Friedmann-Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichung

Skript zum Vortrag im Rahmen des Seminars:
„Theorie der Teilchen und Felder“ (WS 06/07)

Daniel Bieletzki

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung

Wie ist unser Universum entstanden? Wie können wir die Entwicklung unseres Universums beschreiben? Warum gehen wir davon aus, dass es einen Urknall gab? Wie ist die räumliche Struktur des Universums?
Das Standardmodell der Kosmologie gibt Antworten auf diese Fragen. Sie ist heute die anerkannte kosmologische Theorie, die Erklärungen für bisherige Beobachtungen liefert.

Das Standardmodell beruht auf zwei Hauptannahmen: Die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie und des kosmologischen Prinzips.

Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik ist eine Raumzeitgeometrie, die das kosmologische Prinzip erfüllt. Sie ist eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Anhand dieser Metrik und gewisser Beobachtungen ist es bereits möglich Aussagen über die Entwicklung unseres Universums zu machen.

Die Friedmann-Gleichung beschreibt theoretisch die möglichen Expansions- und Kontraktionsbewegungen des Universums. Sie gibt eine Entwicklung des sog. kosmischen Skalenfaktors an und folgt aus den Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie und der FRW-Metrik.

2. Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie wurde 1916 von Einstein fertig gestellt und erneuerte die Newtonsche Theorie der Gravitation. Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen Raum und Zeit einerseits und Materie (inkl. Felder) andererseits. In einer Kernaussage führt sie die Gravitation, die durch eine Masse hervorgerufen wird, auf ein geometrisches Phänomen einer gekrümmten 4-dim. Raumzeit zurück. Zu einer der Beobachtungen dieser Kernaussage gehört die Lichtablenkung durch die gekrümmte Raumzeit (siehe Abb.1).

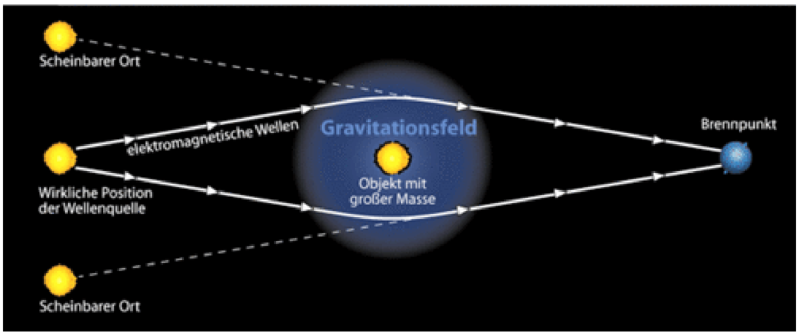

Abb.1: Lichtablenkung im Universum

Ein Objekt mit großer Masse erzeugt ein Gravitationsfeld, das auf elektromagnetische Wellen wie eine „Gravitationslinse" wirkt. Demnach erscheint für einen Beobachter, der sich im Brennpunkt der Gravitationslinse befindet, die wirkliche Position der Wellenquelle an zwei anderen scheinbaren Orten.

Das hat starke Konsequenzen für das Standardmodell, da auch das Universum als Gesamtes „gekrümmt" sein könnte, was man bei den Beobachtungen berücksichtigen muss.

2.1. Das Äquivalenzprinzip

Eine Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie bildet das Äquivalenzprinzip. Es besagt, dass ein homogenes Gravitationsfeld zu einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem äquivalent ist, d.h. dass ein Beobachter in einem geschlossenen Raum ohne Information von außen durch überhaupt kein Experiment feststellen kann, ob er sich in der Schwerelosigkeit befindet oder im freien Fall. Die Bewegungsgleichungen sind demzufolge in beiden Systemen gleich (siehe Abb.2).

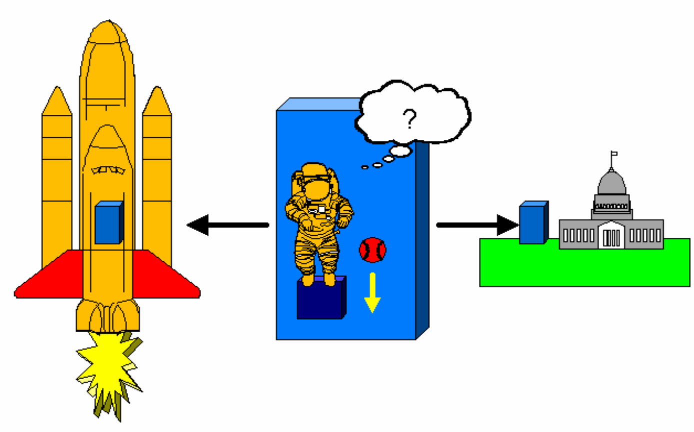

Abb.2: Das Äquivalenzprinzip

Ein Astronaut, der sich in einem fensterlosen Kasten befindet, kann nicht herausfinden, ob der Kasten im schwerelosen Raum beschleunigt wird oder ob er sich bewegungslos in einem Gravitationsfeld befindet.

2.2. Der Riemannsche Raum

Ein Raum mit einer Metrik der Form

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \qquad (1)$$

wird als Riemannscher Raum bezeichnet.
Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ dient dazu den Riemannschen Raum mit einem Maß für Abstände und Winkel auszustatten und hängt in der Allgemeinen Relativitätstheorie vom Ort x ab. Der Riemannsche Raum ist die mathematische Beschreibung einer gekrümmten Hyperfläche in einem höherdimensionalen kartesischen Raum. Im 2-dim. bildet z.B. die Oberfläche einer Kugel eine gekrümmte Hyperfläche im 3-dim. Raum (siehe Abb.3).

