_2}{2}\,l_1^2\,\dot{\varphi}_1^2 \,+\, \frac{m_2}{2}\,l_2^2\,\dot{\varphi}_2^2 \,+\, m_2\,l_1\,l_2\,\dot{\varphi}_1\,\dot{\varphi}_2 \\
& - \frac{m_1 \,+\, m_2}{2}\,g\,l_1\,\varphi_1^2 \,-\, \frac{m_2}{2}\,g\,l_2\,\varphi_2^2\ .
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

Hierbei wurde die additive Konstante $(m_1 \,+\, m_2)\,g\,l_1 \,+\, m_2\,g\,l_2$ durch Verschiebung des Energienullpunktes zum Verschwinden gebracht. Zur weiteren Vereinfachung Beschränkung auf den *Spezialfall* $l_1 \,=\, l_2 \,=\, l$, dafür hat man

$$
L \,=\, \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\,\beta\,=\,1}^{2}(T_{\alpha\beta}\,\dot{\varphi}_{\alpha}\,\dot{\varphi}_{\beta} \,-\, V_{\alpha\beta}\,\varphi_{\alpha}\,\varphi_{\beta}) \tag{3.92}
$$

mit

$$
T_{\alpha\beta} \,=\, l^2\begin{pmatrix} m_1 \,+\, m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}\ , \quad V_{\alpha\beta} \,=\, g\,l\begin{pmatrix} m_1 \,+\, m_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{3.93}
$$

Eigenwertgleichung (3.69):

$$
\omega_0^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \,=\, \lambda\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{3.94}
$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} , \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} . \tag{3.95}$$

Charakteristische Gleichung (3.70):

$$\det \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \lambda & -\mu\,\lambda \\ -\mu\,\lambda & \mu\,(\omega_0^2 - \lambda) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.96}$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{\omega_0^2}{1 - \sqrt{\mu}} , \quad \lambda_2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \sqrt{\mu}} , \tag{3.97}$$

d. h. beide Eigenwerte sind positiv (wegen $0 < \mu < 1$) und reell. Die entsprechenden *Frequenzen* sind

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{\mu}}} , \quad \omega_2 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1 + \sqrt{\mu}}} . \tag{3.98}$$

Gl. (3.94) legt das *Verhältnis der Komponenten* der beiden entsprechenden Eigenvektoren fest:

$$\frac{c_2^{(1)}}{c_1^{(1)}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{c_2^{(2)}}{c_1^{(2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} . \tag{3.99}$$

Also: Die Normalschwingung mit der hohen Frequenz ($\omega_1 > \omega_0$) erfolgt gegenphasig, die Normalschwingung mit der niedrigen Frequenz ($\omega_2 < \omega_0$) erfolgt gleichphasig. Die Amplitude des unteren Pendels ist in jedem Fall größer als die des oberen Pendels.

Beispiel:

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 1.85 \ldots \omega_0, \omega_2 = 0.76 \ldots \omega_0, \left| \frac{c_2}{c_1} \right| = 1.41 \ldots$$

Die Bewegung ist nicht periodisch wegen ω_1 / ω_2 irrational – jedoch quasiperiodisch.

4 Starre Körper (Kreisel)

Unter einem **starren Körper** versteht man ein System von N Massenpunkten mit festen Abständen untereinander:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij} , \quad i, j = 1, 2, \ldots N , \tag{4.1}$$

$d_{ij} = d_{ji}$ Konstanten. *Modell* eines ausgedehnten, nicht deformierbaren Körpers.

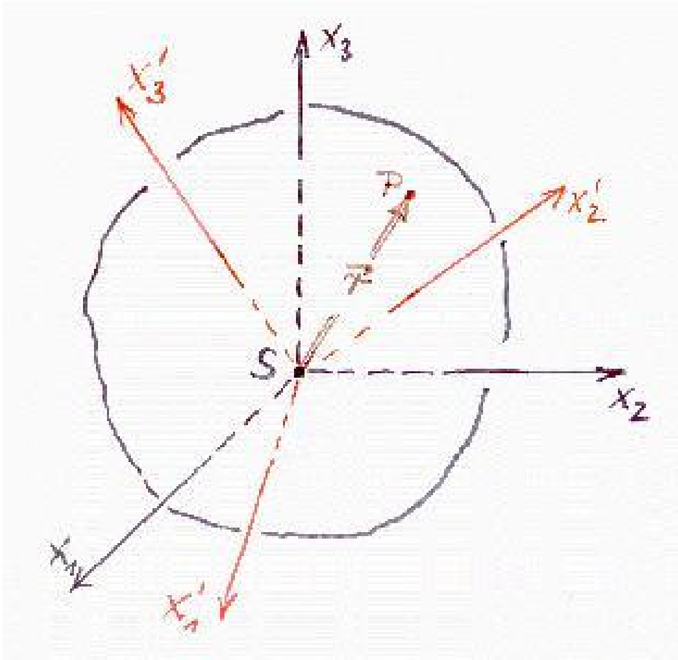
Zur Beschreibung der Konfiguration (Lage) eines starren Körpers benötigt man genau *sechs (generalisierte) Koordinaten*, z. B. drei kartesische Koordinaten zur Lokalisierung eines beliebigen körperfesten Punktes S und drei Winkel zur Kennzeichnung der Orientierung des Körpers bezüglich S. Formale Begründung: Saletan & Cromer, chap. IV 5c. Ein starrer Körper besitzt also *sechs Freiheitsgrade der Bewegung*: drei Freiheitsgrade der Translation und drei Freiheitsgrade der Rotation.

Andere Zählweisen sind möglich: Betrachte z. B. drei beliebige nichtkollineare Massenpunkte des starren Körpers. Das resultierende Dreieck hat *sechs* Freiheitsgrade der Bewegung: 3×3 Koordinaten minus 3 Zwangsbedingungen vom Typ (4.1). Die anderen Massenpunkte sind durch (4.1) fest an das Dreieck gekoppelt, liefern also keine weiteren Freiheitsgrade.

Bei der Bewegung des starren Körpers sind im allgemeinen die Freiheitsgrade der Translation und der Rotation in komplizierter Weise miteinander verkoppelt. Beschränkung der nachfolgenden Diskussion auf die Rotationsbewegung. „Ausschalten“ der Translationsbewegung durch Festhalten des Punktes S in einem Inertialsystem: z. B. Unterstützung von S im Schwerefeld, kardanische Aufhängung, ... Einen in S festgehaltenen, ansonsten frei beweglichen, starren Körper bezeichnet man als **Kreisel**. Im folgenden wird also die Rotationsbewegung eines Kreisels diskutiert.

Anmerkung: Der Punkt S ist *beliebig*; es wird nur verlangt, dass er starr mit dem Körper verbunden ist. S braucht insbesondere nicht der Schwerpunkt zu sein – häufig ist er es aber. S fällt i. a. auch nicht mit einem der Massenpunkte zusammen und braucht überhaupt nicht „innerhalb“ des Körpers liegen.

Der Punkt S sei zugleich Ursprung eines **raumfesten** kartesischen Koordinatensystems: ON-Basis $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ – und eines **körperfesten** kartesischen Koordinatensystems: ON-Basis $\hat{x}_1^{'}$, $\hat{x}_2^{'}$, $\hat{x}_3^{'}$. Die Bewegung des Kreisels ist vollständg erfasst, wenn man zu jedem Zeitpunkt die Orientierung des gestrichenen (mitbewegten) Koordinatensystems $\Sigma^{'}$ bezüglich des ungestrichenen (ruhenden) Koordinatensystems Σ kennt.



Zusammenhang zwischen den gestrichenen und den ungestrichenen Koordinaten eines durch den Ortsvektor $\vec{r}$ gekennzeichneten Punktes P. P-Koordinaten = $\vec{r}$-Komponenten in Σ' bzw. Σ:

$$x_i' = \vec{r} \cdot \hat{x}_i' \,, \quad x_i = \vec{r} \cdot \hat{x}_i \,, \quad i = 1, 2, 3 \,. \tag{4.2}$$

Wegen

$$\hat{x}_i' = \sum_{k=1}^{3} (\hat{x}_i' \cdot \hat{x}_k)\, \hat{x}_k \,, \quad i = 1, 2, 3 \,, \tag{4.3}$$

erhält man die *lineare* Koordinatentransformation:

$$x_i' = \sum_k A_{ik}\, x_k \tag{4.4}$$

mit

$$A_{ik} = \hat{x}_i' \cdot \hat{x}_k \,; \tag{4.5}$$

abgekürzt

$$x' = A\, x \,, \tag{4.6}$$

wo $x^{'}$, x die aus den $x_i^{'}$, x_k gebildeten Spaltenvektoren sind und A die aus den A_{ik} gebildete 3×3-Matrix ist. A repräsentiert die Drehung, die Σ in $\Sigma^{'}$ überführt (passive Betrachtungsweise).

Die Matrix A (damit die Transformation) ist *orthogonal*, d. h. die Inverse ist gleich der Transponierten:

$$A^{-1} \;=\; A^T \; ; \tag{4.7}$$

denn – vgl. (1.88) –

$$\begin{aligned} A^T A = \sum_j A_{ji}\, A_{jk} \;&=\; \sum_j (\hat{x}_j^{'} \cdot \hat{x}_i)\,(\hat{x}_j^{'} \cdot \hat{x}_k) \\ = \hat{x}_i \cdot \sum_j \hat{x}_j^{'}\,(\hat{x}_j^{'} \cdot \hat{x}_k) \;&=\; \hat{x}_i \cdot \hat{x}_k \;=\; \delta_{ik} \;=\; \mathbb{1} \; ; \end{aligned}$$

entsprechend zeigt man: $AA^T \;=\; \mathbb{1}$; also gilt:

$$\sum_j A_{ji}\, A_{jk} \;=\; \sum_j A_{ij}\, A_{kj} \;=\; \delta_{ik} \; . \tag{4.8}$$

Aus (4.8) folgt

$$\det{(A^2)} \;=\; 1 \quad \Rightarrow \quad \det A \;=\; \pm 1 \; . \tag{4.9}$$

Orthogonale Transformationen mit $\det A \;=\; +1$ bezeichnet man als *Drehungen* (eigentliche Drehungen), orthogonale Transformationen mit $\det A \;=\; -1$ als *Drehspiegelungen* (uneigentliche Drehungen). Zu den Drehungen zählt insbesondere die „Identität“ $A \;=\; \mathbb{1}$, aus der alle anderen Drehungen durch stetige Veränderung der Matrixelemente δ_{ik} hervorgehen; zu den Drehspiegelungen rechnet man vor allem die „Inversion“ $A \;=\; -\mathbb{1}$, aus der alle anderen Drehspiegelungen durch stetige Veränderungen der Matrixelemente $-\delta_{ik}$ hervorgehen. Zwischen Drehungen und Drehspiegelungen gibt es keinen stetigen Übergang. Im folgenden betrachten wir nur Drehungen.

Warum bezeichnet man eine orthogonale Transformation A mit $\det A \;=\; 1$ als Drehung?

Satz von Euler: Eine reelle orthogonale Matrix A mit $\det A \;=\; 1$ besitzt einen Eigenvektor x zum Eigenwert 1:

$$A\,x \;=\; x \; . \tag{4.10}$$

Für $A \;\neq\; \mathbb{1}$ ist dieser Eigenwert nicht entartet.

Da x durch (4.10) nur bis auf einen Normierungsfaktor festgelegt wird, wird also im Euler-Theorem die eindeutige (sofern $A \neq 1\!\!1$) Existenz einer durch S verlaufenden Geraden behauptet, die von der Transformation A unberührt bleibt, die Drehachse.

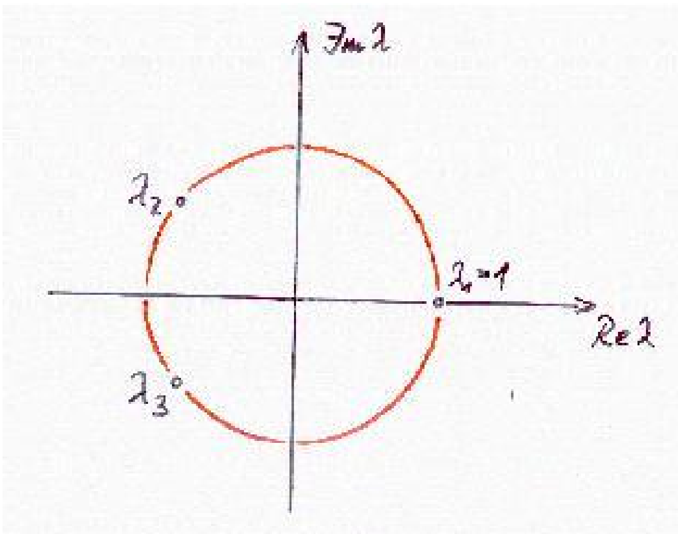
Beweis des Satzes von Euler: Das Eigenwertproblem von A lautet

$$A\,x \;=\; \lambda\,x\;. \tag{4.11}$$

Die λ_1, λ_2, λ_3 ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(A \;-\; \lambda\, 1\!\!1\right) \;=\; 0\;, \tag{4.12}$$

d. h. als Nullstellen (Wurzeln) des charakteristischen Polynoms (vom Grade 3). *A reell* impliziert:



λ_1, λ_2, λ_3 reell oder λ_1 reell und λ_2, λ_3 konjugiert-komplex. *A orthogonal* impliziert: $|\lambda_1| \;=\; |\lambda_2| \;=\; |\lambda_3| \;=\; 1$, d. h. alle λ_ν liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen λ-Ebene. $\det A \;=\; 1$ impliziert: $\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 \;=\; 1$. Aus diesen drei Implikationen folgt die *Behauptung* (4.10). Ausführlichere Darstellung: Goldstein, chap. 4.6.

Nur im Falle der identischen Transformation $A \;=\; 1\!\!1$ ist der Eigenwert 1 entartet: $\lambda_1 \;=\; \lambda_2 \;=\; \lambda_3 \;=\; 1$. In allen anderen Fällen ist der Eigenwert 1 nicht entartet, so dass der dazugehörige Eigenvektor x eindeutig eine Gerade durch S definiert, die unter der Transformation A invariant ist. Das – zusammen mit der Tatsache, dass sich unter

A Längen und Winkel (Skalarprodukte von Vektoren) nicht ändern – rechtfertigt die Bezeichnung der Transformation A als Drehung.

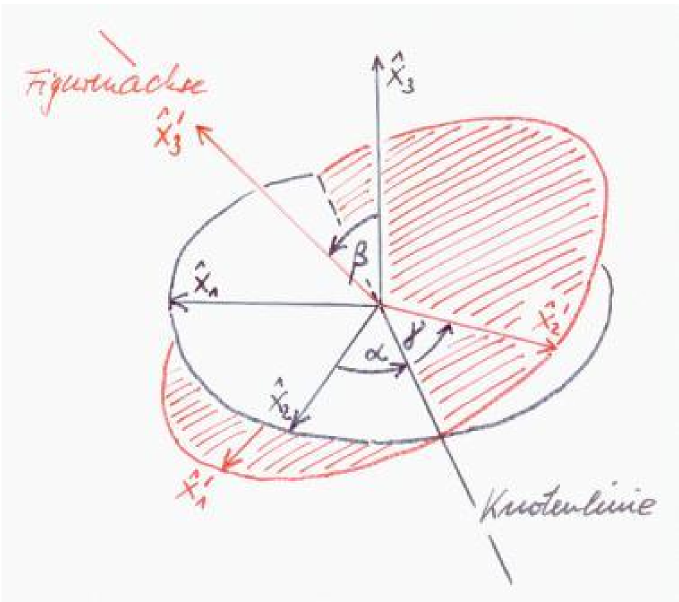
Der Drehwinkel φ ist aus der Beziehung

$$1 + 2\cos\varphi = \text{Spur}\, A \tag{4.13}$$

zu berechnen. Begründung?

Die Transformationsmatrix A hat neun Elemente A_{ik}. Benötigt man also neun Größen zur Charakterisierung der Drehung? Nein, denn die A_{ik} sind nicht unabhängig: Sie sind durch die sechs ON-Beziehungen (4.8) miteinander verknüpft. Es verbleiben also nur *drei unabhängige Parameter* zur Charakterisierung der Orientierung von Σ', d. h. des Kreisels, bezüglich Σ. Das sind die drei Freiheitsgrade der Rotationsbewegung des starren Körpers.

Die klassischen Variablen zur Parametrisierung von A, damit zur Behandlung von Kreiselproblemen, sind die **Eulerschen Winkel** α, β und γ. Die durch (α, β, γ) beschriebene Lage des körperfesten Systems Σ' geht aus einer Anfangslage, in welcher das körperfeste System mit dem raumfesten System Σ zusammenfällt, durch drei in vorgeschriebener Reihenfolge auszuführende Drehungen um Achsen des körperfesten Systems hervor:



Drehung mit dem Winkel $\alpha\,(0 \leq \alpha < 2\,\pi)$ um die Achse $\hat{x}_3'$, welche anfangs mit $\hat{x}_3$ zusammenfällt. Die Richtung $\hat{k}$, in die $\hat{x}_2$ nach dieser Drehung weist, nennt man *Knotenlinie*:

$$A^{(1)}\,(\alpha) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

• Drehung mit dem Winkel $\beta\,(0 \leq \beta \leq \pi)$ um die mit der Knotenlinie $\hat{k}$ zusammenfallende Achse $\hat{x}_2'$. Durch diese Drehung erhält die $\hat{x}_3'$-Achse ihre endgültige Lage:

$$A^{(2)}\,(\beta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

• Drehung mit dem Winkel $\gamma\ (0 \leq \gamma < 2\,\pi)$ um die $\hat{x}_3'$-Achse, die man auch *Figurenachse* nennt:

$$A^{(3)}\,(\gamma) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Insgesamt resultiert die *Drehmatrix*

$$A\,(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \;=\; A^{(3)}\,(\gamma)\,A^{(2)}\,(\beta)\,A^{(1)}\,(\alpha) \tag{4.17}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma - \sin\alpha\,\sin\gamma & \sin\alpha\,\cos\beta\,\cos\gamma + \cos\alpha\,\sin\gamma & -\sin\beta\,\cos\gamma \\ -\cos\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma - \sin\alpha\,\cos\gamma & -\sin\alpha\,\cos\beta\,\sin\gamma + \cos\alpha\,\cos\gamma & \sin\beta\,\sin\gamma \\ \cos\alpha\,\sin\beta & \sin\alpha\,\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Die Definition der Eulerschen Winkel ist in der Literatur nicht einheitlich. Die hier gewählte Definition hat den Vorteil, dass α und β gleich dem Azimutal- bzw. dem Polarwinkel der Figurenachse im raumfesten System sind.

Kinematik

Im Laufe der Zeit *bewegt sich* $\sum'$ relativ zu $\sum$:

$$\alpha \,=\, \alpha\,(t),\ \beta \,=\, \beta\,(t),\ \gamma \,=\, \gamma\,(t) \quad \Rightarrow \quad A \,=\, A\,(\alpha\,(t),\ \beta\,(t),\ \gamma\,(t)) \,=\, A\,(t)\ . \tag{4.18}$$

Auch der Punkt P möge sich beliebig *bewegen*:

$$x^{'} = x^{'}(t) \;, \quad x = x(t) \;. \tag{4.19}$$

Es wird hier also noch nicht vorausgesetzt, dass P körperfest, d. h. $x^{'}$ = konstant ist; siehe jedoch unten. Nach (4.6) hat man

$$x^{'}(t) = A(t)\,x(t) \;. \tag{4.20}$$

Zeitliche Ableitung von (4.20) ergibt:

$$\dot{x}^{'} = A\,\dot{x} + \dot{A}\,x$$

(4.8, 20):

$$= A\,\dot{x} + \Omega^{'}\,x^{'} \tag{4.21}$$

mit der Matrix der *Winkelgeschwindigkeit* bzgl. $\Sigma^{'}$:

$$\Omega^{'} = \dot{A}A^{T} \;. \tag{4.22}$$

Diese ist – vgl. (1.90, 91) – *antisymmetrisch*:

$$\Omega^{'T} = -\Omega^{'} \;, \tag{4.23}$$

daher folgendermaßen darstellbar:

$$\Omega^{'}_{ij} = \sum_{k} \varepsilon_{ijk}\,\omega^{'}_{k} \;, \tag{4.24}$$

ε_{ijk} = antisymmetrischer *Levi-Civita-Tensor* 3. Stufe. Mit (4.24) folgt

$$\begin{aligned}(\Omega^{'}\,x^{'})_i &= \sum_{j} \Omega^{'}_{ij}\,x^{'}_{j} \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\,x^{'}_{j}\,\omega^{'}_{k} \\ &= (\vec{r} \times \vec{\omega})^{'}_{i} \;,\end{aligned} \tag{4.25}$$

d. i. die i. Komponente des Vektorproduktes aus dem Ortsvektor $\vec{r}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ – dargestellt in der gestrichenen Basis. Gl. (4.21) ist somit die $\hat{x}^{'}_{i}$-Darstellung der folgenden darstellungsfreien Vektorgleichung:

$$\vec{v}_{\Sigma'} = \vec{v}_{\Sigma} - \vec{\omega} \times \vec{r} \;; \tag{4.26}$$

denn $\dot{x}'$ ist die Geschwindigkeit des Punktes P bezüglich Σ' und $A\,\dot{x}$ ist die Geschwindigkeit bezüglich Σ – beide Vektoren in der gestrichenen Basis dargestellt.

Gl. (4.26) lässt sich natürlich auch in der $\hat{x}_i$-Basis darstellen. Multiplikation von (4.21) von links mit A^T führt mit (4.8, 20) auf:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A^T\,\dot{x}' \;-\; A^T\,\Omega'\,x' \\ &= A^T\,\dot{x}' \;-\; \Omega\,x \end{aligned} \tag{4.27}$$

mit der Matrix der *Winkelgeschwindigkeit* bzgl. Σ:

$$\Omega \;=\; A^T\,\Omega'\,A \;=\; A^T\dot{A}\;. \tag{4.28}$$

Auch diese Matrix ist *antisymmetrisch* mit Konsequenzen, die Gln. (4.23, 24, 25) entsprechen – ohne Striche. Gl (4.27) ist also die $\hat{x}_i$-Darstellung der Vektorgleichung (4.26):

$$\vec{v}_{\Sigma} \;=\; \vec{v}_{\Sigma'} \;+\; \vec{\omega}\;\times\;\vec{r}\;; \tag{4.29}$$

denn $\dot{x}$ ist gleich $\vec{v}_{\Sigma}$ und $A^T\,\dot{x}'$ ist gleich $\vec{v}_{\Sigma'}$, wobei diesmal beide Vektoren in der ungestrichenen Basis dargestellt sind.

Zu (4.26, 29): Die Geschwindigkeit von P bezüglich Σ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: aus der Geschwindigkeit bezüglich Σ' und aus einem Anteil, der von der Bewegung von Σ' relativ zu Σ herrührt – oder umgekehrt. Die Relativbewegung wird durch die *Winkelgeschwindigkeit* $\vec{\omega}$ beschrieben: $\hat{\omega}$ definiert die Drehachse, $\omega \;=\; \dot{\varphi}$ die Rotationsgeschwindigkeit um diese Achse. Da $\vec{\omega}$ im allgemeinen von t abhängt und sich im Laufe der Bewegung nach Richtung und Betrag ständig ändert, bezeichnet man $\vec{\omega}$ für ein bestimmtes t als *momentane* Winkelgeschwindigkeit.

