Die Dirac-Gleichung, Teil II

Marvin Nyenhuis

07.01.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 2

2 Der gyromagnetische Faktor der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld 2
2.1 Formulierung eines Spin-Operators 2
2.2 Der nicht-relativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung 3
2.3 Vergleich mit experimentellen Daten 4

3 Symmetrien der Dirac-Gleichung 5
3.1 Kontinuierliche Symmetrien 5
3.2 Diskrete Symmetrien 7
3.2.1 Parität 7
3.2.2 Ladungskonjugation 8
3.2.3 Zeitumkehr 9

4 Quellen 10

1 Einleitung

Im vorherigen Teil von Victor Kärcher wird die Notwendigkeit einer Dirac-Gleichung erläutert und diese dann hergeleitet. In diesem Teil der Ausarbeitung sollen nun einige Eigenschaften der Dirac-Gleichung zusammengestellt werden. Hierzu gehört die Diskussion der Dirac-Gleichung mit angeschlossenem Feld, wodurch der gyromagnetische Faktor hergeleitet werden soll. Dieser Faktor gibt an, in was für einem Verhältnis die Wechselwirkung des Spins mit einem angeschlossenem Magnetfeld zu der Wechselwirkung des Bahndrehimpulses mit einem angeschlossenem Feld steht.
Der zweite Teil der Ausarbeitung beinhaltet die Diskussion einiger Symmetrien der Dirac-Gleichung sowohl kontinuierlicher als auch diskreter Symmetrieoperatoren. Hierzu zählt der sogenannt Lorentz-Boost (Änderung der Eigenzeit) als auch die räumliche Drehung zu den kontinuierlichen Symmetrien, wobei die Parität, die Ladungskonjugation und die Zeitumkehr zu den diskreten Symmetrien gehört.

2 Der gyromagnetische Faktor der Dirac-Gleichung im elektromagnetischen Feld

Im vorherigen Teil dieses Themas fällt auf, dass der Dirac-Spinor aus zwei Spinoren besteht, die als Zustandsfunktionen eines Elektrons bzw. eines Positrons identifiziert werden können. Dieses Phänomen motiviert eine Definition eines Spinoperators S für diese Dirac-Spinoren. Dafür wird der Vektoroperator $\vec{\Sigma}$ verwendet, der komponentenweise aus 4x4-Matrizen besteht.

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Der Vektoroperator $\vec{\sigma}$ besteht komponentenweise aus den Pauli-Matrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Für die weitere Diskussion behandeln wir o.B.d.A. Elektronen, die einen Spin von s=$\frac{1}{2}$ besitzen.

2.1 Formulierung eines Spin-Operators

Das Korrespondenzprinzip verlangt, dass der Spinoperator folgende Eigenschaften erfüllt:

- Vertauschungsregeln für einen Drehimpuls : $[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k$
- Erhaltung des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$: $\left[\vec{J}, H\right] = 0$ mit $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$
- Eigenwert von $\vec{S}^2$: $\vec{S}^2 \left|s, m\right\rangle = \hbar^2 s(s+1) \left|s, m\right\rangle$

Diese Eigenschaften werden von folgender Definition des Spinoperators erfüllt:

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \tag{3}$$

Die obigen Voraussetzungen werden durch einen solchen Spinoperator erfüllt. Dies lässt sich sehr schnell durch Einsetzen überprüfen, wobei bekannte Eigenschaften der Pauli-Matrizen angewendet werden müssen.
Zur Vollständigkeit können zusätzlich die Eigenwerte der z-Komponente des Spins für einen Dirac-Spinor formuliert werden. Hierbei wird die i-te Komponente des Spinors mit $u^{(i)}$ bezeichnet.

$$S_3 u^{(1)} = +\frac{\hbar}{2}u^{(1)}\ ,\ S_3 u^{(2)} = -\frac{\hbar}{2}u^{(2)}\ ,\ S_3 u^{(3)} = +\frac{\hbar}{2}u^{(3)}\ ,\ S_3 u^{(4)} = -\frac{\hbar}{2}u^{(4)} \tag{4}$$

Die Eigenwerte zeigen, dass die Komponenten $u^{(1)}$ und $u^{(3)}$ ein „Spin-Up“und die Komponenten $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ ein „Spin-Down“bezeichnen. Dabei gehören Komponenten 1 und 2 zu einem Elektron-Zustand und 3 und 4 zu einem Positron-Zustand.