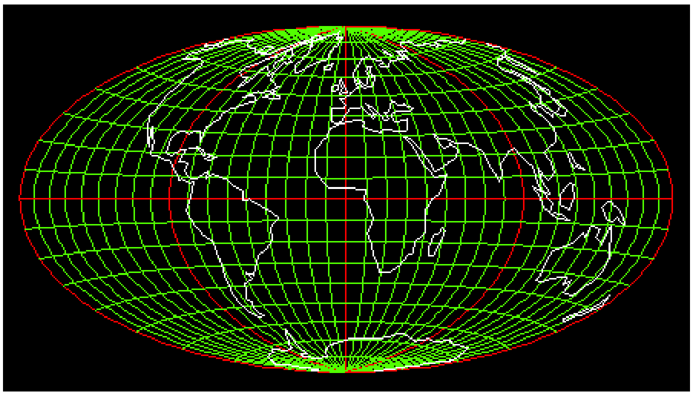

Abb.3: Der 2-dim. Riemannsche Raum

Als Maß für die Krümmung der Hyperfläche dient der Krümmungstensor bzw. Riemann-Tensor:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \qquad (2)$$

mit $\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\partial_\beta g_{\sigma\alpha} + \partial_\alpha g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}\right)$ (Affine Verknüpfungen bzw. Christoffelsymbole)

Ist die Hyperfläche flach und nicht gekrümmt, so gilt: $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$

Der Ricci-Tensor und der Ricci-Skalar sind ebenfalls Maße für die Krümmung der Hyperfläche und folgen aus dem Riemann-Tensor:

$$R_{\nu\beta} = R^{\mu}_{\nu\mu\beta}; \qquad \Re = g^{\nu\beta} R_{\nu\beta} \tag{3}$$

Die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld folgt entlang der Geodäte im Riemannschen Raum (siehe Abb.4). Die geodätische Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{d^2 x^{\nu}}{ds^2} = -\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} \tag{4}$$

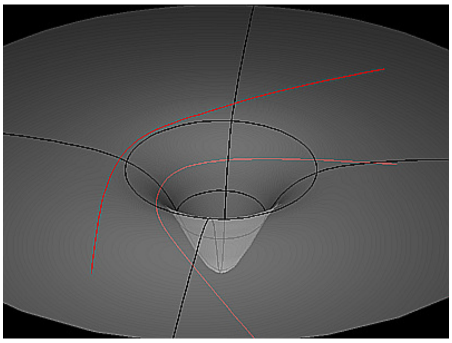

Abb.4: Geodäten im Riemannschen Raum

Eine Geodäte ist die lokal kürzeste Verbindung zweier Punkte. Im Euklidischen Raum sind Geodäten stets Geraden. Im Riemannschen Raum, wie z.B. auf einer Kugeloberfläche (Abb.2), sind Geodäten gekrümmte Linien.

2.3. Die Einstein'sche Feldgleichung

Die Grundlage für jede Dynamik eines Raumes in der Allgemeinen Relativitätstheorie bilden die Einstein'schen Feldgleichungen:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Re g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}} \tag{5}$$

Nach Einstein bewirkt eine Masse eine Krümmung der Raumzeit. Diese Krümmung macht sich in unserer 3-dim. Erfahrungswelt als Gravitation bemerkbar. Die Masse findet sich in der Formulierung der Einstein'schen Feldgleichung nicht explizit wieder. Sie wird durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ erfasst. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Masse und Energie in der ART äquivalent sind, d.h. jede Form der Energie induziert Masse, die Gravitation bewirkt.

Das Auftreten einer kosmologischen Konstante wurde von Einstein nachträglich postuliert, damit es auch eine Lösung für ein stationäres Universum geben kann. Die kosmologische Konstante steht dabei für eine Art Vakuumenergie.

3. Friedmann-Robertson-Walker-Metrik

3.1. Das kosmologische Prinzip

Die Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreiben, wie sich der Raum in Anwesenheit von Energie und Materie krümmt. Die Gleichungen sind so kompliziert, dass man sie ohne vereinfachende Annahmen niemals auf das Universum anwenden könnte. Als Vereinfachung wurde darum das kosmologische Prinzip eingeführt. Sie bildet die Grundlage der heutigen Kosmologie:

Das kosmologische Prinzip macht folgende Aussage: „Das Universum ist auf großen Längenskalen homogen und isotrop", d.h. im Universum sind alle Orte und Richtungen gleichwertig. Egal von welchem Standort man das Universum betrachtet, es bietet sich immer gleich dar.

Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie bedeutet diese Annahme, dass die Massenverteilung im Universum auf großen Längenskalen homogen und isotrop ist. Diese Annahme gilt nur auf großen Längenskalen, da die Materie auf „kurzen Distanzen" nicht gleichmäßig verteilt ist.

Das kosmologische Prinzip ist das Prinzip, das die einfachste mathematische Behandlung zulässt.

3.2. Offene, geschlossene und flache Geometrien

Um die Feldgleichungen für unser Universum lösen zu können, bedarf es einer genauen Beschreibung der Metrik (1).
Bei der Konstruktion einer Metrik des Universums müssen wir das kosmologische Prinzip berücksichtigen. Die Forderung nach räumlicher Homogenität und Isotropie überträgt sich auf die Metrik des Universums als Forderung nach einer konstanten Krümmung der Metrik im 3-dim. Unterraum.

Wir betrachten zunächst den 2-dim. Fall:
Gegeben sei ein 2-dim. Koordinatensystem (x_1, x_2) mit einer Metrik der Form (1). Um sich dieses Koordinatensystem als 2-dim. Hyperfläche zu veranschaulichen, ist es vorteilhaft eine zusätzliche fiktive räumliche Dimension einzuführen, um die 2-dim. gekrümmte Fläche in einen 3-dim. euklidischen Raum einzubetten. Die Hyperfläche weist somit mit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{k} R^2 \qquad \text{mit} \qquad k = -1,1 \;\; oder \;\; k \to 0 \tag{6}$$

eine konstante räumliche Krümmung auf. Aufgrund der konstanten Krümmung erfüllt die Metrik also die Forderung nach räumlicher Homogenität und Isotropie.