Für einen in Σ' ruhenden, d. h. *körperfesten Punkt P*, für den also $\vec{v}_{\Sigma'} \;=\; \vec{0}$ gilt, folgt aus (4.26, 29):

$$\vec{v}_{\Sigma} \;=\; \vec{\omega}\;\times\;\vec{r}\;. \tag{4.30}$$

P führt also in Σ eine Rotationsbewegung entsprechend der (momentanen) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ aus.

Die kartesischen $\vec{\omega}$-*Komponenten* lassen sich durch die Eulerschen Winkel und deren zeitliche Ableitungen ausdrücken, und zwar entweder in der $\hat{x}_i'$-Basis gemäß (4.22, 24) oder entsprechend in der $\hat{x}_i$-Basis. Der Zusammenhang zwischen den beiden Darstellungen ist durch (4.28) gegeben. In der gestrichenen Basis folgt mit (4.17) aus (4.22):

$$\begin{aligned} \Omega' &= \left(\frac{d}{dt}\,(A^{(3)}\,A^{(2)}\,A^{(1)})\right)\,(A^{(3)}\,A^{(2)}\,A^{(1)})^T \\ &= \Omega^{(3)'} + A^{(3)}\,\Omega^{(2)'}\,A^{(3)^T} + A^{(3)}\,A^{(2)}\,\Omega^{(1)'}\,A^{(2)^T}\,A^{(3)^T} \end{aligned} \tag{4.31}$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)'} &= \dot{A}^{(1)}\,A^{(1)^T} = \dot{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega^{(2)'} &= \dot{A}^{(2)}\,A^{(2)^T} = \dot{\beta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega^{(3)'} &= \dot{A}^{(3)}\,A^{(3)^T} = \dot{\gamma}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Einsetzen von (4.32) in (4.31) führt mit (4.15, 16) auf:

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\alpha}\cos\beta + \dot{\gamma} & -\dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma - \dot{\beta}\cos\gamma \\ -\dot{\alpha}\cos\beta - \dot{\gamma} & 0 & -\dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\,\sin\gamma \\ \dot{\alpha}\sin\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma & \dot{\alpha}\sin\beta\cos\gamma - \dot{\beta}\sin\gamma & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

Andererseits gilt wegen (4.24):

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3' & -\omega_2' \\ -\omega_3' & 0 & \omega_1' \\ \omega_2' & -\omega_1' & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{4.34}$$

Der Vergleich von (4.33) mit (4.34) führt schließlich auf:

$$\begin{aligned} \omega_1' &= -\dot{\alpha}\,\sin\beta\,\cos\gamma + \dot{\beta}\,\sin\gamma \\ \omega_2' &= \dot{\alpha}\,\sin\beta\,\sin\gamma + \dot{\beta}\,\cos\gamma \\ \omega_3' &= \dot{\alpha}\,\cos\beta + \dot{\gamma} \ . \end{aligned} \tag{4.35}$$

Verallgemeinerung von (4.26, 29). Betrachte einen beliebigen zeitabhängigen Vektor:

$$\vec{a}\,(t) = \sum_i a_i\,(t)\,\hat{x}_i \; = \; \sum_j a_j^{'}\,(t)\,\hat{x}_j^{'}\,(t)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\vec{a}}{dt} = \sum_i \dot{a}_i\,\hat{x}_i \; = \; \sum_j \dot{a}_j^{'}\,\hat{x}_j^{'} \; + \; \sum_j a_j^{'}\,\dot{\hat{x}}_j^{'} \; ; \tag{4.36}$$

das heißt

$$\dot{\vec{a}}_{\Sigma} \; = \; \dot{\vec{a}}_{\Sigma'} \; + \; \vec{\omega} \; \times \; \vec{a} \; . \tag{4.37}$$

Der Unterschied zwischen den Vektoren $\dot{\vec{a}}_{\Sigma}$ und $\dot{\vec{a}}_{\Sigma'}$ beruht auf der Zeitabhängigkeit der $\hat{x}_j^{'}$-Basis. Für $\vec{a} \; = \; \vec{r}$ folgt (4.26, 29); *speziell* für $\vec{a} \; = \; \vec{\omega}$ erhält man wegen $\vec{\omega} \; \times \; \vec{\omega} \; = \; \vec{0}$ aus (4.37):

$$\dot{\vec{\omega}}_{\Sigma} \; = \; \dot{\vec{\omega}}_{\Sigma'} \; , \tag{4.38}$$

d. h. die *Winkelbeschleunigung* $\dot{\vec{\omega}}$ ist in beiden Bezugssystemen Σ und $\Sigma^{'}$ gleich.

Dynamik

Gl. (4.30) liefert den Schlüssel zur Berechnung der dynamischen Größen *Drehimpuls* $\vec{L}$ und *kinetische Energie* T des Kreisels:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_n m_n \, \vec{r}_n \times \vec{v}_{n\Sigma} \\ &= \sum_n m_n \, \vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \end{aligned} \tag{4.39}$$

bzw.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \, \vec{v}_{n\Sigma} \cdot \vec{v}_{n\Sigma} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \, (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_n m_n \, \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_n \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)) \\ &= \frac{1}{2} \, \vec{\omega} \cdot \vec{L} \, . \end{aligned} \tag{4.40}$$

Vergleiche mit der für die Translation gültigen Beziehung $T = \frac{1}{2} \, \vec{v} \cdot \vec{p}$.

Anwendung des „Entwicklungssatzes für doppeltes Vektorprodukt“ auf (4.39) ergibt für den *Drehimpuls* den Ausdruck

$$\vec{L} = \sum_n m_n \left((\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) \, \vec{\omega} - \vec{r}_n \, (\vec{r}_n \cdot \vec{\omega}) \right) = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} \tag{4.41}$$

mit dem **Trägheitstensor**

$$\overleftrightarrow{\Theta} = \sum_n m_n \, (r_n^2 \, \overleftrightarrow{1} - \vec{r}_n \, \vec{r}_n) \, . \tag{4.42}$$

Die Vektoren $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind demnach im allgemeinen nicht parallel zueinander.

Mit (4.41) erhält man aus (4.40) für die *kinetische Energie* den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2} \, \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} \, . \tag{4.43}$$

Vergleiche mit den für die Translation gültigen Beziehungen $\vec{p} = m \, \vec{v}$ und $T = \frac{1}{2} \, m \, \vec{v}^2$.

In einem *kartesischen Bezugssystem* – beispielsweise dem raumfesten System Σ mit der ON-Basis $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$, $\hat{x}_3$ – wird $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ durch die Matrix mit den Elementen

$$\Theta_{ik} \,=\, \hat{x}_i \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \hat{x}_k \,=\, \sum_n m_n \, (r_n^2 \, \delta_{ik} \,-\, x_{ni} \, x_{nk}) \tag{4.44}$$

dargestellt; $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind dann Spaltenvektoren mit den Komponenten

$$L_i \,=\, \hat{x}_i \cdot \vec{L} \quad \text{bzw.} \quad \omega_k \,=\, \hat{x}_k \cdot \vec{\omega} \; . \tag{4.45}$$

Gln. (4.41, 43) nehmen in dieser Basis die folgende Gestalt an:

$$L_i \,=\, \sum_k \Theta_{ik} \, \omega_k \tag{4.46}$$

bzw.

$$T \,=\, \frac{1}{2} \sum_{i,\,k} \Theta_{ik} \, \omega_i \, \omega_k \; ; \tag{4.47}$$

abgekürzt

$$L \,=\, \Theta \, \omega \quad \text{bzw.} \quad T \,=\, \frac{1}{2} \, \omega^T \, \Theta \, \omega \; . \tag{4.48}$$

Ausgeschrieben sieht der Trägheitstensor wie folgt aus:

$$\Theta \,=\, \begin{pmatrix} \sum m_n \, (x_{n2}^2 \,+\, x_{n3}^2) & -\sum m_n \, x_{n1} \, x_{n2} & -\sum m_n \, x_{n1} \, x_{n3} \\ -\sum m_n \, x_{n2} \, x_{n1} & \sum m_n \, (x_{n3}^2 \,+\, x_{n1}^2) & -\sum m_n \, x_{n2} \, x_{n3} \\ -\sum m_n \, x_{n3} \, x_{n1} & -\sum m_n \, x_{n3} \, x_{n2} & \sum m_n \, (x_{n1}^2 \,+\, x_{n2}^2) \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

Die Diagonalelemente heißen *Trägheitsmomente* (bzgl. der 1, 2, 3-Achse), die Nichtdiagonalelemente werden *Deviationsmomente* genannt. – Bei kontinuierlicher Massenverteilung hat man statt $\Sigma \, m_n$-Summen Volumenintegrale:

$$\Theta_{ik} \,=\, \int dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, \rho \, (x_1, \, x_2, \, x_3) \, (r^2 \, \delta_{ik} \,-\, x_i \, x_k) \; , \tag{4.50}$$

wo $\rho \, (\vec{r})$ die Massendichte ist und $r^2 \,=\, x_1^2 \,+\, x_2^2 \,+\, x_3^2$.

Eigenschaften des Trägheitstensors (TT):

1. Der TT ist *reell* und *symmetrisch*:

$$\begin{aligned} \Theta_{ik} \,&=\, \Theta_{ik}^* \,=\, \Theta_{ki} \\ \Rightarrow \qquad \Theta \,&=\, \Theta^* \,=\, \Theta^T \; . \end{aligned} \tag{4.51}$$

Er hängt folglich nur von *sechs* unabhängigen Größen ab: drei Trägheitsmomenten und drei Deviationsmomenten.

2. Der TT hängt von der Wahl des Bezugssystems ab, d. h. vom Ursprung und von den Achsenrichtungen. *Übergang* $\Sigma \to \Sigma'$ mit Hilfe der Drehmatrix A. Mit

$$L' = A\,L\ , \quad \omega' = A\,\omega \tag{4.52}$$

folgt durch Multiplikation von $L = \Theta\,\omega$ von links mit A sowie durch Einschub von $A^T A$ zwischen Θ und ω:

$$L' = \Theta'\,\omega' \tag{4.53}$$

mit

$$\Theta' = A\,\Theta\,A^T\ . \tag{4.54}$$

Θ' ist wie Θ reell und symmetrisch, denn die Matrixelemente Θ'_{ik} sind in den gestrichenen Koordinaten von der gleichen Gestalt wie die Θ_{ik} in den ungestrichenen Koordinaten:

$$\Theta'_{ik} = \hat{x}'_i \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \hat{x}'_k = \sum_n m_n\,(r'^2_n\,\delta_{ik} - x'_{ni}\,x'_{nk})\ . \tag{4.55}$$

Zeige das! Der Vorteil des Überganges $\Sigma \to \Sigma'$ liegt darin, dass Θ wegen der Bewegung des Kreisels in Σ von der Zeit abhängt, während Θ' im körperfesten System Σ' *zeitlich konstant* ist.

Gln. (4.52, 54) in Komponenten:

$$L'_i = \sum_k A_{ik}\,L_k\ , \quad \omega'_i = \sum_k A_{ik}\,\omega_k \tag{4.56}$$

bzw.

$$\Theta'_{ij} = \sum_{k,l} A_{ik}\,A_{jl}\,\Theta_{kl}\ . \tag{4.57}$$

Größen L_i, ω_i, ... , die sich bei Drehungen des Koordinatensystems gemäß (4.56) transformieren, bezeichnet man als *Vektoren* oder *Tensoren 1. Stufe*; Größen Θ_{ij}, Ω_{ij}, ... mit dem Transformationsverhalten (4.57) nennt man *Tensoren* oder *Tensoren 2. Stufe*; siehe auch (4.28). Verallgemeinerung auf Tensoren beliebig hoher Stufe möglich. Wichtig sind auch *Tensoren 0. Stufe* oder *Skalare*, wie z. B. die Masse $m' = m$, die in Σ' und Σ denselben Wert hat (nichtrelativistisch), oder auch die kinetische Energie:

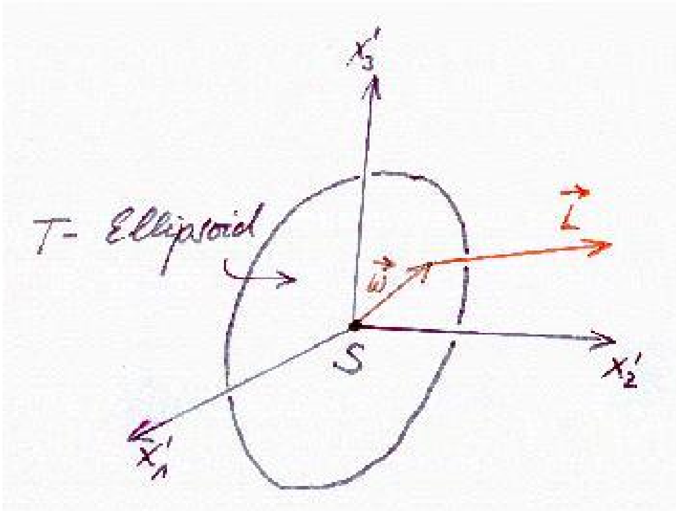
$$T' = \frac{1}{2}\,\omega'^T\,\Theta'\,\omega' = \frac{1}{2}\,\omega^T\,\Theta\,\omega = T\ , \tag{4.58}$$

wie man mit Hilfe von (4.52, 54) leicht zeigt.

3. Die *kinetische Energie* T lässt sich statt in den auf Σ bezogenen Größen Θ, ω auch in den auf Σ' bezogenen Größen Θ', ω' ausdrücken. Nach (4.58) gilt:

$$T = \frac{1}{2}\,\omega'^T\,\Theta'\,\omega' = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\Theta'_{ik}\,\omega'_i\,\omega'_k \tag{4.59}$$

Für festes T stellt diese Gleichung in den Variablen ω'_1, ω'_2, ω'_3 ein bezüglich Σ', damit bezüglich des starren Körpers, fest orientiertes Ellipsoid dar – das *Trägheitsellipsoid*.



Die zu verschiedenen T-Werten gehörigen Ellipsoide sind ähnlich und gleich orientiert. Zu jeder Drehachse $\hat{\omega}$ gibt der Betrag ω des bis zum Ellipsoid reichenden Vektors $\vec{\omega}$ an, mit welcher Winkelgeschwindigkeit der Körper rotiert, wenn er die kinetische Energie T besitzt. – In den ungestrichenen Größen Θ, ω liefert (4.47) dasselbe Ellipsoid, allerdings von Σ aus betrachtet und folglich – wegen der t-Abhängigkeit von Θ – zeitlich veränderlich: entsprechend der Bewegung von Σ'.

Den zu $\vec{\omega}$ gehörigen *Drehimpuls* $\vec{L}$ gewinnt man nach (4.46, 47) bzw. (4.53, 59) als Gradienten von T bezüglich $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \Sigma \; : \qquad & L_i = \sum_k \Theta_{ik}\,\omega_k = \frac{\partial}{\partial\,\omega_i}\,T \\ \Sigma' \; : \qquad & L'_i = \sum_k \Theta'_{ik}\,\omega'_k = \frac{\partial}{\partial\,\omega'_i}\,T\;; \end{aligned} \tag{4.60}$$

darstellungsfrei:

$$\vec{L} = \vec{\nabla}_{\vec{\omega}} T \; . \tag{4.61}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ steht also senkrecht auf der Fläche $T =$ konstant.

Im Falle eines dreiachsigen Trägheitsellipsoids gibt es demnach drei ausgezeichnete Richtungen, die *Hauptachsen* des Ellipsoids, für die Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit gleiche Richtung haben. Legt man das bisher willkürlich orientierte körperfeste System Σ' so, dass $\hat{x}_1'$, $\hat{x}_2'$, $\hat{x}_3'$ mit den Hauptachsen des Ellipsoids zusammenfallen, dann verschwinden die Deviationsmomente, und der TT wird *diagonal*:

$$\Theta_{ik}' = I_i \, \delta_{ik} \; . \tag{4.62}$$

Bezeichnung der Größen I_1, I_2, I_3 als *Hauptträgheitsmomente*, der zugehörigen (durch S laufenden) Achsen als *Hauptträgheitsachsen*.

Sind zwei der Hauptträgheitsmomente gleich, z. B.

$$I_1 = I_2 \; , \tag{4.63}$$

dann nennt man den Körper einen *symmetrischen Kreisel*, das Trägheitsellipsoid ist ein *Rotationsellipsoid*. Die Hauptachsen 1 und 2 können dann in der zur Hauptachse 3 senkrechten Ebene beliebig (zueinander orthogonal) gewählt werden. *Achtung*: Rotationssymmetrie des Körpers bezüglich der 3-Achse (Figurenachse) ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig für (4.63); z. B. ist ein quadratisches Prisma ein symmetrischer Kreisel.

Sind alle Hauptträgheitsmomente gleich:

$$I_1 = I_2 = I_3 \; , \tag{4.64}$$

dann bezeichnet man den Körper als *Kugelkreisel*, das Trägheitsellipsoid ist eine *Kugel*. Die drei Hauptachsen können in diesem Fall beliebig (zueinander orthogonal) gewählt werden. *Achtung*: Kugelsymmetrie des Körpers ist zwar hinreichend, aber nicht notwendig für (4.64); z. B. ist ein homogener Würfel ein Kugelkreisel.

Im System der Hauptachsen nehmen die Ausdrücke (4.58) für die *kinetische Energie* und (4.53) für den *Drehimpuls* eine besonders einfache Gestalt an:

$$T = \frac{1}{2} \left(I_1 \, \omega_1'^2 + I_2 \, \omega_2'^2 + I_3 \, \omega_3'^2 \right) \tag{4.65}$$

bzw.

$$L_i^{'} = I_i\,\omega_i^{'}\ , \qquad i = 1,\,2,\,3\ . \tag{4.66}$$

Wie findet man das Hauptachsensystem und die entsprechenden Hauptträgheitsmomente des Kreisels? Man hat das **Eigenwertproblem des Trägheitstensors** zu lösen:

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta}\cdot\vec{\omega} = I\,\vec{\omega}\ , \tag{4.67}$$

d. h. Bestimmung derjenigen Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$, die parallel zum jeweiligen Drehimpuls $\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta}\cdot\vec{\omega}$ sind. Die $\vec{\omega}$ sind also die *Eigenvektoren*, und die dazugehörigen Trägheitsmomente I sind die *Eigenwerte* von $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$.

In einem *irgendwie* orientierten körperfesten System $\Sigma^{'}$ hat man zu lösen:

$$\sum_k \Theta_{ik}^{'}\,\omega_k^{'} = I\,\omega_i^{'}\ . \tag{4.68}$$

Die Matrix $\Theta^{'}$ ist *reell-symmetrisch* und *positiv-semidefinit* wegen $T \geq 0$.

Die *Eigenwerte* I_1, I_2, I_3 sind aus der Lösbarkeitsbedingung von (4.68):

$$\det\,(\Theta^{'} - I\,\mathbb{1}) = 0\ , \tag{4.69}$$

d. h. als Wurzeln des charakteristischen Polynoms (vom Grade 3) zu berechnen. Die I_ν sind *nichtnegativ-reell*.

Die *Eigenvektoren* $\vec{\omega}^{\,(1)}$, $\vec{\omega}^{\,(2)}$, $\vec{\omega}^{\,(3)}$ sind *reell-orthonormiert* wählbar:

$$\hat{\omega}^{(\mu)}\cdot\hat{\omega}^{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}\ . \tag{4.70}$$

Das durch die ON-Basis $\hat{\omega}^{(1)}$, $\hat{\omega}^{(2)}$, $\hat{\omega}^{(3)}$ definierte **Hauptachsensystem** werde mit Σ^h bezeichnet. In Σ^h ist der Trägheitstensor diagonal:

$$\Theta_{ik}^h = \hat{\omega}^{(i)}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\Theta}\cdot\hat{\omega}^{(k)} = I_k\,\hat{\omega}^{(i)}\cdot\hat{\omega}^{(k)} = I_k\,\delta_{ik}\ , \tag{4.71}$$

d. h. auf der Diagonalen stehen die Hauptträgheitsmomente.

Der Übergang vom System $\Sigma^{'}$ zum System Σ^h wird durch eine orthogonale Transformation A vollzogen – die **Hauptachsentransformation**:

$$\Theta^h = A\,\Theta^{'}\,A^T\ . \tag{4.72}$$

Die orthogonale Matrix A enthält als Zeilenvektoren die orthonormierten Eigenvektoren: $A_{ik} = \hat{\omega}^{(i)}\cdot\hat{x}_k^{'}$. Das Eigenwertproblem von $\Theta^{'}$ ist äquivalent der Aufgabe, diejenige

Matrix A zu berechnen, die $\Theta^{'}$ „diagonalisiert“, d. h. auf die Diagonalform Θ^h transformiert.

Im folgenden wird als körperfestes Bezugssystem stets das Hauptachsensystem gewählt: $\Sigma^{'} = \Sigma^h$. Die Orientierung von Σ^h kann nur in einfachen (symmetrischen) Fällen erraten werden, im allgemeinen hat man das vorstehend beschriebene Eigenwert- bzw. Diagonalisierungsproblem zu lösen.

Grundlage der **Dynamik der Kreiselbewegung** ist der Drehimpulssatz:

$$\dot{\vec{L}}_\Sigma = \vec{D}\ . \tag{4.73}$$

$\dot{\vec{L}}_\Sigma$ ist die vom raumfesten Inertialsystem Σ aus beobachtete zeitliche Änderung des Drehimpulses; $\vec{D}$ ist das resultierende Drehmoment der äußeren Kräfte bezüglich S. Vom körperfesten Bezugssystem $\Sigma^{'}$ aus beobachtet man die zeitliche Drehimpulsänderung $\dot{\vec{L}}_{\Sigma'}$. Nach (4.37) gilt der Zusammenhang

$$\dot{\vec{L}}_\Sigma = \dot{\vec{L}}_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{L}\ , \tag{4.74}$$

wo $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der $\Sigma^{'}$ gegen Σ rotiert. Mit (4.41) folgt

$$\dot{\vec{L}}_{\Sigma'} = \dot{\overleftrightarrow{\Theta}}_{\Sigma'} \cdot \vec{\omega} + \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{\Sigma'} = \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}} \tag{4.75}$$

wegen verschwindendem $\dot{\overleftrightarrow{\Theta}}_{\Sigma'}$ (feste Massenverteilung im körperfesten System) und wegen (4.38). Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man die **Eulersche Kreiselgleichung**:

$$\overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \vec{D} \tag{4.76}$$

– gültig für jedes Bezugssystem (mit O in S).

