

Die Lorenz-Gleichungen

Dirk Sandbrink

30. April 2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einleitung
- 2 Eigenschaften der Lorenz-Gleichungen
 - Einfache Eigenschaften
 - Fixpunkte
- 3 Numerische Untersuchung
 - Vorstellung des C++ Programms
 - Vorhersagegenauigkeit
 - Lorenz Map
- 4 Untersuchung des Parameterraums

Edward Norton Lorenz

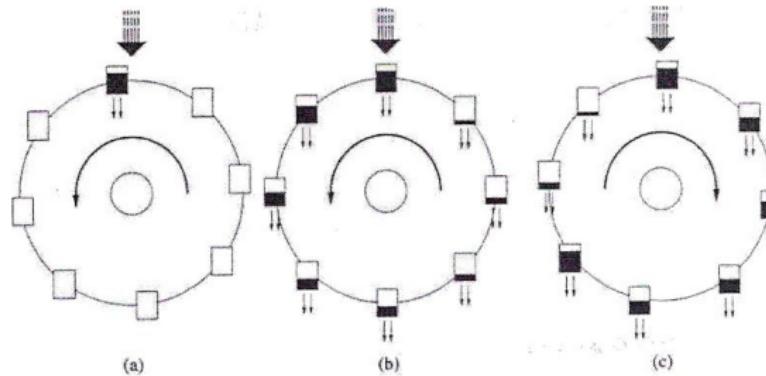
- * 23. Mai 1917, † 16. April 2008
- US-amerikanischer Mathematiker und Meteorologe
- 1962 bis 1987 Professor für Meteorologie am MIT
- „Vater der Chaostheorie“
- Kyoto-Preis in der Sparte Astronomie (2001)



Abbildungsquelle: <http://paoc.mit.edu/paoc/images/edlorenze.jpg>

Entstehung des Modells

- Grundlage sind von Saltzman 1962 aufgestellte Konvektionsgleichungen.
- Stark vereinfachtes Modell für Konvektionsrollen in der Atmosphäre.
- 1963 von Lorenz entwickelt.
- Ziel: Langzeitvorhersage für die Zustände in der Erdatmosphäre.
- Dieselben Gleichungen treten auch in Modellen für Laser auf.
- Außerdem beschreiben sie die Bewegung eines bestimmten Wasserrades exakt.



Die Lorenz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\quad \sigma, r, b > 0$$

- $x \sim$ zur Intensität der Konvektionsbewegung,
- $y \sim$ zur Temperaturdifferenz zwischen auf- und absteigenden Strömungen,
- $z \sim$ zur Abweichung des vertikalen Temperaturprofils von einem linearen Profil.
- σ : Prandtl-Zahl
- r : Rayleigh-Zahl
- b : Verknüpf mit der Höhe der Fluidschicht

Einfache Eigenschaften

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - \textcolor{red}{xz} \\ \dot{z} &= \textcolor{red}{xy} - bz\end{aligned}$$

- Das System hat nur zwei Nichtlinearitäten: xy und xz .
- Symmetrisch gegenüber der Transformation $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$.
Wenn (x, y, z) eine Lösung ist, dann auch $(-x, -y, z)$.
- Das Lorenz-System ist *dissipativ*, das Volumen im Phasenraum nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Im Limes $t \rightarrow \infty$ geht $V \rightarrow 0$.

Fixpunkte

- $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ ist ein Fixpunkt für alle Parameter.
- Für $r > 1$ entsteht ein symmetrisches Paar von Fixpunkten, C^+ und C^- genannt:
$$x^* = y^* = \pm \sqrt{b(r-1)}, z^* = r-1$$
- C^+ und C^- repräsentieren links- und rechtsdrehende Konvektionsrollen.
- Für $r \rightarrow 1^+$ verschmelzen C^+ und C^- mit dem Ursprung in einer Pitchfork-Bifurkation.

Lineare Stabilität des Ursprungs

Linearisieren der Gleichungen am Ursprung liefert

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y \\ \dot{z} &= -bz\end{aligned}$$

Die Gleichung für $z(t)$ ist entkoppelt, $z(t)$ fällt exponentiell auf Null ab.
Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit } \text{tr } A = -\sigma - 1, \det A = \sigma(1 - r) .$$

$r > 1$: Ursprung ist ein Sattelpunkt, da $\det A < 0$.

$r < 1$: Ursprung ist stabil, da $(\text{tr } A)^2 - 4 \det A > 0$.