Im euklidischen 3-dim. Raum ist die Metrik gegeben durch:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{7}$$

Im Folgenden betrachten wir die Metrik für $k = 1$ (Kugeloberfläche).
Die Elimination der dritten „fiktiven" Koordinate ergibt:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{\left(x_1 dx_1 + x_2 dx_2\right)^2}{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \tag{8}$$

Unter Verwendung folgender Koordinatentransformation ($x_1 = r'\cos\theta, \quad x_2 = r'\sin\theta$) ergibt sich die Metrik der Hyperfläche in Eigenkoordinaten:

$$dl^2 = \frac{R^2 dr'^2}{R^2 - r'^2} + r'^2\, d\theta^2 \tag{9}$$

Mit $r \equiv \frac{r'}{R}$ wird aus (9): $$dl^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\theta^2 \right\} \quad \text{mit} \quad r: 0 \le r \le 1 \tag{10}$$

R wird als kosmischer Skalenfaktor bezeichnet (siehe Abb.5).

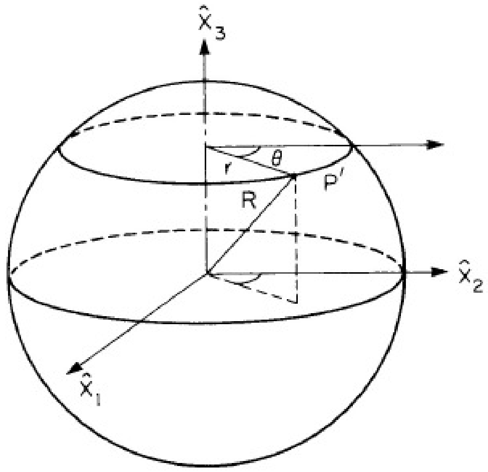

Abb.5: Konstruktion der Metrik

Die Pole der Kugel liegen bei $r = 0$ und der Äquator liegt bei $r = 1$. Die Ortskurven für $r = const.$ bilden die Breitengeraden der Kugel, die Ortskurven für $\theta = const.$ bilden die Längengraden der Kugel.

Die Expansion (bzw. Kontraktion) des 2-dim. Universums entspricht dem Steigen (bzw. Fallen) des Radius der Kugel R (siehe Abb.6). Da das Universum räumlich homogen und isotrop ist, kann der Skalenfaktor nur eine Funktion der Zeit sein: $R = R(t)$.

Während der Expansion (bzw. Kontraktion) der Kugel ist $\theta = const.$; d.h. die Koordinate bewegt sich mit. Der physikalische Abstand zwischen zwei beliebigen Punkten in einem mitbewegten Koordinatensystem ist skaliert mit R, daher der Name Skalenfaktor.

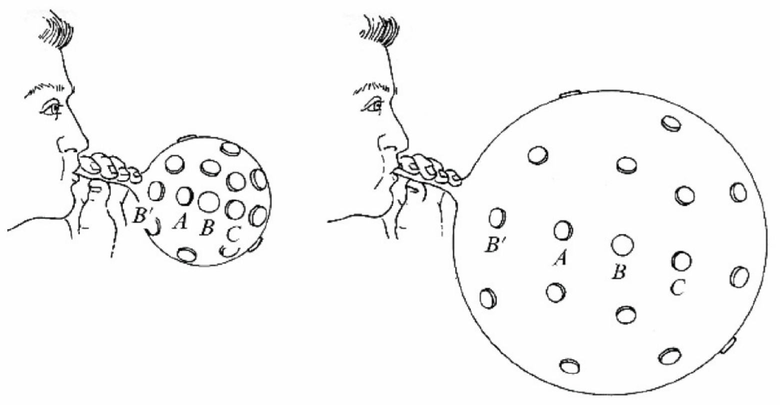

Abb.6: Mitbewegtes Koordinatensystem

Für $k=-1{,}1 \;\; oder \;\; k \to 0$ ergeben sich drei mögliche Geometrien für ein 2-dim. Universum.
Man unterscheidet in Abhängigkeit davon, welchen Wert k annimmt, zwischen einer geschlossenen, einer offenen und einer flachen Geometrie.

Im Falle der geschlossenen Geometrie handelt es sich bei der 2-dim. Hyperfläche um eine Kugeloberfläche. Diese Kugeloberfläche ist räumlich homogen und isotrop. Jeder Punkt im Raum (Kugeloberfläche) ist äquivalent zu allen anderen Punkten und es existiert keine ausgezeichnete Richtung. Mit anderen Worten, der Raum verkörpert das kosmologische Prinzip (siehe Abb.7).

Für den Raum mit konstanter negativer (offener) Krümmung ($k=-1$) bekommen wir äquivalente Formeln durch die Ersetzung $R \to iR$ in Gleichung (8): In diesem Fall spricht man von einer Einbettung der 2-dim. Hyperfläche in einen 3.dim. Minkowski-Raum:

$$dl^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\theta^2 \right\} \tag{11}$$

Im Fall des flachen Raumes, läuft der Radius $R \to \infty$.
Der Skalenfaktor R liefert in diesem Fall keinen physikalischen Radius (wie im geschlossenen Fall) und auch keinen imaginären Radius (wie im offenen Fall). Der Faktor skaliert lediglich den physikalischen Abstand zwischen zwei Punkten im mitbewegten Koordinatensystem, wenn der Raum expandiert oder kontrahiert.

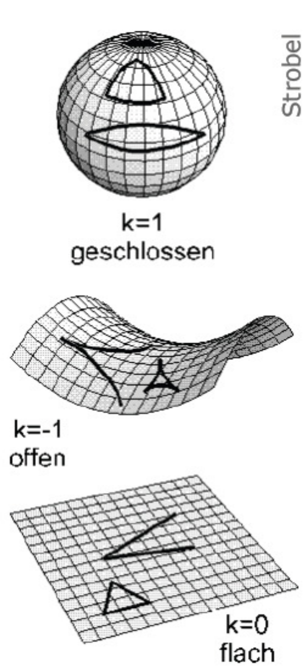

Abb.7: geschlossene, offene und flache Geometrien

Betrachten wir nun die Krümmung unseres bekannten dreidimensionalen Raumes. Für eine 3-dim. Hyperfläche gilt unter Einführung einer vierten „fiktiven" Dimension:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{R^2}{k} \tag{12}$$

Für die Metrik gilt nach Elimination der vierten „fiktiven" Variable:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{\left(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3\right)^2}{\frac{R^2}{k} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{13}$$

Unter Ausnutzung der Koordinatentransformation: $x_1 = r'\sin\theta\cos\phi, \quad x_2 = r'\sin\theta\sin\phi, \quad x_3 = r'\cos\theta$ ergibt sich folgende Metrik in Eigenkoordinaten:

$$dl^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\} \tag{14}$$

Diese Metrik erfüllt im Räumlichen aufgrund der konstanten Krümmung die Forderung des kosmologischen Prinzips nach Homogenität und Isotropie.