Wählt man als Bezugssystem das körperfeste Hauptachsensystem, dann hat (4.76) die besonders einfache *Komponentendarstellung*

$$\begin{aligned} I_1\,\dot{\omega}_1^{'} - (I_2 - I_3)\,\omega_2^{'}\,\omega_3^{'} &= D_1^{'} \\ I_2\,\dot{\omega}_2^{'} - (I_3 - I_1)\,\omega_3^{'}\,\omega_1^{'} &= D_2^{'} \\ I_3\,\dot{\omega}_3^{'} - (I_1 - I_2)\,\omega_1^{'}\,\omega_2^{'} &= D_3^{'}\ . \end{aligned} \tag{4.77}$$

Diese drei Gleichungen – zusammen mit den drei Gleichungen (4.35) – ergeben insgesamt sechs gekoppelte nichtlineare Dgln 1. Ordnung zur Bestimmung der Funktionen

$\omega_1'(t)$, $\omega_2'(t)$, ω_3', $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$. Eliminiert man daraus die drei $\vec{\omega}$-Komponenten, so verbleibt man mit drei gekoppelten nichtlinearen Dgln 2. Ordnung zur Bestimmung der Eulerwinkel α, β, γ als Funktionen der Zeit. Siehe auch Lagrange-Formulierung mit α, β, γ als generalisierten Koordinaten.

Das *Drehmoment* $\vec{D}$ ist gewöhnlich im raumfesten System gegeben:

$$D_i = D_i(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, t) , \tag{4.78}$$

d. h. in Abhängigkeit von der Orientierung (α, β, γ) und vom Bewegungszustand $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$ des Kreisels sowie von der Zeit (t). Die $\vec{D}$-Komponenten im körperfesten System erhält man durch Anwendung der Drehmatrix (4.17):

$$D_i' = \sum_k A_{ik}(\alpha, \beta, \gamma)\, D_k . \tag{4.79}$$

Dieser Ausdruck ist auf der rechten Seite von (4.77) einzusetzen.

Das *Kreiselproblem* (4.35, 80, 81, 82) ist im allgemeinen *außerordentlich kompliziert*. Es können daher in dieser Vorlesung nur *einfachste Spezialfälle* angesprochen werden.

Anmerkung: Im Falle der *Rotation des starren Körpers um eine* beliebige, durch einen Einheitsvektor $\hat{a}$ definierte *raum- und körperfeste Achse* durch S reduziert sich die Kreiselgleichung (4.76) auf ihre a-Komponente:

$$\hat{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \hat{a} \cdot \vec{D} ; \tag{4.80}$$

der nichtlineare Term $\hat{a} \cdot \vec{\omega} \times \vec{L}$ verschwindet, weil $\vec{\omega}$ parallel zu $\hat{a}$ ist. Mit $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{a}$ ergibt (4.80) die Bewegungsgleichung

$$I_a\,\ddot{\varphi} = D_a(\dot{\varphi}, \varphi, t) , \tag{4.81}$$

wo D_a die a-Komponente von $\vec{D}$ ist und

$$I_a = \hat{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \hat{a} = \sum_{i,k} (\hat{a} \cdot \hat{x}_i)\,\Theta_{ik}'\,(\hat{x}_k' \cdot \hat{a}) \tag{4.82}$$

das Trägheitsmoment des starren Körpers bzgl. der a-Achse; hierbei sind $\hat{a} \cdot \hat{x}_i'$ die Richtungskosinus dieser Achse bzgl. der kartesischen Achsen des körperfesten Systems Σ'. Siehe z. B. *physikalisches Pendel, Pohlsches Rad*, ...

Freier Kreisel:

$$\vec{D} = \vec{0} . \tag{4.83}$$

In diesem Fall reduziert sich die Bewegungsgleichung (4.79) zu

$$\overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} = \vec{0} \; ; \tag{4.84}$$

die Komponentendarstellung (4.80) vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} I_1 \, \dot{\omega}_1^{'} - (I_2 - I_3) \, \omega_2^{'} \omega_3^{'} &= 0 \\ I_2 \, \dot{\omega}_2^{'} - (I_3 - I_1) \, \omega_3^{'} \omega_1^{'} &= 0 \\ I_3 \, \dot{\omega}_3^{'} - (I_1 - I_2) \, \omega_1^{'} \omega_2^{'} &= 0 \; . \end{aligned} \tag{4.85}$$

Realisierungen:

• Kräftefreier starrer Körper, in beliebigem Punkt festgehalten.

• Starrer Körper im homogenen Schwerefeld, im Schwerpunkt unterstützt oder kardanisch aufgehängt.

Konstanten der Bewegung:

• Aus (4.73) folgt mit (4.83) sofort die *Drehimpulserhaltung*:

$$\vec{L} = \text{konstant in}\, \Sigma \; . \tag{4.86}$$

In Σ^h hingegen ist $\vec{L}$ nicht konstant. Da aber Σ^h gegenüber Σ eine reine Rotationsbewegung ausführt, gilt dort wenigstens – mit(4.66) –

$$|\vec{L}| = \sqrt{I_1^2 \, \omega_1'^2 + I_2^2 \, \omega_2'^2 + I_3^2 \, \omega_3'^2} = \text{konstant} \; . \tag{4.87}$$

• *Erhaltung der kinetischen Energie*. Aus (4.43) folgt mit $\overleftrightarrow{\Theta} = \text{konstant in } \Sigma'$ und symmetrisch in jeder ON-Basis sowie mit (4.84):

$$\dot{T} = \frac{1}{2} (\dot{\vec{\omega}} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}}) = \vec{\omega} \cdot \overleftrightarrow{\Theta} \cdot \dot{\vec{\omega}} = 0 \; . \tag{4.88}$$

Mit (4.65) erhält man

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \, \omega_1'^2 + I_2 \, \omega_2'^2 + I_3 \, \omega_3'^2) = \text{konstant} \; . \tag{4.89}$$

Die Skalare $|\vec{L}|$ und T haben in Σ und Σ^h denselben Wert. Die Gln. (4.87, 89) definieren – bei festem $|\vec{L}|$ bzw. T – zwei an den Hauptachsen orientierte Ellipsoide (letzteres ist das Trägheitsellipsoid). Der $\vec{\omega}$-Vektor bewegt sich in deren eindimensionaler Schnittmenge.

Lösung der freien Euler-Gleichungen (4.85). Aus den Konstanten (4.87, 89) gewinnt man zunächst

$$\omega_1' = f_1(\omega_3') , \qquad \omega_2' = f_2(\omega_3') . \tag{4.90}$$

Einsetzen in die dritte Euler-Gleichung führt auf

$$\dot{\omega}_3' = \frac{I_1 - I_2}{I_3} f_1(\omega_3') f_2(\omega_3') . \tag{4.91}$$

Diese Dgl 1. Ordnung kann durch Separation der Variablen in ein (elliptisches) Integral für $t(\omega_3')$ umgewandelt werden. Durch Invertierung erhält man daraus $\omega_3'(t)$ und über (4.90) auch $\omega_1'(t)$ und $\omega_2'(t)$.

Mit den $\omega_i'(t)$ geht man in (4.35) ein, um daraus $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ zu gewinnen. Die Rechnung, wie auch die resultierende Lösung, ist insgesamt recht kompliziert – obwohl es sich „nur“ um den freien Kreisel handelt. Man vergleiche mit der einfachen (geradlinig-gleichförmigen) Translationsbewegung eines freien Massenpunktes!

Hinweis: Geometrische Veranschaulichung der Bewegung des freien Kreisels mit Hilfe der *Poinsotschen Konstruktion*: „Abrollen“ des Trägheitsellipsoids auf der „invariablen Ebene“ $\vec{\omega} \cdot \hat{L}$ = konstant; siehe Budó § 52, Goldstein chap. 5.6.

Die Analyse vereinfacht sich erheblich, wenn der (weiterhin freie) Kreisel gemäß (4.63) **symmetrisch** ist:

$$I_1 = I_2 =: I ; \tag{4.92}$$

das T-Ellipsoid (nicht notwendig der Kreisel) ist dann rotationssymmetrisch bezüglich der Figurenachse ($\hat{x}_3'$). Man unterscheidet die Fälle

a) $I_3 > I$: abgeplattetes Ellipsoid, z. B. eine Diskusscheibe

b) $I_3 < I$: gestrecktes Ellipsoid, z. B. eine Zigarre.

Die Gln. (4.85) reduzieren sich unter der Voraussetzung (4.92) auf die Gestalt

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1' + \left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\right) \omega_2' &= 0 \\ \dot{\omega}_2' - \left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\right) \omega_1' &= 0 \\ \dot{\omega}_3' &= 0 \end{aligned} \tag{4.93}$$

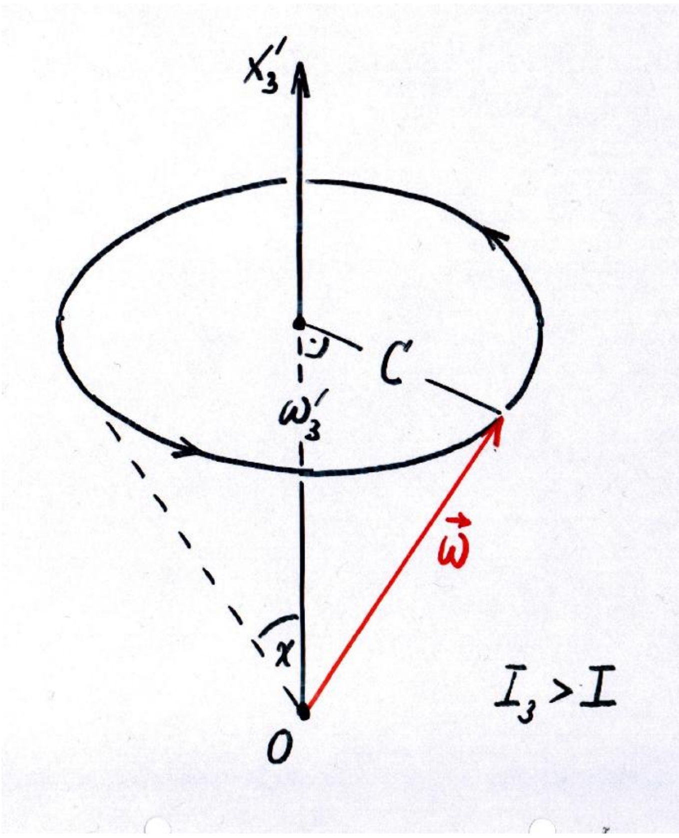
mit der Lösung (C, γ_0 Integrationskonstanten)

$$\begin{aligned} \omega_1' &= C \cos\left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\,t - \gamma_0\right) \\ \omega_2' &= C \sin\left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\,t - \gamma_0\right) \\ \omega_3' &= \text{konstant}\ , \end{aligned} \tag{4.94}$$

d. h. **Nutation von $\vec{\omega}$ um die Figurenachse**: $\vec{\omega}$ umrundet in Σ^h – unter Wahrung des Betrages – auf einem Kreiskegel gleichförmig die x_3'-Achse mit der Frequenz

$$\Omega = \left|\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\right| \ ; \tag{4.95}$$

fester Winkel χ zwischen $\vec{\omega}$ und $\hat{x}_3'$ mit $\tan\chi = C\,/\,\omega_3'$:



Im Falle a) verlaufen Nutation und Eigendrehung gleichsinnig, im Falle b) gegenläufig. Beobachtung vom körperfesten System aus.

Beispiel: Nutation der Erde. Beobachtbar ist die Nutation von $\vec{\omega}$ um die durch die beiden „geometrischen“ Pole laufende Figurenachse mit der Frequenz Ω. Die Rotationsachse definiert die „kinematischen“ Pole. Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit den Halbachsen $a_1 = a_2 = a = 6378$ km (Äquator), $a_3 = 6357$ km (Pole) $\Rightarrow$ Hauptträgheitsmomente

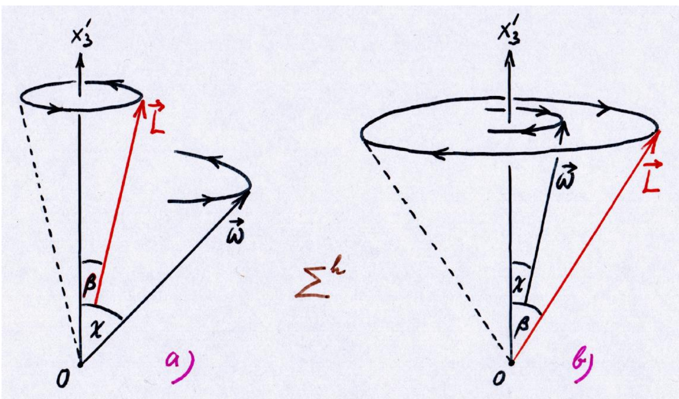
$$I = \frac{1}{5} M (a^2 + a_3^2) , \quad I_3 = \frac{2}{5} M a^2 \tag{4.96}$$

$$\overset{(4.95)}{\Longrightarrow} \qquad \Omega = \frac{a^2 - a_3^2}{a^2 + a_3^2} \omega_3' \simeq \frac{a - a_3}{a} \omega_3' \, . \tag{4.97}$$

Mit $\omega_3' = 2\pi /$ Tag berechnet man die *Eulersche Periode* zu $T = 2\pi / \Omega = 304$ Tagen; die gemessene *Chandlersche Periode* beträgt hingegen ca. 430 Tage. Die Abweichung ist wesentlich darin begründet, dass die Erde kein starrer Körper ist.

Anmerkung: Bei der Messung wird der Weg eines kinematischen Pols um den entsprechenden geometrischen Pol verfolgt, die sog. „Polbahn“. Diese ist im Idealfall ein Kreis (mit einem Radius von nur etwa 6 m, da der Winkel χ nur ca. $0.2''$ beträgt); die gemessene Polbahn ist hingegen eine verwickelte, nicht geschlossene Kurve. Siehe M. Alonso & E. J. Finn, Fundamental University Physics I, Addison-Wesley Reading (1967), Fig. 10 - 19 •

Für den Drehimpuls gilt im Hauptachsensystem Gl. (4.66), d. h. $\vec{L}$ umkreist in Σ^h (!) wie $\vec{\omega}$ die Figurenachse; dabei liegen $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ und $\hat{x}_3'$ ständig in einer Ebene mit festem Winkel β zwischen $\vec{L}$ und $\hat{x}_3'$. Wieder sind die Fälle a) und b) zu unterscheiden:



Im raumfesten System Σ ist $\vec{L}$ gemäß (4.86) konstant; o. B. d. A. zeige $\vec{L}$ in die 3-Richtung. Berechnung der Euler-Winkel $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ mit (4.94) aus (4.35); wegen β = konstant hat man

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}\,\sin\beta\,\cos\gamma &= -C\,\cos\left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\,t - \gamma_0\right)\\ \dot{\alpha}\,\sin\beta\,\sin\gamma &= C\,\sin\left(\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\,t - \gamma_0\right)\\ \dot{\alpha}\,\cos\beta + \dot{\gamma} &= \omega_3'\,.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Aus den ersten beiden Gln. (4.98) folgt

$$\gamma = -\frac{I_3 - I}{I}\,\omega_3'\,t + \gamma_0\;, \tag{4.99}$$

d. h. gleichförmige „Eigendrehung“; aus der dritten Gl. (4.98) folgt damit

$$\alpha = \frac{I_3}{I\,\cos\beta}\,\omega_3'\,t + \alpha_0\;, \tag{4.100}$$

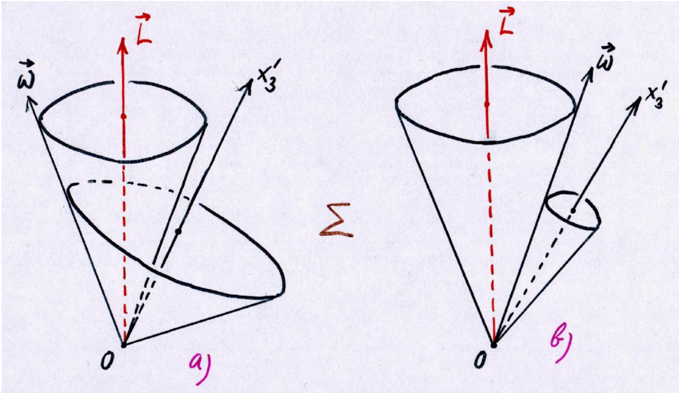
d. h. **Nutation der Figurenachse um $\vec{L}$** mit der Frequenz

$$\tilde{\Omega} = \left|\frac{I_3}{I\,\cos\beta}\right| = \frac{L}{I}\;, \tag{4.101}$$

wobei im zweiten Schritt $L_3' = I_3\,\omega_3' = L\,\cos\beta$ benutzt wurde. Für den festen Neigungswinkel β gilt $\tan\beta = C\,I\,/\,I_3\,\omega_3'$. Zeige das!

Damit ist das Problem des freien symmetrischen Kreisels vollständig gelöst. In der allgemeinen Lösung treten sechs *Integrationskonstanten* auf: C, ω_3', α_0, γ_0, zwei weitere sind in der Annahme $\vec{L}$ parallel $\hat{x}_3$ enthalten. Die Integrationskonstanten C und ω_3' lassen sich – bei Bedarf – durch die *Erhaltungsgrößen* $L = \sqrt{I^2\,C^2 + I_3^2\,\omega_3'^2}$ und $T = \frac{1}{2}\,(I\,C^2 + I_3\,\omega_3'^2)$ ersetzen.

Veranschaulichung in Σ:



Der körperfeste „Polkegel“ mit dem Öffnungswinkel χ rollt auf dem raumfesten „Spurkegel“ mit dem Öffnungswinkel $\chi - \beta$ bzw. $\beta - \chi$ ab; $\vec{\omega}$ ständig in der Berührungslinie; dabei durchläuft die Figurenachse den „Nutationskegel“ mit dem Öffnungswinkel β. Beobachtung vom raumfesten System aus. **Beispiel: Nutation einer Fliegenden Untertasse**.

Wenn der **Kreisel nicht frei** ist, sind die Eulerschen Gleichungen weniger hilfreich. Dann empfiehlt sich der Übergang zur Lagrangeschen Formulierung. Naheliegende generalisierte Koordinaten sind die Euler-Winkel α, β, γ. Mit (4.65, 35) erhält man für die *kinetische Energie* den Ausdruck

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{I_1}{2}\,(\dot{\alpha}\,\sin\beta\;\cos\gamma\,-\,\dot{\beta}\,\sin\gamma)^2 \\ & + \frac{I_2}{2}\,(\dot{\alpha}\,\sin\beta\;\sin\gamma\,+\,\dot{\beta}\,\cos\gamma)^2 \\ & + \frac{I_3}{2}\,(\dot{\alpha}\,\cos\beta\,+\,\dot{\gamma})^2\;; \end{aligned} \tag{4.102}$$

dieser ist homogen quadratisch in $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$. Die Kraft auf den Kreisel sei konservativ, d. h. durch -grad aus einer *potentiellen Energie*

$$V \,=\, V\,(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \tag{4.103}$$

herleitbar. Die *Lagrange-Funktion* berechnet man gemäß $L \,=\, T \,-\, V$ aus den beiden vorstehenden Ausdrücken.

Lagrange-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= Q_\alpha \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\beta} - \frac{\partial T}{\partial \beta} &= Q_\beta \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma} - \frac{\partial T}{\partial \gamma} &= Q_\gamma\end{aligned} \tag{4.104}$$

mit den generalisierten Kräften

$$\begin{aligned}Q_\alpha &= -\frac{\partial V}{\partial \alpha} = D_3 \\ Q_\beta &= -\frac{\partial V}{\partial \beta} = D_k \\ Q_\gamma &= -\frac{\partial V}{\partial \gamma} = D_3^{'} \,,\end{aligned} \tag{4.105}$$

das sind resp. die Komponenten des Drehmomentes um die raumfeste 3-Achse, die Knotenlinie, die körperfeste 3-Achse (die Figurenachse).

In welcher Beziehung stehen die Lagrange-Gleichungen zu den Euler-Gleichungen? Betrachte die dritte Lagrange-Gleichung. Unter Berücksichtigung von (4.35) folgt aus (4.102):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma} = I_3\,\omega_3^{'} \,, \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = (I_1 - I_2)\,\omega_1^{'}\,\omega_2^{'} \,. \tag{4.106}$$

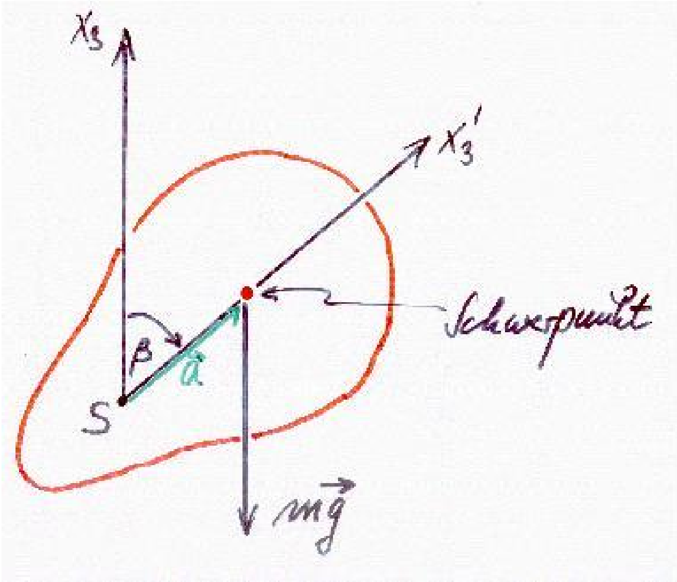
Mit (4.104, 105) ergibt sich:

$$I_3\,\dot\omega_3^{'} - (I_1 - I_2)\,\omega_1^{'}\,\omega_2^{'} = D_3^{'} \,; \tag{4.107}$$

das ist die dritte Euler-Gleichung (4.77). Die erste und die zweite Euler-Gleichung erhält man daraus durch zyklische Vertauschung der Indizes – nicht als erste und zweite Lagrange-Gleichung, weil diese die „falschen“ $\vec{D}$-Komponenten enthalten.

Beispiel: Schwerer symmetrischer Kreisel. Sei $I_1 = I_2 = I$ wie in (4.63, 92). Der Schwerpunkt hat bezüglich S die Position $\vec{a} = a\,\hat{x}_3^{'}$. Daran greift die Schwerkraft $m\,\vec{g}$ an; also ist

$$V = m\,g\,a\,\cos\beta \,. \tag{4.108}$$



Mit (4.102, 108) erhält man die Lagrange-Funktion

$$L \;=\; \frac{I}{2}\,(\dot\alpha^2\,\sin^2\beta \,+\, \dot\beta^2) \,+\, \frac{I_3}{2}\,(\dot\alpha\,\cos\beta \,+\, \dot\gamma)^2 \,-\, m\,g\,a\,\cos\beta\;. \tag{4.109}$$

Anmerkung: Die Hauptträgheitsmomente I, I_3 beziehen sich hier – wie stets in diesem Kapitel – auf den Bezugspunkt S. Oft sind sie aber (in der Literatur) bezüglich des Schwerpunktes als I^{SP}, I_3^{SP} gegeben. Zusammenhang durch *Steinerschen Satz* (ohne Beweis):

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta}{}^{\text{SP}} + m\,(a^2\,\mathbb{1} \,-\, \vec{a}\,\vec{a}) \tag{4.110}$$

$$\Rightarrow \qquad I \;=\; I^{\text{SP}} \,+\, m\,a^2\;, \quad I_3 \;=\; I_3^{\text{SP}}\;. \tag{4.111}$$

Das durch (4.109) gekennzeichnete dynamische System ist *integrabel*: Man findet drei unabhängige Konstanten der Bewegung, welche die Darstellung der Lösung durch ein elliptisches Integral gestatten.