Globale Stabilität des Ursprungs

- Für $r < 1$ läuft jede Trajektorie für $t \rightarrow \infty$ in den Ursprung, er ist global stabil.
- **Ursache:** Das Volumen im Phasenraum fällt mit der Zeit auf Null ab.
- Folglich kann es für $r < 1$ keine Grenzzyklen und kein chaotisches Verhalten geben.

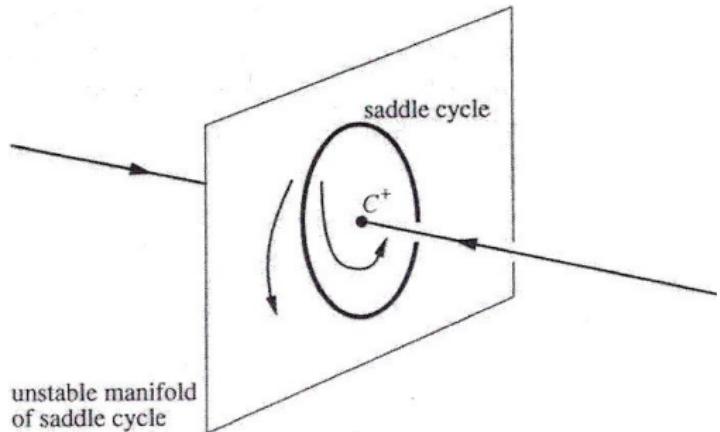
Stabilität von C^+ und C^-

Die Fixpunkte C^+ und C^- existieren nur für $r > 1$. Sie sind *linear stabil* für

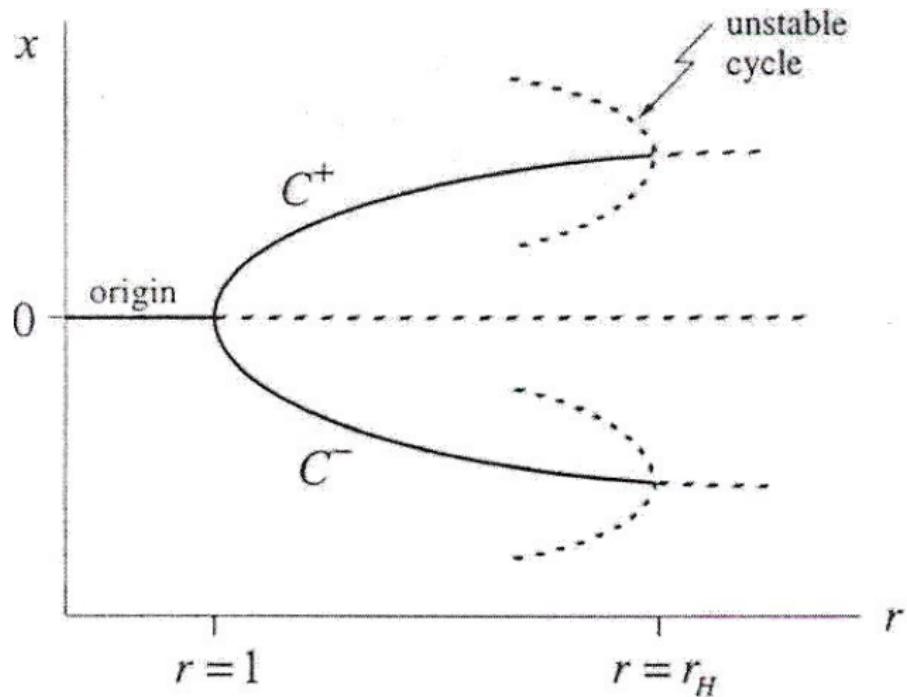
$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Bei $r = r_H$ verlieren C^+ und C^- ihre Stabilität in einer *subkritischen Hopf-Bifurkation*.

Für $r < r_H$ gibt es *instabile Grenzzyklen* um die Fixpunkte.