2.2 Der nicht-relativistische Grenzfall der Dirac-Gleichung

In dem ersten Teil zu dem Thema „Dirac-Gleichung“wurde die Dirac-Gleichung kovariant formuliert.

$$(\gamma^\mu P_\mu - mc)\psi = 0 \tag{5}$$

Ein angeschlossenes Feld kann man in einer kovarianten Form nun als Zusatz zu dem Impuls in dem Hamiltonian interpretieren, da sowohl der Impuls als auch der Feld-Vektor als ein kovarianter Vierer-Vektor geschrieben werden kann.

$$P_\mu \to P_\mu - eA_\mu\ \Rightarrow\ (\gamma^\mu P_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - mc)\psi = 0 \tag{6}$$

Um dieses Eigenwertproblem zu lösen, wird der Dirac-Spinor als Spinor mit zwei Komponenten φ und χ geschrieben. Außerdem lässt sich der Vierer-Vektor P_μ als $P=(P_0,\vec{P})$ $= (i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\vec{P})$ und A_μ als $A=(A_0,\vec{A})$ $= (\Phi,\vec{A})$ schreiben. Setzt man nun diese Definitionen mit den Definitionen für die γ-Matrizen in die Gleichung (6) ein, so erhält man ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen.

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi - mc^2\right)\varphi &= c(\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\,\chi\\ \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\Phi + mc^2\right)\chi &= c(\vec{P} - e\vec{A})\cdot\vec{\sigma}\,\varphi\end{aligned} \tag{7}$$

Bis hierhin wurden noch keine Einschränkungen bis auf die Einschränkung auf Fermionen eingesetzt. Nun wir der nicht-relativistische Grenzfall beobachtet. Folgende Einschränkungen wirken dadurch auf die Gleichungen.

- Beschränkung auf stationäre Zustände : $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi$

- Entwicklung der Eigenenergie E um mc^2 : E $\approx$ E' + mc^2
- Betrachtung von kleinen E' und kleinen Skalarpotentialen : E' $\ll mc^2$; $e\Phi \ll mc^2$

Diese Näherungen werden nun in die Gleichungen in (7) eingesetzt. Dadurch lässt sich die Komponente χ mit der Komponente φ darstellen.

$$\begin{aligned} (E' - mc^2)\varphi &= c(\vec{P} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\,\chi \\ 2mc^2\chi &= c(\vec{P} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\,\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich durch Einsetzen auf eine Gleichung, die nur von φ abhängt, zusammenfassen:

$$(E' - e\Phi)\varphi = \left[(\vec{P} - e\vec{A}) \cdot \vec{\sigma}\right]^2 \varphi \tag{9}$$

Um die linke Klammer aufzulösen, müssen die Rechenregeln für Pauli-Matrizen angewendet werden. Da dies nicht zum Verständnis der Gleichung beiträgt, wird hier nur das Ergebnis eingesetzt. Eine ausführliche Herleitung ist in dem den Skript zu Vorlesung „Quantenfeldtheorie“von Professor Münster zu finden.

$$(E' - e\Phi)\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\vec{B}\right]\varphi = \left[\frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 - \vec{\mu}_S\vec{B}\right]\varphi \tag{10}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{\mu}_S$ das magnetische Moment, was aus dem Spin eines Teilchens resultiert.

$$\vec{\mu}_S = g \cdot \frac{e\hbar}{4m}\vec{\sigma} = g \cdot \frac{e}{2m}\vec{S} \tag{11}$$

Vergleicht man die Definition des Moments mit der Gleichung (10), so folgt, dass der gyromagnetische Faktor g durch die Dirac-Gleichung mit dem Faktor 2 identifiziert wird. Da das magnetische Moment abhängig von dem Spinoperator $\vec{S}$ ist, gibt es eine Aufspaltung der Energiewerte, die ein Elektron besitzen kann. Ein „Spin-Up“- Zustand gibt einen anderen Energieeigenwert aus als ein „Spin-Down“-Zustand (s. Gleichung (10)).

2.3 Vergleich mit experimentellen Daten

Im letzten Schritt dieses Kapitels wird der theoretische Wert mit experimentellen Werten verglichen. Der gyromagnetische Faktor g wird im Buch „Gernot Münster: Quantentheorie, 2. Auflage“von 2010 mit:

$$g = 2.002319304386(20) \tag{12}$$

angegeben. Dieser Wert lässt sich auch mit Hilfe der Quantenelektrodynamik theoretisch errechnen.

