Michael Hirtz 4.12.02

Seminar über Teilchen- und Kerntheorie:

Euklidische Funktionalintegrale und das skalare Feld auf dem Gitter

Das Pfadintegral und der Übergang zum euklidischem Pfadintegral

In der bekannten Feynman'schen Form erhielten wir das Pfadintegral als:

$$\langle q'|e^{-iH(t'-t)}|q\rangle = \int_q^{q'} Dq''\, e^{iS[q'']}$$

Die unangenehmen Eigenschaften dieses Integrals (komplex, stark oszillierend durch imaginäres Argument in der Exponentialfunktion) können wir durch den Übergang zur sog. ‚euklidischen Zeit' τ wegtransformieren. Wir setzen

$$t = -i\tau$$

und schreiben den Pfadintegralausdruck nun wie folgt:

$$\langle q'|e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle = \int_q^{q'} Dq''\, e^{-S_E[q'']}$$

$$S_E[q] = \int_\tau^{\tau'} d\tau''\, L_E(q(\tau''), \dot{q}(\tau''))$$

Die Wirkung ist nun in die sog. euklidische Wirkung $S_E[q]$ übergegangen. Alle Integrale sind nun realwertig und anstatt der heftigen Oszillation ergibt sich eine Art ‚Abklingfaktor' durch die Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion gewichtet die verschiedenen möglichen Pfade vom Start- zum Endzustand gemäß ihrer euklidischen Wirkung. So geben Pfade mit geringer Wirkung – analog der klassischen Formulierung – den größten Beitrag zum Pfadintegral (vgl. Prinzip der kleinsten Wirkung). Abbildung 1 zeigt einen möglichen Pfad im Phasenraum von q nach q'.

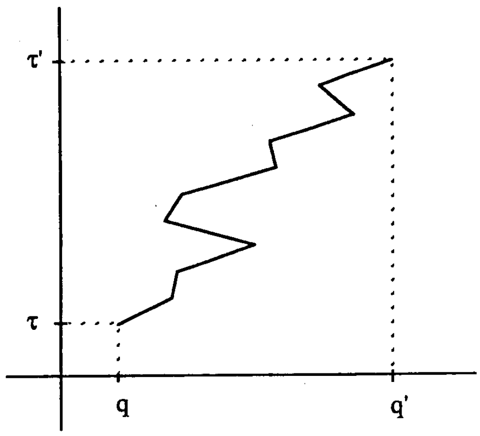

Abbildung 1: Pfad im Phasenraum

Betrachtungen des Funktionalintegrals in der Q.M. und Feldtheorie

Innerhalb der Quantenmechanik stecken die Informationen in der Greenfunktion, die im wesentlichen ein Produkt aus Operatoren darstellt. In der Feldtheorie gehen diese Operatoren nun in Feldoperatoren über. Betrachten wir zunächst die feldtheoretischen Ausdrücke:

$$\text{Zeitentwicklung: } \phi(\vec{x}, t) = e^{iHt}\phi(\vec{x}, 0)e^{-iHt}$$

$$\text{Greenfunktion: } G(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle \Omega | T(\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n)) | \Omega \rangle$$

Der Zeitordnungsoperator T ordnet die Operatoren ihrer Zeit entsprechend, große t stehen dabei weiter links. Zeitlich ungeordnet spricht man hier auch von einer Wightmanfunktion.

Das entsprechende Q.M. Analogon ist gegeben durch:

$$G_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \langle E_0 | T(Q_{\alpha_1}(t_1)Q_{\alpha_2}(t_2)...Q_{\alpha_n}(t_n)) | E_0 \rangle$$

$$\text{bzw. } G_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(t_1, t_2, ..., t_n) = \langle E_0 | Q_{\alpha_1}(t_1)Q_{\alpha_2}(t_2)...Q_{\alpha_n}(t_n) | E_0 \rangle \quad \text{mit} \quad t_1 > t_2 > ... > t_n$$

Nun folgt wieder der Übergang zu euklidischer Zeit:

$$t = -i\tau$$

Obwohl die euklidischen Zeiten komplex sind, können wir immer noch von ‚geordneter Zeit' sprechen, da es sich bei dieser Transformation eigentlich nur um eine Drehung auf die komplexe Achse handelt (vgl. Abbildung 2)

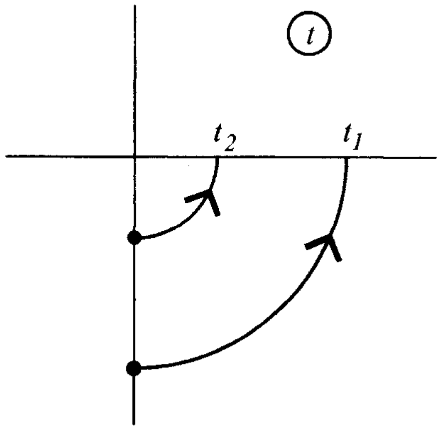

Abbildung 2: Wick-Rotation

$$\hat{Q}_{\alpha_i} = e^{H\tau_i} Q_{\alpha_i} e^{-H\tau_i}$$

$$G_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) = \langle E_0 | \hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)...\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n) | E_0 \rangle$$

Die euklidische Greenfunktion wird auch Schwingerfunktion genannt.