Bifurkationsdiagramm



Vorstellung des C++ Programms

Wahl der Parameter:

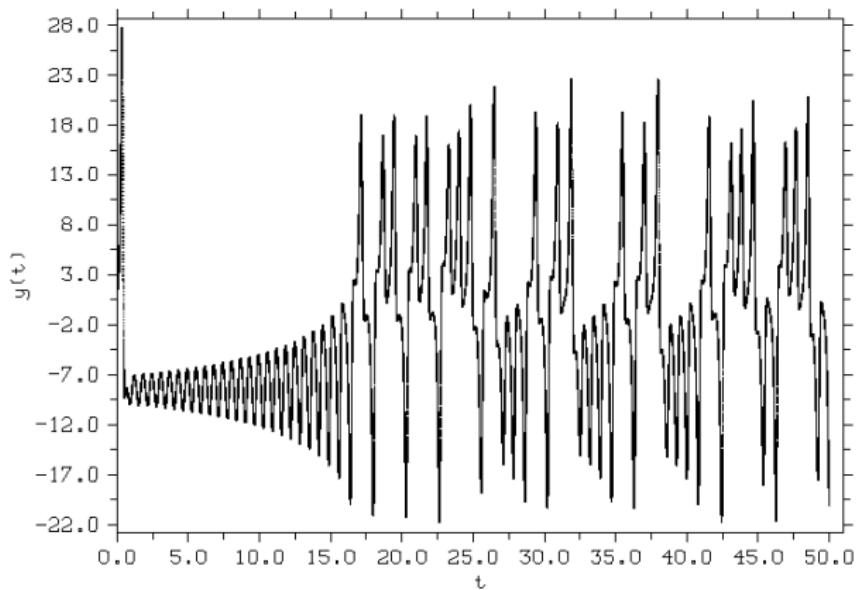
$$\begin{aligned}\sigma &= 10, \\ b &= 8/3, \\ r &= 28.\end{aligned}$$

Wahl der Startpunkte:

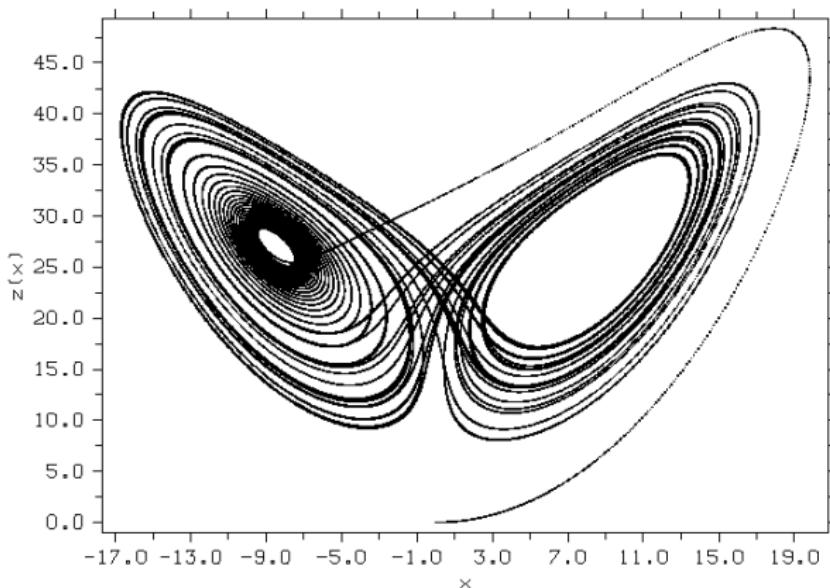
$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= 1, \\ z &= 0.\end{aligned}$$

Wahl der Genauigkeit: $h = 0,001$.