Fügt man nun noch über $ds^2 = dt^2 - dl^2$ und $R = R(t)$ eine zeitliche Komponente hinzu, so erhält man als eine das kosmologische Prinzip erfüllende Raumzeitgeometrie die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik:

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\}} \tag{15}$$

$R(t)$ ist der kosmische Skalenfaktor der Metrik. Er entspricht der Längenskala des Raumes. Da sowohl die Hyperfläche als auch das zugehörige Koordinatensystem über den kosmischen Skalenfaktor skaliert werden ($r \equiv \frac{r'}{R}$), handelt es sich bei der 3-dim. Hyperfläche um ein mitbewegtes Koordinatensystem.

Die Dynamik des Raumes steckt nur im kosmischen Skalenfaktor. Dieser wird durch die Einstein'schen Feldgleichungen beschrieben. Die Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen und somit eine Gleichung für die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors liefert die Friedmann-Gleichung. (siehe unten).

3.3. Lichtausbreitung im Universum

Eine fundamentale Frage in der Kosmologie ist: Welche Teile des Universums stehen in kausalem Kontakt zueinander?
Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir die Lichtausbreitung im Universum.

Sei ein Beobachter an der Stelle (r_0, θ_0, ϕ_0) in einem mitbewegten KS. Für welche Werte von (r, θ, ϕ) würde ein Lichtsignal, der zur Zeit $t = 0$ emittiert wird, den Beobachter zur Zeit t erreichen?

Dies kann direkt mit der FRW-Metrik (15) ausgerechnet werden. Für ein Lichtsignal gilt: $ds^2 = 0$.
Wegen der Homogenität des Raumes können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r_0 = 0$ wählen. Geodäten, die durch $r_0 = 0$ verlaufen, sind Linien konstanten ϕ und θ (vgl. große Kreise durch die Pole einer Kugel). Daraus folgt, dass $d\theta = d\phi = 0$.
Die Isotropie des Raumes macht die Wahl der Richtung (θ_0, ϕ_0) irrelevant.

Folglich kann man die Zeit t, in der ein emittiertes Lichtsignal von der Stelle (r_H, θ_0, ϕ_0) zur Zeit $t = 0$ nach $r_0 = 0$ gelangt, durch folgende Gleichung bestimmen (aus FRW-Metrik):

$$\int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \qquad (16)$$

Der Abstand d des Empfängers zum Ursprungsort des Lichtstrahls (r_H, θ_0, ϕ_0) zum Empfangszeitpunkt t ist:

$$d_H(t) = \int_0^{r_H} \sqrt{g_{rr}}\, dr = R(t) \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} \qquad (17)$$

g_{rr} ist hier der metrische Tensor aus der FRW-Metrik.

Ist nun $d_H(t)$ endlich, so ist zu erwarten, dass das beobachtbare Universum in der Vergangenheit von einem Teilchenhorizont begrenzt ist. Der Teilchenhorizont gibt die Entfernung an, die ein Teilchen maximal seit dem Urknall zurückgelegt haben kann. Damit ist klar, dass kausale Prozesse nur innerhalb eines durch den Teilchenhorizont bestimmten sog. Horizontvolumens möglich sind.

Das Licht von Galaxien ist in den allermeisten Fällen rotverschoben. Je weiter eine Galaxie entfernt ist, desto stärker ist im Mittel die Rotverschiebung. Nur wenige nahe Sternsysteme zeigen aufgrund zusätzlicher Eigenbewegung auf „uns" zu insgesamt eine Blauverschiebung.

Für die Herleitung der kosmologischen Rotverschiebung betrachten wir zwei aufeinander folgende Wellenberge des emittierten Lichtstrahls.

Es gilt:

$$d_H(t)=\int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R(t)}=\int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{R(t)}\quad\rightarrow\quad\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1}\frac{dt}{R(t)}=\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0}\frac{dt}{R(t)}\qquad \text{für}\qquad \lambda=\delta t<<t \tag{18}$$

Beide Wellenberge legen bei langsamer Änderung des kosmischen Skalenfaktors dieselbe Distanz zum Empfänger zurück.
Mit $\lambda=\delta t<<t$ folgt aus (18):

$$\frac{\delta t_1}{R(t_1)}=\frac{\delta t_0}{R(t_0)}\quad\rightarrow\quad\frac{\lambda_1}{\lambda_0}=\frac{R(t_1)}{R(t_0)} \tag{19}$$

Die kosmologische Rotverschiebung z wird aus dem Verhältnis zwischen detektierter Wellenlänge und emittierter Wellenlänge definiert:

$$z=\frac{\lambda_0}{\lambda_1}-1=\frac{R(t_0)}{R(t_1)}-1 \tag{20}$$

Die kosmologische Rotverschiebung besagt, dass sich bei einem expandierenden (bzw. kontrahierenden) Universum die Frequenz des Lichtstrahls mit dem Anwachsen (bzw. Abfallen) des kosmischen Skalenfaktors verringert (bzw. erhöht). Da man allerdings überwiegend Rotverschiebungen der Frequenzen beobachtet, geht man von einem expandierenden Universum aus.

3.4. <u>Das Gesetz von Hubble</u>

Hubbles Gesetz beschreibt die lineare Beziehung zwischen dem Abstand zu einer Galaxie und ihrer beobachteten Rotverschiebung. Im Folgenden wird das Gesetz von Hubble in Abhängigkeit vom kosmischen Skalenfaktor hergeleitet. Dadurch ist es bereits möglich Aussagen über die Entwicklung der Expansion des Universums zu machen.