Im Folgenden wollen wir einen Pfadintegralausdruck für diese Funktion entwickeln. Dafür betrachten wir zunächst folgenden Ausdruck:

$$(q', \tau' | \hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)...\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n) | q, \tau) \equiv \langle q' | e^{-H\tau'} \hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)...\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n) e^{H\tau} | q \rangle$$

Ich werde im folgenden zeigen:

1. Durch diesen Ausdruck kann man mit $\tau \to -\infty, \tau' \to \infty$ auf G schließen
2. Verallgemeinerung von $(q', \tau' | q, \tau) \equiv \langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle = \int_q^{q'} Dq e^{-S_E[q]}$

Zunächst werden links und recht vom Operator Energieeigenzustände eingefügt:

$$\begin{aligned} &(q', \tau' | \hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)...\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n) | q, \tau) \\ &\quad = \sum_{k,k'} e^{-E_{k'}\tau'} e^{E_k \tau} \psi_{k'}(q') \psi_k^*(q) \langle E_{k'} | \hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)...\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n) | E_k \rangle \end{aligned} \tag{*}$$

Nimmt man eine Energielücke zwischen Grund- und erstem angeregten Zustand an wird die Summe bei großem τ vom Grundzustand dominiert (man denke sich die Grundzustandsenergie auf 0 normiert).

$$\left(q',\tau'\middle|\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\middle|q,\tau\right)$$
$$\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to-\infty}]{} e^{-E_0(\tau'-\tau)}\psi_0(q')\psi_0^*(q)\left\langle E_0\middle|\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\middle|E_0\right\rangle$$

Betrachte nun den Fall, dass $\hat{Q}_{\alpha_i} = 1$ (Einseroperator) ist:

$$\left(q',\tau'\middle|q,\tau\right)\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to-\infty}]{} e^{-E_0(\tau'-\tau)}\psi_0(q')\psi_0^*(q)$$

Nimmt man diese Ausdrücke zusammen ergibt sich:

$$\frac{\left(q',\tau'\middle|\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\middle|q,\tau\right)}{\left(q',\tau'\middle|q,\tau\right)}\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty\\ \tau\to-\infty}]{}\left\langle E_0\middle|\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\middle|E_0\right\rangle$$

Die $q=\{q_\alpha\}$ und $q'=\{q'_\alpha\}$ sind beliebig, mit der Einschränkung, dass $\langle q|\psi_0\rangle$ bzw. $\langle q'|\psi_0\rangle$ nicht null sind. Der gesamte Ausdruck gilt natürlich auch für geordnete Zeiten. Den Pfadintegral-Ausdruck für den Nenner kennen wir bereits, also zum Zähler:

$$\left(q',\tau'\middle|\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\middle|q,\tau\right)$$
$$=\left\langle q'\middle|e^{-H(\tau'-\tau_1)}\hat{Q}_{\alpha_1}e^{-H(\tau_1-\tau_2)}\hat{Q}_{\alpha_2}e^{-H(\tau_2-\tau_3)}\ldots e^{-H(\tau_{n-1}-\tau_n)}\hat{Q}_{\alpha_n}e^{-H(\tau_n-\tau)}\middle|q\right\rangle$$

Einfügen von Eigenzuständen von $\{\hat{Q}_\alpha\}$ vor und nach jedem Operator ergibt:

$$=\int\prod_{i=1}^{n}dq^{(i)}\left(q',\tau'\middle|q^{(1)},\tau_1\right)q_{\alpha_1}^{(1)}\left(q^{(1)},\tau_1\middle|q^{(2)},\tau_2\right)q_{\alpha_2}^{(2)}\ldots q_{\alpha_n}^{(n)}\left(q^{(n)},\tau_n\middle|q,\tau\right)$$

Für die $\left(q^{(i)},\tau_i\middle|q^{(j)},\tau_j\right)$ kennen wir den PI-Ausdruck schon, also ergibt sich:

$$=\int_q^{q'}Dq\,q_{\alpha_1}(\tau_1)\ldots q_{\alpha_n}(\tau_n)e^{-S_E[q]}$$

Das ganze gilt natürlich auch wieder für ‚geordnete Zeiten', insgesamt erhalten wir also für $\tau\to-\infty,\tau'\to\infty$:

$$\left\langle E_0\middle|T\left(\hat{Q}_{\alpha_1}(\tau_1)\hat{Q}_{\alpha_2}(\tau_2)\ldots\hat{Q}_{\alpha_n}(\tau_n)\right)\middle|E_0\right\rangle=\frac{\int Dq\,q_{\alpha_1}(\tau_1)\ldots q_{\alpha_n}(\tau_n)e^{-S_E[q]}}{\int Dq\,e^{-S_E[q]}}\quad\text{mit}$$

$$S_E[q]=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau L_E(q(\tau),\dot{q}(\tau))$$