Die Euler-Winkel α und γ sind *zyklisch*; also sind – nach (2.27) – die konjugierten Impulse p_α bzw. p_γ Konstanten der Bewegung:

$$p_\alpha \;=\; \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot\alpha} \;=\; I\,\dot\alpha\,\sin^2\beta \,+\, I_3\,(\dot\alpha\,\cos\beta \,+\, \dot\gamma)\,\cos\beta \;=\; \text{konstant} \tag{4.112}$$

$$p_\gamma = \frac{\partial L}{\partial \dot\gamma} = I_3 \, (\dot\alpha \, \cos\beta + \dot\gamma) = \text{konstant} \, . \tag{4.113}$$

Hierbei handelt es sich um die $\vec{L}$-*Komponenten* bezüglich der 3-Richtung bzw. der $3^{'}$-Richtung:

$$p_\alpha = L_3 \quad \text{bzw.} \quad p_\gamma = L_3^{'} \, ; \tag{4.114}$$

denn

$$L_3 \overset{(4.56,\,66)}{=} \sum_k A_{k3} \, I_k \, \omega_k^{'} \overset{(4.17,\,35)}{=} p_\alpha \tag{4.115}$$

und

$$L_3^{'} \overset{(4.66)}{=} I_3 \, \omega_3^{'} \overset{(4.35)}{=} p_\gamma \, . \tag{4.116}$$

Dass L_3 und $L_3^{'}$ Konstanten der Bewegung sind, folgt auch daraus, dass das von der Schwerkraft verursachte Drehmoment ständig senkrecht auf $\hat{x}_3$ und $\hat{x}_3^{'}$ steht.

Da die Lagrange-Funktion nicht explizit von t abhängt und da T homogen-quadratisch in $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$ ist, ist nach (2.5, 7) die *Energie* eine weitere Konstante der Bewegung:

$$E = \frac{I}{2} \, (\dot\alpha^2 \, \sin^2\beta + \dot\beta^2) + \frac{I_3}{2} \, (\dot\alpha \, \cos\beta + \dot\gamma)^2 + m \, g \, a \, \cos\beta = \text{konstant} \tag{4.117}$$

Mit (4.112, 113, 114) kann man $\dot\alpha$, $\dot\gamma$ zu Gunsten von L_3, $L_3^{'}$ aus (4.117) eliminieren:

$$E = \frac{I}{2} \, \dot\beta^2 + \frac{(L_3 - L_3^{'} \, \cos\beta)^2}{2 \, I \, \sin^2\beta} + \frac{L_3^{'2}}{2 \, I_3} + m \, g \, a \, \cos\beta = \text{konstant} \, . \tag{4.118}$$

Das ist eine Dgl. 1. Ordnung für $\beta \, (t)$. Führt man die Variable

$$u = \cos\beta \tag{4.119}$$

ein, so erhält man für $u \, (t)$ die Dgl. – ebenfalls 1. Ordnung –

$$\dot{u}^2 = f \, (u) \tag{4.120}$$

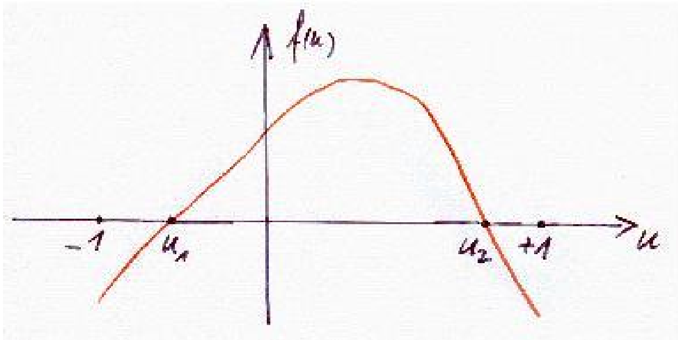
mit

$$f \, (u) = \frac{2}{I} \left(E - \frac{L_3^{'2}}{2 \, I_3} - m \, g \, a \, u \right) (1 - u^2) - \left(\frac{L_3 - L_3^{'} \, u}{I} \right)^2 \, . \tag{4.121}$$

Die *Lösung* – durch Separation der Variablen – ist als elliptisches Integral darstellbar:

$$t = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{d\,u'}{\sqrt{f\,(u')}} \;. \tag{4.122}$$

Die Variable u liegt definitionsmäßig im Intervall $-1 \,\leq\, u \,\leq\, +1$. An beiden Grenzen dieses Intervalls ist $f \,\leq\, 0$, siehe (4.121). Die Bewegung des Kreisels ist nach (4.120) auf

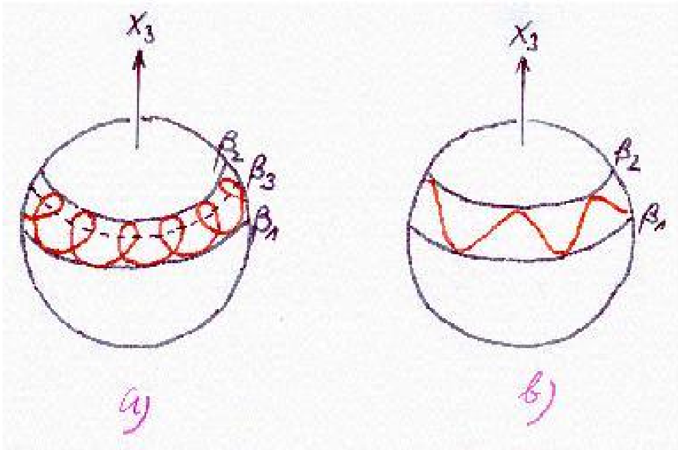


den Bereich $u_1 \,\leq\, u \,\leq\, u_2$ beschränkt, in dem $f \,\geq\, 0$ ist. Die Figurenachse pendelt zwischen den Werten $\beta_1 \,=\, \arccos\, u_1$ und $\beta_2 \,=\, \arccos\, u_2$ hin und her. Diesen Anteil der Bewegung des schweren Kreisels bezeichnet man als *Nutation*.

Die Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie ergibt sich nach (4.112, 113, 114) zu

$$\dot{\alpha} \,=\, \frac{L_3 \,-\, L_3' \cos\beta}{I\,\sin^2\beta} \;. \tag{4.123}$$

Sie ändert bei der Bewegung ihr Vorzeichen, wenn $u_3 \,=\, L_3 \,/\, L_3' \,=\, \cos\beta_3$ im Bereich $u_1 \,<\, u_3 \,<\, u_2$ liegt. Der Durchstoßpunkt der Figurenachse beschreibt dann auf der Einheitskugel eine Kurve der in a) skizzierten Art:



Liegt aber β_3 nicht zwischen β_1 und β_2, dann ergibt sich eine Kurve wie in b).Die Bewegung der Figurenachse des schweren Kreisels in α-Richtung bezeichnet man als *Präzession*.

Im allgemeinen hat man eine Überlagerung von Nutation *und* Präzession. Sind die Bedingungen gewählt, dass $u_1 = u_2$ gilt, dann ist $\beta =$ konstant und $\dot{\alpha} =$ konstant. Diese nutationsfreie Bewegung des Kreisels bezeichnet man als *reguläre Präzession*.

Weitere Einzelheiten zur Theorie des schweren symmetrischen Kreisels findet man z. B. in Goldstein, chap. 5.7.

5 Hamilton-Mechanik

In der *Lagrange-Mechanik* wird das betrachtete mechanische System durch eine *Lagrange-Funktion* $L(q, \dot{q}, t)$ beschrieben. Als Bewegungsgleichungen fungieren die *Lagrange-Gleichungen* (1.50):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \, , \quad \alpha = 1, \dots n \, . \tag{5.1}$$

Das sind n Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Bestimmung von $q_1(t), \dots q_n(t)$.

In der **Hamilton-Mechanik** kennzeichnet man dasselbe System durch die **Hamilton-Funktion**

$$H = H(q, p, t) \, ; \tag{5.2}$$

dabei bedeutet

$$p_\alpha \;=\; \frac{\partial}{\partial\,\dot q_\alpha}\,L\,(q,\,\dot q,\,t)\;, \quad \alpha \;=\; 1, \ldots\, n\;, \tag{5.3}$$

den zur Koordinate q_α *konjugierten Impuls* (2.25). Die Hamilton Funktion ist wie folgt definiert:

$$H\,(q,\,p,\,t) \;=\; \sum_{\alpha\,=\,1}^{n} \dot q_\alpha\,(q,\,p,\,t)\,p_\alpha \;-\; L\,(q,\,\dot q\,(q,\,p,\,t),\,t)\;. \tag{5.4}$$

Für die Auflösbarkeit von (5.3) nach den $\dot q_\beta$ ist vorauszusetzen:

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\,\dot q_\alpha\,\partial\,\dot q_\beta}\right) \;\neq\; 0\;. \tag{5.5}$$

Der Übergang von $L\,(q,\,\dot q,\,t)$ nach $H\,(q,\,p,\,t)$ ist ein Beispiel für eine *Legendre-Transformation*; siehe Arnold § 14.

Bewegungsgleichungen sind die **Hamiltonschen** oder **kanonischen Gleichungen**:

$$\dot q_\alpha \;=\; \frac{\partial}{\partial\,p_\alpha}\,H\,(q,\,p,\,t) \tag{5.6 a}$$

$$\dot p_\alpha \;=\; -\frac{\partial}{\partial\,q_\alpha}\,H\,(q,\,p,\,t)\;, \tag{5.6 b}$$

$\alpha \;=\; 1, \ldots\, n$. Das sind $2\,n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung zur Bestimmung von $q_1\,(t), \ldots\, q_n\,(t),\, p_1\,(t), \ldots\, p_n\,(t)$.

Beweis der Gln. (5.6):

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,p_\beta} \;\overset{(5.4)}{=}\; \sum_\alpha \frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,p_\beta}\,p_\alpha \;+\; \dot q_\beta \;-\; \sum_\alpha \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q_\alpha}\,\frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,p_\beta} \;\overset{(5.3)}{=}\; \dot q_\beta \tag{5.6 a$'$}$$

bzw.

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,q_\beta} \;\overset{(5.4)}{=}\; \sum_\alpha \frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,q_\beta}\,p_\alpha \;-\; \frac{\partial\,L}{\partial\,q_\beta} \;-\; \sum_\alpha \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q_\alpha}\,\frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,q_\beta} \;\overset{(5.1,\,3)}{=}\; -\dot p_\beta\;. \tag{5.6 b$'$}$$

Ferner gilt:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,t} \;\overset{(5.4)}{=}\; \sum_\alpha \frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,t}\,p_\alpha \;-\; \sum_\alpha \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot q_\alpha}\,\frac{\partial\,\dot q_\alpha}{\partial\,t} \;-\; \frac{\partial\,L}{\partial\,t} \;\overset{(5.3)}{=}\; -\frac{\partial\,L}{\partial\,t}\;. \tag{5.7}$$

Genau dann hängt H nicht explizit von t ab, wenn L nicht explizit von t abhängt. In diesem Falle ist H eine *Konstante der Bewegung*:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} \overset{(5.6)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \tag{5.8}$$

$$\Rightarrow \qquad H = \text{konstant} \tag{5.9}$$

genau dann, wenn $\partial H / \partial t = 0$ ist. Vgl. (2.5). Achtung: Die dort eingeführte Funktion $H(q, \dot{q})$ ist *nicht* die Hamilton-Funktion, sondern $H(q, p)$ ist die Hamilton-Funktion.

Im Falle $L = T - V$ mit T homogen-quadratisch in den $\dot{q}_\alpha$ und V unabhängig von den $\dot{q}_\alpha$ ist $H = T + V = E$ die *Energie* des Systems; (5.9) ist dann der *Energiesatz*.

Beispiele:

1. **Teilchen im Potential** $V(\vec{r})$

a) *kartesische Koordinaten*:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1, x_2, x_3) \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \,, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow \qquad H = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1, x_2, x_3) \,; \tag{5.12}$$

kanonische Gleichungen:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \tag{5.13 a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \,, \tag{5.13 b}$$

$i = 1, 1, 3$. Elimination von p_i führt auf die kartesischen Komponenten $m_i \ddot{x}_i = -\partial V / \partial x_i$ der Newtonschen Bewegungsgleichung.

b) *sphärische Polarkoordinaten*:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, \dot{\varphi}^2) - V(r, \vartheta, \varphi) \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \\ p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m\,r^2\,\dot{\vartheta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\,\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\Rightarrow \qquad H = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{p_\vartheta^2}{2\,m\,r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2\,m\,r^2\,\sin^2\vartheta} + V\,(r,\,\vartheta,\,\varphi)\ ; \tag{5.16}$$

kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m\,r^2} \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\,r^2\,\sin^2\vartheta} \end{aligned} \tag{5.17 a}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\vartheta^2}{m\,r^3} + \frac{p_\varphi^2}{m\,r^3\,\sin^2\vartheta} - \frac{\partial V}{\partial r} \\ \dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{p_\varphi^2\,\cos\vartheta}{m\,r^2\,\sin^3\vartheta} - \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}\ . \end{aligned} \tag{5.17 b}$$

Elimination von p_r, p_ϑ, p_φ führt auf die Lagrange-Gleichungen (1.57). Im Zentralpotential $V\,(r)$ ist p_φ = konstant: Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses.

Sowohl in a) als auch in b) ist H konstant und gleich E.

2. **Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld**. Lagrange-Funktion gemäß (1.75):

$$L = \frac{m}{2}\sum_i \dot{x}_i^2 - e\,\phi\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,t) + e\sum_i \dot{x}_i\,A_i\,(x_1,\,x_2,\,x_3,\,t) \tag{5.18}$$

$$\Rightarrow \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\,\dot{x}_i + e\,A_i\ , \tag{5.19}$$

d. h. kanonischer Impuls $p_i \neq$ dynamischer Impuls $m\,\dot{x}_i$; Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_i p_i\,\dot{x}_i \,-\, L \tag{5.20}$$

$$= \frac{1}{2\,m} \sum_i (p_i \,-\, e\,A_i\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, t))^2 \,+\, e\,\phi\,(x_1,\, x_2,\, x_3,\, t)\ ; \tag{5.20}$$

kanonische Gleichungen:

$$\dot{x}_i \,=\, \frac{\partial\,H}{\partial\,p_i} \,=\, \frac{p_i \,-\, e\,A_i}{m} \tag{5.21 a}$$

$$\dot{p}_i \,=\, -\frac{\partial\,H}{\partial\,x_i} \,=\, \frac{e}{m} \sum_j (p_j \,-\, e\,A_j)\,\frac{\partial\,A_j}{\partial\,x_i} \,-\, e\,\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_i}\ . \tag{5.21 b}$$

Elimination von p_i: Aus (5.21 a) folgt zunächst

$$m\,\ddot{x}_i \,=\, \dot{p}_i \,-\, e\,\dot{A}_i\ ; \tag{5.22}$$

mit (5.21 b) und

$$\dot{A}_i \,=\, \sum_j \frac{\partial\,A_i}{\partial\,x_j}\,\dot{x}_j \,+\, \frac{\partial\,A_i}{\partial\,t} \tag{5.23}$$

folgt sodann aus (5.22):

$$m\,\ddot{x}_i \,=\, e\,\left(-\frac{\partial\,\phi}{\partial\,x_i} \,-\, \frac{\partial\,A_i}{\partial\,t} \,+\, \sum_j \dot{x}_j\,\left(\frac{\partial\,A_j}{\partial\,x_i} \,-\, \frac{\partial\,A_i}{\partial\,x_j}\right)\right)\ . \tag{5.24}$$

Wegen (1.68, 69) ist die rechte Seite von (5.24) die i-Komponente der Lorentz-Kraft; also hat man erneut $m\,\ddot{x}_i \,=\, F_i$.

In diesem Beispiel ist H weder konstant, noch gleich E; V nicht definierbar für magnetischen Anteil der Lorentz-Kraft.

3. **Perle auf rotierendem Kreisring**. Nach (1.60) ist

$$L \,=\, \frac{m\,R^2}{2}\,(\dot{\vartheta}^2 \,+\, \omega^2\,\sin^2\vartheta) \,-\, m\,g\,R\,\cos\vartheta \tag{5.25}$$

$$\Rightarrow \qquad p_\vartheta = \frac{\partial\,L}{\partial\,\dot{\vartheta}} \,=\, m\,R^2\,\dot{\vartheta} \tag{5.26}$$

$$\Rightarrow \qquad H = p_\vartheta\,\dot{\vartheta} \,-\, L$$

$$= \frac{p_\vartheta^2}{2\,m\,R^2} - \frac{m\,\omega^2\,R^2}{2}\,\sin^2\vartheta + m\,g\,R\,\cos\vartheta\ . \tag{5.27}$$

H ist zwar konstant, aber nicht gleich der Energie

$$E = \frac{p_\vartheta^2}{2\,m\,R^2} + \frac{m\,\omega^2\,R^2}{2}\,\sin^2\vartheta + m\,g\,R\,\cos\vartheta\ ; \tag{5.28}$$

H hat die Bedeutung der Energie im rotierenden System. Schließlich gibt es auch Systeme, wo H zwar gleich E, aber nicht konstant ist; z. B.

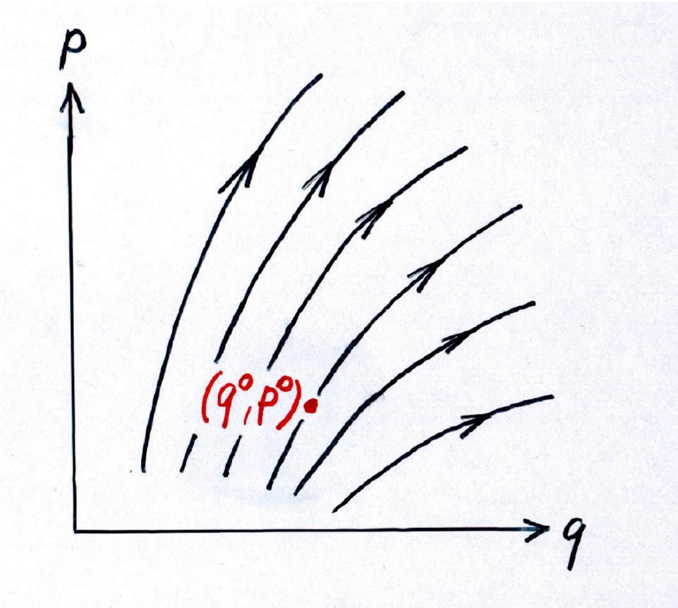
4. **Teilchen im zeitabhängigen Potential**:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\,m} + V(\vec{r},\,t)\ . \tag{5.29}$$

Also: Die Konstanz von H und die Bedeutung von H als Energie sind zwei ganz verschiedene Dinge, die unabhängig voneinander erfüllt sein können – oder auch nicht!

In der *Lagrange-Mechanik* wird der Zustand des Systems durch die $2\,n$ Variablen $q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$ gekennzeichnet. Der n-dimensionale Punktraum mit den Koordinaten $q_1, \dots q_n$ heißt *Konfigurationsraum* oder *Konfigurationsmannigfaltigkeit*. Jedem Zustand des Systems entspricht ein Punkt des Konfigurationsraumes und ein Geschwindigkeitsvektor – und umgekehrt. Die Bewegung des Systems ist in der Hamilton-Mechanik übersichtlicher darstellbar.

In der **Hamilton-Mechanik** wird der Zustand des Systems durch die $2\,n$ Variablen $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$ gekennzeichnet. Der $2\,n$-dimensionale Punktraum mit den Koordinaten $q_1, \dots p_n$ heißt **Phasenraum**. Jedem Zustand des Systems entspricht ein Punkt im Phasenraum – und umgekehrt. Die Bewegung des Systems hat man sich demnach als Bewegung des entsprechenden Punktes im Phasenraum vorzustellen: als *Phasenbahn*, auch als *Trajektorie* bezeichnet. Diese ist durch die Anfangsbedingungen $q_1^0, \dots p_n^0$ und die Hamilton-Funktion $H(q,\,p,\,t)$ eindeutig festgelegt – als Lösung der kanonischen Gleichungen (5.6).



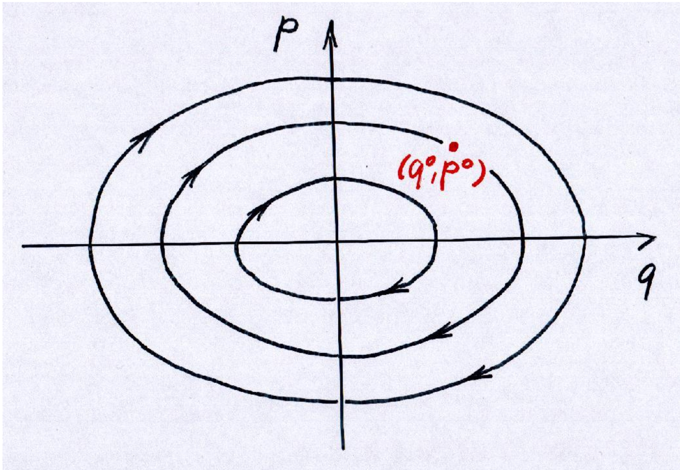
Im *autonomen Fall* $\partial H / \partial t = 0$ läuft durch jeden Punkt des Phasenraumes genau eine Trajektorie; Trajektorien können sich in diesem Fall also nicht schneiden. Die Hamilton-Funktion $H(q, p)$ legt die Menge der Phasenbahnen fest, den *Phasenfluss*; durch die Anfangsbedingung wird eine Trajektorie aus dem gesamten Fluss ausgewählt. Im *nichtautonomen Fall* $\partial H / \partial t \neq 0$, gelten die vorstehenden Aussagen in einem um die Zeitachse erweiterten Phasenraum.

Beispiel: eindimensionaler harmonischer Oszillator. Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \; ; \tag{5.30}$$

kanonische Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -k\, q \; . \end{aligned} \tag{5.31}$$



Phasenbahn durch $(q_0,\, p_0)$ gemäß (2.22):

$$\begin{aligned} q &= \frac{p_0}{m\,\omega}\,\sin\,\omega\,t \,+\, q_0\,\cos\,\omega\,t \\ p &= p_0\,\cos\,\omega\,t \,-\, m\,\omega\,q_0\,\sin\,\omega\,t \end{aligned} \tag{5.32}$$

mit $\omega = \sqrt{k\,/\,m}$. Elimination von t führt auf die zur Energie $E = p_0^2\,/\,2\,m + k\,q_0^2\,/2$ gehörige elliptische Bahnkurve

$$\frac{p^2}{2\,m} + \frac{k\,q^2}{2} = E\,. \tag{5.33}$$

Kompaktere Notation. Zusammenfassung der q_α, p_α zu

$$\xi_\alpha = \begin{cases} q_\alpha & , \quad \alpha = 1, \ldots\, n \\ p_{\alpha - n} & , \quad \alpha = n + 1, \ldots\, 2\,n\,; \end{cases} \tag{5.34}$$

Einführung der $2\,n \times 2\,n$-Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix} = (\gamma_{\alpha\beta})\,; \tag{5.35}$$

damit stellt man die kanonischen Gleichungen (5.6) wie folgt dar:

$$\dot{\xi}_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2\,n} \gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,H}{\partial\,\xi_\beta}\,, \qquad \alpha = 1, \ldots\, 2\,n\,. \tag{5.36}$$

Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Das vereinfachte (5.36) zu

$$\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} . \tag{5.37}$$

Für den Rest der Vorlesung wird die Summenkonvention benutzt.