Die Taylorentwicklung für ein sich langsam verändernden Skalenfaktor nach der Zeit liefert:

$$\frac{R(t)}{R(t_0)}=1+H_0(t-t_0)-\frac{1}{2}q_0H_0^2\left(t-t_0\right)^2+... \tag{21}$$

mit $$H_0\equiv\frac{\dot{R}\left(t_0\right)}{R\left(t_0\right)},\quad q_0\equiv\frac{-\ddot{R}(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)}R\left(t_0\right)=-\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} \tag{22}$$

Den Parameter H_0 bezeichnet man als Hubble-Parameter, den Parameter q_0 bezeichnet man als Dämpfungsparameter.

Aus der kosmologischen Rotverschiebung (20) wird mit (21):

$$z=\frac{R(t_1)}{R(t_0)}-1=H_0\left(t_0-t\right)+\left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2\left(t_0-t\right)^2+... \tag{23}$$

Nach (20) gilt: $$\frac{1}{R(t)}=\frac{1}{R(t_1)}\left(z+1\right) \tag{24}$$

Der Abstand (17) zwischen dem Empfangsort und dem Ausgangsort eines Lichtstrahls zum Empfangszeitpunkt kann mit (24) weiter umgeformt werden:

$$d(t) = R(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = R(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t_1)}(z+1) \qquad (25)$$

Mit (23) in (25) und Auflösen nach z ergibt sich die Rotverschiebungs-Abstands-Relation:

$$z_{kosm.} \approx H_0 d + \frac{1}{2}\left(1-q_0\right) H_0^2 d^2 \qquad (26)$$

Der erste Term von (26) ist das bekannte Hubble-Gesetz, wobei die Hubble-Konstante nach (22) von der Expansionsgeschwindigkeit des Universums und der Größe des kosmischen Skalenfaktors abhängt. Neueste Messungen ergeben eine Hubble-Konstante von:

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = (72 \pm 8)\frac{km/s}{Mpc}$$

Aus dem positiven Vorzeichen der Hubblekonstante folgt, dass wir in einem derzeit expandierenden Universum leben.

Der zweite Term von (16) wird vom Dämpfungsparameter bestimmt. Nach (22) macht er eine Aussage darüber, ob sich die Expansion des Universums beschleunigt oder verlangsamt. Neueste Messungen ergeben einen Wert für den Dämpfungsparameter von:

$$q_0 = \frac{-\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}^2(t)} = -0{,}5 \pm 0{,}16$$

Das negative Vorzeichen deutet auf eine beschleunigte Expansion des Universums hin.

4. Das Standard-Modell der Kosmologie: Die Friedmann-Gleichung

Die Entwicklung des Universums wird durch die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors beschrieben. Dazu benötigt man die Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Re g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{27}$$

Die Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen sind die Friedmann-Gleichungen. Anders als die Angabe der kosmologischen Konstante in (27) lässt die Friedmann-Gleichung keine stabilen Lösungen zu. Sie beschreibt vielmehr die Expansion bzw. Kontraktion des Universums. Da wir von einer Expansion des Universums ausgehen, nimmt die Dichte des Universums mit der Zeit ab. Aus dieser Überlegung folgern wir das Standard-Urknall-Modell.

4.1. Die Relation von Dichte und kosmischem Skalenfaktor

Die Dynamik des expandierenden Universums tauchte implizit nur in der Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors auf. Um die Zeitabhängigkeit explizit zu machen, müssen wir für die Entwicklung des Skalenfaktors die Einstein'schen Feldgleichungen für das Universum aufstellen.

Dazu machen wir zunächst vereinfachende Annahmen für den Energie-Impuls-Tensor. In diesen Tensor fließen alle Felder und jegliche vorhandene Materie im System mit ein. Die Kenntnis über all diese Größen ist sehr aufwendig und derzeit unmöglich. Die Symmetrie des Universums schränkt die Zahl der unbekannten Größen stark ein.

Aufgrund der Symmetrie der Metrik folgt, dass im Energie-Impuls-Tensor nur Diagonalelemente vorzufinden sind. Aus der Isotropie des Raumes folgt die Äquivalenz aller räumlichen Komponenten. Die einfachste Umsetzung eines solchen Tensors ist der einer idealen Flüssigkeit mit einer zeitabhängigen Energiedichte und einem zeitabhängigen Druck:

$$T_{\nu}^{\mu} = diag\left(\rho, -p, -p, -p\right) \tag{28}$$

In einem abgeschlossenen System gilt der Energieerhaltungssatz:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{29}$$

Da das Universum als abgeschlossen anzusehen ist, gilt (29) auch für das Universum. Die $\mu = 0$ -Komponente von (29) liefert folgende Gleichung:

$$d\left(\rho R^3\right) = -p d\left(R^3\right) \tag{30}$$

(30) besagt, dass die Änderung der Energie in einem mitbewegten Volumenelement gleich dem negativen Druck mal der Volumenänderung ist (1.HS der Thermodynamik (adiabatische Zustandsänderung)).

Die Beziehung zwischen Druck und Dichte ist durch folgende Zustandgleichung gegeben:

$$p = \omega\rho \tag{31}$$

Die Konstante ω ist zeitunabhängig. Einsetzen von (31) in (30) und Umformen liefert folgende Beziehung zwischen der Dichte des Universums und dem kosmischen Skalenfaktor:

$$\rho \sim R^{-3(1+\omega)} \tag{32}$$

Die Extremfälle der Stadien des Universums lassen sich nach Werten von ω unterscheiden.