Wichtig: $\langle q|E_0\rangle,\langle q'|E_0\rangle\neq 0$

Da man das Integral meistens nicht analytisch lösen kann, sondern numerisch auf einem endlichen Zeitgitter löst, muss man darauf achten, dass der Beitrag in (*) aus höheren Energien möglichst klein bleibt. In der Praxis werden meist periodische Randbedingungen gewählt, z.B: q = q' und q dann beliebig variiert.

Bei näherer Betrachtung dieser Ausdrücke gibt es für die Behandlung nützliche Analogien zur statistischen Mechanik, man kann diese dann schreiben als:

$$\left\langle q_{\alpha_1}(\tau_1)\ldots q_{\alpha_n}(\tau_n)\right\rangle = \frac{1}{Z}\int Dq\, q_{\alpha_1}(\tau_1)\ldots q_{\alpha_n}(\tau_n)\, e^{-S_E[q]}$$

$$\text{mit} \quad Z = \int Dq\, e^{-S_E[q]}$$

Zustandssumme / Verteilungsfunktion Funktion
„Boltzmannfaktor" -ßH

Kurzer Einschub zu den aufgetretenen Integralen, das vorgestellte Verfahren kann nur für Gauss'sche Integrale durchgeführt werden:

Allgemeine Form des obigen Integrals:

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_l} = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i\, q_{\alpha_1} q_{\alpha_2}\ldots q_{\alpha_n}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m}$$

Betrachte das erzeugenden Funktional:

$$Z_0[J] = \int \prod_{i=1}^{N} dq_i\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{n,m} q_n M_{nm} q_m + \sum_n J_n q_n}$$

Jetzt kann man unser allgemeines Integral als mehrfache partielle Ableitung von Z schreiben:

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_2} = \left(\frac{\partial^l Z_0[J]}{\partial J_{\alpha_1}\partial J_{\alpha_2}\ldots\partial J_{\alpha_l}}\right)_{J=0}$$

Für das Integral Z findet man die Lösung:

$$Z_0[J] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{n,m} J_n M^{-1}_{nm} J_m}$$

Das freie skalare Feld auf dem Gitter

Zunächst einmal zur Wiederholung die klassische Feldgleichung:

$$\left(\quad + M^2 \right)\phi(x) = 0$$

Box / d'Alembert Operator

die aus dem Prinzip kleinster Wirkung gewonnen wird:

$$\delta S = 0 \qquad \text{mit} \qquad S = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\phi(x)\left(\quad + M^2 \right)\phi(x)$$

die zugehörige Lagrange-Dichte lautet:

$$L = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu - \frac{1}{2}M^2\phi^2 \quad \text{(phi hoch 4 } L = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g_0\phi^4 \text{) (Higgs-Yukawa)}$$

Wir interessieren uns wieder für die euklidische Greenfunktion:

ACHTUNG: Analogieschluss! Der Übergang von Minkoskwi-Raum in euklidischen und auf Feldvariablen usw. ließe sich natürlich auch mathematisch exakt begründen, ich gebe mich hier aber der Einfachheit halber mit Analogien zufrieden. Es ergeben sich folgende analoge Ausrücke:

$$\langle \phi(x)\phi(y)\ldots \rangle = \frac{\int D\phi\left(\phi(x)\phi(y)\ldots\right)e^{-S_E[\phi]}}{\int D\phi e^{-S_E[\phi]}} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} S_E[\phi] = \frac{1}{2}\int d^4x\,\phi(x)\left(- \quad + M^2\right)\phi(x) \\ \text{Box} - \text{Op.} = \sum_{\mu=1}^{4}\partial_\mu\partial_\mu \end{array}$$

Man bemerke die Ähnlichkeit zur Korrelationsfunktion der statistischen Mechanik:

$$\text{Verteilungsfunktion:} \qquad Z = \int D\phi e^{-S[\phi]} \qquad\qquad D\phi = \prod_{\vec{x},x_4} d\phi(\vec{x}, x_4)$$