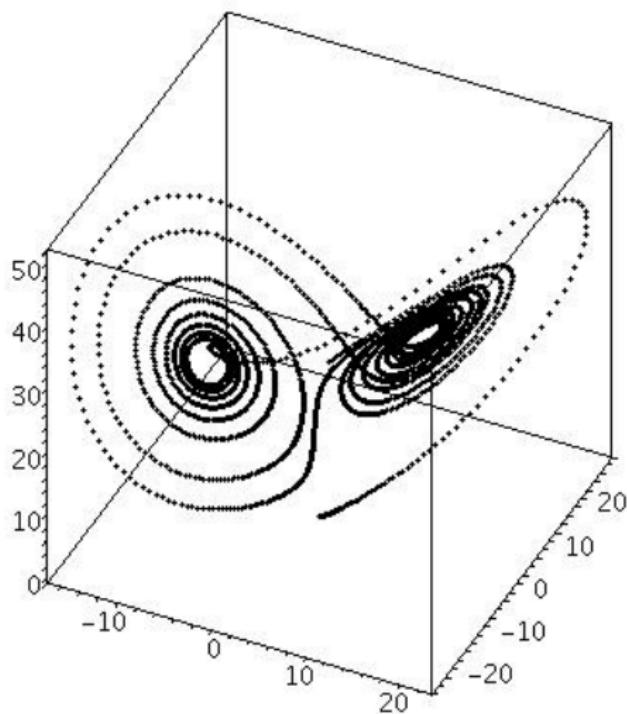
Numerische Ergebnisse



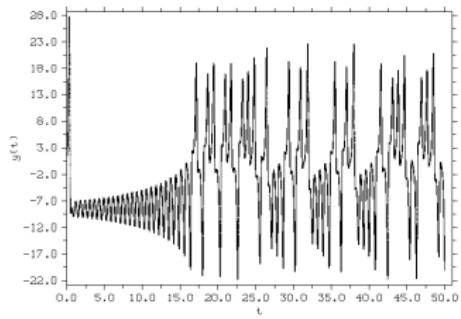
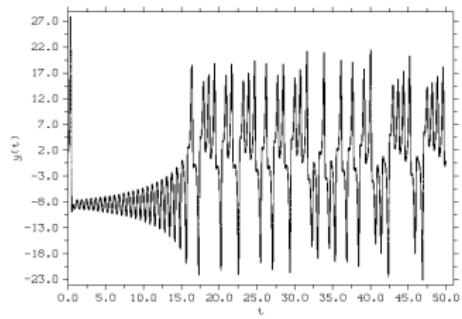
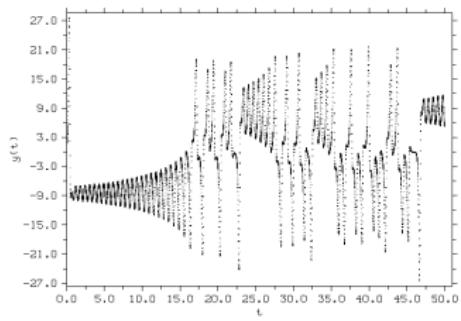
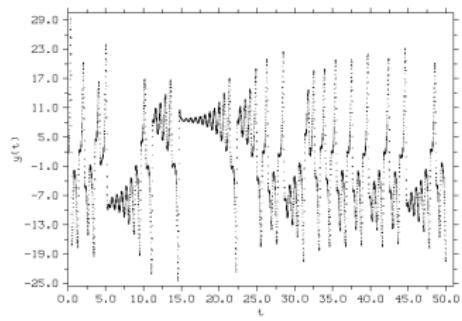
Numerische Ergebnisse



Numerische Ergebnisse



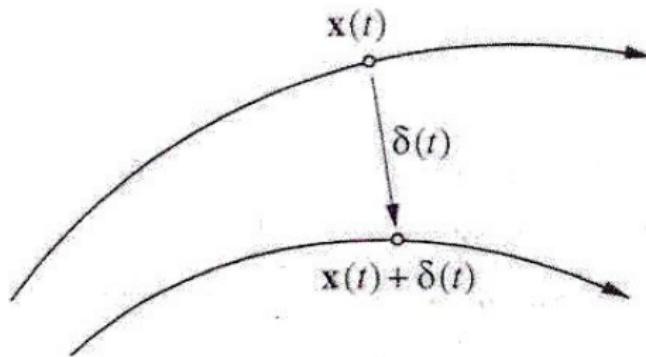
Vergleich verschiedener Berechnungsmethoden



Entwicklung benachbarter Trajektorien

Man betrachte zwei Trajektorien, deren Startpunkte $\vec{\delta}_0$ voneinander entfernt sind.

Die Entfernung zum Zeitpunkt t ist $\vec{\delta}(t)$.