Die Γ-Matrix ist *orthogonal*:

$$\Gamma^T \Gamma = \Gamma \Gamma^T = \mathbb{1} ,$$

d. h. (5.38)

$$\gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\alpha\nu} = \gamma_{\mu\beta} \gamma_{\nu\beta} = \delta_{\mu\nu} ,$$

mit $\det \Gamma = 1$, d. i. eine „Drehung“ im Phasenraum; ferner *antisymmetrisch*:

$$\Gamma^T + \Gamma = 0 ,$$

d. h. (5.39)

$$\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha} = 0 .$$

Eine $2n \times 2n$-Matrix A mit der Eigenschaft $A^T \Gamma A = \Gamma$ heißt *symplektisch*. $\Rightarrow$ Γ ist symplektisch.

Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen sind aus dem Hamiltonschen Prinzip (1.124) herleitbar. Auch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind aus einem Variationsprinzip herleitbar, dem **modifizierten Hamiltonschen Prinzip**:

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\xi(t), \dot{\xi}(t), t)\, dt = \text{Extremum} \tag{5.40}$$

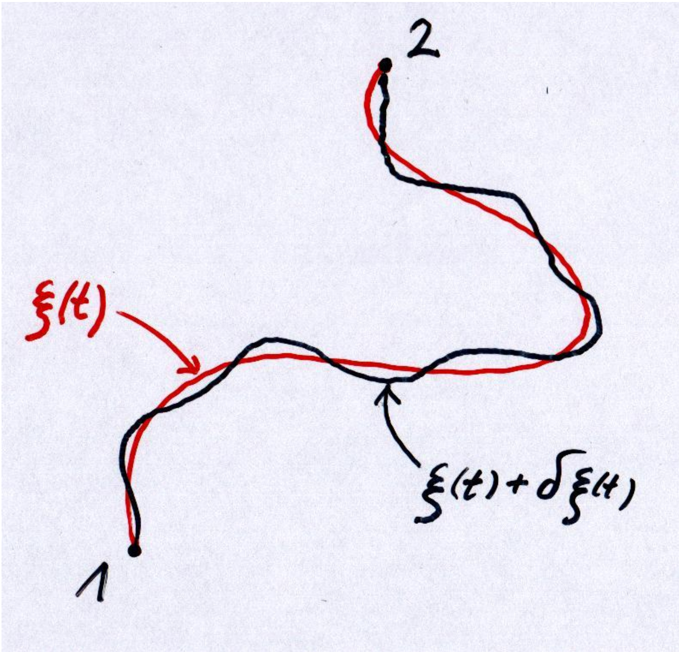
mit – siehe (5.4) –

$$L(\xi, \dot{\xi}, t) = \lambda_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha \xi_\beta - H(\xi, t) \tag{5.41}$$

und

$$(\lambda_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} = \Lambda . \tag{5.42}$$

Die $\xi_\alpha(t)$ sind unter der Nebenbedingung fester Randpunkte zu variieren:



Beachte den Unterschied zum „gewöhnlichen“ Hamiltonschen Prinzip, wo nur die $q_\alpha(t)$ bei 1 und 2 festgehalten werden – hier die $q_\alpha(t)$ und die $p_\alpha(t)$. Die zu (5.40) äquivalenten Eulerschen Gleichungen sind – vgl. (1.122) –

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = 0 \,, \qquad \alpha = 1, \ldots 2n \,. \tag{5.43}$$

Mit (5.41) folgt aus (5.43):

$$(\lambda_{\alpha\beta} - \lambda_{\beta\alpha})\,\dot{\xi}_\beta + \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} = 0 \,. \tag{5.44}$$

Wegen $\Lambda - \Lambda^T = \Gamma$ folgt weiter:

$$\gamma_{\alpha\beta}\,\dot{\xi}_\beta = -\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \,. \tag{5.45}$$

Mit (5.38, 39) – Multiplikation der linken Seite von (5.45) mit $\gamma_{\alpha\mu}$, der rechten Seite mit $-\gamma_{\mu\alpha}$ – erhält man

$$\dot{\xi}_\mu = \gamma_{\mu\alpha}\,\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha} \,; \tag{5.46}$$

das sind die kanonischen Gleichungen.

Die kanonischen Gleichungen sind im allgemeinen nicht in geschlossener Form lösbar. Eine vollständige Lösungstheorie hat man nur im **linearen Fall**, d. h. bei quadratischer Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \tag{5.47}$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $\Omega = (\omega_{\alpha\beta})$, die einfachheitshalber symmetrisch sei: $\omega_{\alpha\beta} = \omega_{\beta\alpha}$. Kanonische Gleichungen:

$$\dot{\xi}_\mu = \gamma_{\mu\alpha} \omega_{\alpha\beta} \xi_\beta \ . \tag{5.48}$$

Beispiel: Schwingungen kleiner Amplitude um eine Gleichgewichtslage, z. B. das System (3.65) mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} V_n & 0_n \\ 0_n & T_n^{-1} \end{pmatrix} \ . \tag{5.49}$$

Die *formale Lösung* von (5.48) ist

$$\xi(t) = \mathrm{e}^{\Gamma \Omega t} \xi(0) \ ; \tag{5.50}$$

deren Struktur hängt wesentlich von den Eigenwerten der Matrix $\Gamma \Omega$ ab. Siehe Spezialliteratur über gewöhnliche Differentialgleichungen (insbesondere lineare Dgln.) •

Dynamische Variablen:

$$A = A(q, p, t) = A(\xi, t) \ , \tag{5.51}$$

d. h. Funktionen auf dem Phasenraum, evtl. explizit t-abhängig. *Beispiele*:

$$A = H(q, p, t) = H(\xi, t), \ A = L_z = xp_y - yp_x, \ \ldots$$

Um deren Zeitabhängigkeit zu berechnen, muss man die kanonischen Gleichungen lösen: $q(t)$, $p(t)$ bzw. $\xi(t)$

$$\Rightarrow \quad A(t) = A(q(t), p(t), t) = A(\xi(t), t) \ . \tag{5.52}$$

Die wichtige Frage, ob A eine **Konstante der Bewegung** ist, kann man aber ohne Lösung der kanonischen Gleichungen beantworten. Aus (5.52) folgt nämlich mit (5.37):

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial A}{\partial t} \ . \end{aligned} \tag{5.53 a}$$

Daraus folgt: A ist genau dann Konstante der Bewegung, wenn die rechte Seite von (5.53) verschwindet. In q, p-Notation gilt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial A}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial A}{\partial t} \,. \tag{5.53 b}$$

Achtung: Summation in (5.53 a) von $\alpha, \beta = 1$ bis $\alpha, \beta = 2n$, in (5.53 b) von $\alpha = 1$ bis $\alpha = n$, so auch stets im folgenden.

Beispiel: zweidimensionaler harmonischer Oszillator:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) \,, \tag{5.54}$$

$m = 1$, $k = 1$ gesetzt. Der Drehimpuls

$$L_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1 \tag{5.55}$$

ist Konstante der Bewegung; denn

$$\begin{aligned} \frac{dL_3}{dt} &= \frac{dL_3}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial L_3}{\partial p_\alpha} \\ &= p_2 p_1 - p_1 p_2 + q_2 q_1 - q_1 q_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.56}$$

$\Rightarrow L_3 =$ konstant – ohne weitere Rechnung •

Poisson-Klammer zweier dynamischer Variablen A und B:

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= \frac{\partial A}{\partial \xi_\alpha}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial \xi_\beta} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q_\alpha}\frac{\partial B}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial B}{\partial q_\alpha}\frac{\partial A}{\partial p_\alpha} \,. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Damit schreibt man die **allgemeine Zeitentwicklung** (5.53 a, b) wie folgt:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} \,; \tag{5.58}$$

für die kanonischen Gleichungen (5.6, 37) gilt:

$$\frac{d\xi_\alpha}{dt} = \{\xi_\alpha, H\} \,; \tag{5.59}$$

diese erweisen sich somit als Spezialfall von (5.58).

Simeon-Denis Poisson, 1781 - 1840

Von besonderem Interesse sind diejenigen dynamischen Variablen A, die mit H „kommutieren“:

$$\{A,\, H\} \,=\, 0\ ; \tag{5.60}$$

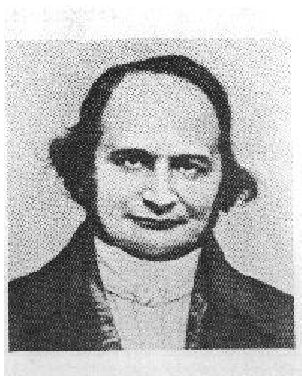
für diese gilt wegen (5.58):

$$\frac{dA}{dt} \,=\, \frac{\partial\, A}{\partial\, t}\ . \tag{5.61}$$

Beispiel: $A \,=\, H$. Wenn obendrein A nicht explizit von t abhängt, ist A Konstante der Bewegung. *Beispiele*: konservatives H, L_3.

Eigenschaften der Poisson-Klammer – überwiegend ohne Beweise:

1. *Linearität*: $$\{a\,A \,+\, b\,B,\, C\} \,=\, a\,\{A,\, C\} \,+\, b\,\{B,\, C\} \tag{5.62}$$
2. *Antisymmetrie*: $$\{A,\, B\} \,=\, -\{B,\, A\} \tag{5.63}$$
3. *Produktregel*: $$\{A,\, B\,C\} \,=\, \{A,\, B\}\,C \,+\, B\,\{A, C\} \tag{5.64}$$
4. *Jacobi-Identität*: $$\{A,\, \{B,\, C\}\} \,+\, \{B,\, \{C,\, A\}\} \,+\, \{C,\, \{A,\, B\}\} \,=\, 0\ ; \tag{5.65}$$



Karl Gustav Jakob Jacobi, 1804 - 1851

zum Beweis der Jacobi-Identität siehe Goldstein, chap. 9.4.

5. *Kettenregel*: Unter der Transformation $\xi_\alpha \;\to\; \eta_\alpha \;=\; \eta_\alpha\,(\xi,\,t)$ hat man

$$\begin{aligned}\{A,\,B\} &= \frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\mu}\,\gamma_{\mu\nu}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\xi_\nu}\\ &= \frac{\partial\,A}{\partial\,\eta_\alpha}\,\frac{\partial\,\eta_\alpha}{\partial\,\xi_\mu}\,\gamma_{\mu\nu}\,\frac{\partial\,\eta_\beta}{\partial\,\xi_\nu}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\eta_\beta}\\ &= \frac{\partial\,A}{\partial\,\eta_\alpha}\,\{\eta_\alpha,\,\eta_\beta\}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\eta_\beta}\;.\end{aligned} \tag{5.66}$$

6. *Fundamentale Klammern:* $\{\xi_\alpha,\,\xi_\beta\} \;=\; \gamma_{\alpha\beta}\;;$ (5.67 a)

in q, p-Notation: $\{q_\alpha,\,q_\beta\} \;=\; 0\;,\quad \{p_\alpha,\,p_\beta\} \;=\; 0\;,\quad \{q_\alpha,\,p_\beta\} \;=\; \delta_{\alpha\beta}\;.$ (5.67 b)

Wichtig ist auch die Beziehung

$$\{\xi_\alpha,\,A\} \;=\; \gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\beta}\;, \tag{5.68}$$

welche die Ersetzung analytischer (Differentialquotient) durch algebraische (Poisson-Klammer) Operationen gestattet. – Bezüglich der zeitlichen Entwicklung der dynamischen Variablen $\{A,\,B\}$ gilt

Poissons Theorem. Seien A, B zwei dynamische Variablen; für diese gilt:

$$\frac{d}{dt}\,\{A,\,B\} \;=\; \left\{\frac{dA}{dt},\,B\right\} \;+\; \left\{A,\,\frac{dB}{dt}\right\}\;. \tag{5.69}$$

Beweis: H sei die Hamilton-Funktion des Systems. Nach (5.58) ist

$$\frac{d}{dt}\,\{A,\,B\} \;=\; \{\{A,\,B\},\,H\} \;+\; \frac{\partial}{\partial\,t}\,\{A,\,B\}\;; \tag{5.70}$$

Umformung des *ersten Terms* der rechten Seite mit (5.63, 65):

$$\{\{A,\,B\},\,H\} \;=\; \{\{A,\,H\},\,B\} \;+\; \{A,\,\{B,\,H\}\}\;; \tag{5.71}$$

der *zweite Term* der rechten Seite von (5.69) liefert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\,t}\,\{A,\,B\} &= \frac{\partial}{\partial\,t}\left(\frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\alpha}\,\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\xi_\beta}\right)\\ &= \frac{\partial^2\,A}{\partial\,\xi_\alpha\,\partial\,t}\,\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\xi_\beta} \;+\; \frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\alpha}\,\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial^2\,B}{\partial\,\xi_\beta\,\partial\,t}\\ &= \left\{\frac{\partial\,A}{\partial\,t},\,B\right\} \;+\; \left\{A,\,\frac{\partial\,B}{\partial\,t}\right\}\;.\end{aligned} \tag{5.72}$$

Mit (5.71, 72) folgt aus (5.70):

$$\frac{d}{dt}\{A,\, B\} \,=\, \left\{\{A,\, H\} + \frac{\partial A}{\partial t},\, B\right\} + \left\{A,\, \{B,\, H\} + \frac{\partial B}{\partial t}\right\}\;; \tag{5.73}$$

das ist wegen (5.58) die *Behauptung*.

Im Poisson-Theorem wird vorausgesetzt, dass die Bewegung durch eine Hamilton-Funktion erzeugt wird. *Umkehrung*: Wenn (5.69) für beliebige Paare A, B gilt, dann wird der zu Grunde liegende Phasenfluss durch eine Hamilton-Funktion erzeugt. Die Behauptung wird in Saletan & Cromer, chap. VI 2 bewiesen.

Folgerung aus dem Poisson-Theorem: Wenn A und B Konstanten der Bewegung sind, dann ist die dynamische Variable $\{A,\, B\}$ ebenfalls Konstante der Bewegung. Darüber, ob $\{A,\, B\}$ von A, B (un)abhängig ist, wird keine Aussage gemacht. Beides ist möglich.

Beispiel: zweidimensionaler harmonischer Oszillator (5.55). Man zeigt mit (5.58), dass

$$A \,=\, q_1 \,\cos t \,-\, p_1 \,\sin t \tag{5.74}$$

Konstante der Bewegung des Systems (5.54) ist. Von L_3 wurde dies in (5.56) gezeigt. Also ist

$$B \,=\, \{L_3,\, A\} \,=\, q_2 \,\cos t \,-\, p_2 \,\sin t \tag{5.75}$$

Konstante der Bewegung. A, B, L_3 sind unabhängig voneinander; ferner H. Das System (5.55) besitzt nach dem Satz auf Seite 30 genau vier unabhängige Konstanten der Bewegung. •

Beispiel: Poisson-Klammern der **Komponenten des Drehimpulses $\vec{L}$**, d.h.

$$L_\alpha \,=\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, x_\beta\, p_\gamma \;, \tag{5.76}$$

mit anderen dynamischen Variablen bedeutsam. Kartesische Koordinaten $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ und Impulse $\vec{p} = (p_1,\, p_2,\, p_3)$.

1. *Skalare Funktionen*: $f \,=\, f\,(\vec{x}^{\,2},\, \vec{p}^{\,2},\, \vec{x}\cdot\vec{p})$. Mit Hilfe der PK-Regeln zeigt man:

$$\{\vec{x}^{\,2},\, L_\alpha\} \,=\, \{\vec{p}^{\,2},\, L_\alpha\} \,=\, \{\vec{x}\cdot\vec{p},\, L_\alpha\} \,=\, 0\;; \tag{5.77}$$

z. B.

$$\begin{aligned}
\{\vec{x}^{\,2},\, L_\alpha\} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,\{x_\mu\,x_\mu,\, x_\beta\,p_\gamma\} \\
&= 2\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,x_\mu\,x_\beta\,\underbrace{\{x_\mu,\, p_\gamma\}}_{=\delta_{\mu\gamma}} \\
&= 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,x_\beta\,x_\gamma \;=\; 0 \;; \qquad (5.78)
\end{aligned}$$

es folgt (wie?):

$$\{f,\, \vec{L}\} \;=\; \vec{0}\;. \qquad (5.79)$$

Beispiel: f sei die Hamilton-Funktion eines Teilchens:

$$f \;=\; H \;=\; H\,(\vec{x}^{\,2},\, \vec{p}^{\,2},\, \vec{x}\,\cdot\,\vec{p})\;, \qquad (5.80)$$

z. B. **Teilchen im Zentralpotential**:

$$f \;=\; H \;=\; \frac{1}{2\,m}\,\vec{p}^{\,2} \;+\; V\,(\sqrt{\vec{x}^{\,2}}\,)\;; \qquad (5.81)$$

dafür gilt also:

$$\{H,\, \vec{L}\} \;=\; \vec{0}\;. \qquad (5.82)$$

Mit (5.58) folgt hieraus die *Drehimpulserhaltung*.

2. *Vektorfunktionen*: $\vec{f} \;=\; g_1\,\vec{x} \;+\; g_2\,\vec{p} \;+\; g_3\,\vec{x} \,\times\, \vec{p}$, wo g_1, g_2, g_3 skalare Funktionen 1. sind. Man zeigt mit den PK-Regeln:

$$\begin{aligned}
\{x_\mu,\, L_\alpha\} &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\,x_\beta \\
\{p_\mu,\, L_\alpha\} &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\,p_\beta \\
\{L_\mu,\, L_\alpha\} &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\,L_\beta\;.
\end{aligned} \qquad (5.83)$$

Es folgt mit (5.79):

$$\{f_\mu,\, L_\alpha\} \;=\; \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\,f_\beta\;. \qquad (5.84)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit dem Einheitsvektor $\hat{e}_\mu$ und Summation über μ führt auf:

$$\begin{aligned}
\{\vec{f},\, L_\alpha\} &= \varepsilon_{\mu\alpha\beta}\,f_\beta\,\hat{e}_\mu \\
&= \hat{e}_\alpha \,\times\, \hat{e}_\beta\,f_\beta \\
&= \hat{e}_\alpha \,\times\, \vec{f}\;. \qquad (5.85)
\end{aligned}$$

Speziell für $\vec{f} = \vec{L}$ folgt:

$$\{L_2, L_3\} = L_1 , \quad \{L_3, L_1\} = L_2 , \quad \{L_1, L_2\} = L_3 . \tag{5.86}$$

Das ist die dritte der Gln. (5.83). Wenn L_α, L_β Konstanten der Bewegung sind, ist L_γ ebenfalls Konstante der Bewegung •

Die Lösung der kanonischen Gleichungen (5.37) vereinfacht sich, wenn die Hamilton-Funktion $H(\xi, t)$ **zyklische Variablen** enthält. ξ_β heißt zyklisch, wenn H davon nicht abhängt: $\partial H / \partial \xi_\beta = 0$; dann ist das konjugierte ξ_α **Konstante der Bewegung**. Im Hinblick auf (5.6) bedeutet das:

$$q_\alpha \text{ zyklisch} \quad \Rightarrow \quad p_\alpha \text{ konstant} , \tag{5.87 a}$$

aber auch:

$$p_\alpha \text{ zyklisch} \quad \Rightarrow \quad q_\alpha \text{ konstant} . \tag{5.87 b}$$

Wenn z. B. *sämtliche* q_α zyklisch sind, folglich *alle* $p_\alpha = a_\alpha =$ konstant, dann ist die Lösung des Bewegungsproblems trivial:

$$\begin{aligned} & H = H(a_1, \dots a_n, t) \\ \Rightarrow \quad & \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial a_\alpha} = \omega_\alpha(t) \\ \Rightarrow \quad & q_\alpha(t) = \int^t \omega_\alpha(t') \, dt' + b_\alpha , \end{aligned} \tag{5.88}$$

$b_\alpha =$ konstant. Unter welchen Voraussetzungen dieser Extremfall eines sog. *integrablen Systems* evtl. eintritt, wird im Rahmen der *Hamilton-Jacobi-Theorie* diskutiert (s. u.). Aber auch wenn nicht alle, sondern nur einzelne q_α (oder p_α) zyklisch sind, wird die Analyse der Bewegung wegen der Existenz der entsprechenden Konstanten der Bewegung erheblich vereinfacht.

Ob und in welchem Umfang die Hamilton-Funktion zyklische Variablen enthält, hängt von der Wahl der Phasenraumkoordinaten $\xi = (q, p)$ ab. *Beispiel: Teilchen im Zentralpotential.* In kartesischen Koordinaten ist keine Koordinate zyklisch, in sphärischen Polarkoordinaten hingegen ist der Azimutalwinkel φ zyklisch, wodurch die L_z-Erhaltung unmittelbar deutlich wird. Siehe S. 34.

In der Lagrange-Mechanik empfehlen sich geeignete *Punkttransformationen*

$$q_\alpha \quad \to \quad Q_\alpha = Q_\alpha (q, t) \tag{5.89}$$

zur „Erzeugung“ zyklischer Koordinaten. Die Lagrange-Gleichungen sind – mit der neuen Lagrange-Funktion $L^{'}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$ – gegenüber (5.89) *forminvariant*; siehe S. 18/19. Falls sich obendrein $L(q, \dot{q}, t)$ und $L^{'}(q, \dot{q}, t)$ nur um die totale Zeitableitung einer Funktion $\Phi(q, t)$ unterscheiden, sind die Lagrange-Gleichungen sogar *Term für Term invariant* gegenüber (5.89): *Symmetrietransformation*; siehe S. 21/22.

In der Hamilton-Mechanik sind die q und p „gleichberechtigt“; man studiert dort **kanonische Transformationen**

$$q_\alpha, p_\alpha \to Q_\alpha = Q_\alpha (q, p, t) , \quad P_\alpha = P_\alpha (q, p, t) , \tag{5.90}$$

in die alle $2\,n$ Phasenraumkoordinaten involviert sind. Im Unterschied zur Lagrange-Mechanik sind die kanonischen Gleichungen gegenüber (5.90) im allgemeinen *nicht* forminvariant; man hat *Forminvarianz* zusätzlich zu fordern, d. h. die Existenz einer „neuen“ Hamilton-Funktion

$$K = K(Q, P, t) \tag{5.91}$$

mit

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} , \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} , \tag{5.92}$$

und zwar zu beliebiger „alter“ Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$. (Es gibt auch Transformationen (5.90), wo bzgl. $H_1(q, p, t)$ ein $K(Q, P, t)$ existiert, bzgl. $H_2(q, p, t)$ jedoch nicht. Derartige Transformationen sind nicht kanonisch. Siehe hierzu Saletan & Cromer, chap. VI-3.)