Problem: Die Integrale haben noch keine wohldefinierte mathematische Bedeutung!
Zur Lösung führen wir eine Diskretisierung auf einem Gitter ein:

$$x_\mu \to n_\mu \cdot a$$

$$\phi(x) \to \phi(na)$$

$$\int d^4x \to a^4\sum_n$$

$$\phi(x) \to \frac{1}{a^2} \quad \phi(na)$$

$$D\phi \to \prod_n d\phi(na)$$

$$\phi(na) = \sum_\mu \left(\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)\right)$$

$$\hat{\mu} \equiv \hat{e}_\mu$$

Um alle Variablen dimensionslos zu bekommen führen wir noch folgende Definition ein:

$$\hat{\phi}_n = a\phi(na) \qquad \text{‚Hütchen' um Dimensionslosigkeit zu betonen}$$
$$\hat{M} = aM$$

Jetzt können wir unsere Korrelationsfunktion wie folgt schreiben:

$$=> \quad \left\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \ldots \right\rangle = \frac{\int \prod_l d\hat{\phi}_l \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \ldots e^{-S_E[\hat{\phi}]}}{\int \prod_l d\hat{\phi}_l e^{-S_E[\hat{\phi}]}} \quad \text{mit } S_E = -\frac{1}{2}\sum_{n,\hat{\mu}} \hat{\phi}_n \hat{\phi}_{n+\hat{\mu}} + \frac{1}{2}\left(8+\hat{M}^2\right)\sum_n \hat{\phi}_n \hat{\phi}_n$$

In diesem Ausdruck kommt die Gitterkonstante nicht mehr vor! (Die Wirkung ist in Einheiten von h dimensionslos)

Mithilfe einer Matrix kann man das umschreiben zu

$$S_E = \frac{1}{2}\sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m$$
$$\text{mit } K_{nm} = -\sum_{\mu>0}\left[\delta_{n+\hat{\mu},m} + \delta_{n-\hat{\mu},m} - 2\delta_{n,m}\right] + \hat{M}^2 \delta_{n,m}$$

Normalerweise würde man nun mit Erzeugendenfunktionen und ähnlichem hantieren, bei der Betrachtung einer 2-Punkte-Korrelationsfkt reicht allerdings die Inverse:

$$\left\langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \right\rangle = K^{-1}_{nm} \qquad \text{(es gilt } \sum_l K_{nl} K^{-1}_{lm} = \delta_{n,m} \text{) (**)}$$

Um diese zu bestimmen bedienen wir uns einer Delta-Funktion, die im Impulsraum gegeben ist durch:

$$\delta_{n,m} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k}(n-m)}$$

$$\Rightarrow K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \widehat{K}(\hat{k}) e^{i\hat{k}(n-m)} \quad \text{mit} \quad \widehat{K}(\hat{k}) = 4\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2 \frac{\hat{k}_\mu}{2} + \hat{M}$$

Über den Ansatz: $\quad K^{-1}_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \widehat{G}(\hat{k}) e^{i\hat{k}(n-m)}$

Erhält man:

$$K^{-1}_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k}(n-m)}}{4\sum_{\mu=1}^{4} \sin^2 \frac{\hat{k}_\mu}{2} + \hat{M}^2}$$

Dieser Ausdruck ist abhängig von Gitterstelle m und n und vom Masseparameter M.

Da wir nicht auf einem Gitter leben benötigen wir den Kontinuumslimes um Aussagen über die ‚Wirklichkeit' ableiten zu können...

$$\text{Def.: } G(n, m; \hat{M}) = \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle$$

Der offensichtliche Weg um zum Kontinuumslimes zu kommen ist den Gitterabstand a gegen 0 laufen zu lassen, bei festgehaltenem M, phi, x=na und y=na. Dies führt hier auch zum Erfolg, im Allgemeinen weiß man allerdings nicht unbedingt welche Variablen festzuhalten sind um zu vernünftigen Ergebnissen zu kommen...

Also:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \lim \frac{1}{a^2} G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right)$$

$$G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; Ma\right) = a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k}(n-m)}}{4\sum_{\mu=1}^{4} \hat{k}'^2_\mu + M^2}$$

$$\hat{k}'_\mu = \frac{2}{a} \sin \frac{k_\mu a}{2} \approx k_\mu \quad \text{(für kleine Sinus-Argumente)}$$

Damit bekommen wir unser Endergebnis:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + M^2}$$

Wie zu erwarten ergibt sich hier das euklidische Analogon zum Feynman-Propagator!

Literatur zum Vortrag:

Heinz J. Rothe:
Lattice Gauge Theories – An Introduction
(World Scientific Lecture Notes in Physics – Vol. 43)

Istvan Montvay, Gernot Münster:
Quantum Fields on a Lattice
(Cambridge Monographs on mathematical Physics)

G. Münster, M. Walzl:
Lattice Gauge Theory – A short Primer
(arXiv:hep-lat/0012005)

G. Münster:
Field Theory, critical Phenomena and Interfaces
(arXiv:hep-th/9610197)

Folien und Vortragsnotizen:

http://www.defux.de (unter Protokolle)