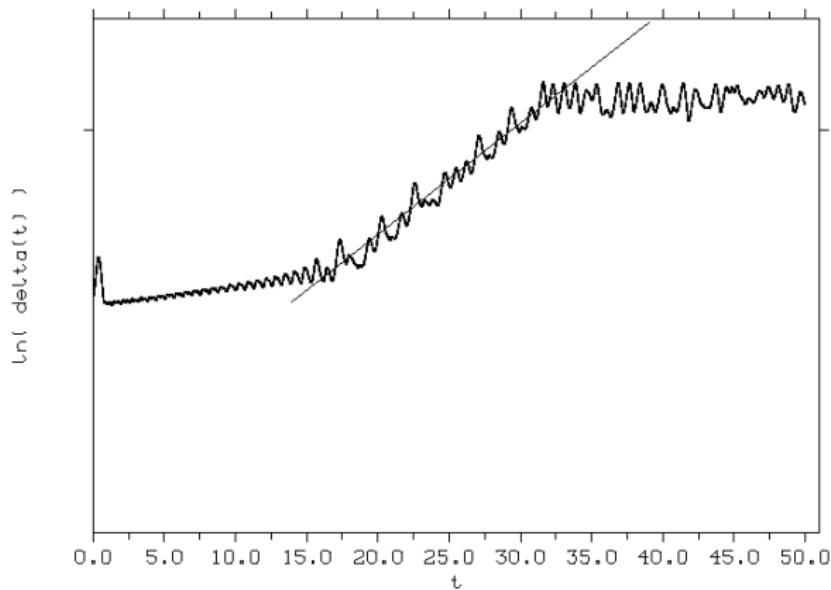
Entwicklung benachbarter Trajektorien

Numerische Untersuchungen zeigen:

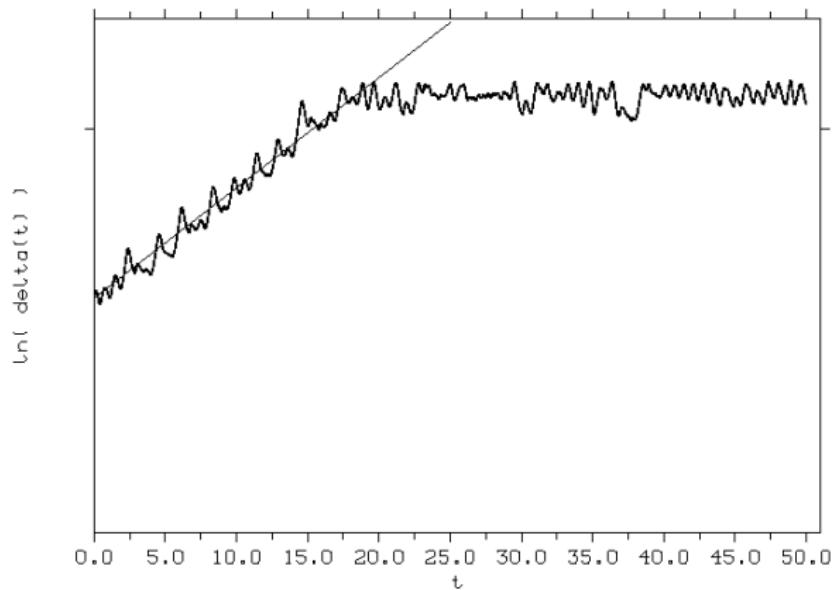
$$|\vec{\delta}(t)| \sim |\vec{\delta}_0| e^{\lambda t} .$$

λ : Liapunov-Exponent, $\lambda \approx 0,9$.