Gründe für diese Abweichungen lassen sich in den Näherungen finden, die in Kapitel 2.2 auf die Gleichungen eingewirkt haben. Folgende Störungen müssen dem Hamiltonian hinzugefügt werden, um eine kleinere Abweichung zu dem obigen Experiment zu erhalten:

- Entwicklung der Energie bis zur zweiten Ordnung: $H_1 = -\frac{(\vec{P}^2)^2}{8m^3c^2}$
- Die Spin-Bahn-Kopplung in einem Potential V : $H_2 = \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{S}\vec{L}$
- Der Darwin-Störterm für s-Wellenfunktionen : $H_3 = \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta V$

Der Darwin-Term beschreibt die Schwingungsbewegung des Atomkerns. Dadurch verändert sich das Coulomb-Potential lokal mit der Zeit. Die größte Veränderung ist an kernnahen Positionen vorhanden und da nur s-Wellenfunktionen im Kern eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit besitzen, hat dieser Term nur für diese eine Auswirkung.

3 Symmetrien der Dirac-Gleichung

In diesem Teil der Ausarbeitung sollen nun verschiedene Symmetrieoperatoren diskutiert werden. Ziel dieser Diskussion ist, bekannte Symmetrien der Schrödinger-Gleichung in die Theorie zur Dirac-Gleichung zu überprüfen. Hierbei sollen sowohl kontinuierliche als auch diskrete Operationen untersucht werden.

3.1 Kontinuierliche Symmetrien

Mit kontinuierlichen Symmetrien sind Symmetrien gemeint, in denen durch einen oder mehrere Parameter innerhalb der Algebra unendlich viele verschiedene Operationen erstellt werden können. In dieser Ausarbeitung liegt der Fokus auf dem Wechsel des Bezugssystems, d.h. Veränderungen der Raumzeit des jeweils beobachteten Systems.
Der Ausgangspunkt dieser Diskussion ist das Ziel, einen Formalismus zu finden, der die kovariante Dirac-Gleichung unter obigen Operationen invariant lässt.
Der sogenannte Lorentz-Boost, was der Wechsel der Eigenzeit eines Systems beinhaltet, wird durch die Lorentztransformation Λ ausgedrückt.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Hierbei wird sich auf Bewegungen in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v beschränkt. Hierbei ist $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Nun wird eine Transformation S gesucht, die von Λ abhängt und eine invariante Formulierung möglich macht.

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(x') = 0 \text{ mit } \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \tag{14}$$

Eine Bedingung für die Transformation S erhält man, indem man die untransformierten Teile der Gleichung durch transformierte Ausdrücke ersetzt und mit Gleichung (14) vergleicht.

$$(i\hbar\Lambda_\mu^\nu\gamma^\mu\partial_\nu - mc)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0 \tag{15}$$

Daraus folgt folgende Bedingung für den Symmetrieoperator S, indem von links der Operator S multipliziert wird :

$$S^1(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) \stackrel{!}{=} \Lambda_\mu^\nu\gamma^\mu \tag{16}$$

Der erste Schritt, diese Gleichung zu erfüllen, ist die Entwicklung der Lorentztransformation unter infinitesimaler Änderung.
Die Rotation wird zunächst nicht betrachtet. Das Ergebnis hiervon wird nur eingefügt, da innerhalb der Vorlesung „Quantentheorie"die Diskussion der Drehoperation ausführlich vorkam. Die Transformation lässt sich wiefolgt entwickeln:

$$\Lambda \approx 1 + \epsilon\omega \text{ mit } \epsilon \ll 1 \tag{17}$$

Die Theorie zur speziellen Relativitätstheorie und die Tatsache, dass ω spurlos ist (Entwicklung von Operatoren), verlangt, dass ω spurlos und antisymmetrisch ist. Vergleicht man in erster Näherung (v $\rightarrow$ 0, $\gamma \rightarrow 1$) die Entwicklung mit der Matrixformulierung, lässt sich der Operator ω folgendermaßen schreiben:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die drei anderen Freiheitsgrade des Operators werden durch die Rotation benutzt. Beobachtet man eine Rotationsachse $\vec{n}$ so lassen sich alle nicht-0-Komponenten, die nicht auf der Spur liegen, wie folgt ausdrücken:

$$\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}n_k \tag{19}$$

Nachdem eine Entwicklung für die Lorentztransformation erstellt wurde, lässt sich dann eine solche für die Transformation S entwickelt werden. An dieser Stelle wird ein Ansatz für S gewählt und per Diskussion geklärt, dass dieser Ansatz zu einer Lösung des Problems führt.

$$S(\Lambda) \approx 1 - \frac{1}{4}\epsilon\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \tag{20}$$

Aus Symmetriegründen ist auch der Operator σ spurlos und antisymmetrisch. Setzt man diese Darstellung in die Gleichung (16) ein, so erhält man eine Lösung für den Operator σ.