In einem strahlungsdominierten Universum (RD) (frühes Universum) handelt es sich um ein Stadium, in dem die Teilchen eine hohe Energie besitzen. Dadurch lässt sich das Universum durch die Statistik relativistischer Quantengase beschreiben. Daraus ergibt sich $\omega = \frac{1}{3}$ und somit:

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad \rightarrow \quad \rho \sim R^{-4} \tag{33}$$

In einem materiedominierten Universum (MD) handelt es sich um ein Stadium, in dem die Teilchen nicht mehr genug Energie haben um ein Wasserstoffatom zu ionisieren. Der Druck des Universums ist hier proportional zur Temperatur. Da die Temperatur in diesem Fall sehr klein ist, ist der Druck fast identisch mit Null. Daraus ergibt sich:

$$p = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \sim R^{-3} \tag{34}$$

In einem Stadium des Universums, in dem die Vakuumenergie (VD) die dominierende Energie ist, also in Anwesenheit einer kosmologischen Konstante, stellt sich ein umgekehrtes Gleichgewicht zwischen Druck und Dichte ein:

$$p = -\rho \quad \rightarrow \quad \rho \sim const. \tag{35}$$

Je nach Modell, das man sich für die Entwicklung des Universums macht, kann es sich zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Stadien befinden, deren Zustand auch durchaus ein Mischzustand sein kann.

4.2. Die Friedmann-Gleichung

Die dynamischen Gleichungen, die die Entwicklung des Skalenfaktors beschreiben, folgen aus den Einstein'schen Feldgleichungen. Die nicht verschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors und des Ricci-Skalars unter der Vorrausetzung der FRW-Metrik sind:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right] g_{ij} \\ \Re &= -6\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right] \end{aligned} \tag{36}$$

Setzt man (36) für die 0-0 Komponenten (zeitliche Komponente) in die Einstein-Gleichung ein, so erhält man die Friedmann-Gleichung:

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho} \tag{37}$$

Die räumliche Komponente der Einstein-Gleichung (i-i-Komponente) liefert: (36) in (27):

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p \tag{38}$$

Die Gleichungen (30), (37) und (38) sind verknüpft mit der Bianchi-Identität und nur zwei dieser Gleichungen sind unabhängig. Man wählt die Gleichungen (30) und (37) gewöhnlich als unabhängig.

Durch Subtraktion von (37) und (38) ergibt sich eine Gleichung für die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{39}$$

Die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors $\dot{R}$ ist verknüpft mit der Hubble-Konstante. Diese ist messbar und größer als Null. Der Term $(\rho + 3p)$ und der kosmische Skalenfaktor sind auch immer größer als Null. Die Beschleunigung des kosmischen Skalenfaktors war somit immer negativ. Daraus folgern wir, dass der kosmische Skalenfaktor zu einer endlichen Zeit in der Vergangenheit gleich Null gewesen sein muss. Dieses Ereignis legt man auf den Zeitnullpunkt. Nach der Friedmann-Gleichung haben viele kosmologische Parameter zu diesem Zeitpunkt eine Singularität. Diese Singularität wird als Big Bang bezeichnet.

4.3. Folgerungen

Die Friedmann-Gleichung (37) lässt sich mit dem Hubble-Parameter noch weiter umformen. Man erhält somit eine Gleichung, mit der sich Abschätzungen für den Hubble-Parameter und für die Dichte des Universums machen lassen.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Dichte und der Gestalt des Universums gezeigt:

Setzt man den Hubble-Parameter $H = \frac{\dot{R}}{R}$ in die Friedmann-Gleichung (37) ein, so ergibt sich nach etwas Umformen:

$$\frac{k}{H^2R^2} = \frac{\rho}{\frac{3H^2}{8\pi G}} - 1 \equiv \Omega - 1 \qquad \text{mit} \qquad \Omega = \frac{\rho}{\rho_C} \qquad \rho_C = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{40}$$

ρ_C ist die sog. kritische Dichte und Ω beschreibt das Dichteverhältnis zwischen der Dichte des Universums und der kritischen Dichte. Da $H^2R^2 > 0$, ergibt sich eine direkte Beziehung zwischen der Gestalt des Universums und dem Dichteverhältnis zwischen der Dichte des Universums und der kritischen Dichte:

$$\begin{aligned} k &= +1 \quad \rightarrow \quad \Omega > 1 \quad \textit{geschlossen} \\ k &= 0 \quad \rightarrow \quad \Omega = 1 \quad \textit{flach} \\ k &= -1 \quad \rightarrow \quad \Omega < 1 \quad \textit{offen} \end{aligned} \tag{41}$$

Die kritische Dichte entspricht also genau der Dichte, die ein Universum mit einer flachen Geometrie haben würde. Die kritische Dichte bestimmt also die Grenze zwischen einem geschlossenen und einem offenen Universum.

Betrachten wir schließlich den Dämpfungsparameter q_0, der sich aus der Herleitung des Hubble-Gesetzes ergibt:

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}}{RH_0^2} \tag{22}$$

Mit (37) und (39) und der Definition von $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{C0}}$ ergibt sich folgende Beziehung zwischen dem Dämpfungsparameter und Ω_0. Der Index Null steht dabei für die gegenwärtigen Werte der Größen:

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2}\left[1+\frac{3p}{\rho}\right] = \frac{\Omega_0}{2}(1+3\omega) \tag{42}$$

$$\begin{aligned} &MD: \quad && q_0 = \frac{\Omega_0}{2} \\ &RD: \quad && q_0 = \Omega_0 \\ &VD: \quad && q_0 = -\Omega_0 \end{aligned} \tag{43}$$

Da der Dämpfungsparameter messbar ist, lässt sich über ihn eine Abschätzung für die Dichte des Universums erzielen. Da der Wert für den Dämpfungsparameter negativ ist (d.h. beschleunigte Expansion) und Ω_0 nicht negativ sein kann, können wir jetzt schon folgern, dass wir uns in einem materiedominierten Universum mit positiven Vakuumenergie-Anteilen befinden.
Eine positive kosmologische Konstante wirkt nämlich beschleunigend und eine negative kosmologische Konstante wirkt abbremsend. Einstein führte die positive kosmologische Konstante als Gegenkraft zur Gravitation ein.

4.4. Das Alter des Universums

Um das Alter des Universums anzugeben, muss die Friedmann-Gleichung integriert werden. Das Alter des Universums ist eine wichtige Größe, um Abschätzungen von mehreren kosmologischen Parametern durchzuführen.

Die Energiedichte für ein MD Universum ist: $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}$.