Entwicklung benachbarter Trajektorien



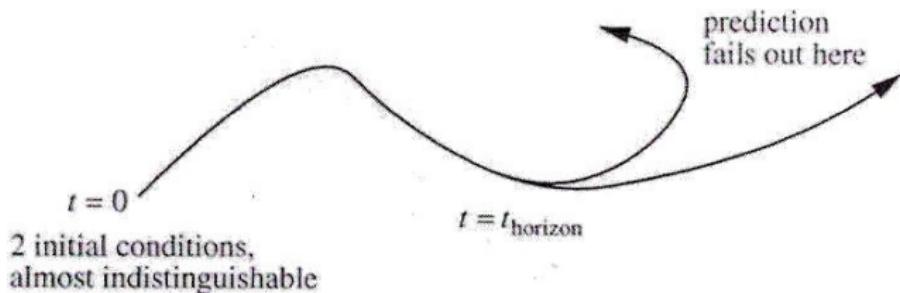
Entwicklung benachbarter Trajektorien



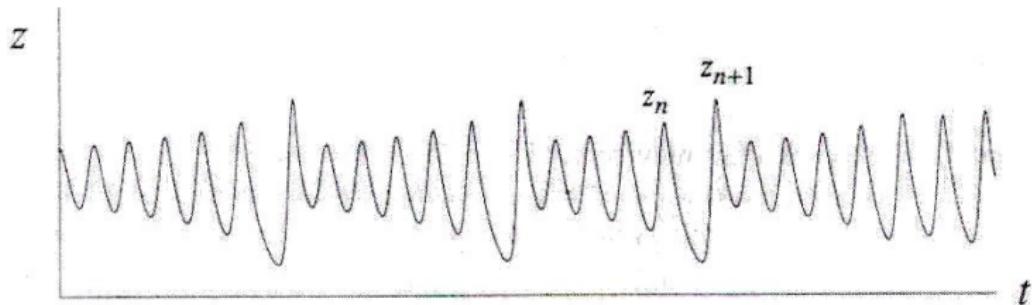
Zeithorizont

- Die Anfangsbedingungen können bis auf $|\vec{\delta}_0|$ genau bestimmbar.
- Die Ungenauigkeit wächst mit $|\vec{\delta}(t)| \sim |\vec{\delta}_0| e^{\lambda t}$.
- Wenn $|\delta(t)|$ größer als die gewünschte Toleranz a wird, so ist die Vorhersage unbrauchbar:

$$t_{\text{horizon}} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{|\delta_0|} .$$