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right] \tag{21}$$

Die jeweiligen Kommutatoren können mit Rechenregeln in Teil I berechnet werden. Eine Darstellung für endliche Rotationen bzw. Boosts resultiert korrespondierend mit der Darstellung der nicht-relativistischen Theorie in einer Exponentialfunktion.

$$S = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \tag{22}$$

Mit dieser Transformation S lässt sich eine invariante Darstellung einer Transformation der Raumzeit darstellen, denn dadurch bleibt die kovariante Darstellung der Dirac-Gleichung invariant unter Symmetrieoperationen.

3.2 Diskrete Symmetrien

In diesem Teil des Kapitels werden Symmetrieoperationen untersucht, die bei endlicher Anwendung des gleichen Operators das Ausgangssystem wieder hergestellt wird. In diesem Fall werden die Parität P, die Ladungskonjugation C und die Zeitumkehr T untersucht, die bei erneuter Anwendung die Identität ergeben.

3.2.1 Parität

Die Parität ist die Operation, indem der Raum vollständig gespiegelt wird und die Zeit unverändert bleibt. Als Matrix lässt sich dies folgendermaßen ausdrücken:

$$\Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Da es sich hier um eine räumliche Drehung handelt, kann für diese Transformation Gleichung (16) angewandt werden. Vergleicht man die Gleichung mit den Rechenregeln für die γ-Matrizen, so kann P als die nullte Komponente des Vektoroperators geschrieben werden.

$$P = \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

Die Eigenwerte dieses Operators erhält man, indem dieser auf einen Dirac-Spinor angewendet wird. Formuliert man diesen durch zwei zweikomponentige Spinoren, so beobachtet man, dass Positronen eine negative Parität besitzen und Elektronen eine positive Parität besitzen (innerhalb der Theorie zu freien Elektronen in der Dirac-Gleichung).

$$P \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \tag{25}$$

3.2.2 Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation C beinhaltet die Operation, in der das Vorzeichen einer Ladung umgekehrt wird. Gemeint ist, dass die Ladung in gerade die Ladung umgewandelt wird, die der Anfangsladung als Entgegengesetztes entspricht.
In der Theorie zu Elektronen bedeutet das, dass ein Elektron in ein Positron umgewandelt wird und umgekehrt. Für einen Dirac-Spinor bedeutet das das Austauschen der Komponenten φ und χ.

$$\psi \;\rightarrow\; \psi^C = C\bar{\psi}^T \tag{26}$$

Diesen Ansatz setzt man nun in die Dirac-Gleichung ein. Zusätzlich wird dieser Ausdruck mit der komplex konjugierten Dirac-Gleichung verglichen. Dadurch erreicht man, dass in beiden Fällen die Funktion $\bar{\psi}^T =$ vorkommt. Die Rechenregel $\psi^* = \gamma^0\bar{\psi}^T$, dessen Beweis dem Leser überlassen wird, wird zusätzlich benötigt.

$$\begin{aligned} 0 &= (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)C\bar{\psi}^T \\ 0^* = 0 = [(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi]^* &= \gamma^0(i\hbar(-\gamma^\mu)^T\partial_\mu - mc)\bar{\psi}^T \end{aligned} \tag{27}$$

Vernachlässigt man in der zweiten Gleichung den Operator γ^0 und vergleicht die beiden Gleichungen miteinander, so folgt folgende Bedingung, der die Ladungskonjugation genügen muss:

$$C^{-1}\gamma^\mu C = (-\gamma^\mu)^T \tag{28}$$

Betrachtet man die Rechenregeln für die γ-Operatoren aus dem Teil I, so sieht man, dass der Operator C= $i\gamma^2\gamma^0$ diese Bedingung erfüllt. Dieses Ergebnis lässt sich außerdem abhängig von den Pauli-Matrizen schreiben.

$$C = -i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Schon die Matrixform der Ladungskonjugation lässt darauf schließen, dass die zwei zweikomponentigen Spinoren des Dirac-Spinors vertauscht werden.
Um der Vollständigkeit Rechnung zu tragen, soll zum Schluss kurz der Ladungsstrom erwähnt werden. In der Realität müsste bei Anwenden dieses Operators der Ladungsstrom seine Richtung ändern. Lässt man die Konjugation auf den Wahrscheinlichkeitsstrom wirken, so fällt dort auch auf, dass die nullte Komponente keinen Vorzeichenwechsel erhält, wobei die drei raumartigen Komponenten ihr Vorzeichen ändern. Hier erkennt man also eine Korrespondenz der Theorie mit den Erwartungen in der Praxis.