Beispiel:

$$Q = p , \quad P = -q . \tag{5.93}$$

Für

$$K(Q, P, t) = H(-P, Q, t) \tag{5.94}$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \ , \end{aligned} \tag{5.95}$$

d. h. kanonische Transformation. Vertauschung von Orts- und Impulskoordinaten. Bei der Bezeichnung der q, p bzw. Q, P als Orts- und Impulskoordinaten ist also Vorsicht geboten: „Orte“ können „Impulse“ sein und umgekehrt oder ganz andere physikalische Größen (Winkel, Drehimpulse, ...) •

Kurznotation: Die Transformation

$$\xi_\alpha \;\to\; \eta_\alpha \,=\, \eta_\alpha\,(\xi,\, t) \tag{5.96}$$

heißt *kanonisch*, wenn es zu jedem $H\,(\xi,\, t)$ ein $K\,(\eta,\, t)$ gibt, so dass gilt:

$$\dot{\eta}_\alpha \,=\, \gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\, K}{\partial\,\eta_\beta}\;. \tag{5.97}$$

Statt durch die kanonischen Gleichungen (5.97) kann man die Bewegung in den η-Koordinaten auch durch das modifizierte Hamiltonsche Prinzip beschreiben:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} L'\,(\eta\,(t),\, \dot{\eta}\,(t),\, t)\, dt \,=\, \text{Extremum} \tag{5.98}$$

mit

$$L'\,(\eta,\, \dot{\eta},\, t) = \lambda_{\alpha\beta}\,\dot{\eta}_\alpha\,\eta_\beta \,-\, K\,(\eta,\, t)\;. \tag{5.99}$$

Gln. (5.40, 41) gehen durch die Transformation (5.96) genau dann in Gln. (5.98, 99) über – und umgekehrt, wenn sich die Integranden um die totale Ableitung einer dynamischen Variablen F unterscheiden:

$$L \,-\, L' \,=\, \lambda_{\alpha\beta}\,(\dot{\xi}_\alpha\,\xi_\beta \,-\, \dot{\eta}_\alpha\,\eta_\beta) \,+\, K\,(\eta,\, t) \,-\, H\,(\xi,\, t) \,=\, \frac{dF}{dt}\;; \tag{5.100}$$

dabei ist $F \,=\, F\,(\xi,\, t)$ oder $F \,=\, F\,(\eta,\, t)$ nach Belieben. Bezeichnung von F als **Erzeugende der kanonischen Transformation**.

Zur Begründung von (5.100): Die Variation von

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt \,=\, F\,(2) \,-\, F\,(1) \tag{5.101}$$

verschwindet. – In der Kanonizitätsbedingung (5.100) bleiben die trivialen Transformationen unberücksichtigt, bei denen L' ein Vielfaches von L ist: $\eta_\alpha \,=\, \sqrt{a}\,\xi_\alpha$, $K \,=\, a\,H$. Das entspricht dem Vorgehen der weitaus meisten Lehrbücher, z. B. Goldstein; in Saletan & Cromer wird der allgemeine Fall behandelt.

In q, q-*Notation* wird aus (5.100):

$$p_\alpha \, \dot{q}_\alpha \, - \, P_\alpha \, \dot{Q}_\alpha \, + \, K \, - \, H \, = \, \frac{dF}{dt} \; . \tag{5.102}$$

Je nachdem, wie man F darstellt, erhält man *verschiedene Typen* von kanonischen Transformationsgleichungen:

1.
$$F \, = \, F_1 \, (q, \, Q, \, t) \tag{5.103}$$

beliebig. Einsetzen von

$$\frac{dF}{dt} \, = \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, q_\alpha} \, \dot{q}_\alpha \, + \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, Q_\alpha} \, \dot{Q}_\alpha \, + \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, t} \tag{5.104}$$

in (5.102) ergibt:

$$\left(p_\alpha \, - \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, q_\alpha} \right) \, \dot{q}_\alpha \, - \, \left(P_\alpha \, + \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, Q_\alpha} \right) \, \dot{Q}_\alpha \, + \, K \, - \, H \, - \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, t} \, = \, 0 \; . \tag{5.105}$$

Wegen der Unabhängigkeit von q_α, Q_α folgt:

$$p_\alpha \, = \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, q_\alpha} \; , \quad P_\alpha \, = \, - \frac{\partial \, F_1}{\partial \, Q_\alpha} \tag{5.106}$$

sowie

$$K \, = \, H \, + \, \frac{\partial \, F_1}{\partial \, t} \; . \tag{5.107}$$

Gl. (5.106) liefert die Verknüpfung zwischen den q, p und den Q, P, d. h. die kanonischen Transformationsgleichungen des zu (5.103) gehörigen Typs; Gl. (5.107) ist die Konstruktionsvorschrift für die neue Hamilton-Funktion.

2.
$$F \, = \, F_2 \, (q, \, P, \, t) \, - \, Q_\alpha \, P_\alpha \; , \tag{5.108}$$

F_2 beliebig. Einsetzen von

$$\frac{dF}{dt} \, = \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, q_\alpha} \, \dot{q}_\alpha \, + \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, P_\alpha} \, \dot{P}_\alpha \, + \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, t} \, - \, \dot{Q}_\alpha \, P_\alpha \, - \, Q_\alpha \, \dot{P}_\alpha \tag{5.109}$$

in (5.102) ergibt:

$$\left(p_\alpha \, - \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, q_\alpha} \right) \, \dot{q}_\alpha \, + \, \left(Q_\alpha \, - \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, P_\alpha} \right) \, \dot{P}_\alpha \, + \, K \, - \, H \, - \, \frac{\partial \, F_2}{\partial \, t} \, = \, 0 \; . \tag{5.110}$$

Wegen der Unabhängigkeit von q_α, P_α folgt:

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} , \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} \tag{5.111}$$

sowie

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} . \tag{5.112}$$

Das sind die kanonischen Transformationsgleichungen vom F_2-Typ bzw. die Formel für K in diesem Falle. – F_1 und F_2 sind unabhängig beliebig wählbar. Falls in (5.103, 108) *dasselbe* F gewählt wird, dann sind F_1 und F_2 durch *Legendre-Transformation* miteinander verknüpft.

3.
$$F = F_3\,(p,\, Q,\, t) + q_\alpha\, p_\alpha , \tag{5.113}$$

F_3 beliebig, führt – analog oben – auf:

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha} , \quad P_\alpha = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha} \tag{5.114}$$

und

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} . \tag{5.115}$$

4.
$$F = F_4\,(p,\, P,\, t) - Q_\alpha\, P_\alpha + q_\alpha\, p_\alpha , \tag{5.116}$$

F_4 beliebig, ergibt – wie oben:

$$q_\alpha = -\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha} , \quad Q_\alpha = \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} \tag{5.117}$$

und

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} . \tag{5.118}$$

Anmerkungen:

1. Über die vier skizzierten Typen $F_1\,(q,\, Q,\, t)$, $F_2\,(q,\, P,\, t)$, $F_3\,(p,\, Q,\, t)$, $F_4\,(p,\, P,\, t)$ hinaus sind kanonische Transformationen aus Erzeugenden herleitbar, die von n beliebigen q, p-Koordinaten und n beliebigen QP-Koordinaten als unabhängigen Variablen abhängen.

2. Bei gleichem F sind alle diese Erzeugenden durch Legendre-Transformationen miteinander verknüpft.

3. Die aus F_i hergeleitete Transformation ist genau dann unabhängig von t, wenn F_i nicht explizit von t abhängt – bis auf eine additive Funktion von t. Genau in diesem Fall ist $K = H$ – bis auf eine additive Funktion von t, die für die Dynamik (die kanonischen Gleichungen) keine Rolle spielt.

Beispiele:

1. **Identische Transformation**:

$$F_2 = q_\alpha \, P_\alpha \ ; \tag{5.119}$$

mit (5.111) folgt:

$$p_\alpha = P_\alpha \ , \quad q_\alpha = Q_\alpha \ . \tag{5.120}$$

2. **Vertauschung von Orten und Impulsen**:

$$F_1 = q_\alpha \, Q_\alpha \ ; \tag{5.121}$$

mit (5.106) folgt:

$$p_\alpha = Q_\alpha \ , \quad P_\alpha = -q_\alpha \ . \tag{5.122}$$

Diese Transformation entspricht dem Beispiel (5.93).

3. **Punktransformation**:

$$F_2 = f_\alpha \, (q, \, t) \, P_\alpha \ ; \tag{5.123}$$

mit (5.111) folgt:

$$Q_\alpha = f_\alpha \, (q, \, t) \ ; \tag{5.124 a}$$

siehe (5.89): Die neuen Orte hängen nur von den alten Orten ab. Ferner:

$$p_\beta = \frac{\partial \, f_\alpha}{\partial \, q_\beta} \, P_\alpha \ , \tag{5.124 b}$$

d. h. die neuen Impulse hängen im allgemeinen sowohl von den alten Impulsen als auch von den alten Orten ab. Betrachte speziell *orthogonale* Koordinatentransformationen – wie bei den schwingenden Systemen und beim Kreisel:

$$Q_\alpha \;=\; a_{\alpha\beta}\, q_\beta \tag{5.125}$$

$$\Rightarrow \quad F_2 \;=\; a_{\alpha\beta}\, q_\beta\, P_\alpha \tag{5.126}$$

plus belanglose additive Funktion von t; somit ist

$$p_\beta \;=\; a_{\alpha\beta}\, P_\alpha \ . \tag{5.127}$$

Wegen der Orthogonalität der Matrix $(a_{\alpha\beta})$ folgt:

$$P_\alpha \;=\; a_{\alpha\beta}\, p_\beta \ . \tag{5.128}$$

Die Impulse (5.128) transformieren sich also wie die Orte (5.125).

4. **Harmonischer Oszillator**. Hamilton-Funktion:

$$H \;=\; \frac{p^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega^2}{2}\, q^2 \ . \tag{5.129}$$

Erzeugende vom F_1-Typ:

$$F_1 \;=\; \frac{m}{2}\,\omega\, q^2\, \cot\, Q \ ; \tag{5.130}$$

mit (5.106) erhält man die kanonische Transformation:

$$\begin{aligned} p \;&=\; m\,\omega\, q\, \cot\, Q \\ P \;&=\; \frac{m\,\omega\, q^2}{2\, \sin^2\, Q} \ . \end{aligned} \tag{5.131}$$

Auflösen nach q, p ergibt:

$$\begin{aligned} q \;&=\; \sqrt{\frac{2\,P}{m\,\omega}}\, \sin\, Q \\ p \;&=\; \sqrt{2\,m\,\omega\,P}\, \cos\, Q \ . \end{aligned} \tag{5.132}$$

Einsetzen in (5.129) führt mit (5.107) auf die neue Hamilton-Funktion:

$$K = \omega P \; . \tag{5.133}$$

Wegen $K = H = E$ ist

$$P = \frac{E}{\omega} = \text{konstant} \; . \tag{5.134}$$

Klar, da Q zyklisch! Berechnung von $Q\,(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \\ \Rightarrow \quad Q &= \omega\, t + b \; , \end{aligned} \tag{5.135}$$

$b =$ konstant. Einsetzen von (5.134, 135) in (5.132) liefert das bekannte Oszillatorresultat:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}}\, \sin\left(\omega\, t + b\right) \\ p &= \sqrt{2\,m\,E}\, \cos\left(\omega\, t + t\right) \; . \end{aligned} \tag{5.136}$$

Hier wurde einerseits „mit Kanonen auf Spatzen geschossen“; das Beispiel dient andererseits der Erläuterung des kanonischen Transformationsformalismus. Gl. (5.133) ist außerdem ein Beispiel für den im Zusammenhang mit (5.88) diskutierten Extremfall, dass sämtliche Ortskoordinaten (hier nur eine) zyklisch, folglich alle Impulskoordinaten (hier nur eine) konstant sind, d. h. für ein *integrables System.* Ein weiteres Beispiel für ein integrables System ist der

5. **Freier Fall**. Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p^2}{2\,m} + m\,g\,q \; . \tag{5.137}$$

Erzeugende vom F_2-Typ:

$$F_2 = q\,P + \frac{P^3}{6\,m^2\,g} \; ; \tag{5.138}$$

mit (5.111) erhält man – nach q, p aufgelöst – die kanonische Transformation:

$$\begin{aligned} q &= Q - \frac{P^2}{2\,m^2\,g} \\ p &= P \; . \end{aligned} \tag{5.139}$$

Einsetzen in (5.137) führt mit (5.112) auf die neue Hamilton-Funktion:

$$K \,=\, m\,g\,Q\;. \tag{5.140}$$

Hier ist – umgekehrt – P zyklisch und Q konstant; wegen $K \,=\, H \,=\, E$ hat man

$$Q \,=\, \frac{E}{m\,g} \,=\, \text{konstant}\;. \tag{5.141}$$

Für $P\,(t)$ berechnet man:

$$\begin{aligned} &\dot{P} = -\frac{\partial\,K}{\partial\,Q} \,=\, -m\,g \\ \Rightarrow\quad &P = m\,(v_0 \,-\, g\,t) \quad . \end{aligned} \tag{5.142}$$

Einsetzen von (5.141, 142) in (5.139) ergibt bekanntermaßen:

$$\begin{aligned} q \,&=\, -\frac{g}{2}\,t^2 \,+\, v_0\,t \,+\, x_0 \\ p \,&=\, m\,(v_0 \,-\, g\,t) \end{aligned} \tag{5.143}$$

mit

$$x_0 \,=\, \frac{1}{m\,g}\,\left(E \,-\, \frac{m}{2}\,v_0^2\right)\;. \tag{5.144}$$

Wie findet man die Erzeugende? Dafür gibt es kein „Patentrezept“. Siehe jedoch *Hamilton-Jacobi-Theorie* (s. u.).

Man kann die kanonischen Transformationen auch durch die **Invarianz der Poisson-Klammern** kennzeichnen: Eine Transformation

$$\eta \,=\, \eta\,(\xi,\, t) \quad \text{bzw.} \quad \xi \,=\, \xi\,(\eta,\, t) \tag{5.145}$$

ist genau dann kanonisch, wenn für je zwei dynamische Variablen A, B gilt:

$$\{A,\, B\}_\xi \,=\, \{A,\, B\}_\eta\;. \tag{5.146}$$

Dabei bedeutet die linke Seite die PK-Definition (5.57) bezüglich der Variablen ξ:

$$\{A,\, B\}_\xi \,=\, \frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\alpha}\,\gamma_{\alpha\beta}\,\frac{\partial\,B}{\partial\,\xi_\beta}\;; \tag{5.147}$$

die rechte Seite bedeutet die entsprechende Definition bezüglich der Variablen η:

$$\{A,\, B\}_\eta \;=\; \frac{\partial\, A}{\partial\, \eta_\alpha}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial\, B}{\partial\, \eta_\beta}\ . \tag{5.148}$$

Kanonizität $\Rightarrow$ Invarianz. Gemäß (5.66) hat man:

$$\{A,\, B\}_\eta \;=\; \frac{\partial\, A}{\partial\, \xi_\alpha}\, \{\xi_\alpha,\, \xi_\beta\}_\eta\, \frac{\partial\, B}{\partial\, \xi_\beta}\ . \tag{5.149}$$

Falls gilt

$$\{\xi_\alpha,\, \xi_\beta\}_\eta \;=\; \{\xi_\alpha,\, \xi_\beta\}_\xi\ , \tag{5.150}$$

d. i. Invarianz der *fundamentalen* PK, dann folgt mit (5.67), d. h.

$$\{\xi_\alpha,\, \xi_\beta\}_\xi \;=\; \gamma_{\alpha\beta}\ , \tag{5.151}$$

die Invarianz *beliebiger* PK:

$$\{A,\, B\}_\eta \;=\; \frac{\partial\, A}{\partial\, \xi_\alpha}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \frac{\partial\, B}{\partial\, \xi_\beta} \;=\; \{A,\, B\}_\xi\ . \tag{5.152}$$

Man hat also die Invarianz der fundamentalen PK gegenüber der kanonischen Transformation zu zeigen.

Beweis in q, p-Notation; z. B.

$$\{q_\alpha,\, p_\beta\}_{Q,P} \;=\; \frac{\partial\, q_\alpha}{\partial\, Q_\mu}\, \frac{\partial\, p_\beta}{\partial\, P_\mu} \;-\; \frac{\partial\, p_\beta}{\partial\, Q_\mu}\, \frac{\partial\, q_\alpha}{\partial\, P_\mu} \tag{5.153}$$

Falls die Transformation $q,\, p \leftrightarrow Q,\, P$ kanonisch ist, sind Gln. (5.106, 111) anwendbar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\, p_\beta}{\partial\, Q_\mu} \;&=\; \frac{\partial}{\partial\, Q_\mu}\, \frac{\partial\, F_1}{\partial\, q_\beta} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, q_\beta}\, \frac{\partial\, F_1}{\partial\, Q_\mu} \;=\; -\frac{\partial\, P_\mu}{\partial\, q_\beta} \\ \frac{\partial\, p_\beta}{\partial\, P_\mu} \;&=\; \frac{\partial}{\partial\, P_\mu}\, \frac{\partial\, F_2}{\partial\, q_\beta} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, q_\beta}\, \frac{\partial\, F_2}{\partial\, P_\mu} \;=\; \frac{\partial\, Q_\mu}{\partial\, q_\beta}\ . \end{aligned} \tag{5.154}$$

Einsetzen von (5.154) in (5.153) führt auf:

$$\{q_\alpha,\, p_\beta\}_{Q,P} \;=\; \frac{\partial\, q_\alpha}{\partial\, Q_\mu}\, \frac{\partial\, Q_\mu}{\partial\, q_\beta} \;+\; \frac{\partial\, q_\alpha}{\partial\, P_\mu}\, \frac{\partial\, P_\mu}{\partial\, q_\beta} \;=\; \frac{\partial\, q_\alpha}{\partial\, q_\beta} \;=\; \delta_{\alpha\beta} \tag{5.155}$$

Nach (5.67 b) ist aber

$$\{q_\alpha,\, p_\beta\}_{q,p} \;=\; \delta_{\alpha\beta}\;; \tag{5.156}$$

also folgt

$$\{q_\alpha,\, p_\beta\}_{Q,P} \;=\; \{q_\alpha,\, p_\beta\}_{q,p}\;. \tag{5.157 a}$$

Entsprechend beweist man (unter der Voraussetzung der Kanonizität):

$$\{q_\alpha,\, q_\beta\}_{Q,P} \;=\; \{q_\alpha,\, q_\beta\}_{q,p} \tag{5.157 b}$$

$$\{p_\alpha,\, p_\beta\}_{Q,P} \;=\; \{p_\alpha,\, p_\beta\}_{q,p}\;, \tag{5.157 c}$$

nämlich in beiden Fällen gleich null. Damit ist die Invarianz (5.150) der fundamentalen PK, somit die Invarianz (5.146) beliebiger PK bewiesen. Wegen der Invarianz kann man den Index am $\{\ldots\}$-Symbol weglassen.

Invarianz $\Rightarrow$ Kanonizität. Aus der Invarianz (5.146) folgt:

$$\frac{d}{dt}\,\{A,\, B\}_\eta \;=\; \frac{d}{dt}\,\{A,\, B\}_\xi\;. \tag{5.158}$$

Die ξ-Bewegung sei durch eine Hamilton-Funktion $H\,(\xi,\, t)$ erzeugt, dann ist das Poisson-Theorem (5.69) auf die rechte Seite von (5.158) anwendbar:

$$\frac{d}{dt}\,\{A,\, B\}_\eta \;=\; \left\{\frac{dA}{dt},\, B\right\}_\xi \;+\; \left\{A,\, \frac{dB}{dt}\right\}_\xi\;. \tag{5.159}$$

Wendet man auf die beiden Terme der rechten Seite von (5.159) erneut (5.146) an, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}\,\{A,\, B\}_\eta \;=\; \left\{\frac{dA}{dt},\, B\right\}_\eta \;+\; \left\{A,\, \frac{dB}{dt}\right\}_\eta\;. \tag{5.160}$$

Hieraus folgt, da A, B beliebig, in Umkehrung des Poisson-Theorems, dass zur η-Bewegung eine Hamilton-Funktion $K\,(\eta,\, t)$ existiert. Damit ist die Kanonizität der Transformation (5.145) bewiesen.

Anmerkungen:

1. Die Invarianz (5.146) der Poisson-Klammern ist plausibel im Lichte des Zeitentwicklungsgesetzes (5.58). Fasst man B formal als Hamilton-Funktion auf, so ist

$$\{A,\, B\} \;=\; \frac{dA}{dt} \;-\; \frac{\partial\, A}{\partial\, t} \tag{5.161}$$

derjenige Anteil der zeitlichen Änderung von A, der vom Phasenfluss (nicht von der expliziten t-Abhängigkeit) herrührt. Dieser Anteil der A-Änderung kann aber nicht davon abhängen, in welchen Variablen man den Phasenraum beschreibt.

2. Die *Jacobi-Determinante*, d. i. die Determinante der *Jacobi-Matrix*:

$$J = \det\left(\frac{\partial\,\eta_\alpha}{\partial\,\xi_\beta}\right)\,, \tag{5.162}$$

einer kanonischen Transformation $\eta = \eta\,(\xi,\,t)$ hat den Wert ± 1. Wegen der Invarianz der fundamentalen PK gilt nämlich:

$$\{\eta_\alpha,\,\eta_\beta\}_\xi = \frac{\partial\,\eta_\alpha}{\partial\,\xi_\mu}\,\gamma_{\mu\nu}\,\frac{\partial\,\eta_\beta}{\partial\,\xi_\nu} = \gamma_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad J\,\det\Gamma\,J = \det\Gamma$$

$$\Rightarrow \quad J = \pm 1 \tag{5.163}$$

– was zu zeigen war.

Aus (5.163) folgt die *Invarianz des Phasenraumvolumens* unter kanonischen Transformationen:

$$\int\underset{V}{\ldots}\int d\eta_1\,\ldots\,d\eta_{2\,n} = \int\underset{V}{\ldots}\int d\xi_1\,\ldots\,d\xi_{2\,n}$$

$$\text{bzw.} \tag{5.164}$$

$$\int\underset{V}{\ldots}\int dq_1\,\ldots\,dq_n\,dp_1\,\ldots\,dp_n = \int\underset{V}{\ldots}\int dQ_1\,\ldots\,dQ_n\,dP_1\,\ldots\,dP_n\,.$$

Das ist eine der **Poincaréschen Integralinvarianten**, siehe Goldstein, Kap. 8.3; *Lagrange-Klammern* ... usw.

Henri Poincaré, 1854 - 1912

3. Die Menge der kanonischen Transformationen (KT) bilden – für beliebiges, aber festes t; darum wird t nachfolgend weggelassen – eine **Gruppe**:

a) Das *Produkt* zweier KT, d. h. die sukzessive Ausführung zweier KT

$$\eta = \eta(\xi) , \quad \zeta = \zeta(\eta) , \tag{5.165}$$

nämlich

$$\zeta = \zeta(\eta(\xi)) , \tag{5.166}$$

ist ebenfalls eine KT; denn gemäß (5.66) ist

$$\begin{aligned} \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_\zeta &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\mu} \{\eta_\mu, \eta_\nu\}_\zeta \frac{\partial \zeta_\beta}{\partial \eta_\nu} \\ &= \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_\eta \\ &= \gamma_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.167}$$

wegen (5.165) kanonisch, d. h. Invarianz der fundamentalen PK gegenüber der Transformation $\xi \to \zeta$. Daraus folgt die Invarianz beliebiger PK gegenüber dieser Transformation, d. h. die Kanonizität der Transformation. – Die Verknüpfung zweier KT ist im allgemeinen nicht kommutativ.

b) Die *Inverse* einer KT

$$\eta = \eta(\xi) , \tag{5.168}$$

nämlich

$$\xi = \xi(\eta) , \tag{5.169}$$

ist ebenfalls eine KT; denn per definitionem ist

$$\begin{aligned} \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\xi &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} \\ \text{(5.168):} \qquad &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \{\xi_\mu, \xi_\nu\}_\eta \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} \\ \text{(5.66):} \qquad &= \{\eta_\alpha, \eta_\beta\}_\eta \\ \text{(5.67):} \qquad &= \gamma_{\alpha\beta} , \end{aligned} \tag{5.170}$$

d. h. Invarianz der fundamentalen PK gegenüber der Transformation $\eta \to \xi \Rightarrow$ Kanonizität dieser Transformation.

c) Die Existenz der *identischen* KT in (5.120) wurde aufgewiesen.

d) Das Produkt dreier KT ist assoziativ; wird hier nicht bewiesen (ziemlich einfach).