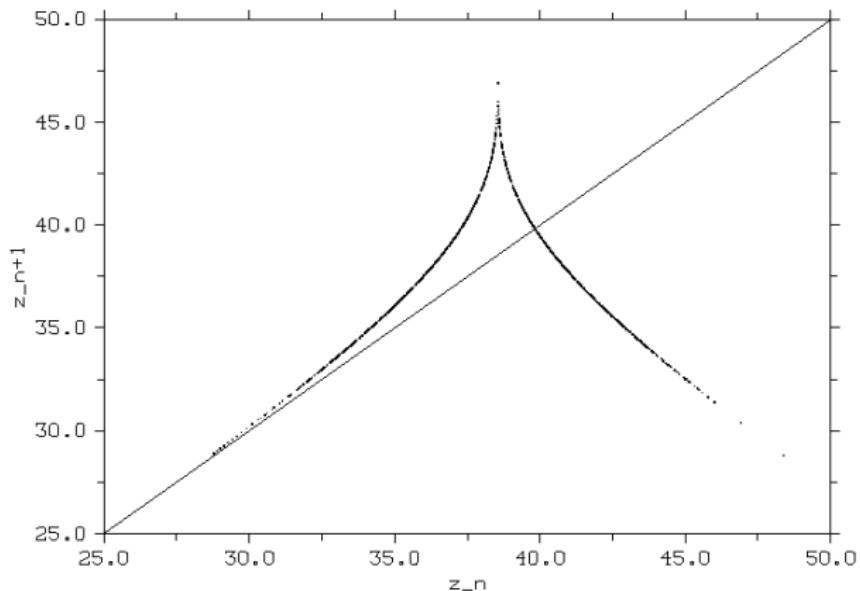


Lorenz Map



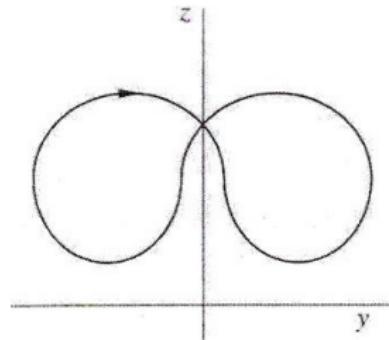
z_n : n -tes Maximum von $z(t)$

Lorenz Map



Bedeutung der Lorenz Map

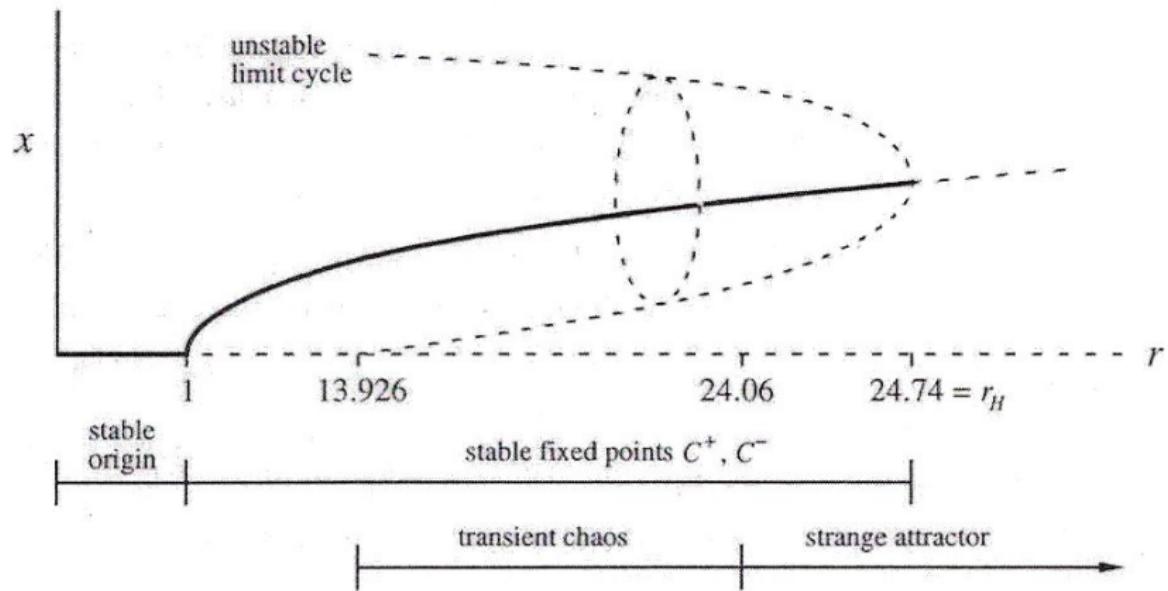
- Für die gesamte Kurve gilt $|f'(z)| > 1$.
- Es gibt nur einen Punkt z^* mit $f(z^*) = z^*$.
- Dort gibt es einen geschlossenen Orbit.



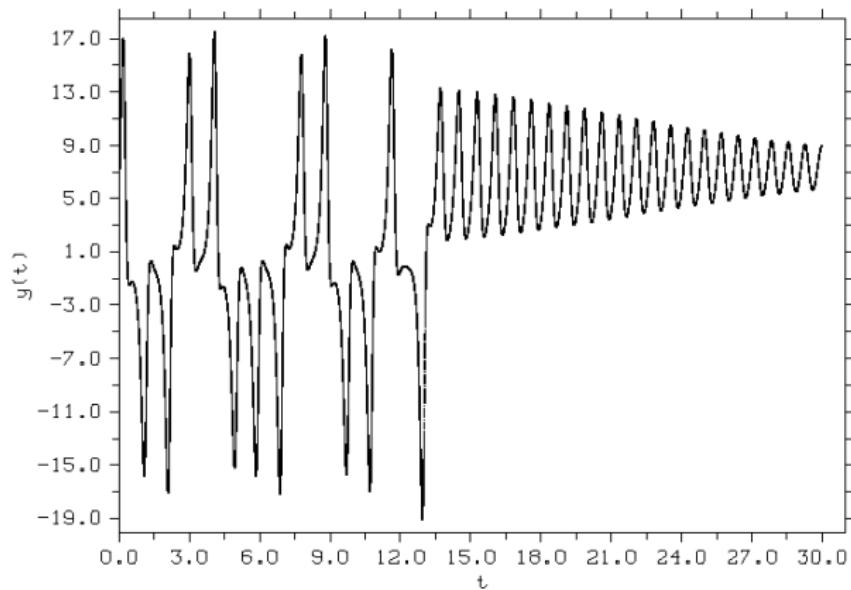
- Dieser ist instabil, da $|f'(z^*)| > 1$.
⇒ Stabile Grenzzyklen können ausgeschlossen werden.