3.2.3 Zeitumkehr

Eine naive Interpretation der Zeitumkehr T wäre das Phänomen, dass sich schlagartig die Richtung der Zeit ändert. Hierzu benötigt man zunächst die Definition eines absoluten Zeitpunkts t=0. Hier ergibt sich noch kein Problem, wenn man definiert, dass mit dem Urknall auch die Zeit entstanden ist.
Spiegelt man nun die Zeit also an diesem Zeitpunkt per Zeitumkehr, so gäbe es Zustände des Teilchens ,die vor dem Zeitursprung existieren. Da es kein Teilchen gibt, was sich so verhält, kann man davon ausgehen, dass die Interpretation der Zeitumkehr falsch ist.
Die Zeitumkehr meint die Umkehr der Bewegungsrichtung eines Teilchens. Wenn ein Teilchen sich ab Zeitpunkt t_0 in eine Richtung bewegt hat bis bei Zeit t' die Zeitumkehr T angewendet wird, so bewegt das Teilchen sich wieder in die Ausgangsposition zurück.

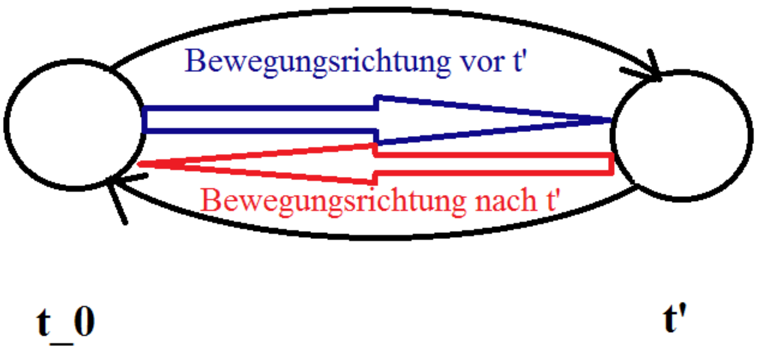

Abbildung 1: Zeitumkehr in eine Richtung (Skizze)

Das heißt, dass nach dem Zeitpunkt t' die Bewegung rückwärts läuft bis zu dem Zeitpunkt $t=2(t'-t_0)$.
Nun ist ein mathematischer Formalismus dieses Phänomens gesucht. Das vorher beschriebene lässt sich wiefolgt darstellen:

$$|\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}T\,|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}Te^{\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi(0)\rangle \tag{30}$$

Dadurch erhalten wir folgende Bedingung für den Zeitumkehroperator T:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}Te^{\frac{i}{\hbar}Ht} = 1 \tag{31}$$

Die Lösung für diese Gleichung gibt $T = i\gamma^1\gamma^3$ (Per Einsetzen zu Überprüfen).
Das ergibt für T in einer Matrixdarstellung:

$$T = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Das Vorzeichen der Pauli-Matrizen zeigt, dass die Richtung des Spins eines Spinors innerhalb eines Dirac-Spinors umgekehrt wird. Außerdem werden alle Impulse im behandelten System umgekehrt. Das bewirkt, dass auch alle Raumrichtungen des Wahrscheinlichkeitsstroms umgekehrt werden.

4 Quellen

|1| G.Münster *Quantentheorie , 2. Auflage*

|2| G. Münster *Skript zur Einführung in die Quantenfeldtheorie Wintersemester 2011/2012 Vorlesungsmitschrift von Burkhard Echtermeyer*

|3| `http://neutrino.ethz.ch/Vorlesung/WS2001-SS02/Vorlesungnotizen/TPKap6.pdf`

|4| `http://th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_QMII.pdf`

|5| `http://pauli.uni-muenster.de/tp/menu/studium/archiv/quantentheorie-ws-201415.html`

Datum: 19.02.2015