Also bilden die kanonischen Transformationen eine Gruppe •

In Kapitel 2 wurde – im Rahmen der *Lagrange-Mechanik* – der Zusammenhang zwischen Konstanten der Bewegung und Symmetrien des Systems ausführlich dargelegt. Zu jeder einparametrigen Schar von infinitesimalen *Punkttransformationen*, welche die Lagrange-Funktion (quasi)invariant lässt, gibt es eine Konstante der Bewegung – und umgekehrt: *Noether-Theorem*.

In der *Hamilton-Mechanik* lässt sich der Zusammenhang zwischen Konstanten der Bewegung und Symmetrien des Systems viel kompakter formulieren; nur hat man hier einparametrige Scharen infinitesimaler *kanonischer Transformationen* zu betrachten, welche die Hamilton-Funktion invariant lassen. Zu jeder derartigen Schar gibt es eine Konstante der Bewegung – und umgekehrt. Einfachheitshalber wird in der folgenden Darlegung auf explizite t-Abhängigkeiten verzichtet. Der allgemeine Fall wird bei Saletan & Cromer, chap. VII 1, 2 behandelt.

Einparametrige Schar kanonischer Transformationen:

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q,\, p;\, \varepsilon) \;, \quad P_\alpha = P_\alpha(q,\, p;\, \varepsilon) \;; \tag{5.171}$$

ε = Scharparameter. Für $\varepsilon \to 0$ soll (5.171) in die identische Transformation übergehen:

$$Q_{\alpha,\varepsilon=0} = q_\alpha \;, \quad P_{\alpha,\varepsilon=0} = p_\alpha \;; \tag{5.172}$$

daher Bezeichnung als *infinitesimale* KT. Herleitung aus Erzeugender vom F_2-Typ:

$$F_2 = F_2(q,\, P,\, \varepsilon) = q_\alpha P_\alpha + \varepsilon\, G(q,\, P) + \dots \;, \tag{5.173}$$

siehe (5.119). Die beliebige (!) Funktion $G(q,\, P)$ nennt man *Generator* der infinitesimalen kanonischen Transformationen. Mit (5.111) folgt aus (5.173):

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_\alpha}(q,\, P) + \dots$$

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}(q,\, P) + \dots$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} Q_\alpha - q_\alpha &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_\alpha}(q,\, P) + \dots \\ P_\alpha - p_\alpha &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}(q,\, P) + \dots \;; \end{aligned} \tag{5.174}$$

im Limes $\varepsilon \to 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dq_\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}(q,\, p) \\ \frac{dp_\alpha}{d\varepsilon} &= -\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}(q,\, p)\ . \end{aligned} \tag{5.175}$$

Durch Integration dieser $2\,n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung berechnet man die ε-Schar

$$q_\alpha = q_\alpha\,(q^0,\, p^0;\, \varepsilon)\ , \quad p_\alpha = p_\alpha\,(q^0,\, p^0;\, \varepsilon) \tag{5.176}$$

endlicher KT, welche die „anfänglichen“ Variablen q^0, p^0 mit den „aktuellen“ Variablen q, p verknüpfen. Beachte: Verknüpfung infinitesimaler KT liefert endliche KT (siehe oben).

Gln. (5.175, 176) haben dieselbe formale Gestalt wie die kanonischen Gleichungen und deren (zu gewissen Anfangsbedingungen gehörige) Lösung. Der Generator $G\,(q,\, p)$ entspricht der Hamilton-Funktion $H\,(q,\, p)$, der Scharparameter ε entspricht der Zeit t. Die Bedeutung ist allerdings eine ganz andere: Während durch die kanonischen Gleichungen die t-Entwicklung der Phasenraumvariablen q, p aus Anfangswerten q^0, p^0 unter der Einwirkung von H beschrieben wird, beschreiben die Dgln (5.175) die ε-Entwicklung eines Variablensatzes q, p aus vorhergehenden Variablensätzen (anfänglich q^0, p^0) unter dem Einfluss von G. Die q, p-Koordinatenwerte auf diesem ε-Orbit sind sämtlich durch kanonische Transformationen miteinander verknüpft: *aktive* Betrachtung kanonischer Transformationen; bei *passiver* Betrachtung beschreibt man einen und denselben Punkt im Phasenraum durch verschiedene $q\,p$-Koordinaten.

Setzt man in (5.175) $G = H$, $\varepsilon = t$ ein, so erhält man die kanonischen Gleichungen, jedoch – im Lichte der hier geführten Diskussion – mit der folgenden Interpretation:

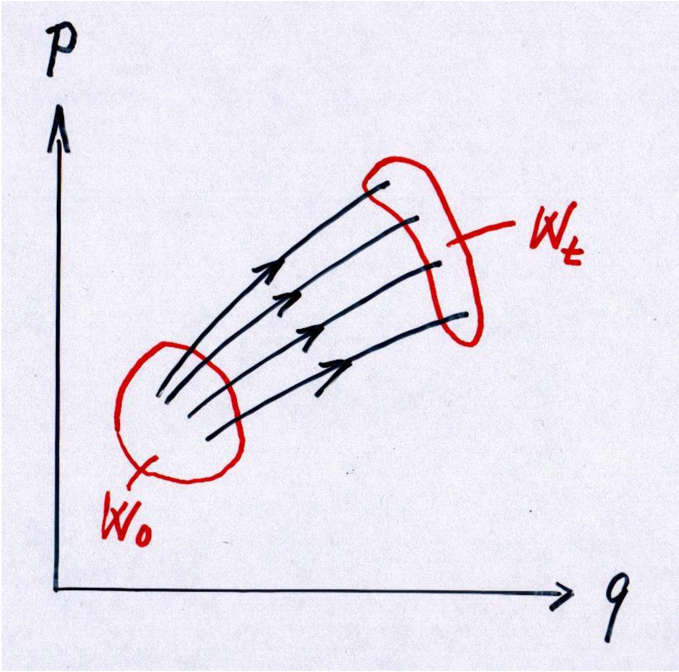
- Die zeitliche Entwicklung

$$q^0,\, p^0 \to q,\, p\,(q^0,\, p^0,\, t) \tag{5.177}$$

  ist eine Schar (Parameter t) kanonischer Transformationen.

- Die Hamilton-Funktion ist der Generator dieser Schar.

Zusammen mit (5.164) folgt aus dem KT-Charakter der Bewegung: Das Phasenraumvolumen eines Gebietes W bleibt unter dem Hamilton-Fluss unverändert (zeitlich konstant): **Satz von Liouville**. Über die zeitliche Entwicklung der „Gestalt“ von W werden keine Aussagen gemacht; diese kann sich verändern, ausfransen, ...



Joseph Liouville, 1809 - 1882

Wie ändert sich der Wert einer beliebigen dynamischen Variablen A bei der durch (5.175) beschriebenen ε-Entwicklung? Darstellung dieser Gleichungen in ξ-Notation:

$$\frac{d\xi_\mu}{d\varepsilon} = \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \tag{5.178}$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\frac{d\,A}{d\varepsilon} = \frac{\partial\,A}{\partial\,\xi_\mu} \frac{d\xi_\mu}{d\varepsilon}$$

$$= \frac{\partial A}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu}$$

$$= \{A, G\} \ . \tag{5.179}$$

Speziell für $A = H$ erhält man:

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = \{H, G\} \ . \tag{5.180}$$

Wegen des Zeitentwicklungsgesetzes (5.58):

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} \tag{5.181}$$

– im Falle fehlender expliziter t-Abhängigkeit – folgt:

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dG}{dt} = 0 \ ,$$

d. h.

$$H = \text{invariant} \quad \Leftrightarrow \quad G = \text{konstant} \ . \tag{5.182}$$

H ist genau dann invariant unter der von G erzeugten ε-Entwicklung, wenn G unter der von H erzeugten t-Entwicklung invariant ist, d. h. wenn G Konstante der Bewegung ist. Die *Konstanten der Bewegung* des betrachteten Systems sind also mit den *Generatoren der infinitesimalen kanonischen Transformationen* zu identifizieren, unter denen die Hamilton-Funktion invariant ist. In jedem Fall handelt es sich um diejenigen dynamischen Variablen G, die mit H vertauschen.

Beispiele:

1. q_β **zyklisch** $\Leftrightarrow$ p_β **konstant**. Betrachte den Generator $G = p_\beta$; dafür folgt aus (5.175):

$$\frac{dq_\alpha}{d\varepsilon} = \delta_{\alpha\beta} \ , \quad \frac{dp_\alpha}{d\varepsilon} = 0 \tag{5.183}$$

mit der Lösung (5.176):

$$q_\alpha = q_\alpha^0 + \varepsilon\, \delta_{\alpha\beta} \ , \quad p_\alpha = p_\alpha^0 \ . \tag{5.184}$$

Diese ε-Schar kanonischer Transformationen unterwirft die Koordinate q_β einer Verschiebung um ε und lässt alle anderen Koordinaten unverändert: Impuls p_β als Generator einer *Translation* in der Koordinate q_β. Genau dann ist $G = p_\beta$ Konstante der Bewegung, wenn H gegenüber dieser Translation invariant ist, d. h. nicht von q_β abhängt.

2. **Rotationsinvarianz** und **Drehimpulserhaltung**. Für den Generator

$$G = L_z = x\,p_y - y\,p_x \tag{5.185}$$

ergeben sich aus (5.175) die Entwicklungsgleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{d\varepsilon} = -y \;, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = x \;, \quad \frac{dz}{d\varepsilon} = 0 \\ &\frac{dp_x}{d\varepsilon} = -p_y \;, \quad \frac{dp_y}{d\varepsilon} = p_x \;, \quad \frac{dp_z}{d\varepsilon} = 0 \end{aligned} \tag{5.186}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos\varepsilon - y_0 \sin\varepsilon \\ y &= x_0 \sin\varepsilon + y_0 \cos\varepsilon \\ z &= z_0 \end{aligned} \tag{5.187 a}$$

bzw.

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x,0} \cos\varepsilon - p_{y,0} \sin\varepsilon \\ p_y &= p_{x,0} \sin\varepsilon + p_{y,0} \cos\varepsilon \\ p_z &= p_{z,0} \;. \end{aligned} \tag{5.187 b}$$

Durch die ε-Schar kanonischer Transformationen wird die $x\,y$-Ebene um den Winkel ε gedreht; die z-Koordinate bleibt von dieser Operation unberührt. Gleiches gilt für p_x, p_y, p_z. Drehimpuls L_z als Generator einer *Rotation* um die z-Achse. Genau dann ist $G = L_z$ Konstante der Bewegung, wenn H gegenüber dieser Drehung invariant ist.

6 Hamilton-Jacobi-Theorie

Allgemeines Verfahren zur Lösung der kanonischen Gleichungen mit Hilfe kanonischer Transformationen. Die (gesuchte) Lösung

$$q_\alpha = q_\alpha\,(q^0, p^0, t) \;, \quad p_\alpha = p_\alpha\,(q^0, p^0, t) \tag{6.1}$$

ist nach (5.177) eine KT von den für die Zeit t gültigen q, p-Werten auf die zu $t = 0$ gehörigen konstanten Anfangswerte

$$q_\alpha^0 = Q_\alpha \, , \quad p_\alpha^0 = P_\alpha \, . \tag{6.2}$$

Gesucht ist die Erzeugende F dieser KT; denn dann hat man die Lösung – gemäß Gln. (5.106, 111, 114, 117).

Wegen der Konstanz der Q, P ist die neue Hamilton-Funktion in all diesen Variablen zyklisch:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\alpha &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial K}{\partial P_\alpha} = 0 \\ \dot{P}_\alpha &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial K}{\partial Q_\alpha} = 0 \, , \end{aligned} \tag{6.3}$$

d. h. eine Konstante (bezüglich Q, P), die gleich null gesetzt werden kann:

$$K = 0 \, . \tag{6.4}$$

Wegen des Zusammenhanges – siehe Gln. (5.107, 112, 115, 118) –

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.5}$$

mit der alten Hamilton-Funktion H ist (6.4) genau dann erfüllt, wenn die Erzeugende F die folgende Gleichung befriedigt:

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \, . \tag{6.6}$$

Es ist zweckmäßig (nicht zwingend), die Erzeugende vom $F_2(q, P, t)$-Typ zu wählen. Mit

$$p_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}(q, P, t) \tag{6.7}$$

erhält man aus (6.6) die **Hamilton-Jacobi-Gleichung**:

$$H\left(q_1, \ldots q_n, \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0 \, . \tag{6.8}$$

Diese (i. a. nichtlineare) partielle Differentialgleichung 1. Ordnung in den unabhängigen Variablen $q_1, \ldots q_n, t$ dient der Bestimmung der Erzeugenden $F_2(q, P, t)$; aus dieser berechnet man mit (6.7) und

$$Q_\alpha = \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha}(q, P, t) \tag{6.9}$$

– siehe Gl. (5.111) – die KT (6.1, 2), d. i. die Lösung des Bewegungsproblems.

Die Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung wird (zumeist) als **Wirkungsfunktion** bezeichnet und mit $F_2 = S$ symbolisiert. Unter einem *vollständigen Integral* von (6.8) versteht man eine Lösung

$$S = S\,(q_1,\, \ldots\, q_n,\, a_1,\, \ldots\, a_n,\, t)\ , \tag{6.10}$$

die von n unabhängigen (konstanten) Parametern $a_1, \ldots\, a_n$ abhängt. – Eigentlich hängt ein vollständiges Integral – da man $n + 1$ unabhängige Variablen $q_1, \ldots\, q_n, t$ hat – von $n + 1$ unabhängigen Parametern $a_1, \ldots\, a_n, a_{n+1}$ ab. Wegen der besonderen Gestalt der Hamilton-Jacobi-Gleichung – S kommt nur abgeleitet vor – ist einer dieser Parameter jedoch additiv: $S + a_{n+1}$ und spielt folglich in den folgenden Transformationsgleichungen (6.11) keine Rolle. In (6.10) darf somit keiner der Parameter a_α additiv sein.

Nach den vorstehenden Überlegungen sollen die a_α gleich den Anfangsimpulsen $P_\alpha = p_\alpha^0$ sein. Diese Darstellung der Lösung gelingt aber i. a. nicht im ersten Anlauf. Man verschafft sich vielmehr zunächst (wenn überhaupt möglich, siehe *integrable Systeme*) ein vollständiges Integral (6.10), wo die a_α *irgendwelche* unabhängigen Größen sind. Interpretation als „neue Impulse“; die konjugierten „neuen Orte“ werden mit b_α bezeichnet. Die kanonische Transformation $q, p \to b, a$ ist entsprechend (6.7, 9) durch

$$p_\alpha = \frac{\partial\, S\,(q,\, a,\, t)}{\partial\, q_\alpha}\ , \quad b_\alpha = \frac{\partial\, S\,(q,\, a,\, t)}{\partial\, a_\alpha} \tag{6.11}$$

gegeben. ($K = 0 \Rightarrow \dot{a} = 0, \dot{b} = 0 \Rightarrow a =$ konstant, $b =$ konstant.) Auflösen:

$$q_\alpha = q_\alpha\,(b,\, a,\, t)\ , \quad p_\alpha = p_\alpha\,(b,\, a,\, t) \tag{6.12}$$

liefert die *allgemeine Lösung der kanonischen Gleichungen.* Aus dieser kann man sodann die Konstanten b, a mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$q_\alpha^0 = q_\alpha\,(b,\, a,\, 0)\ , \quad p_\alpha^0 = p_\alpha\,(b,\, a,\, 0) \tag{6.13}$$

zugunsten der Anfangswerte q^0, p^0 eliminieren.

Die *physikalische Bedeutung* von S erkennt man, wenn man die totale Ableitung bildet:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial\, S}{\partial\, q_\alpha}\,\dot{q}_\alpha + \frac{\partial\, S}{\partial\, t}\ . \tag{6.14}$$

Mit (6.7, 8) und $F_2 = S$ sowie (5.4) folgt:

$$\frac{dS}{dt} = p_\alpha\,\dot{q}_\alpha - H = L\ . \tag{6.15}$$

S ist also gleich dem unbestimmten *Wirkungsintegral*:

$$S = \int L\,dt + \text{konstant} . \tag{6.16}$$

In dieser Erkenntnis liegt aber keine Hilfe für die Berechnung von S, weil man zur Integration die Lösung $q(t)$, $p(t)$ benötigt.

Beispiel: harmonischer Oszillator. Die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k\,q^2}{2} \tag{6.17}$$

impliziert die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 . \tag{6.18}$$

Der Ansatz

$$S(q, a, t) = W(q, a) - a\,t \tag{6.19}$$

führt – eingesetzt in (6.18) – auf

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = a ; \tag{6.20}$$

a ist die *Energie* des Oszillators. Es folgt:

$$W = \int \sqrt{2m\left(a - \frac{k}{2}q^2\right)}\,dq$$

$$\Rightarrow \qquad S = \int \sqrt{2m\left(a - \frac{k}{2}q^2\right)}\,dq - a\,t . \tag{6.21}$$

Ausführung der Integration an dieser Stelle nicht erforderlich, da nicht S selbst das Ziel der Bemühungen ist, sondern die partiellen Ableitungen von S, nämlich die KT bzw. Lösung (6.11, 12). Anwendung der zweiten Gl. (6.11):

$$\begin{aligned} b = \frac{\partial S}{\partial a} &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dq}{\sqrt{a - k\,q^2/2}} - t \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}}\,\text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{k}{2a}}\,q\right) - t ; \end{aligned} \tag{6.22}$$

mit $\omega = \sqrt{k/m}$ folgt

$$q = \sqrt{\frac{2a}{k}} \sin\omega\,(t + b) \; ; \tag{6.23}$$

b ist eine *Zeitkonstante*. Anwendung der ersten Gl. (6.11):

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m\left(a - \frac{k}{2}q^2\right)}$$

(6.23):
$$= \sqrt{2ma}\cos\omega\,(t + b) \; . \tag{6.24}$$

Gln. (6.23, 24) sind die (bekannte) allgemeine Lösung des harmonischen Oszillatorproblems. Ersetze b, a durch die Anfangswerte q^0, p^0. Verifiziere die Gültigkeit von (6.16)•

Im Beispiel (6.17) hing die Hamilton-Funktion nicht explizit von t ab. Den wichtigen **Spezialfall**: $H = H(q, p)$ betrachten wir jetzt allgemein. Setzt man in die *„zeitabhängige“ Hamilton-Jacobi-Gleichung*

$$H\left(q_1, \ldots q_n, \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_n}\right) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0 \tag{6.25}$$

für die Wirkungsfunktion *) S den *Separationsansatz*

$$S(q, P, t) = W(q, P) - K(P)\,t \tag{6.26}$$

ein, so erhält man für die Wirkungsfunktion *) W die *„zeitunabhängige“* oder *„stationäre“ Hamilton-Jacobi-Gleichung*:

$$H\left(q_1, \ldots q_n, \frac{\partial W(q, P)}{\partial q_1}, \ldots \frac{\partial W(q, P)}{\partial q_n}\right) = K(P) \; . \tag{6.27}$$

Berechne hieraus ein vollständiges Integral:

$$W = W(q_1, \ldots q_n, P_1, \ldots P_n) \; , \tag{6.28}$$

wo die P_α unabhängige (konstante) Parameter sind, von denen keiner additiv ist.

Man kann nun *entweder* (6.28) in (6.26) einsetzen und – wie oben – $S(q, P, t)$ als Erzeugende einer zeitabhängigen KT:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \; , \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha} = \frac{\partial W}{\partial P_\alpha} - \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}\,t \tag{6.29}$$

*) In der Literatur wird S auch als „Prinzipalfunktion“ und W als „Hamiltons charakteristische Funktion“ bezeichnet (siehe z. B. Goldstein).

benutzen, die auf

$$P_\alpha = \text{konstant} \; , \quad Q_\alpha = \text{konstant} \tag{6.30}$$

führt; *oder* man kann $W(q,\, P)$ als Erzeugende einer zeitunabhängigen KT

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \; , \quad \tilde{Q}_\alpha = \frac{\partial W}{\partial P_\alpha} \tag{6.31}$$

betrachten, die gemäß (6.27) auf eine in *allen* $\tilde{Q}_\alpha$ zyklische Hamilton-Funktion $K(P)$ führt, mit der Lösung

$$P_\alpha = \text{konstant} \; , \quad \tilde{Q}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial P_\alpha}\, t + \text{konstant} \; . \tag{6.32}$$

Das ist der auf S. 101 angesprochene „Extremfall“. Gl. (6.32 b) ist wegen (6.29 b, 31 b) äquivalent zu (6.30 b). *) Sowohl Gln. (6.29, 30) als auch Gln. (6.31, 32) stellen – jeweils nach q_α, p_α aufgelöst – die allgemeine Lösung des Bewegungsproblems dar.

Auch W hat die Bedeutung eines *Wirkungsintegrals*:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\, \dot{q}_\alpha \; = p_\alpha\, \dot{q}_\alpha \\ \Rightarrow \qquad W &= \int p_\alpha\, \dot{q}_\alpha\, dt + \text{konstant} \; , \end{aligned} \tag{6.33}$$

das man aber – wie (6.16) – nur auswerten kann, wenn man die Lösung bereits kennt.

Beschränkung der folgenden Diskussion auf den stationären Fall: $H(q,\, p)$. Im allgemeinen besitzt die Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.27) *kein* (globales) vollständiges Integral (6.28). Falls doch, bezeichnet man das **System** als **integrabel**. In diesem Fall ist die Lösung durch (6.29, 30) bzw. durch (6.31, 32) gegeben. Nichtintegrabilität Hamiltonscher Systeme ist die „Regel“, Integrabilität die „Ausnahme“ – in einem Sinne, der hier nicht näher besprochen werden kann. Gleichwohl dominieren die integrablen Systeme die Lehrbücher und Vorlesungen über Theoretische Mechanik.