Untersuchung des Parameterraums

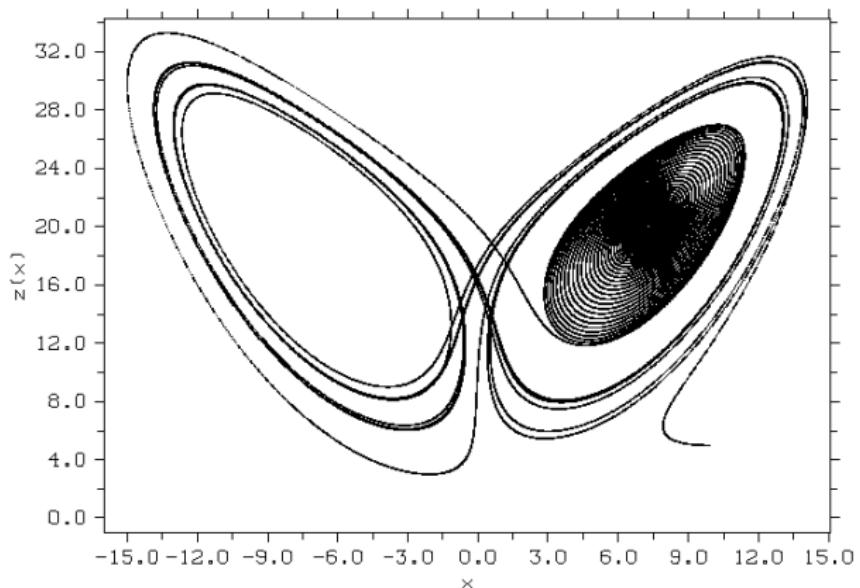
$\sigma = 10, b = 8/3, r$ variabel



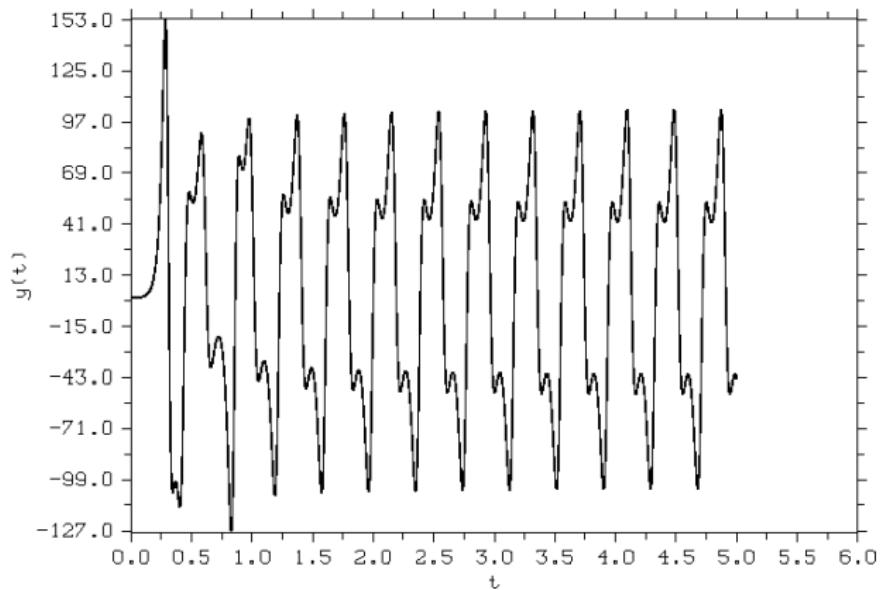
Transientes Chaos



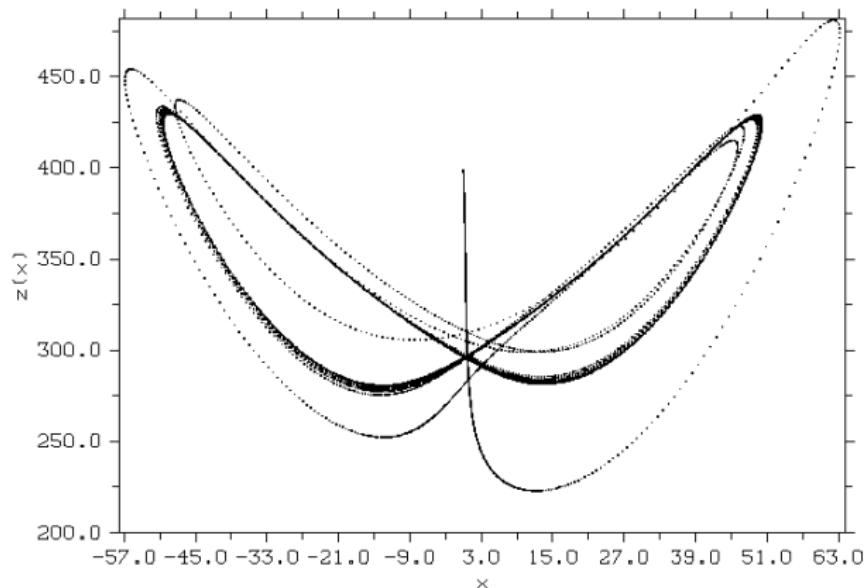
Transientes Chaos



Global anziehender Grenzzyklus



Global anziehender Grenzzyklus



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Literatur



E. N. Lorenz.

Deterministic nonperiodic flow.

Journal of Atmospheric Sciences, 20:130–141, 1963.



Steven H. Strogatz.

Nonlinear Dynamics and Chaos.

Westview Press, 2000.