Somit lautet die Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + \frac{k}{R_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{R_0}{R} \tag{44}$$

Mit $\frac{k}{R_0^2} = H_0^2(\Omega_0 - 1)$ und $\frac{R_0}{R} = 1+z$ ergibt sich folgende umgeformte Friedmann-Gleichung:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + H_0^2(\Omega_0 - 1) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z) \tag{45}$$

Mit den Definitionen für Ω_0 und ρ_{C0} ergibt sich:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 + H_0^2(\Omega_0 - 1) = \frac{8\pi G}{3}\rho_0(1+z) = H_0^2\Omega_0(1+z) \tag{46}$$

Das Alter des Universums eines materiedominierten Universums ergibt sich über folgendes Integral unter Ausnutzung der Substitution $x = (1+z)^{-1}$:

$$t = \int_0^t dt' = \int_0^{R(t)} \frac{dR'}{\dot{R}'} = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{\left[1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{47}$$

Die Lösung des Integrals ist kompliziert. Setzt man jedenfalls für die Lösung $z = 0$, so erhält man das Alter des Universums in Abhängigkeit von H_0 und Ω_0. In Abb.8 ist die Abhängigkeit der Größe $H_0 t_0$ mit dem heutigen Alter des Universums gegen den Parameter Ω_0 aufgetragen.

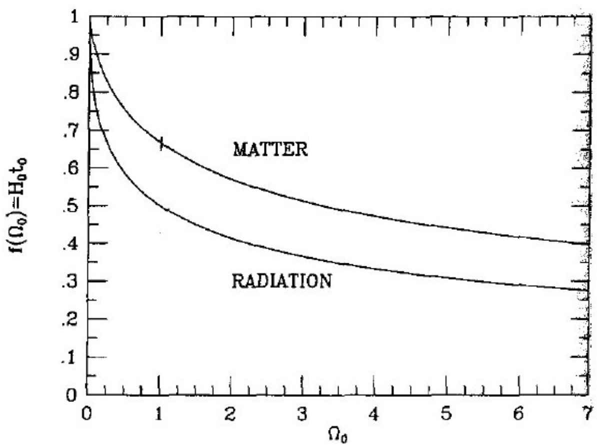

Abb.8: Das Alter des Universums

Die Lösung für ein RD Universum erfolgt analog durch Einsetzen folgender Energiedichte in die Friedmann-Gleichung: $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4}$

Das Alter des Universums ist ein fallende Funktion von Ω_0. Größere Ω_0 führen zu einer schnelleren Verlangsamung, die einem schneller expandierenden frühzeitigen Universum entspricht.

Der Kehrwert der Hubblekonstante wird Hubblezeit genannt Bei gleichförmiger Expansion in einem leeren Universum wäre sie gleich dem Weltalter, d.h. der seit dem Urknall vergangenen Zeit.
Je nach dem Gehalt des Universums an Materie kann die Expansion aber verzögert oder beschleunigt werden, so dass das Weltalter von der Hubblezeit verschieden ist. Für lange diskutierte kosmologische Modelle mit flacher Geometrie und ohne dunkle Energie ist zum Beispiel das Weltalter nur 2/3 der Hubblezeit.
Mit den heutigen Messungen des Satelliten WMAP ergibt sich eine Hubblezeit von 13,3 Milliarden und ein Weltalter von 13,7 Milliarden Jahren.

Wir betrachten nun das Alter eines flachen Universums, welches Materie und positive Vakuumenergie beinhaltet, also $k = 0$ und $\Omega_0 = 1$. Dadurch und unter Zunahme der kosmologischen Konstante (=VD) verändert sich die Friedmann-Gleichung in folgender Weise:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{mat} \frac{R_0}{R} + \frac{\Lambda}{3} \tag{48}$$

Die Energiedichte des Universums setzt sich aus der Vakuumenergiedichte und der Materieenergiedichte zusammen. Über die Dichteverhältnisse gegen die kritischen Dichten bekommt man:

$$\Omega_0 = \Omega_{vac} + \Omega_{mat} = 1 \tag{49}$$

Als Ergebnis der Lösung des Integrals aus (52) erhält man das Alter des Universums in Abhängigkeit des Vakuumenergiedichteverhältnisses (siehe Abb.9).

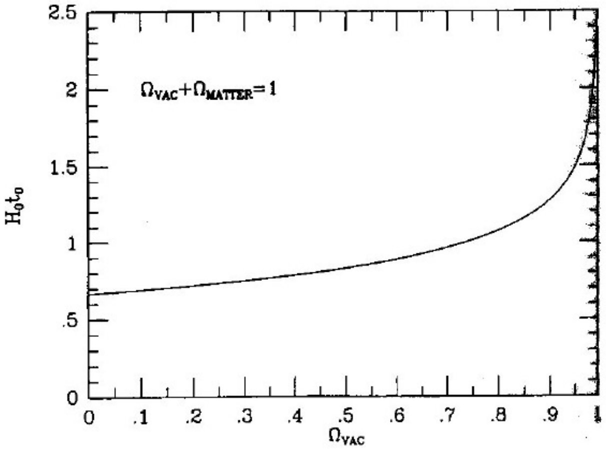

Abb.9: Das Alter eines flachen MD-Universums mit VD-Anteilen

Beträgt der Vakuumanteil des Dichteverhältnisses $\Omega_{vac} \geq 0,74$, so ist das Alter des Universums größer als die Hubble-Zeit. Der Grund dafür ist das Auftreten einer recht großen kosmologischen Konstante, die zu einer Beschleunigung der Expansion führt. Für $\Omega_{vac} \to 1$ wird $t_0 \to \infty$. Dieser Fall entspricht dem von Einstein geforderten statischen Universum.

Das Alter des Universums bietet eine gute Möglichkeit, um eine Abschätzung für die Energiedichte des Universums zu machen. Das Alter hängt außer vom Modell für das Universum nur vom Wert des Dichteverhältnisses und der Hubble-Konstante ab. Die Hubble-Konstante ist bis zu einer gewissen Genauigkeit messbar und liefert somit im Bereich der Messungenauigkeit Grenzen für die Abschätzungsmöglichkeit der Energiedichte mit dem Alter des Universums. Das Alter des Universums wird heute auf etwa 13,7 Milliarden Jahre geschätzt.