Es gibt kein sicheres Verfahren, mit dessen Hilfe entschieden werden kann, ob eine Hamilton-Funktion ein integrables System repräsentiert oder nicht. Eine wichtige Klasse integrabler Systeme sind die **separablen Systeme**. Mit dem Ansatz

$$W(q_1, \ldots q_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} W_\alpha(q_\alpha) \tag{6.34}$$

*) Mit „b“ ist jeweils die zweite Gleichung gemeint.

und $H = K = E$ geht (6.27) über in

$$H\left(q_1,\, \frac{dW_1}{dq_1};\, \ldots\, q_n,\, \frac{dW_n}{dq_n}\right) = E\ . \tag{6.35}$$

Falls diese partielle Differentialgleichung in n gewöhnliche Differentialgleichungen entkoppelt:

$$f_\alpha\left(q_\alpha,\, \frac{dW_\alpha}{dq_\alpha};\, a_1 = E,\, a_2,\, \ldots\, a_n\right) = 0\ , \tag{6.36}$$

bezeichnet man das System als *separabel*. Die Dgln. (6.36) sind von 1. Ordnung; Lösung durch Rückführung auf eine Integration (Methode der Trennung der Variablen): $W_\alpha\,(q_\alpha;\, E,\, a_2,\, \ldots\, a_n)$. Einsetzen in (6.34) liefert das vollständige Integral $W\,(q_1,\, \ldots\, q_n;\, E,\, a_2,\, \ldots\, a_n)$.

Beispiel: Teilchen im Zentralpotential. Hamilton-Funktion in Kugelkoordinaten, Spezialfall von (5.16):

$$H = \frac{p_r^2}{2\,m} + \frac{p_\vartheta^2}{2\,m\,r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2\,m\,r^2\,\sin^2\vartheta} + V\,(r)\ ; \tag{6.37}$$

stationäre Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{\partial\,W}{\partial\,r}\right)^2 + \frac{1}{2\,m\,r^2}\left(\frac{\partial\,W}{\partial\,\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2\,m\,r^2\,\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial\,W}{\partial\,\varphi}\right)^2 + V\,(r) = E\ . \tag{6.38}$$

Der Separationsansatz

$$W = W_1\,(r) + W_2\,(\vartheta) + W_3\,(\varphi) \tag{6.39}$$

ergibt

$$\frac{1}{2\,m}\left(\frac{d\,W_1}{d\,r}\right)^2 + \frac{1}{2\,m\,r^2}\left(\frac{d\,W_2}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2\,m\,r^2\,\sin^2\vartheta}\left(\frac{d\,W_3}{d\,\varphi}\right)^2 + V\,(r) = E\ ; \tag{6.39}$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $2\,m\,r^2\,\sin^2\vartheta$ führt auf

$$r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \sin^2\vartheta\left(\frac{dW_2}{d\vartheta}\right)^2 + 2\,m\,r^2\sin^2\vartheta(V\,(r) - E) + \left(\frac{dW_3}{d\varphi}\right)^2 = 0\,. \tag{6.40}$$

Der letzte Term hängt nur von φ ab, die anderen Terme nur von r und ϑ; daraus folgt die Separation:

$$\left(\frac{d\,W_3}{d\,\varphi}\right)^2 = a_3^2 \tag{6.41}$$

$$r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d W_1}{d r} \right)^2 + \sin^2 \vartheta \left(\frac{d W_2}{d \vartheta} \right)^2 + 2 m r^2 \sin^2 \vartheta \, (V(r) - E) = -a_3^2 \,, \qquad (6.42)$$

a_3 = Separationskonstante. Division der 2. Gleichung durch $\sin^2 \vartheta$:

$$r^2 \left(\frac{d W_1}{d r} \right)^2 + 2 m r^2 (V(r) - E) + \left(\frac{d W_2}{d \vartheta} \right)^2 + \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta} = 0 \,. \qquad (6.43)$$

Die ersten beiden Terme hängen nur von r ab, die anderen beiden nur von ϑ; daraus ergibt sich die Separation:

$$\left(\frac{d W_2}{d \vartheta} \right)^2 + \frac{a_3^2}{\sin^2 \vartheta} = a_2^2 \qquad (6.44)$$

$$r^2 \left(\frac{d W_1}{d r} \right)^2 + 2 m r^2 (V(r) - E) = -a_2^2 \,, \qquad (6.45)$$

a_2 = Separationskonstante. Gln. (6.41, 44, 45) entsprechen dem entkoppelten System (6.36). Lösung:

$$W_1 = \int \sqrt{2 m (E - V(r)) - (a_2 / r)^2} \, d r$$

$$W_2 = \int \sqrt{a_2^2 - (a_3 / \sin \vartheta)^2} \, d \vartheta \qquad (6.46)$$

$$W_3 = a_3 \varphi \,;$$

die Summe dieser drei Terme ist die Wirkungsfunktion:

$$W = W(r, \vartheta, \varphi; E, a_2, a_3) \,. \qquad (6.47)$$

Mit (6.31 b, 32 b) – $K = P_1 = E$, $P_2 = a_2$, $P_3 = a_3$ – folgt:

$$\frac{\partial W}{\partial E} = m \int \frac{d r}{\sqrt{2 m (E - V(r)) - (a_2 / r)^2}} = t + b_1 \qquad (6.48)$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_2} = -a_2 \int \frac{d r}{r^2 \sqrt{2 m (E - V(r)) - (a_2 / r)^2}} + a_2 \int \frac{d \vartheta}{\sqrt{a_2^2 - (a_3 / \sin \vartheta)^2}} = b_2 \qquad (6.49)$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_3} = -a_3 \int \frac{d \vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{a_2^2 - (a_3 / \sin \vartheta)^2}} + \varphi = b_3 \,, \qquad (6.50)$$

b_1, b_2, b_3 Konstanten. Aus (6.48) kann man $r(t)$ berechnen; (6.49) legt $r(\vartheta)$ fest; aus (6.50) bestimmt man $\varphi(\vartheta)$. Aus diesen drei Beziehungen leitet man her, was immer an der Zentralkraftbewegung interessiert. Mit (6.31 a) *) berechnet man die konjugierten

*) Mit „a“ ist die erste Gleichung gemeint.

Impulse p_r, p_ϑ, p_φ – falls gewünscht •

Anmerkung: Die Separabilität (6.34 - 36) ist abhängig von der q, p-Wahl. Bei integrablen Systemen gibt es stets ein Koordinatensystem, in dem die Hamilton-Funktion separabel ist: Q, P selbst mit der Hamilton-Funktion $K\,(P)$; denn die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$K\left(\frac{\partial\, W\,(Q,\, P^{'})}{\partial\, Q}\right) \;=\; K^{'}\,(P^{'}) \tag{6.51}$$

wird durch die separable Wirkungsfunktion

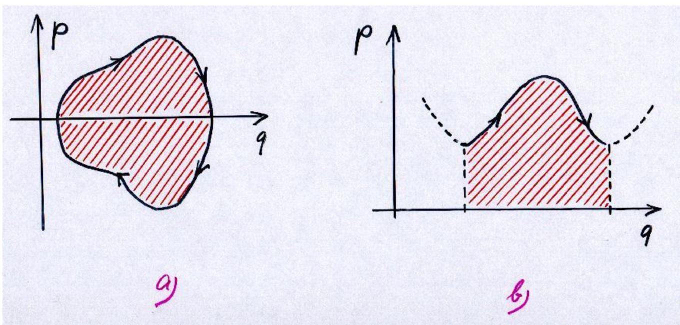
$$W \;=\; \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha\, P^{'}_\alpha \tag{6.52}$$

gelöst; aus dieser folgt

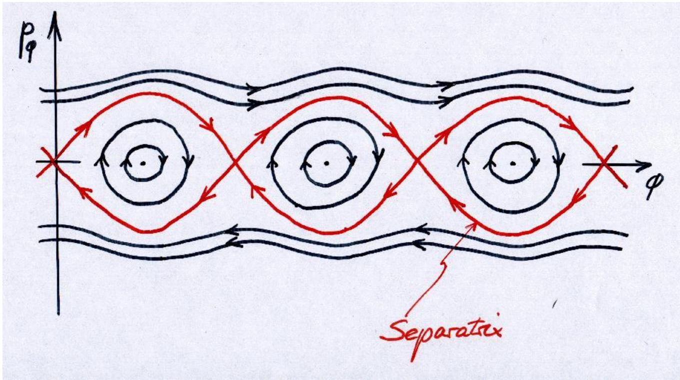
$$P \;=\; \frac{\partial\, W\,(Q,\, P^{'})}{\partial\, Q} \;=\; P^{'}\;, \quad Q^{'} \;=\; \frac{\partial\, W\,(Q,\, P^{'})}{\partial\, P^{'}} \;=\; Q\;, \tag{6.53}$$

d. i. die identische Transformation. Also: **Alle integrablen Systeme sind in geeigneten Koordinaten separabel!**

Betrachte für das Folgende ein im Sinne von (6.34 - 36) separables System; das System sei obendrein „zyklisch“: Für $n\,=\,1$ bedeutet das *Periodizität* der Bewegung, und zwar entweder als *Libration* (a) oder als *Rotation* (b).



Beispiel: Das Phasenportrait des **mathematischen Pendels** enthält Orbits beider Typen:



Die beiden Bewegungstypen sind im Phasenraum durch die sog. *Separatrix* voneinander getrennt •

Für $n > 1$ hat man „Zyklizität“, wenn sich jedes Koordinatenpaar q_α, p_α gemäß (a) oder (b) verhält. Man hat dann zwar Periodizität bezüglich jeder α-Ebene (Projektion), aber im allgemeinen keine Periodizität der Trajektorie im ganzen Phasenraum.

Einführung von **Wirkungsvariablen**:

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \frac{1}{2\pi} \oint p_\alpha\,(q_\alpha;\, a_1\,\ldots\,a_n)\,dq_\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}\,(q_\alpha;\, a_1\,\ldots\,a_n)\,dq_\alpha \\ &= J_\alpha\,(a_1\,\ldots\,a_n)\;, \quad \alpha = 1, \ldots n\;; \end{aligned} \tag{6.54}$$

hier keine Summenkonvention. Die J_α sind – bis auf den Faktor $1/2\pi$ – gleich der Fläche innerhalb (a) bzw. unterhalb (b) des $p_\alpha\,(q_\alpha)$-Orbits. – Man kann in W die a_α durch die J_α ersetzen:

$$\begin{aligned} W\,(q,\,J) &= W\,(q,\,a\,(J)) \\ &= \sum_\alpha W_\alpha\,(q_\alpha,\,a\,(J)) \\ &= \sum_\alpha W_\alpha\,(q_\alpha,\,J)\;. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Die zu den J_α konjugierten Variablen werden als **Winkelvariable** θ_α bezeichnet. Kanonische Transformation $q,\, p \;\rightarrow\; \theta,\, J$ vom F_2-Typ:

$$
\begin{aligned}
p_\alpha \;&=\; \frac{\partial\, W\,(q,\, J)}{\partial\, q_\alpha} \\[1em]
\theta_\alpha \;&=\; \frac{\partial\, W\,(q,\, J)}{\partial\, J_\alpha}\;.
\end{aligned}
\tag{6.56}
$$

Wie sieht die Bewegung in den WW-Variablen aus?

Die neue Hamilton-Funktion ist – da zeitunabhängige KT –

(6.56 a):
$$\begin{aligned} K(\theta,\, J) &= H\left(q(\theta,\, J),\, p(\theta,\, J)\right) \\ &= H\left(q(\theta,\, J),\, \frac{\partial W}{\partial q}\left(q(\theta,\, J),\, J\right)\right) \\ &= E(J)\ , \end{aligned} \tag{6.57}$$

da W nach Voraussetzung die Hamilton-Jacobi-Gleichung befriedigt. Kanonische Gleichungen in den WW-Variablen:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= \frac{\partial E}{\partial J_\alpha} = \omega_\alpha(J) \\ \dot{J}_\alpha &= -\frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{6.58}$$

mit der Lösung:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= \omega_\alpha(J^\circ)\, t + \theta_\alpha^\circ \\ J_\alpha &= J_\alpha^\circ\ , \quad \alpha = 1, \ldots n\ . \end{aligned} \tag{6.59}$$

Die J_α sind Konstanten der Bewegung. Für sie gilt:

- $$\{J_\alpha,\, J_\beta\} = 0 \tag{6.60}$$

– wegen der Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern. Ferner (ohne Beweis):

- grad J_α linear unabhängig (6.61)

und (6.57):

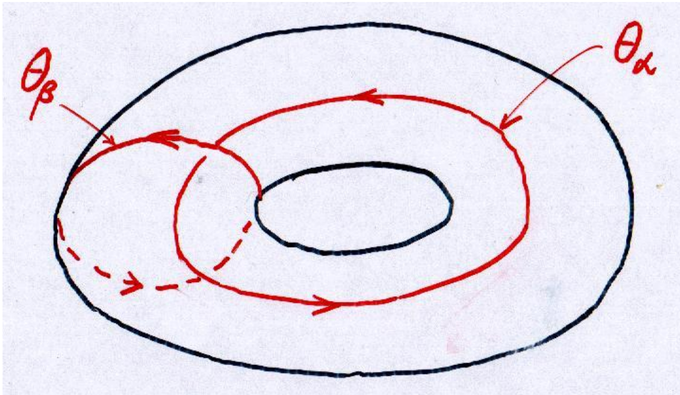
- $$K = K(J) \tag{6.62}$$

Diese drei Eigenschaften kennzeichnen nach Arnold, § 49, **integrable Systeme**.

Durch die Konstanten $J_1, \ldots J_n$ wird die Bewegung auf eine n-dimensionale Hyperfläche M_n im Phasenraum beschränkt. Arnold, § 49 beweist: Falls M_n kompakt ist, dann ist M_n dem Torus

$$T^n = \{(\theta_1,\, \theta_2,\, \ldots\, \theta_n) \bmod 2\pi\} \tag{6.63}$$

diffeomorph. Die Voraussetzung der Kompaktheit bedeutet physikalisch im wesentlichen die Beschränkung auf gebundene Systeme, d. h. zyklische Systeme im obigen Sinne.



Wir zeigen hier nur: Wenn q_β einen Zyklus durchläuft und alle q_α, $\alpha \neq \beta$, festgehalten werden, dann nimmt θ_β um 2π zu, und alle θ_α, $\alpha \neq \beta$, bleiben unverändert; denn:

$$\begin{aligned}
\Delta\,\theta_\alpha &= \oint \frac{\partial\,\theta_\alpha}{\partial\,q_\beta}\,(q,\,J)\,dq_\beta \\
\text{(6.56 b):} \qquad &= \oint \frac{\partial^2\,W}{\partial\,q_\beta\,\partial\,J_\alpha}\,(q,\,J)\,dq_\beta \\
&= \frac{\partial}{\partial\,J_\alpha} \oint \frac{\partial\,W}{\partial\,q_\beta}\,(q,\,J)\,dq_\beta \\
\text{(6.54):} \qquad &= 2\,\pi\,\frac{\partial\,J_\beta}{\partial\,J_\alpha} \\
&= 2\,\pi\,\delta_{\alpha\beta}\ .
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Es gilt auch die Umkehrung. Der θ_β-Umlauf erfolgt mit der Frequenz ω_β.

Die gesamte (uneingeschränkte) Bewegung ist eine Überlagerung aller θ_α-Umläufe mit den Frequenzen ω_α. Dabei umläuft, umwickelt, ... die Trajektorie den Torus. Ist die Bewegung periodisch?

Unter einer *Kommensurabilitätsbedingung* versteht man eine Beziehung

$$k_1\,\omega_1\,+\,k_2\,\omega_2\,+\,\ldots\,+\,k_n\,\omega_n\,=\,0 \tag{6.65}$$

mit ganzen k_1, k_2, $\ldots$ k_n, die nicht sämtlich null sind (KB).

• Falls $n\,-\,1$ unabhängige KB existieren, ist jedes ω_α als rationales Verhältnis der anderen Frequenzen darstellbar. In diesem Fall ist die Bewegung *periodisch.* Vollständige Entartung.

• Falls m unabhängige KB existieren, ist die Bewegung auf eine $(n - m)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des T^n beschränkt. Sie verhält sich dort *quasiperiodisch*: Sie kommt dem Startpunkt im Laufe der Bewegung beliebig nahe (trifft ihn aber nie exakt). m-fache Entartung. Für $m = 0$ umspinnt die Trajektorie den gesamten Torus dicht.

Der Grad der Entartung hängt empfindlich von den Frequenzen $\omega_1, \ldots \omega_n$ ab. Die ω_α sind Funktionen von $J_1, \ldots J_n$. Letztere legen die Gestalt des T^n fest: Kreisradien gleich $\sqrt{2\,J_\alpha}$. Daher hängt der Bewegungstyp empfindlich davon ab, auf welchem Torus man sich befindet.

Was geschieht mit den Tori und den quasiperiodischen Flüssen darauf, wenn das integrable System durch eine (kleine) Störung nichtintegrabel gemacht wird? Antwort: *KAM-Theorie* – nicht in dieser Vorlesung.

Beispiel: System harmonischer Oszillatoren (entkoppelt) mit der Hamilton-Funktion (vgl. S. 121/122):

$$H = \sum_\alpha \left(\frac{1}{2\,m_\alpha}\, p_\alpha^2 + \frac{k_\alpha}{2}\, q_\alpha^2 \right) \; ; \tag{6.66}$$

stationäre-Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$\sum_\alpha \left(\frac{1}{2\,m_\alpha} \left(\frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \right)^2 + \frac{k_\alpha}{2}\, q_\alpha^2 \right) = E \; , \tag{6.67}$$

separabel in den q_α. Mit

$$W(q) = \sum_\alpha W_\alpha(q_\alpha) \; , \quad E = \sum_\alpha E_\alpha \tag{6.68}$$

folgt

$$\frac{1}{2\,m_\alpha} \left(\frac{d\,W_\alpha}{d\,q_\alpha} \right)^2 + \frac{k_\alpha}{2}\, q_\alpha^2 = E_\alpha \; , \quad \alpha = 1, 2, \ldots n \; . \tag{6.69}$$

Auflösen:

$$\frac{d\,W_\alpha}{d\,q_\alpha} = \sqrt{2\,m_\alpha \left(E_\alpha - \frac{k_\alpha}{2}\, q_\alpha^2 \right)} \; ; \tag{6.70}$$

hieraus berechnet man die Wirkungsvariable:

$$\begin{aligned} J_\alpha &= \frac{1}{2\,\pi} \oint \frac{d\,W_\alpha}{d\,q_\alpha}\, dq_\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-q_{\alpha 0}}^{+q_{\alpha 0}} \sqrt{2\,m_\alpha \left(E_\alpha - \frac{k_\alpha}{2}\, q_\alpha^2 \right)} \end{aligned} \tag{6.71}$$

mit $q_{\alpha 0} \ = \ \sqrt{2\,E_\alpha \,/\, k_\alpha}\,$; die Integration ergibt

$$J_\alpha \ = \ \frac{E_\alpha}{\omega_\alpha} \tag{6.72}$$

mit $\omega_\alpha \ = \ \sqrt{k_\alpha \,/\, m_\alpha}$. Mit (6.68 b) folgt für die neue Hamilton-Funktion:

$$E \ = \ \sum_\alpha \omega_\alpha \, J_\alpha \ . \tag{6.73}$$

Diese ist zyklisch in den Winkelvariablen θ_α; somit ist die Lösung durch (6.59) gegeben – jedoch

$$\omega_\alpha \ = \ \frac{\partial E}{\partial J_\alpha} \tag{6.74}$$

unabhängig von J.

Umgekehrt: Ein integrables System verhält sich in WW-Variablen dynamisch wie ein System entkoppelter harmonischer Oszillatoren – mit ω_α jedoch im allgemeinen abhängig von J.

Kanonische Transformation $q_\alpha,\ p_\alpha \ \to \ \theta_\alpha,\ J_\alpha$ gemäß (6.56):

$$\begin{aligned} \theta_\alpha \ &= \ \frac{d\,W_\alpha}{d\,J_\alpha} \\ \text{(6.70):} \qquad &= \ \frac{d}{d\,J_\alpha} \int \sqrt{2\,m_\alpha \left(E_\alpha \ - \ \frac{k_\alpha}{2}\,q_\alpha^2\right)}\,dq_\alpha \\ \text{(6.71):} \qquad &= \ \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{m_\alpha\,\omega_\alpha}{2\,J_\alpha}}\,q_\alpha\right) \end{aligned}$$

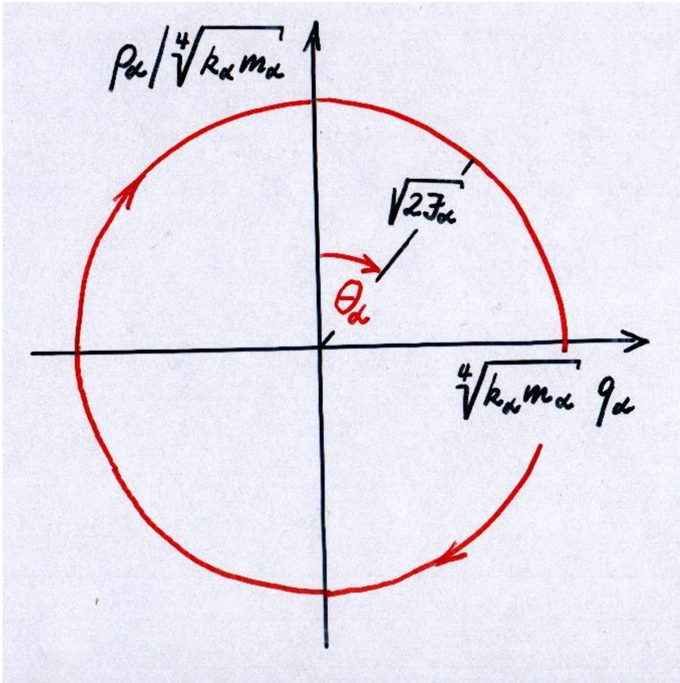
$$\Rightarrow \qquad q_\alpha \ = \ \sqrt{\frac{2\,J_\alpha}{m_\alpha\,\omega_\alpha}}\ \sin\,\theta_\alpha \tag{6.75}$$

sowie

$$\begin{aligned} p_\alpha \ &= \ \frac{d\,W_\alpha}{d\,q_\alpha} \\ \text{(6.70, 72, 75):} \qquad &= \ \sqrt{2\,m_\alpha\,\omega_\alpha\,J_\alpha}\ \cos\,\theta_\alpha \ . \end{aligned} \tag{6.76}$$

Einsetzen von (6.75, 76) in (6.66) liefert wieder (6.73).

Skalierung mit $\sqrt[4]{k_\alpha\,m_\alpha}$ macht den q_α, p_α-Orbit zu einem Kreis vom Radius $\sqrt{2\,J_\alpha}$. Die J_α bestimmen also die n (mittleren) Radien des Torus T^n.



Beispiele: Kepler-Problem. Siehe Goldstein, chap. 10.7; Saletan & Cromer, chap. VII-6 b.

Weitere *Anwendungen* der *Winkel- und Wirkungsvariablen*:

• Entwicklung der Quantentheorie: Bohr-Sommerfeld-Quantisierung

• Kanonische Störungstheorie in der Astronomie: Delauneysche Bahnelemente

Weitere Themen:

• Klassische Feldtheorie: Goldstein, Kap. 12

• Relativistische Mechanik: Goldstein, Kap. 7.

Siehe hierzu auch Saletan & Cromer.

Danksagung

Ich danke Herrn Daniel Ebbeler für die sorgfältige und geduldige Erstellung der LaTeX-Dateien nach meinen Wünschen sowie Herrn Dipl.-Phys. Markus Hauke für die Einrichtung und Verwaltung der Web-Seite. Für vorlesungsbegleitende Computer-Animationen danke ich Herrn Dipl.-Phys. Martin Engel.

P. Eckelt