Heutzutage geht man davon aus, dass das Universum recht flach sein müsste und somit das Dichteverhältnis etwa im Bereich $\Omega_0 \approx 1$ bewegen müsste.

Schließlich betrachten wir die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors (Lösung der Friedmann-Gleichung) für ein flaches Universum $(k=0)$. Es gilt folgende Friedmann-Gleichung:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \qquad (50)$$

Mit (32): $\rho \sim R^{-3(1+\omega)}$ ergibt sich:

$$\Rightarrow \quad \dot{R} \sim R^{-\frac{1}{2}(3\omega+1)} \qquad \Rightarrow \quad R \sim t^{\frac{2}{3}(\omega+1)^{-1}} \qquad (51)$$

Daraus folgt durch Integration:

$$R \sim t^{\frac{2}{3}(\omega+1)^{-1}} \qquad (52)$$

Für den RD und den MD Fall ergibt sich:

$$\begin{aligned} \omega = \frac{1}{3} \quad &\to \quad R \sim t^{\frac{1}{2}} \qquad (RD) \\ \omega = 0 \quad &\to \quad R \sim t^{\frac{2}{3}} \qquad (MD) \end{aligned} \qquad (53)$$

Für den VD Fall wird aus der Friedmann-Gleichung unter Ausnutzung von (32): $\dot{R} \sim R$

Als Ergebnis: $R \sim e^{H_0 t}$ (54)

Die Lösungen für die verschiedenen Modelle eines MD Universums sind in Abb.10 abgebildet. Die Lösungen für die gekrümmten Modelle sind kompliziert, daher erfolgt hier nur eine graphische Auswertung:

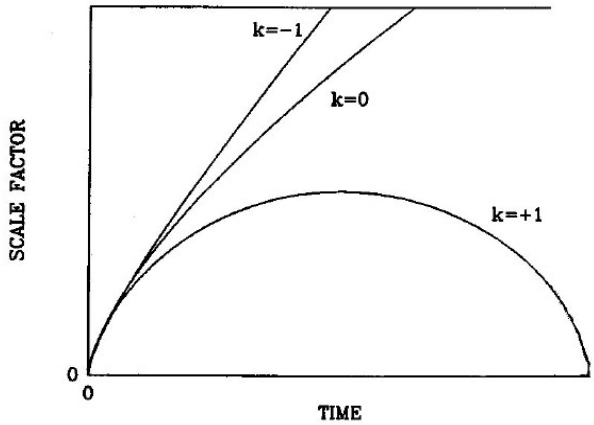

Abb.10: Lösung der Friedmann-Gleichung

Die Untersuchung des qualitativen Verhaltens der zeitlichen Entwicklung des Skalenfaktors ergibt Folgendes: Die Expansion bei einer Dichte des Universums unter der kritischen Dichte (offene Geometrie: $k = -1$) wird für immer andauern. Die Expansion des Universums bei einer Dichte über der kritischen Dichte (geschlossene Geometrie: $k = +1$) wird sich verlangsamen und ab einem bestimmten Punkt wird das Universum beginnen sich zu kollabieren. Die Expansion des Universums bei der kritischen Dichte (flache Geometrie: $k = 0$) verlangsamt sich, aber nicht stark genug, dass es irgendwann stoppen wird.

5. Zusammenfassung

Die Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sagen aus, dass der Energie-Impuls-Tensor (Energie = Masse) eine Gravitation und somit eine Krümmung der Raumzeit bewirkt.

Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik ist eine Raumzeitgeometrie, die das kosmologische Prinzip erfüllt. Sie ist eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.
Folgerungen der FRW-Metrik sind die kosmologische Rotverschiebung und das Gesetz von Hubble. Diese Folgerungen und die beobachteten Messwerte der Hubble-Konstante und des Dämpfungsparameters lassen auf ein derzeit beschleunigt expandierendes Universum schließen.

Durch die Beziehung von Druck und Energiedichte des Universums und aufgrund des Energieerhaltungssatzes konnte eine Beziehung zwischen der Energiedichte und dem kosmischen Skalenfaktor abgeleitet werden.

Die Friedmann-Gleichung, die aus den Einstein'schen Feldgleichungen der ART und der FRW-Metrik hervorgeht, beschreibt die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors. In Bezug auf Druck und Energiedichte des Universums lässt die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors auf die Urknall-Theorie schließen.

Die Friedmann-Gleichung beschreibt theoretisch die möglichen Expansions- und Kontraktionsbewegungen des Universums. Aus dieser Gleichung können wir diverse Folgerungen zwischen einigen kosmologischen Parametern schließen. Messbar sind die Hubble-Konstante und der Dämpfungsparameter. Diese Messungen und das Alter des Universums dienen als Abschätzung für alle weiteren kosmologischen Parameter.
Wir haben z.B. eine direkte Beziehung zwischen der Gestalt des Universums und dem Dichteverhältnis zwischen der Dichte des Universums und der kritischen Dichte und die Beziehung zwischen dem Dämpfungsparameter und dem Dichteverhältnis hergeleitet.
Ergebnisse dieser Folgerungen sind, dass ein Universum mit einer kritischen Dichte die Grenze zwischen einem offenen und geschlossenen Universum bildet und dass wir uns in einem materiedominierten Universum mit positiven Vakuumenergie-Anteilen befinden.

Aufgrund der Abschätzungen für das Alter des Universums sind wir in der Lage eine Abschätzung für die Energiedichte unseres Universums zu machen. Das Alter des Universums ist bis auf die Geometrie des Universums von der Hubble-Konstante und vom Dichteverhältnis des Universums abhängig.

Schließlich haben wir die Lösung der Friedmann-Gleichung für ein materiedominiertes Universum gezeigt und die zeitliche Entwicklung des kosmischen Skalenfaktors in Abhängigkeit von der Gestalt des Universums dargestellt.